الملاذ في مهارات الرياضيات

النهايات والاتصال

اسئلة التدريبات

مع الحل

الملاذ في مهارات الرياضيات
07722559503
الاستاذ حمزة عواد ابو الفول

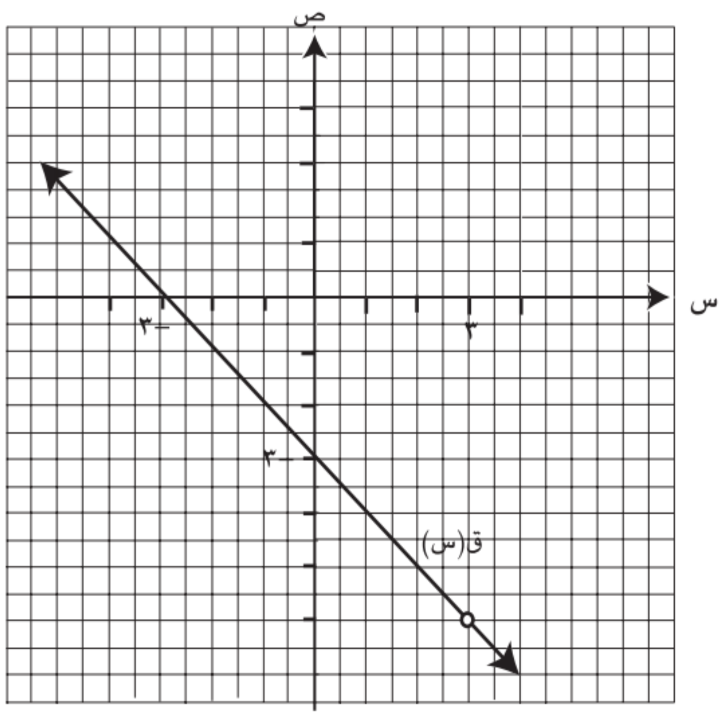
نهاية اقتران عند نقطة

مثال: ليكن $ق(س) = \frac{٩ - س^{٢}}{س - ٣}$ ، $س \neq ٣$

ارسم منحنى الاقتران ومن الرسم جد كلاً مما يأتي:

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣^{+}} ق(س)$ ٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣^{-}} ق(س)$ ٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} ق(س)$

الحـــــل:



$$ق(س) = \frac{(٣ - س)(٣ + س)}{س - ٣}$$

$$= -(٣ + س) \quad ، \quad س \neq ٣$$

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣^{+}} ق(س) = -٦$

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣^{-}} ق(س) = -٦$

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} ق(س) = -٦$

hamzehaboalfoul@yahoo.com

الأستاذ: حمزة أبو الفول
هاتف 0772259503

ت

نهاية اقتران عند نقطة

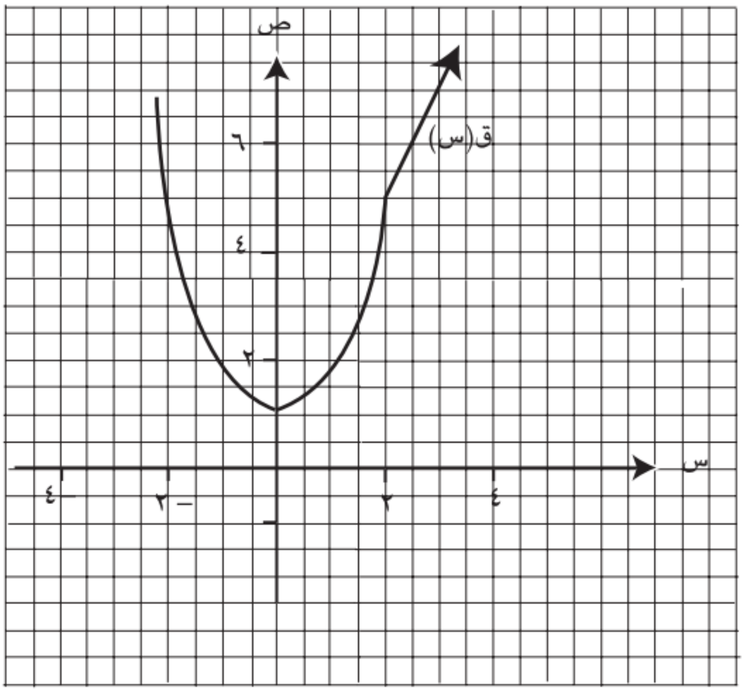
مثال: إذا كان ق(س) $= \begin{cases} س^٢ + ١ & ، س \leq ٢ \\ ٢س + ١ & ، س > ٢ \end{cases}$

ارسم منحنى ق ومن الرسم جد كلًّا مما يأتي:

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س)   ٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س)   ٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س)

الحــــل

ق (س) $= \begin{cases} س^٢ + ١ & ، س \leq ٢ \\ ٢ س + ١ & ، س > ٢ \end{cases}$



١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^+}$ ق (س) = ٥

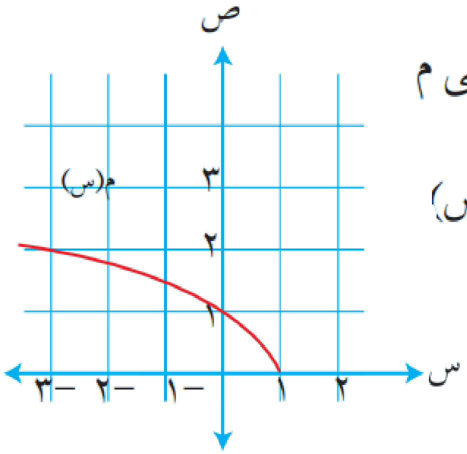
٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^-}$ ق (س) = ٥

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق (س) = ٥

hamzehaboalfoul@yahoo.com

نهاية اقتران عند نقطة

مثال : إذا كان م(س) = $\sqrt{١ - س}$ اعتمد على منحنى م في الشكل لإيجاد كلٍّ مما يأتي إن أمكن:



١) $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـــا}}$ م(س)   ٢) $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـــا}}$ م(س)

٣) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ م(س)

الحـــل:

١) $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـــا}}$ م (س) غير موجودة لأن م غير معرف عند س = ١ من اليمين

٢) $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـــا}}$ م (س) = صفرًا

٣) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ م (س) غير موجودة لأن $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـــا}}$ م (س) غير موجودة.

hamzehaboalfoul@yahoo.com

الأستاذ: حمزة أبو الفول
هاتف 0772259503

نظريات النهايات

مثال: إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٤$ ، فجد:

١) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \sqrt[٣]{٢\ \text{ق}(\text{س})}$

٢) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \left(\text{س}^{٢}\ \text{ق}(\text{س}) - (\text{ق}(\text{س}))^{٢} + ٢\text{س}\right)$

الحـــل:

١) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \sqrt[٣]{٢\ \text{ق}(\text{س})} = \sqrt[٣]{\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})}$

$= \sqrt[٣]{٢\ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})} = \sqrt[٣]{٢ \times ٤} = ٢$

٢) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \left(\text{س}^{٢}\ \text{ق}(\text{س}) - (\text{ق}(\text{س}))^{٢} + ٢\text{س}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{س}^{٢} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) - \left(\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})\right)^{٢} - ٢\ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{س}$

$= \text{صفر} - ٤^{٢} + \text{صفر} = -١٦$

مثال : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = |٦ - ٢\text{س}|$ ، فجد: ١) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$ ٢) $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$

الحـــل :

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٦ - ٢\text{س} ، & \text{س} \le ٣ \\ ٢\text{س} - ٦ ، & \text{س} > ٣ \end{cases}$$

١) $\underset{\text{س}\to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ (٢\text{س} - ٦) = \text{صفر}$

$\underset{\text{س}\to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ (٦ - ٢\text{س}) = \text{صفر}$

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر}$

٢) $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}}\ (٦ - ٢\text{س}) = ٦ + ٦ = ١٢$

الأستاذ: حمزة أبو الفول
هاتف 0772259503

نظريات النهايات

مثال: إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [\text{س} + ٥]$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = [٤ - \text{س}]$ ، فجد كلا من النهايات الآتية:

١) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$ ٢) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})$ ٣) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}\ (\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}))$

ماذا تستنتج؟

الحل: أعد تعريف ق (س)، هـ (س) دون استخدام رمز الصحيح:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥ ، & ٠ \le \text{س} < ١ \\ ٦ ، & ١ \le \text{س} < ٢ \end{cases} \quad ، \quad \text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} ٤ ، & \text{س} = ٠ \\ ٣ ، & ٠ < \text{س} \le ١ \\ ٢ ، & ١ < \text{س} \le ٢ \end{cases}$$

١) $\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٦$ ، $\underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٥$

$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة

٢) $\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س}) = ٢$ ، $\underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س}) = ٣$

$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})$ غير موجودة

٣) $$\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} ٩ ، & \text{س} = ٠ \\ ٨ ، & ٠ < \text{س} < ١ \\ ٩ ، & \text{س} = ١ \\ ٨ ، & ١ < \text{س} < ٢ \end{cases}$$

$\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{نهـا}}\ (\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})) = ٨$ ، $\underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـا}}\ (\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})) = ٨ \Leftarrow \underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}\ (\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})) = ٨$

الاستنتاج :

نستنتج أنه إذا كانت $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة، وكانت $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})$ غير موجودة، فليس من الضروري أن تكون $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ (\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}))$ غير موجودة.

hamzehaboalfoul@yahoo.com

الأستاذ: حمزة أبو الفول
هاتف 0772259503

نهاية اقترانات كسرية

مثال : جد:

١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣}{\text{س} - ٣}$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٥} \left(\dfrac{٢}{\text{س}} - \dfrac{٢}{٥}\right)\left(\dfrac{١}{\text{س}^{٢} - ٢٥}\right)$

الحـل :

١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}{\text{س} - ٣} = \lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)}{\text{س} - ٣} = ٢$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٥} \left(\dfrac{٢}{\text{س}} - \dfrac{٢}{٥}\right)\left(\dfrac{١}{\text{س}^{٢} - ٢٥}\right) = \lim\limits_{\text{س}\to ٥} \left(\dfrac{١٠ - ٢\text{س}}{٥\text{س}} \times \dfrac{١}{\text{س}^{٢} - ٢٥}\right)$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٥} \dfrac{٢(٥ - \text{س})}{٥\text{س}(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٥)} = \lim\limits_{\text{س}\to ٥} \dfrac{-٢}{٥\text{س}(\text{س} + ٥)} = \dfrac{-١}{١٢٥}$

مثال: جد: $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٣\text{س} - ٢}{\text{س}^{٣} - ٨}$

الحـل: $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٣\text{س} - ٢}{\text{س}^{٣} - ٨}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)}$

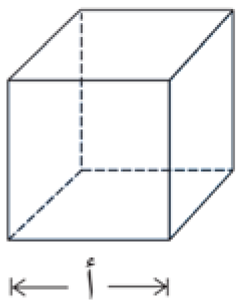
$= \dfrac{٩}{١٢} = \dfrac{٣}{٤}$

hamzehaboalfoul@yahoo.com

الأستاذ: حمزة أبو الفول
هاتف 0772259503

نهاية اقترانات كسرية

مثال : إذا تم تسخين قطعة مكعبة من المعدن بحيث تتمدد بانتظام محافظة على شكلها، فإن القيمة العددية لنسبة تغير الحجم الى طول الضلع عندما س تقترب من أ (معدل التغير غ) تعطى بالعلاقة :



$$\text{غ}(\text{أ}) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{٣} - \text{أ}^{٣}}{\text{س} - \text{أ}}$$

ما قيمة غ(٣)؟

الحــل :

$$\text{غ}(٣) = \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣} = \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٩)}{\text{س} - ٣} = ٢٧$$

مثال: جد $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٧} \frac{\sqrt[٣]{\text{س} + ١} - ٢}{\text{س} - ٧}$

الحـل :

$$\lim_{\text{س} \to ٧} \frac{\sqrt[٣]{\text{س} + ١} - ٢}{\text{س} - ٧} = \lim_{\text{س} \to ٧} \frac{\sqrt[٣]{\text{س} + ١} - ٢}{\text{س} - ٧} \times \frac{\sqrt[٣]{(\text{س} + ١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س} + ١} + ٤}{\sqrt[٣]{(\text{س} + ١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س} + ١} + ٤}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٧} \frac{(\text{س} + ١) - ٨}{(\text{س} - ٧)\left(\sqrt[٣]{(\text{س} + ١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س} + ١} + ٤\right)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٧} \frac{١}{\left(\sqrt[٣]{(\text{س} + ١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س} + ١} + ٤\right)} \times \frac{\text{س} - ٧}{\text{س} - ٧} = \frac{١}{١٢}$$

hamzehaboalfoul@yahoo.com

الأستاذ: حمزة أبو الفول
هاتف 0772259503

نهاية اقترانات دائرية

مثال: احسب كلًّا مما يأتي:

١) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٩س}{جا ٢س}$ ٢) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظا ٢س}{٧س}$

الحـل :

نفرض أن ٢ س = ص ومنه س = $\frac{ص}{٢}$

عندما س ← ٠ فإن ص ← ٠

١) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٩ س}{حا ٢ س} = \lim\limits_{ص \to ٠} \frac{٩ \times \frac{ص}{٢}}{حا ص}$

$= \frac{٩}{٢} \lim\limits_{ص \to ٠} \frac{١}{\frac{حا ص}{ص}}$

$= \frac{٩}{٢} \times ١ = \frac{٩}{٢}$

٢) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظا ٢ س}{٧ س} = \lim\limits_{ص \to ٠} \frac{ظا ص}{٧ \times \frac{ص}{٢}}$

$= \frac{٢}{٧} \lim\limits_{ص \to ٠} \frac{ظا ص}{ص}$

$= \frac{٢}{٧} \times ١ = \frac{٢}{٧}$

hamzehaboalfoul@yahoo.com

نهاية اقترانات كسرية

مثال : احسب $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{قا(٢س) - ١}{س^٢}$

الحـل :

$$= \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{\frac{١}{جتا٢س} - ١}{س^٢} = \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - جتا ٢ س}{س^٢ \; جتا ٢ س}$$

$$= \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - (١ - ٢ \; حا^٢ س)}{س^٢ \; جتا ٢ س} = \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{٢ \; حا^٢ س}{س^٢ \; جتا ٢ س}$$

$$= \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{٢}{جتا ٢ س} \times \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \left(\frac{حا س}{س}\right)^٢ = ٢ \times ١ = ٢$$

hamzehaboalfoul@yahoo.com

الأستاذ: حمزة أبو الفول
هاتف 0772259503

نهاية اقترانات كسرية

مثال : جد $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{\text{٤}}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{\text{٤}}}$

الحـل :

$$= \underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{\text{٤}}}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{\text{٢}}\right) - \text{جتا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{\text{٤}}}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{\text{٤}}}{\text{نها}} \frac{-\text{٢ جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{\text{٤}}\right) \text{جا}\left(-\frac{\pi}{\text{٤}}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{\text{٤}}}$$

$$= -\text{٢} \underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{\text{٤}}}{\text{نها}} \text{جا}\left(-\frac{\pi}{\text{٤}}\right) \times \underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{\text{٤}}}{\text{نها}} \frac{\text{حا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{\text{٤}}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{\text{٤}}}$$

$$= -\text{٢} \times \frac{-\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}} \times \text{١} = \sqrt{\text{٢}}$$

hamzehaboalfoul@yahoo.com

الأستاذ: حمزة أبو الفول
هاتف 0772259503

الاتصال عند نقطة

مثال : ابحث في اتصال الاقتران ق حيث:

ق(س) = س [س + ١] عند س = ١

الحـل :

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز الصحيح.

$$ق(س) = \begin{cases} س &، ٠ \le س < ١ \\ ٢س &، ١ \le س < ٢ \end{cases}$$

$$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^+} ٢س = ٢،$$

$$\lim_{س \to ١^-} ق(س) = \lim_{س \to ١^-} س = ١$$

$$\Leftarrow \lim_{س \to ١} ق(س)$$ غير موجودة

ق غير متصل عند س = ١

hamzehaboalfoul@yahoo.com

الأستاذ: حمزة أبو الفول
هاتف 0772259503

الاتصال عند نقطة

مثال : ليكن

$$ق(س) = \begin{cases} أ س^{٣} - ب س + ١ &، س < ١ \\ ٥ &، س = ١ \\ س^{٢} - (أ + ب) س + ٢ &، س > ١ \end{cases}$$

جد قيم أ، ب التي تجعل ق متصلا عند س = ١

الحـــل :

بما أن ق متصل عند س = ١

فإن: $\lim_{س \leftarrow ١^{-}}$ ق (س) = $\lim_{س \leftarrow ١^{+}}$ ق (س) = ق (١)

أي أن: $\lim_{س \leftarrow ١^{-}}$ (أ س^{٣} − ب س + ١) = ٥

ومنه أ − ب = ٤ .... (١)

$\lim_{س \leftarrow ١^{+}}$ (س^{٢} − (أ + ب) س + ٢) = ٥

ومنه أ + ب = − ٢ .... (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن أ = ١، ب = − ٣

hamzehaboalfoul@yahoo.com

الأستاذ: حمزة أبو الفول
هاتف 0772259503

الاتصال عند نقطة

مثال : إذا كان ق(س) = (س − ٢)^{٣} ، هـ (س) = [س + ١]،

فابحث في اتصال ق(س) × هـ (س) عند س = ٢

الحل :

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢ & ، \ ١ \leq س < ٢ \\ ٣ & ، \ ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$$

$$ق(س) \times هـ(س) = \begin{cases} ٢(س - ٢)^{٣} & ، \ ١ \leq س < ٢ \\ ٣(س - ٢)^{٣} & ، \ ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$$

$$\lim_{س \to ٢^{+}} (ق \times هـ)(س) = \lim_{س \to ٢^{+}} ٣(س - ٢)^{٣} = صفرًا$$

$$\lim_{س \to ٢^{-}} (ق \times هـ)(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} ٢(س - ٢)^{٣} = صفرًا$$

$$\lim_{س \to ٢} (ق \times هـ)(س) = صفر ، ق(٢) = صفرًا$$

hamzehaboalfoul@yahoo.com

الأستاذ: حمزة أبو الفول
هاتف 0772259503

الاتصال على فترة

مثال: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س} + ٢ & ، |\text{س}| \le ٢ \\ \text{س}^{٢} & ، |\text{س}| > ٢ \end{cases}$ فابحث في اتصال ق(س) على مجاله.

الحل: نعيد تعريف الاقتران

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ٢ & ، -٢ \le \text{س} \le ٢ \\ \text{س}^{٢} & ، \text{س} < -٢ ، \text{س} > ٢ \end{cases}$$

أولاً: ق متصل على الفترات (− ٢ ، ٢) ، (− ∞ ، − ٢) ، (٢ ، ∞) لأنه كثير حدود في هذه الفترات

ثانيًا: نبحث اتصال ق عند س = − ٢

$\lim_{\text{س} \to -٢^{+}}$ ق (س) = $\lim_{\text{س} \to -٢^{+}}$ (س + ٢) = صفرًا

$\lim_{\text{س} \to -٢^{-}}$ ق (س) = $\lim_{\text{س} \to -٢^{-}}$ س^{٢} = ٤

$\lim_{\text{س} \to -٢}$ ق (س) غير موجودة ، وعليه فإن ق غير متصل عند س = − ٢ .

ثالثاً: نبحث اتصال ق عند س = ٢

$\lim_{\text{س} \to ٢^{+}}$ ق (س) = ٤ ، $\lim_{\text{س} \to ٢^{-}}$ ق (س) = ٤

$\lim_{\text{س} \to ٢}$ ق (س) = ٤ ، $\lim_{\text{س} \to ٢}$ ق (٢) = ٤

بما أن $\lim_{\text{س} \to ٢}$ ق (س) = ق (٢) فإن ق متصل عند س = ٢

مما سبق ق متصل على ح / {− ٢}

hamzehaboalfoul@yahoo.com

الأستاذ: حمزة أبو الفول
هاتف 0772259503

ت

الاتصال على فترة

مثال: ليكن ل (س) $= \frac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥}$ ، س $\neq$ ٥ ، ابحث في اتصال الاقتران ل على ح.

الحل: ل (س) $= \frac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥}$ ، س $\neq$ ٥

أولاً: ل غير متصل عند س = ٥ لأنه غير معرف عندها

ثانياً: إذا كانت س $\neq$ ٥ فإن ل (س) $= \frac{(س - ٥)(س + ٥)}{س - ٥} =$ س + ٥

ل (س) كثير حدود فهو متصل على مجاله

مما سبق ل (س) متصل على ح / {٥}

hamzehaboalfoul@yahoo.com