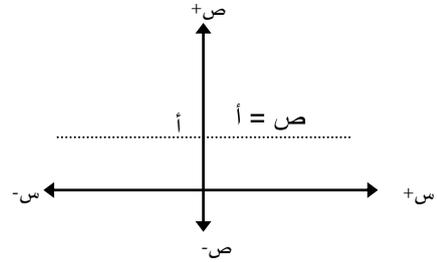


الرسومات المشهورة:

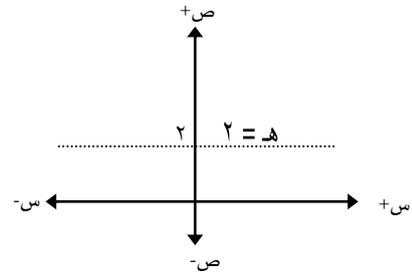
الاقتران الثابت:

أ = ص

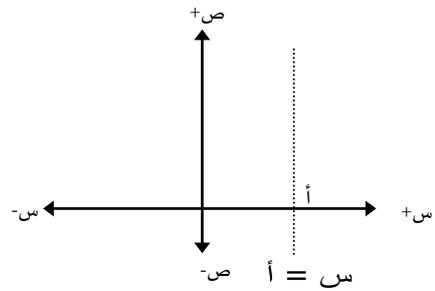


مثال:

ق(س) = ٢ ، هـ = ٢

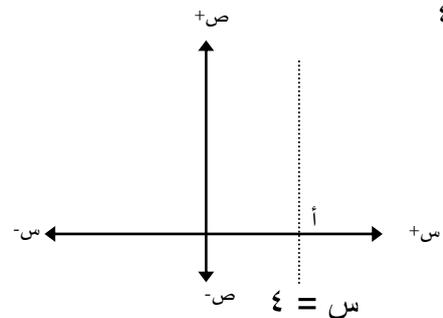


ب) العامود (المستقيم) س = أ (ليس اقتران)



مثال:

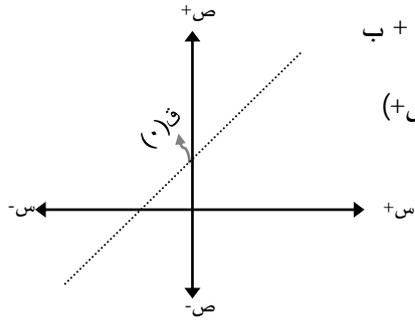
س = ٤



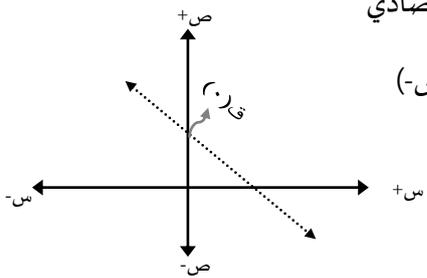
الاقتران الخطي:

٢

ص = أ + ب
(معامل س +)

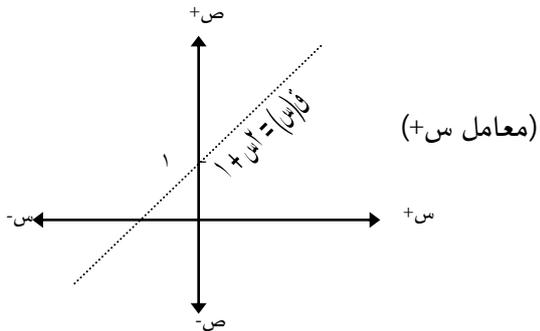


المقطع الصادي
(معامل س -)



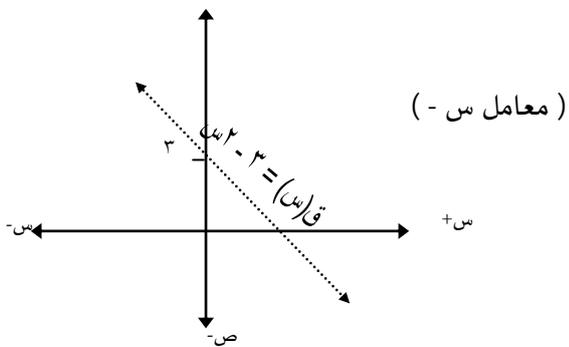
مثال (١):

ق(س) = ٢ + س ، ق(٠) = ١



مثال (٢):

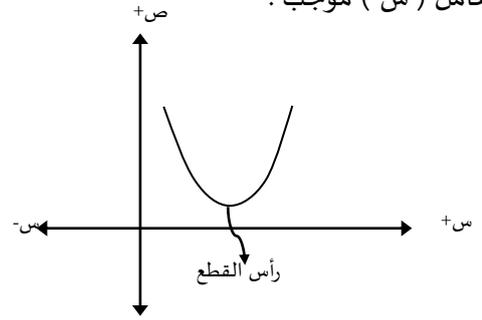
ق(س) = ٢ - ٣ ، ق(٠) = ٣



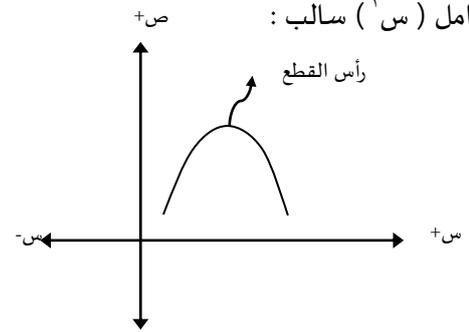
SALHEEM ALSAATHEEB

٣ الاقتران التربيعي :

← معامل (س) موجب :



← معامل (س) سالب :



رأس القطع : $(\frac{-ب}{٢}, \frac{٤-ب^2}{٤})$ حيث أن : - أ : معامل $س^٢$

ب : معامل س

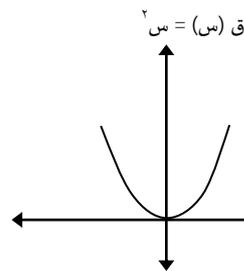
مثال (١) :

ق(س) = $س^٢$

أ = ١ ، ب = ٠ ، ج = ٠

$$٠ = \frac{٠-}{١ \times ٢} = \frac{ب-}{٢}$$

رأس القطع (٠ ، ٠) ق(٠) = ٠



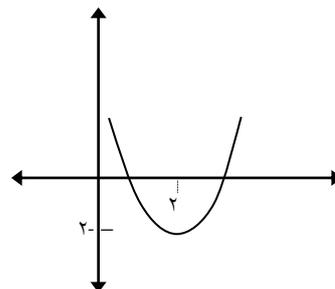
مثال (٢) :

ق(س) = $س^٢ - ٤س + ٢$

$$٢ = \frac{٤+}{٢} = \frac{ب-}{٢}$$

ق(٢) = ٢ -

رأس القطع (٢ ، -٢)



مثال (٣) :

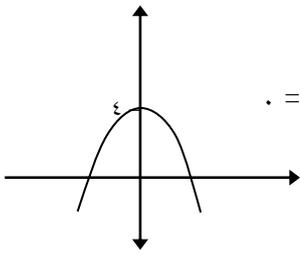
ق(س) = $س^٢ - ٤س$

$$٠ = \frac{٠-}{١ \times ٢} = \frac{ب-}{٢}$$

ق(٠) = ٤

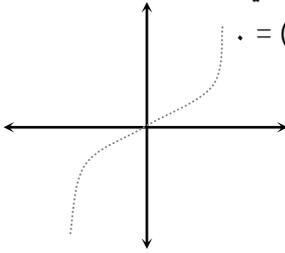
∴ رأس القطع (٤ ، ٠)

ق(س) = $س^٢ - ٤س$



٤ الاقتران التكعيبي :

ق(س) = $س^٣$ ، ق(٠) = ٠

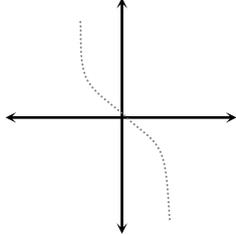


ق(س) = $-س^٣$ ، ق(٠) = ٠

سالبة نفس

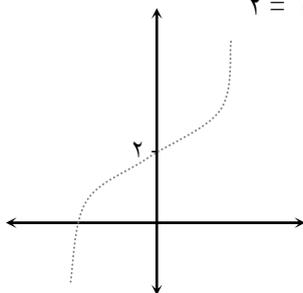
الموجب بس

معكوسة

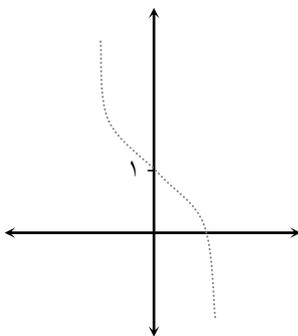


ق(س) = $س^٣ + ٢$ ، ق(٠) = ٢

نرفع رسم الاقتران للـ (٢)

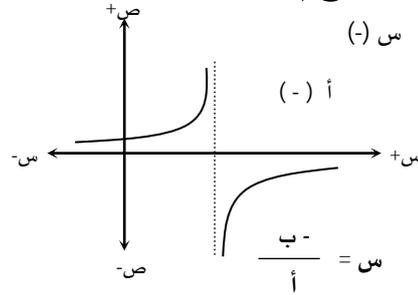


ق(س) = $س^٣ - ١$ ، ق(٠) = -١

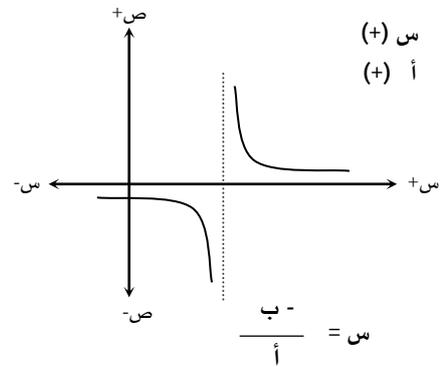


٥ الاقتران النسبي :

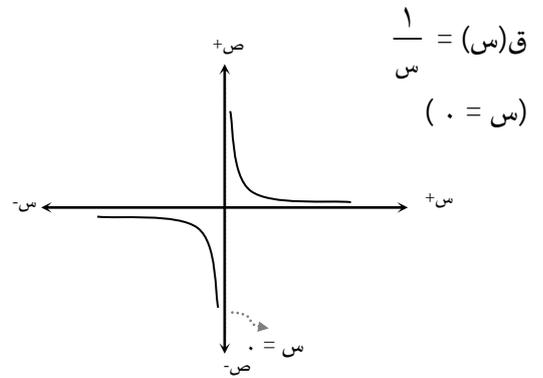
ق(س) = $\frac{د}{أس + ب}$ دائما موجبة
 س (-)
 أ (-)



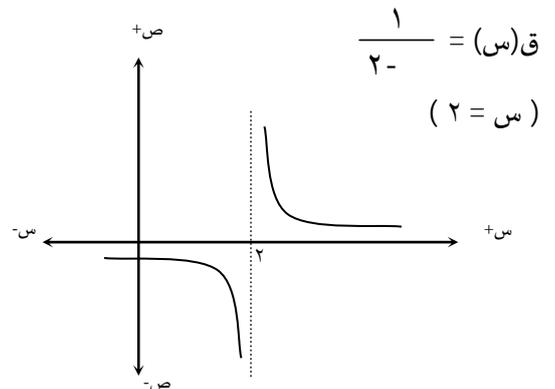
• صفرا المقام : س = $\frac{-ب}{أ}$



س (+)
 أ (+)



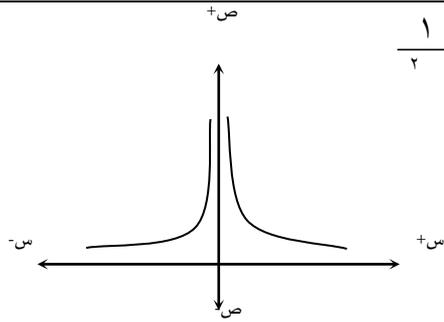
ق(س) = $\frac{1}{س}$
 س (= ٠)



ق(س) = $\frac{1}{س - ٢}$
 س (= ٢)

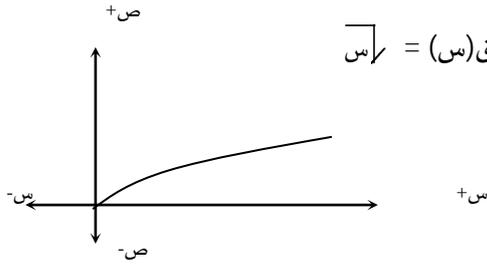
SALHEEM ALSAATHEEB

ق(س) = $\frac{1}{س}$



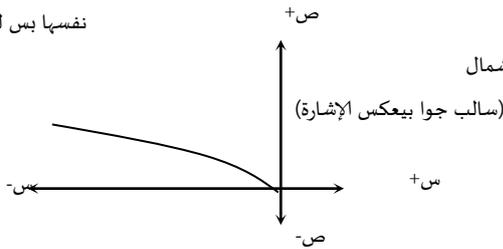
* حفظ *

ق(س) = $\sqrt{س}$



ق(س) = $\sqrt{-س}$

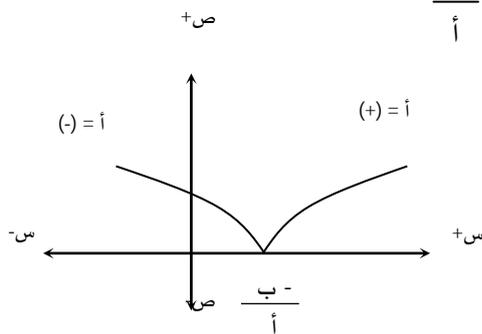
نفسها بس للربع الثاني



شمال
 (سالب جوا بيعكس الإشارة)

ق(س) = $\sqrt{أس + ب}$

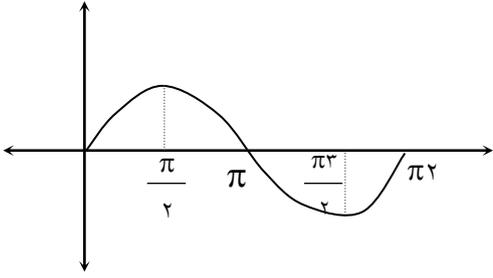
س = $\frac{-ب}{أ}$



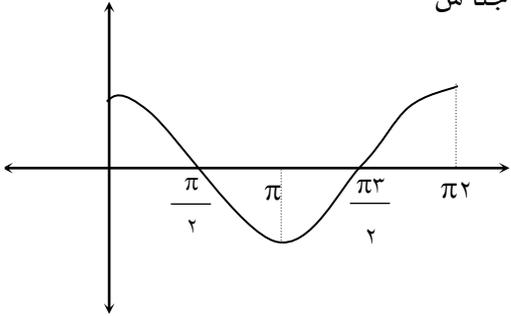
SALHEEM ALSAATHEEB

رسم المثلثيات:

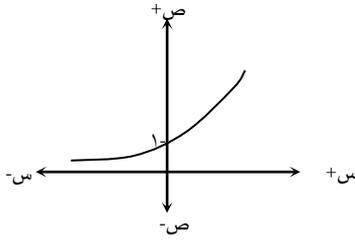
ق (س) = جا س



ق (س) = جتا س

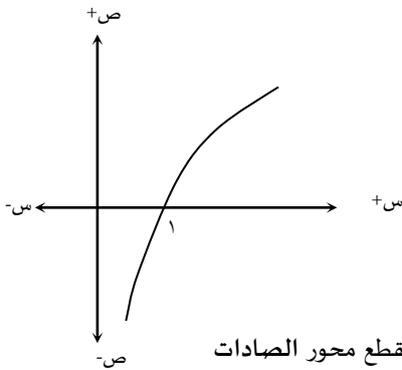


ق (س) = هـ س



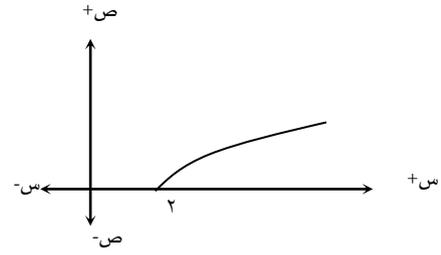
* لا يقطع محور السينات

ق (س) = لوس هـ

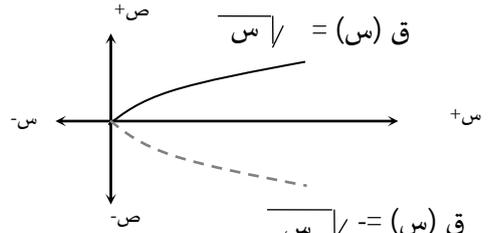


* لا يقطع محور الصادات

ق (س) = $\sqrt{1-s^2}$ ← س-2 = 0 ← س = 2

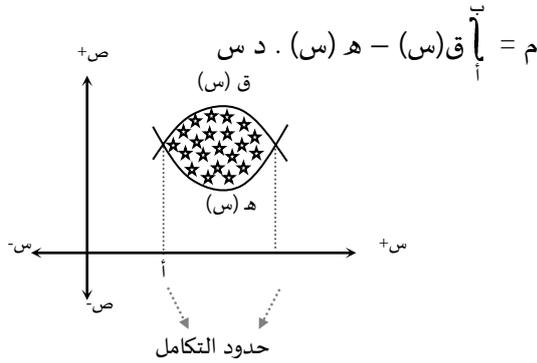


ق (س) = $\sqrt{1+s^2}$



ق (س) = $-\sqrt{1+s^2}$
بتنزل الرسمة لتحت

المساحة:



• المساحة المحصورة بين الإقتراين ق (س) ، هـ (س) على الفترة [أ ، ب] .

• ملاحظات أسئلة المساحة "مفاتيح الحل":

- (١) كل ق (س) ، هـ (س) ، ص .. هو إقتران .
- (٢) كل (س = عدد) هو عمود
- (٣) معادلة محور السينات \Leftarrow "ص = ٠" إقتران .
- (٤) معادلة محور الصادات \Leftarrow "س = ٠" عمود.
- (٥) إذا أعطانا فترة [أ ، ب] فإن (س = أ ، س = ب) "أعمدة معطاة" .
- (٦) نهتم بالأعمدة المعطاة.

خطوات الحل :

- (١) نحدد الإقتراين والأعمدة المعطاة .
- (٢) نساوي الإقتراين ببعضها.
- (٣) نضع القانون :

$$\text{المساحة} = \int_a^b \text{ق(س)} - \text{هـ(س)} \cdot دس$$

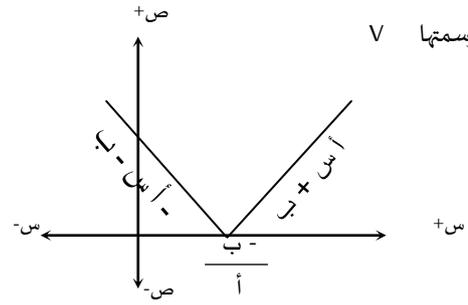
حيثُ :

- ق (س) : الإقتران العلوي ، هـ (س) : الإقتران السفلي .
 (ب) : العمود على يمين المساحة / (أ) : العمود على يسار المساحة

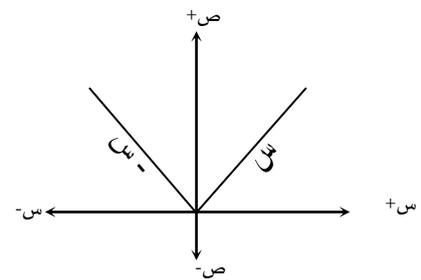
** يجب أن تكون المساحة دائما موجبة .

$$\text{ق (س)} = |أس + ب|$$

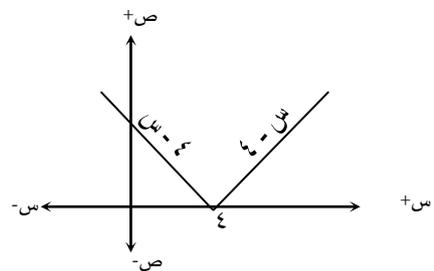
* رسمتها V



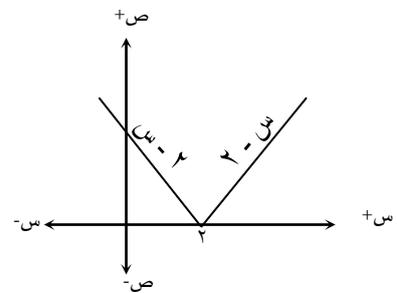
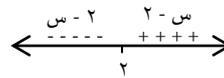
$$\text{ق (س)} = |س - | = س = ٠$$



$$\text{ق (س)} = |س - ٤| = س = ٤$$



$$\text{ق (س)} = |س - ٢| = س = ٢$$



هناك عدة أنواع من أسئلة المساحة :-

النوع الأول : يعطينا إقتراين ويطلب منا المساحة :-

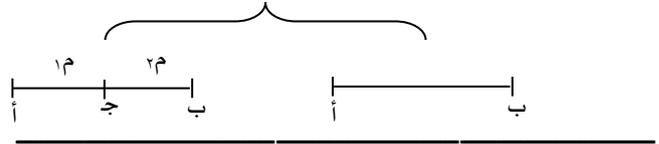
نستخدم قانون

$$M = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad * \text{ ولا نحتاج للرسم} *$$

*ملاحظة :

بنعمل جدول مكون من : | إقتراين | أعمدة | مساواة |

ولا نحتاج إلى الرسم بل نحتاج إلى الخط :-



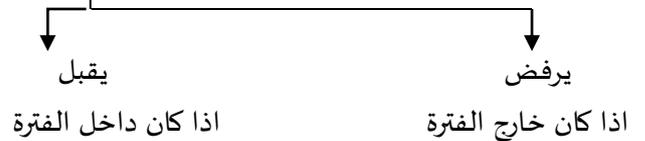
١) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى

الإقتران (ق) (س) = ٢س + ٢) ومحور السينات على الفترة

[١, ٣] ؟

الحل:

إقتراين	أعمدة	مساوات
ق(س) = ٢س + ٢	س = ١	ق(س) = ص
ص = ٠	س = ٣	٢س + ٢ = ٠
		س = -١ ← ترفض



$$M = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad * \text{ ولا نحتاج للرسم} *$$

$$= \int_1^3 |2s^2 + 2 - 0| ds = \int_1^3 (2s^2 + 2) ds = \left[\frac{2}{3}s^3 + 2s \right]_1^3 = \left(\frac{2}{3} \cdot 27 + 6 \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + 2 \right) = 18 + 6 - \frac{2}{3} - 2 = 22 - \frac{2}{3} = \frac{64}{3}$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}$$

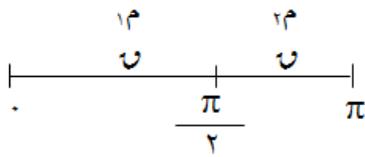
٢) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى

ق(س) = (س) جتاس) ، ومحور السنات على الفترة [٠, π] ؟

الحل:

إقتراين	أعمدة	مساوات
ق(س) = (س) جتاس	س = ٠	جتاس = ٠
ص = ٠	س = π	(س = π/٢)

ق(س) = ص



$$M = \int_0^{\pi/2} (s) \cos(s) ds + \int_{\pi/2}^{\pi} (s) \cos(s) ds$$

$$= \int_0^{\pi/2} (s) \cos(s) ds + \int_{\pi/2}^{\pi} (s) \cos(s) ds = \left[s \sin(s) + \cos(s) \right]_0^{\pi/2} + \left[s \sin(s) + \cos(s) \right]_{\pi/2}^{\pi} = (0 + 1) - (0 + 1) + (\pi \cdot 0 + (-1)) - (\pi/2 \cdot 1 + 0) = -1 - \pi/2 + 1 = -\pi/2$$

$$M = \int_0^{\pi/2} (s) \cos(s) ds + \int_{\pi/2}^{\pi} (s) \cos(s) ds$$

$$= \int_0^{\pi/2} (s) \cos(s) ds + \int_{\pi/2}^{\pi} (s) \cos(s) ds = \left[s \sin(s) + \cos(s) \right]_0^{\pi/2} + \left[s \sin(s) + \cos(s) \right]_{\pi/2}^{\pi} = (0 + 1) - (0 + 1) + (\pi \cdot 0 + (-1)) - (\pi/2 \cdot 1 + 0) = -1 - \pi/2 + 1 = -\pi/2$$

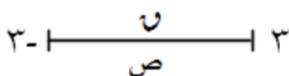
$$M = \int_0^{\pi/2} (s) \cos(s) ds + \int_{\pi/2}^{\pi} (s) \cos(s) ds = \left[s \sin(s) + \cos(s) \right]_0^{\pi/2} + \left[s \sin(s) + \cos(s) \right]_{\pi/2}^{\pi} = (0 + 1) - (0 + 1) + (\pi \cdot 0 + (-1)) - (\pi/2 \cdot 1 + 0) = -1 - \pi/2 + 1 = -\pi/2$$

٣) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى

ق(س) = (س)² والمستقيم ص = ٩ ؟

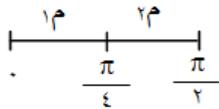
الحل:

إقتراين	أعمدة	مساوات
ق(س) = س²		ق(س) = ص
ص = ٩		س² = ٩
		س = ±٣



الحل:

اقترانات	أعمدة	مساوات
ق(س) = ١ - ج٢س	س = ٠	ق(س) = ص
ص = ٠	س = $\frac{\pi}{2}$	١ - ج٢س = ٠
		ج٢س = ١
		س = $\frac{\pi}{4}$ ←



$$م = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2s) ds \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 - \cos 2s ds \right|$$

$$= \left| \left[s + \frac{\sin 2s}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right| = \left| \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2} \right) - \left(0 + \frac{\sin 0}{2} \right) \right| = \left| \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right|$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \left| \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right|$$

$$م = \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2s) ds \right| = \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2s ds \right|$$

$$= \left| \left[s + \frac{\sin 2s}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right| = \left| \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2} \right) \right| = \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right|$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \left| \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right|$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = م + م = م$$

$$1 - \frac{\pi}{2}$$

(٦) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين

ق(س) = ج٢س ، ه(س) = ج٢س على الفترة [٠، ٢π]

اقترانات	أعمدة	مساوات
ق(س) = ج٢س	س = ٠	ق(س) = ه(س)
ه(س) = ج٢س	س = ٢π	ج٢س = ج٢س
		١ = ظس ←

$$س = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

ربع ثالث

$$م = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2s) ds \right|$$

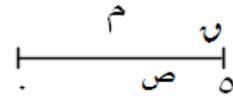
$$= \left| \left[s - \frac{\sin 2s}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| = \left| \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2} \right) - \left(0 - \frac{\sin 0}{2} \right) \right| = \left| \frac{\pi}{2} - 0 \right| = \frac{\pi}{2}$$

(٤) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى

الإقتران ق(س) = (٥ - س) ومحور السينات و س = ١ ؟

الحل:

اقترانات	أعمدة	مساوات
ق(س) = (٥ - س)	س = ١	ق(س) = ص
ص = ٠		٠ = (٥ - س)
		س = ٥



$$م = \left| \int_1^5 (5 - s) ds \right|$$

$$= \left| \left[5s - \frac{s^2}{2} \right]_1^5 \right| = \left| \left(25 - \frac{25}{2} \right) - \left(5 - \frac{1}{2} \right) \right| = \left| \frac{25}{2} - 5 + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{21}{2} \right| = \frac{21}{2}$$

(٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الإقتران

ق(س) = (١ - ج٢س) ومحور السينات على الفترة

$$[0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\left[\int_{-1}^2 8 - 3s^2 \, ds \right] \left[\int_{-1}^2 \frac{s^4}{4} - 6s + 7 \, ds \right] \left[\int_{-1}^2 \frac{s^4}{4} - 6s + 7 - (8 - 3s^2) \, ds \right]$$

$$\frac{17}{4} = \frac{31-48}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} - \frac{8 \times 4}{1 \times 4} \right) - (4 - 16) =$$

$$\# \frac{115}{4} = \frac{17}{4} + \frac{49}{2} = 23 + 12 = 35 = \text{المساحة الكلية}$$

(٢) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين:

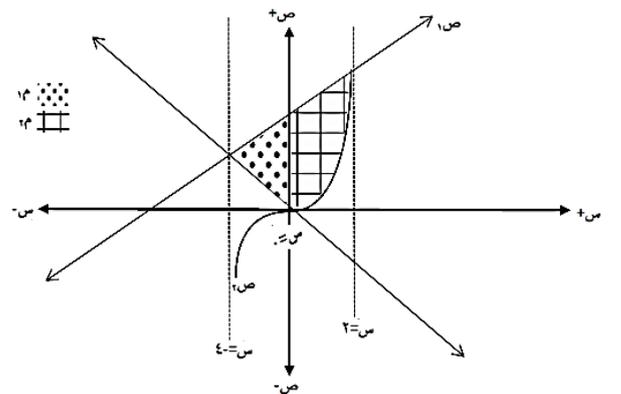
(ص = س - ٦ ، ص = س^٣ ، ٢ ص = س + ٠) ؟

الحل:

اقترانات	مسوات
ص = س - ٦	ص ^١ = ص ^٢
ص = س ^٣	ص = ٦ + س ^٢
ص = س ^٣	٠ = ٦ - س - س ^٣

(س = ٢) (س = ٣ + س^٢ + س^٢) لا تحلل

ص ^٢ = ٢ ص	ص ^٢ = ٢ ص
ص = ٢	ص = ٢
٠ = ٦ + س + س ^٣	٠ = ٦ + س + س ^٣
٠ = (١ + س ^٢) (٢ - س)	٠ = (١ + س ^٢) (٢ - س)
(س = ٠)	(س = ٠)



$$\int_{-1}^2 (8 - 3s^2) \, ds = 17$$

$$\int_{-1}^2 \left(\frac{s^4}{4} - 6s + 7 \right) \, ds = \frac{115}{4}$$

$$\int_{-1}^2 \left(\frac{s^4}{4} - 6s + 7 - (8 - 3s^2) \right) \, ds = \frac{115}{4} - 17 = \frac{115}{4} - \frac{68}{4} = \frac{47}{4}$$

$$12 = 12 + 0 =$$

$$\int_{-1}^2 (8 - 3s^2) \, ds = 17$$

$$10 = (0) - (4 - 12 + 2) = \int_{-1}^2 \left(\frac{s^4}{4} - 6s + 7 \right) \, ds =$$

$$\# 22 = 10 + 12 = 22 = 13 + 9 = \text{المساحة الكلية}$$

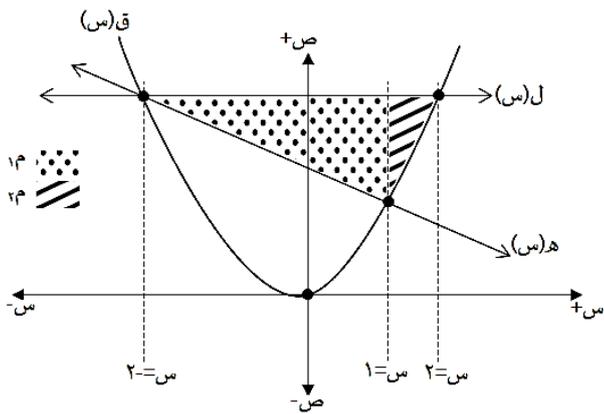
(٣) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانات

(ق(س) = س^٢ ، ه(س) = س - ٢ ، ل(س) = ٤)

الحل:

اقترانات	مسوات
ق(س) = س ^٢	ق(س) = ه(س)
ه(س) = س - ٢	س ^٢ - ٢ = س
ل(س) = ٤	س ^٢ + س - ٢ = ٠
	٠ = (س + ٢)(س - ١)
	(س = ١) (س = -٢)

ق(س) = ل(س)	ه(س) = ل(س)
س ^٢ = ٤	س - ٢ = ٤
(س = ٢) (س = -٢)	(س = ٢)



$$\int_{-2}^2 (8 - 3s^2) \, ds = 17$$

$$\int_{-2}^2 \left(\frac{s^4}{4} + 2s \right) \, ds = 9$$

$$\frac{9}{2} = 2 + \frac{5}{2} = \left(\frac{4}{2} + 4 \right) - \left(\frac{1}{2} + 2 \right) =$$

$$\int_{-2}^2 (8 - 3s^2) \, ds = 17$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 6\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 12\right) =$$

$$\frac{13}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 6 - \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 12 =$$

$$\# \frac{37}{6} = \frac{10}{6} + \frac{27}{6} \leftarrow \frac{5}{3} + \frac{9}{2} = 2م + 1م =$$

$$\# \frac{37}{6} = \frac{13}{6} + 4 = 2م + 1م =$$

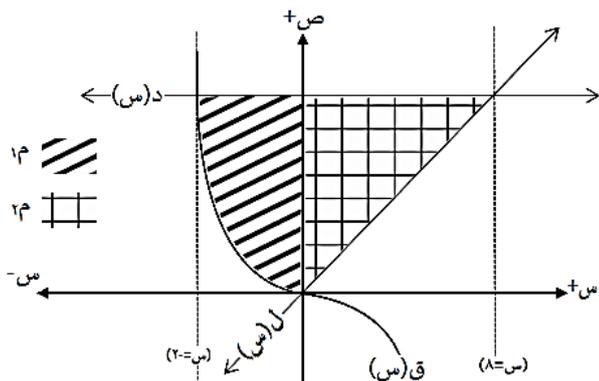
$$\# \frac{37}{6} = \frac{13}{6} + 4 = 2م + 1م =$$

٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين

ق(س) = ٣س^٢ ، د(س) = ٨ ، ل(س) = ٨ ؟

الحل:

مساوات	اقترانات
ق(س) = ل(س)	ق(س) = ٣س ^٢
٣س ^٢ = ٨	د(س) = ٨
س ^٢ = ٨/٣	ل(س) = ٨
س = ±√(٨/٣)	ل(س) = د(س)
س = ±(٨/٣) ^{١/٢}	ل(س) = ٨



$$\# \frac{37}{6} = \frac{13}{6} + 4 = 2م + 1م =$$

$$2 = 4 - 16 = (4+16) - (0+0) = \frac{4}{6} + 8 =$$

$$\# \frac{37}{6} = \frac{13}{6} + 4 = 2م + 1م =$$

$$32 = (0 - 0) - (32 - 64) = \frac{2}{6} - 8 =$$

$$2 \left[\frac{5}{3} - 12 = \right]$$

$$\frac{5}{3} = \frac{11}{3} - \frac{16}{3} = \left(\frac{1}{3} - 4\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) =$$

$$\# \frac{37}{6} = \frac{10}{6} + \frac{27}{6} \leftarrow \frac{5}{3} + \frac{9}{2} = 2م + 1م =$$

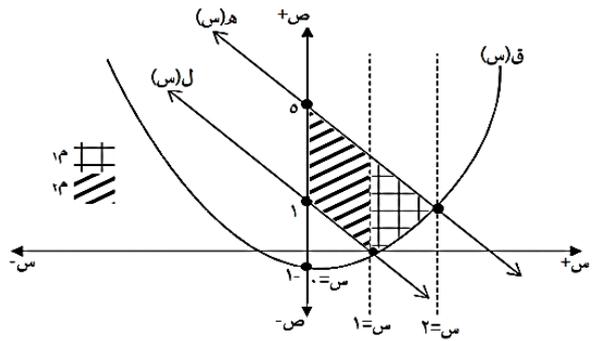
٤) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول

والمحصورة بين محور الصادات ومنحنيات الإقتران

ق(س) = ١ - س^٢ ، ه(س) = ٥ - س ، ل(س) = (١ - س) ؟

الحل:

مساوات	اقترانات
ق(س) = ه(س)	ق(س) = ١ - س ^٢
١ - س ^٢ = ٥ - س	ه(س) = ٥ - س
س ^٢ - س + ٤ = ٠	ل(س) = (١ - س)
س = ±(٣ ± √٥)/٢	اعمدة
س = ±(٣ ± √٥)/٢	س = ٠



$$\# \frac{37}{6} = \frac{13}{6} + 4 = 2م + 1م =$$

$$\# \frac{37}{6} = \frac{13}{6} + 4 = 2م + 1م =$$

$$2 \left[\frac{5}{3} - 12 = \right]$$

المساحة الكلية = $١م + ٢م = ٣٢ + ١٢ = ٤٤$ #

٦) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الإقتارات الثلاثة (ق) (س) = $٣س$ ، ه) (س) = $٤س$ ، ل) (س) = $٦ - ٣س$.

الحل:

اقتارات

ق) (س) = $٣س$

ه) (س) = $\frac{١}{٢}س$

ل) (س) = $٦ - ٣س$

مساوات

ق) (س) = ه) (س)

$٣س = \frac{١}{٢}س$

$٠ = \frac{١}{٢}س + ٣س$

س) (س) = $(\frac{١}{٢}س + ٣س) = ٠$ لا تحلل $\leftarrow س = ٠$

ه) (س) = ل) (س)

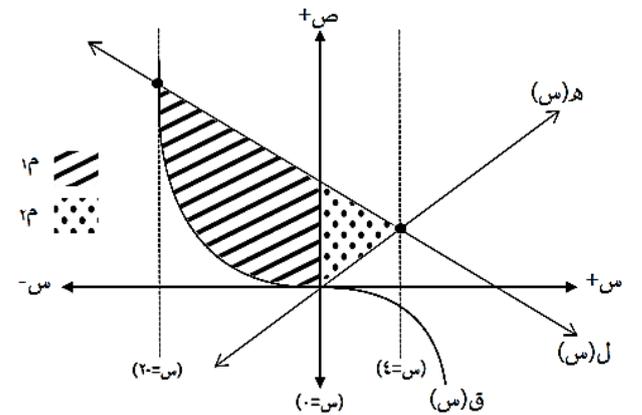
$\frac{١}{٢}س = ٦ - ٣س \leftarrow \frac{١}{٢}س + ٣س = ٦$

$٦ = ٣س \leftarrow \frac{١٢}{٣} = ٤ = س$

ق) (س) = ل) (س) $\leftarrow ٣س = ٦ - ٣س$

$٠ = ٦ + ٣س - ٣س = ٦$ لا تحلل

س) (س) = $(٢ - ٣س) (٣ + ٢س) = ٠$ لا تحلل



$\int_{٢}^{٤} (٣س - \frac{١}{٢}س) دس = \int_{٢}^{٤} (٢س - \frac{١}{٢}س) دس = ١م$

$٦ = ٣س - \int_{٢}^{٤} (\frac{١}{٢}س + ٣س) دس = \int_{٢}^{٤} (\frac{١}{٢}س + ٣س) دس = ١٠ + (٤ + ٢ - ١٢) - (٠) = ٢$

$\int_{٢}^{٤} (٦ - ٣س - \frac{١}{٢}س) دس = ٢م$

$\int_{٢}^{٤} (٦ - ٣س - \frac{١}{٢}س) دس = \int_{٢}^{٤} (٦ - ٣س - \frac{١}{٢}س) دس = ١٢ - ١٢ - ٢٤ = ٤$

$٦ = ٣س - \int_{٢}^{٤} (\frac{١}{٢}س + ٣س) دس = ١٢ - ١٢ - ٢٤ = ٤$

المساحة الكلية = $١م + ٢م = ٣٢ + ١٢ = ٤٤$ #

٧) جد مساحة المنطقة المحصورة بين: (ق) (س) = $٣س$ ه) (س) = $٤ + ٢س$ ، ل) (س) = $٤ - ٣س$ ؟

الحل:

اقتارات

ق) (س) = $٣س$

ه) (س) = $٤ + ٢س$

ل) (س) = $٤ - ٣س$

مساوات

ق) (س) = ه) (س) | ه) (س) = ل) (س)

$٣س = ٤ + ٢س$ | $٤ + ٢س = ٤ - ٣س$

$٠ = ٤ - ٣س - ٢س$ | $٠ = ٤ + ٢س + ٣س$

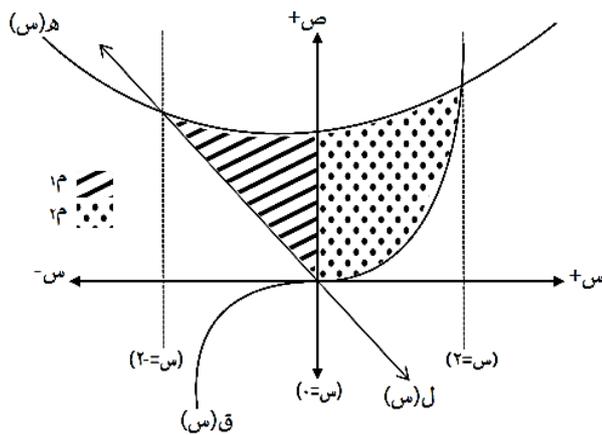
$(٢ = س)$ | $(٢ = س)$ (س) لا تحلل

ق) (س) = ل) (س)

$٣س = ٤ - ٣س$

$٠ = ٤ + ٣س$

$(٠ = س)$ (س) لا تحلل



$\int_{٢}^{٤} (٤ + ٢س - ٣س) دس = \int_{٢}^{٤} (٤ - س) دس = ١م$

$\frac{٨}{٣} = (٨ + ٨ - \frac{٨}{٣}) - (٠) = ٢$ [$\int_{٢}^{٤} (٢س + ٤ + \frac{٣}{٣}س) دس = ١٠ + (٤ + ٢ - ١٢) - (٠) = ٢$]

$\int_{٢}^{٤} (٤ - ٣س - ٤ + ٢س) دس = \int_{٢}^{٤} (-س) دس = ٢م$

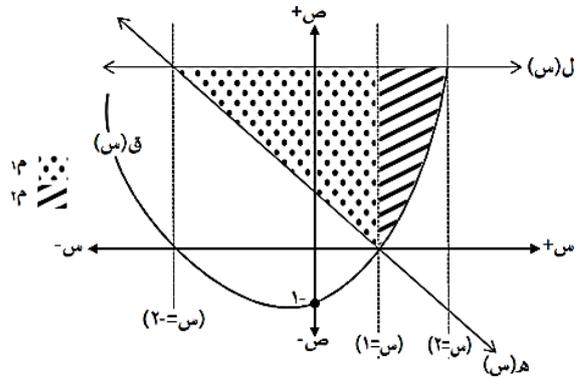
$$\frac{20}{3} = (0) - \left(4 + \frac{8}{3}\right) = 2 \left[\frac{20}{3} - 4 - \frac{8}{3} \right] = 2 \left[\frac{20}{3} - \frac{12}{3} - \frac{8}{3} \right] = 2 \left[\frac{0}{3} \right] = 0$$

المساحة الكلية = $1م + 2م = 3م$

٨) جد مساحة المنطقة المحصورة بين: (ق(س) = $1 - 2س$ ه(س) = $1 - س$ ، ل(س) = 3)؟

الحل:

مساوات	اقترانات
ق(س) = ه(س) ه(س) = ل(س)	ق(س) = $1 - 2س$
$3 = 1 - س$ $س - 1 = 1 - 2س$	ه(س) = $1 - س$
$(س = 2)$ $س + 2 = س - 1$	ل(س) = 3
	$(س = 2)$ $(س = 1)$
	ق(س) = ل(س)
	$س - 1 = 1 - 2س \iff 3 = س$
	$(س = 2)$ $(س = 2)$



$$1م = \int_{-1}^2 (1 - 2س) - (1 - س) دس$$

$$= \int_{-1}^2 (1 - 2س - 1 + س) دس = \int_{-1}^2 (-س) دس = -\frac{س^2}{2} \Big|_{-1}^2 = -\frac{4}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$= 2س + \frac{س^2}{2} \Big|_{-1}^2 = \left(4 + \frac{4}{2} \right) - \left(-2 + \frac{1}{2} \right) = 6 - \left(-\frac{3}{2} \right) = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} - 4 - 2 = \frac{1}{2} - 4 - 2 = -\frac{15}{2}$$

$$1م = \int_{-1}^2 (1 - 2س) - (1 - س) دس = 1 + 2س - 3 \Big|_{-1}^2 = 1 + 2(2) - 3(2) = 1 + 4 - 6 = -1$$

$$= \int_{-1}^2 (1 - 2س) - (1 - س) دس$$

$$= \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{3} - 4 \right) - \left(\frac{8}{3} - 1 \right) دس = \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{3} - 4 - \frac{8}{3} + 1 \right) دس = \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{3} - 4 - \frac{8}{3} + \frac{3}{3} \right) دس = \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{3} - 4 - \frac{5}{3} \right) دس = \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{12}{3} - \frac{5}{3} \right) دس = \int_{-1}^2 \left(\frac{1 - 12 - 5}{3} \right) دس = \int_{-1}^2 \left(\frac{-16}{3} \right) دس = -\frac{16}{3} \left(س \right) \Big|_{-1}^2 = -\frac{16}{3} (2 - (-1)) = -\frac{16}{3} (3) = -16$$

$$= \frac{5}{3} = \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$$

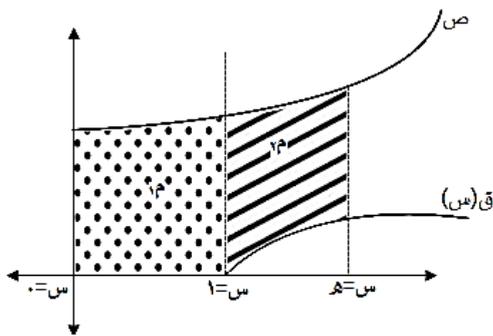
$$\frac{37}{6} = \frac{5}{3} + \frac{9}{2} = 1م + 2م = 3م$$

٩) جد المساحة المحصورة بين ق(س) = $لوس$

وص = $هس$ والمستقيم $س = ه$ ومحوري الاحداثيات

الحل:

مساوات	اقترانات
ص = 1 ص = 2	ق(س) = $لوس$
ه = $لوس$ ه = $لوس$	ص = 1 ه = $لوس$
ص = 2 ق(س) = $لوس$	ص = 2
لوس = 0	الاعمدة
ص = 1	ص = 0
	ص = $ه$



$$1م = \int_{0}^1 (لوs - هs) دس = \int_{0}^1 (س - س) دس = 0$$

$$2م = \int_{0}^1 (لوs + هs) دس = \int_{0}^1 (س + س) دس = \int_{0}^1 2س دس = س^2 \Big|_{0}^1 = 1$$

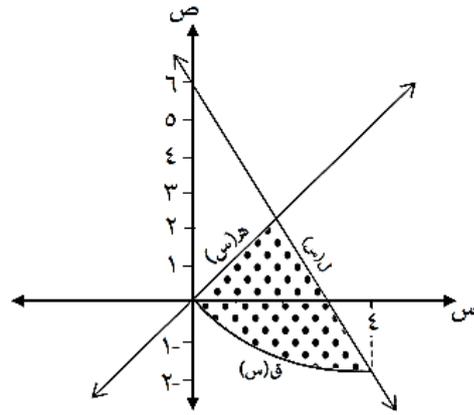
$$\therefore 1م + 2م = 1 + 1 = 2$$

$$1م + 2م = 2$$

$$ه - 1 - ه =$$

سؤال: جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل حيث:

ق(س) = \sqrt{s}
 ه(س) = س
 ل(س) = $2 - 6s$



الحل:

$\int_0^1 \sqrt{s} - s \, ds = 16$ دس

$\int_0^{1/3} s - (2 - 6s) \, ds = 16$ دس

$\int_0^{1/3} s - 2 + 6s \, ds = 16$ دس

$\left[\frac{s^2}{2} - 2s + 3s^2 \right]_0^{1/3} = 16$ دس

$\left(\frac{(1/3)^2}{2} - 2(1/3) + 3(1/3)^2 \right) - (0 - 0 + 0) = 16$ دس

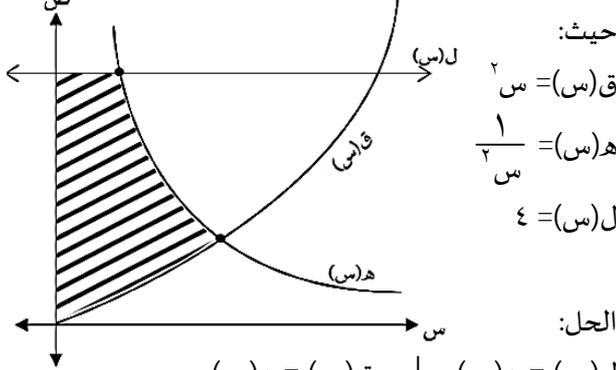
$\left(\frac{1}{18} - \frac{2}{3} + 1 \right) - 0 = 16$ دس

$\left(\frac{1}{18} - \frac{12}{18} + \frac{18}{18} \right) = 16$ دس

$\frac{7}{18} = 16$ دس

$\frac{7}{18} \times \frac{18}{7} = 16 \times \frac{18}{7}$ دس

جد مساحة المنطقة المظللة بالشكل المجاور



حيث:

ق(س) = \sqrt{s}

ه(س) = $\frac{1}{s}$

ل(س) = 4

الحل:

$\int_0^4 \sqrt{s} - \frac{1}{s} \, ds = 16$ دس

$\int_0^4 \sqrt{s} - \frac{1}{s} \, ds = 16$ دس

$\left[\frac{2}{3}s^{3/2} - \ln s \right]_0^4 = 16$ دس

$\left(\frac{2}{3}(4)^{3/2} - \ln 4 \right) - (0 - \ln 0) = 16$ دس

$\left(\frac{2}{3}(8) - \ln 4 \right) - (0 - \ln 0) = 16$ دس

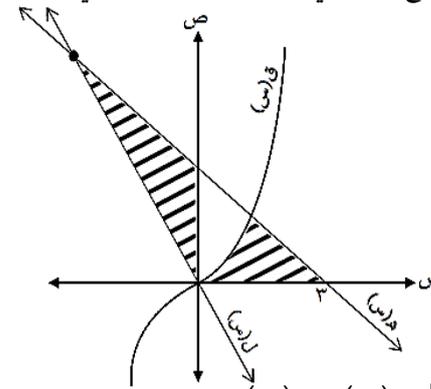
$\left(\frac{16}{3} - \ln 4 \right) - (0 - \ln 0) = 16$ دس

$\frac{16}{3} - \ln 4 = 16$ دس

جد مجموع مساحتي المنطقتين المظلتين في الشكل

حيث:

$$\begin{aligned} \text{ق (س)} &= 2س^3 \\ \text{هـ (س)} &= 3س - 3 \\ \text{ل (س)} &= 2س \end{aligned}$$



الحل:

$$\begin{aligned} \text{ل (س)} &= \text{هـ (س)} \\ 2س - 3 &= 3س - 3 \\ 3س &= 2س \\ 3 &= 2س \\ 1.5 &= س \end{aligned}$$

$$1م = \int_{1.5}^3 (\text{ق (س)} - \text{هـ (س)}) دس = \int_{1.5}^3 (2س^3 - 3س + 3) دس$$

$$2م = \int_{1.5}^3 (\text{هـ (س)} - \text{ل (س)}) دس = \int_{1.5}^3 (3س - 3 - 2س) دس$$

$$= \left(\frac{2س^4}{4} - \frac{3س^2}{2} + 3س \right) \Big|_{1.5}^3 = \left(\frac{2 \cdot 81}{4} - \frac{3 \cdot 9}{2} + 9 \right) - \left(\frac{2 \cdot 5.0625}{4} - \frac{3 \cdot 2.25}{2} + 4.5 \right) = 1.5$$

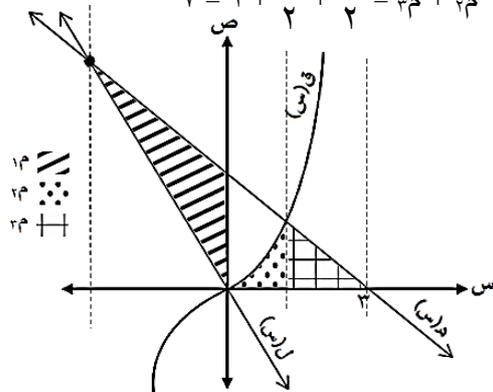
$$3م = \int_{1.5}^3 \text{ق (س)} دس = \int_{1.5}^3 2س^3 دس = \left(\frac{2س^4}{4} \right) \Big|_{1.5}^3 = 1.5$$

$$1م = 1.5 - 1.5 = 0$$

$$2م = \left(\frac{3س^2}{2} - 2س \right) \Big|_{1.5}^3 = \left(\frac{3 \cdot 9}{2} - 6 \right) - \left(\frac{3 \cdot 2.25}{2} - 3 \right) = 1.5$$

$$3م = \left(\frac{2س^4}{4} \right) \Big|_{1.5}^3 = \left(\frac{2 \cdot 81}{4} \right) - \left(\frac{2 \cdot 5.0625}{4} \right) = 1.5$$

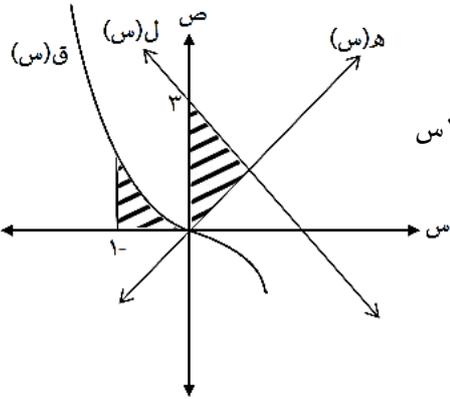
$$م الكليّة = 1.5 + 1.5 + 1.5 = 4.5$$



جد مجموع مساحتي المنطقتين المظلتين في الشكل

المجاور حيث ان:

$$\begin{aligned} \text{ق (س)} &= 3س - 3 \\ \text{هـ (س)} &= 2س \\ \text{ل (س)} &= 2س^2 - 3س \end{aligned}$$



الحل:

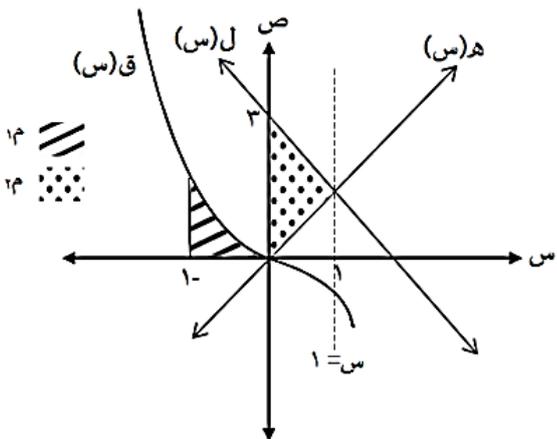
$$\begin{aligned} \text{هـ (س)} &= \text{ل (س)} \\ 2س &= 2س^2 - 3س \\ 5س &= 2س^2 \\ 2.5 &= س \end{aligned}$$

$$1م = \int_{2.5}^3 (\text{ق (س)} - \text{هـ (س)}) دس = \int_{2.5}^3 (3س - 3 - 2س) دس = \left(\frac{3س^2}{2} - 3س \right) \Big|_{2.5}^3 = 1.5$$

$$2م = \int_{2.5}^3 (\text{هـ (س)} - \text{ل (س)}) دس = \int_{2.5}^3 (2س - 2س^2 + 3س) دس = \left(\frac{2س^2}{2} - \frac{2س^3}{3} + \frac{3س^2}{2} \right) \Big|_{2.5}^3 = 1.5$$

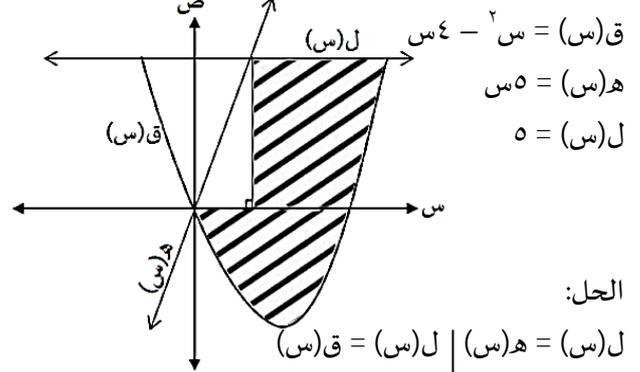
$$3م = \int_{1}^3 (\text{ق (س)} - \text{ل (س)}) دس = \int_{1}^3 (3س - 3 - 2س^2 + 3س) دس = \left(\frac{3س^2}{2} - 3س - \frac{2س^3}{3} + \frac{3س^2}{2} \right) \Big|_{1}^3 = 1.5$$

$$م الكليّة = 1.5 + 1.5 + 1.5 = 4.5$$



SALAEEN ALSATEEB

• جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل حيث:



الحل:

$$\begin{aligned} \begin{cases} l(s) = q(s) \\ q(s) = 5 \\ l(s) = 0 \end{cases} & \begin{cases} s^2 - 4s = 5 - s \\ 5 - s = 5 \\ s^2 - 4s = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} s^2 - 3s - 5 = 0 \\ s = 0 \\ s(s - 4) = 0 \end{cases} & \begin{cases} s = 5 \\ s = 0 \\ s = 0, s = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$14 = \int_0^4 (5 - s - (s^2 - 4s)) ds = \int_0^4 (5 - s - s^2 + 4s) ds = \int_0^4 (5 + 3s - s^2) ds$$

$$= \left[5s + \frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{3}s^3 \right]_0^4 = 5(4) + \frac{3}{2}(16) - \frac{1}{3}(64) = 20 + 24 - \frac{64}{3} = \frac{80}{3} - \frac{64}{3} = \frac{16}{3}$$

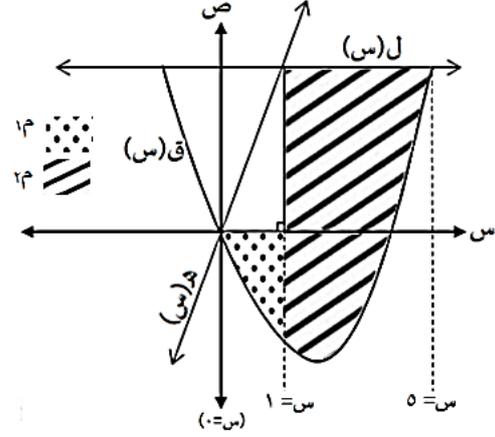
$$= \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - (0 - 0) = \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - (0 - 0) = \frac{2}{3}$$

$$14 = \int_0^4 (5 - s - (s^2 - 4s)) ds = \int_0^4 (5 - s - s^2 + 4s) ds = \int_0^4 (5 + 3s - s^2) ds$$

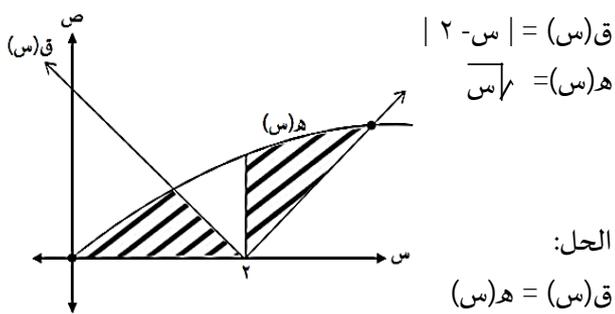
$$= 5s + \frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{3}s^3 = 5(4) + \frac{3}{2}(16) - \frac{1}{3}(64) = 20 + 24 - \frac{64}{3} = \frac{80}{3} - \frac{64}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\frac{80}{3} = \frac{20}{3} - \frac{100}{3} = (2 + \frac{1}{3} - 5) - (50 + \frac{125}{3} - 25) =$$

$$\frac{82}{3} = \frac{80}{3} + \frac{2}{3} = 26 + 14 = 40 + 14 = 54$$



• جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل حيث:



الحل:

$$\begin{cases} q(s) = l(s) \\ l(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 - s = s^2 - 4s \\ s^2 - 4s = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 - 3s - 5 = 0 \\ s(s - 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 5 \\ s = 0 \\ s = 0, s = 4 \end{cases}$$

$$14 = \int_0^4 (5 - s - (s^2 - 4s)) ds = \int_0^4 (5 - s - s^2 + 4s) ds = \int_0^4 (5 + 3s - s^2) ds$$

$$= \left[5s + \frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{3}s^3 \right]_0^4 = 5(4) + \frac{3}{2}(16) - \frac{1}{3}(64) = 20 + 24 - \frac{64}{3} = \frac{80}{3} - \frac{64}{3} = \frac{16}{3}$$

$$14 = \int_0^4 (5 - s - (s^2 - 4s)) ds = \int_0^4 (5 - s - s^2 + 4s) ds = \int_0^4 (5 + 3s - s^2) ds$$

$$= 5s + \frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{3}s^3 = 5(4) + \frac{3}{2}(16) - \frac{1}{3}(64) = 20 + 24 - \frac{64}{3} = \frac{80}{3} - \frac{64}{3} = \frac{16}{3}$$

$$14 = \int_0^4 (5 - s - (s^2 - 4s)) ds = \int_0^4 (5 - s - s^2 + 4s) ds = \int_0^4 (5 + 3s - s^2) ds$$

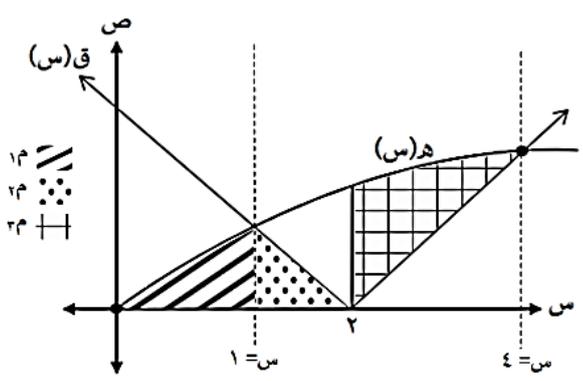
$$= 5s + \frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{3}s^3 = 5(4) + \frac{3}{2}(16) - \frac{1}{3}(64) = 20 + 24 - \frac{64}{3} = \frac{80}{3} - \frac{64}{3} = \frac{16}{3}$$

$$(4 + 2 - \sqrt{17} \frac{2}{3}) - (8 + 8 - 8 \times \frac{2}{3}) =$$

$$\sqrt{17} \frac{2}{3} - \frac{10}{3} = 2 - \sqrt{17} \frac{2}{3} - \frac{16}{3} =$$

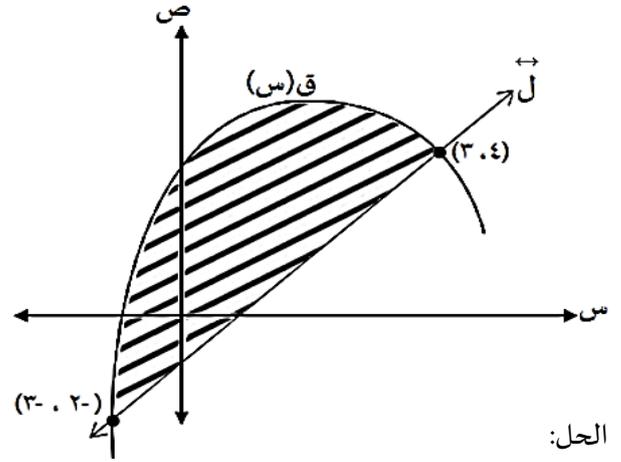
$$\sqrt{17} \frac{2}{3} - \frac{10}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 14 + 14 + 14 = 42$$

$$\sqrt{17} \frac{2}{3} - \frac{9}{2} =$$



SALHEEM ALSAATEEB

- جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = ٧ - ٣س - س^٢$ والمستقيم المار بالنقطتين $(٣, ٤)$ و $(٣, -٢)$



الحل:

$$\text{ميل المستقيم ل} = \frac{٦}{١} = ٦$$

$$\text{ومعادلته ص} - ٣ = ١(س - ٤) \Leftrightarrow \text{ص} = ١ - (س - ٤)$$

$$\text{المساحة المطلوبة} = \int_{-٢}^٤ (٧ - ٣س - س^٢ - (١ - (س - ٤))) دس$$

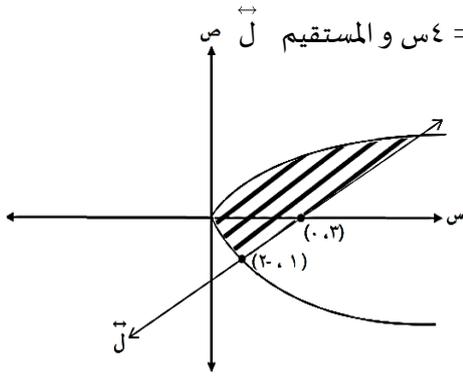
$$= \int_{-٢}^٤ (٨ + ٢س - س^٢) دس$$

$$= ٨س + \frac{٢}{٣}س^٣ - \frac{١}{٣}س^٣$$

$$= ٣٢ + ١٦ - \frac{٦٤}{٣} - \frac{٨}{٣} + ٤ + ١٦ =$$

$$= ٧٢ - ٦٠ = \frac{١٢}{٣} = ٤ \text{ وحدة مربعة}$$

- جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى العلاقة $ص^٢ = ٤س$ والمستقيم $ل$



الحل:

$$\text{ص}^٢ = ٤س \Leftrightarrow \text{ص} = \pm \sqrt{٢س}$$

معادلة المستقيم ل:

$$\frac{\text{ص} - ١}{١ - ٣} = \frac{٢ - ٠}{١ - ٣} \Rightarrow \text{ص} = ٣ - س$$

$$\therefore \text{نقطتا التقاطع: ص}^٢ = (٣ - س)^٢ = ٩ - ٦س + س^٢$$

$$\text{ص}^٢ = ٩ - ٦س + س^٢ \Leftrightarrow ٤س = ٩ - ٦س + س^٢$$

$$\text{ص} = ١, ٣$$

م الكلية = ١م + ٣م

$$= \int_١^٣ (\sqrt{٢س} - (٣ - س)) دس + \int_٣^٩ (\sqrt{٢س} - (٣ - س)) دس$$

$$= \int_١^٣ (\sqrt{٢س} - ٣ + س) دس + \int_٣^٩ (\sqrt{٢س} - ٣ + س) دس$$

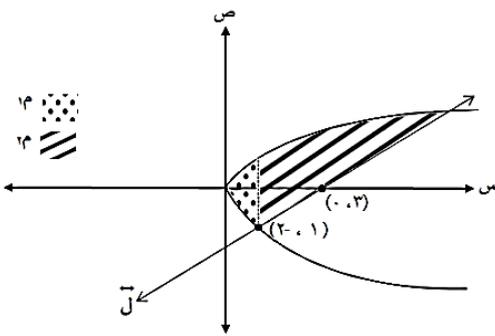
$$= \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} - ٣س + \frac{١}{٢}س^٢$$

$$= \left(\frac{٢}{٣} \cdot \frac{٤}{\sqrt{٢}} - ٣ \cdot ٣ + \frac{١}{٢} \cdot ٩ \right) - \left(\frac{٢}{٣} \cdot \frac{٢}{\sqrt{٢}} - ٣ \cdot ١ + \frac{١}{٢} \cdot ١ \right) =$$

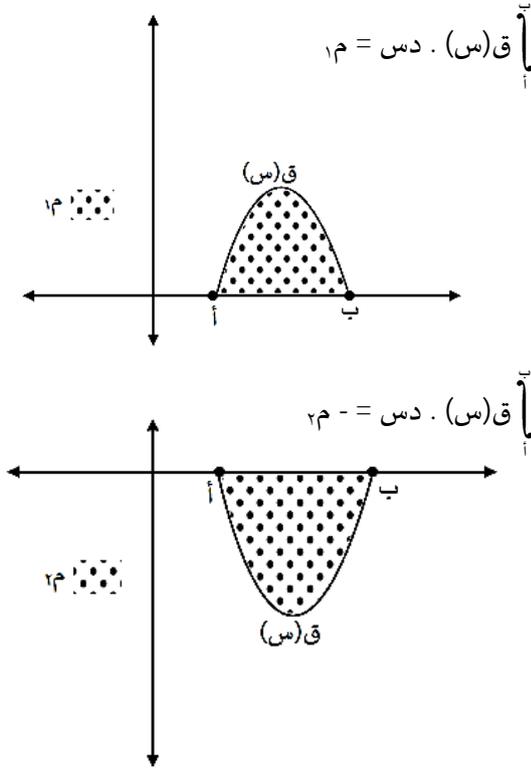
$$= \frac{٤\sqrt{٢}}{٣} - ٩ + \frac{٩}{٢} - \left(\frac{\sqrt{٢}}{٣} - ٣ + \frac{١}{٢} \right) =$$

$$= \frac{٤\sqrt{٢}}{٣} - ٩ + \frac{٩}{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٣} + ٣ - \frac{١}{٢} =$$

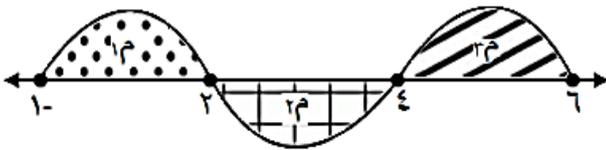
$$= \frac{٣\sqrt{٢}}{٣} - ٤ + \frac{٨}{٢} - \frac{١}{٢} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٣} - ٤ + \frac{٧}{٢} =$$



النوع الرابع

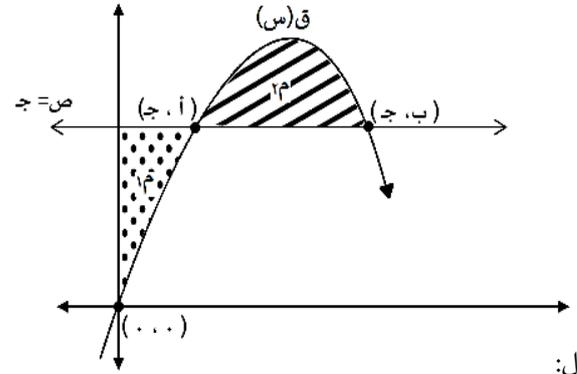


- بالاعتماد على الرسم لمنحنى ق(س) اذا كان:
 $1م = 3$ ، $2م = 9$ ، $3م = 2$ ، أوجد كل مما يلي:



- (1) $\int_1^3 f(x) dx = 13$
- (2) $\int_2^4 f(x) dx = 9$
- (3) $\int_1^4 f(x) dx = 13 + 9 - 2 = 20$
- (4) $\int_1^4 |f(x)| dx = 13 + 9 + 2 = 24$
- (5) $\int_1^4 |f(x)| dx = 13 + 9 + 2 = 24$

- رسم المستقيم ص = ج فقطع منحنى الاقتران ق(س) = $2س^2 - 3س^3$ ، في النقطتين (أ ، ج) ، (ب ، ج) حيث أ ، ب ، ج اعداد حقيقية موجبة ، مكونا المنطقتين $1م$ ، $2م$ كما في الشكل ، جد قيمة ج التي تجعل مساحتي المنطقتين $1م$ ، $2م$ متساويتين.



الحل:

$$\int_a^b (c - (2س^2 - 3س^3)) ds = \int_a^b (2س^2 - 3س^3 - c) ds$$

$$\int_a^b (2س^2 - 3س^3 - c) ds = \int_a^b (2س^2 - 3س^3 - c) ds$$

$$\int_a^b (2س^2 - 3س^3 - c) ds + \int_a^b (3س^3 - 2س^2 + c) ds = 0$$

$$\int_a^b (2س^2 - 3س^3 - c) ds = \int_a^b (3س^3 - 2س^2 + c) ds$$

$$\left[\frac{2س^3}{3} - \frac{3س^4}{4} - cs \right]_a^b = \left[\frac{3س^4}{4} - \frac{2س^3}{3} + cs \right]_a^b$$

$$\frac{2ب^3}{3} - \frac{3ب^4}{4} - cb = \frac{3ب^4}{4} - \frac{2ب^3}{3} + cb$$

منحنى ق

$$ق(ب) = ج \Leftrightarrow ج = 2ب^2 - 3ب^3$$

$$ب^2 - \frac{3ب^3}{4} - (2ب^2 - 3ب^3) = ب = 2ب^2 - 3ب^3 - \frac{3ب^3}{4} + 2ب^2$$

$$ب^2 - \frac{3ب^3}{4} = 2ب^2 - 3ب^3 - \frac{3ب^3}{4} + 2ب^2 \Leftrightarrow 0 = 2ب^2 - 3ب^3 - \frac{3ب^3}{4} + 2ب^2$$

$$ب^2 = \left(1 - \frac{3}{4}\right)ب^3 = \frac{1}{4}ب^3$$

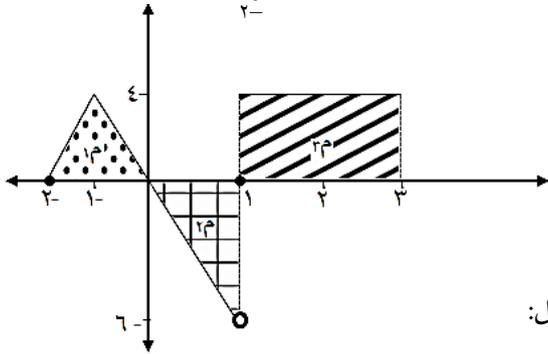
$$\frac{2ب^2}{3} = ب = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 1 = \frac{2ب^2}{3} \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{9}$$

لكن ج = $2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{4}{9}$

- إذا كانت القيمة المطلقة خارج رمز التكامل ، يحسب التكامل ثم يؤخذ له القيمة المطلقة
- إذا كانت القيمة المطلقة داخل التكامل ، تؤخذ القيمة المطلقة لجميع المساحات ، ثم نجمع

• بالاعتماد على الشكل لمنحنى الاقتران ق(س) المعروف

على الفترة $[-2, 3]$ جد \int_{-2}^3 ق(س) دس.



الحل:

$$4 = 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4م$$

$$3 = 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3م$$

$$8 = 4 \times 2 = 8م$$

$$\int_{-2}^3$$

$$= \int_{-2}^1$$

$$9 = 4 + 3 + 8 =$$

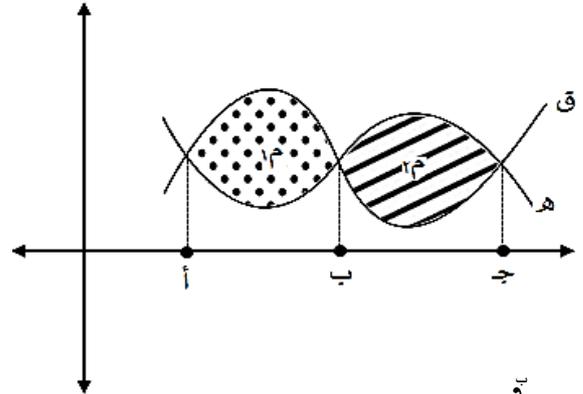
مساحة
المستطيل
= الطول × العرض

مساحة
المثلث
 $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة × الارتفاع

مساحة
الدائرة
 $= \pi$ نق²

مساحة
المربع
 $=$ (الضلع)²

- بالاعتماد على الرسم يمثل منحنى الاقترانين ق، ه إذا كان $م = 4$ ، $م = 7$ ، فجد كل مما يلي :



$$4م^* = \int_a^b$$

$$7م^* = \int_b^c$$

$$(1) \int_a^b$$

$$(2) \int_b^c$$

$$= \int_a^b + \int_b^c =$$

$$= 4م - 7م = 3م - 7م =$$

$$(3) \int_a^b = |3م - 7م| = 4م =$$

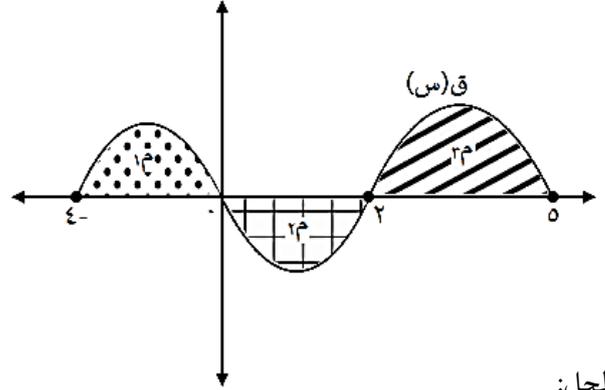
$$(4) \int_a^c = 4م + 7م = 11م =$$

= 11 المساحة بين ق و ه على الفترة [أ، ج]

- معتمدا على الشكل ، و الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، اذا كانت $٧ = ١م$ ، $٤ = ٢م$ ، $٥ = ٣م$ جد ما يلي:

$$(١) \int_{٢}^{٤-} ق(س) دس.$$

- (٢) المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق و محور السينات في الفترة $[٥ ، ٤-]$



الحل:

$$\int_{٤-}^{٢} ق(س) دس = ٧$$

$$\int_{٢}^{٥} ق(س) دس = ٣$$

$$\int_{٤-}^{٥} ق(س) دس = ٧ + ٣ = ١٠$$

$$(١) \int_{٢}^{٤-} ق(س) دس = \frac{٣-}{٢}$$

$$(٢) ٣م + ٢م + ١م = ٦م$$

$$١٦ = ٥ + ٤ + ٧ =$$