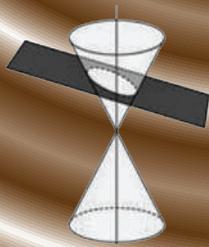
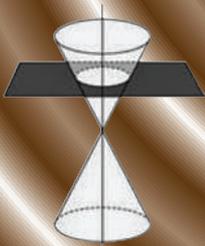


# السليم

## في الرياضيات

### MATHS

## القطوع المخروطية



إعداد الأستاذ :

# سليم الخطيب

القطوع

المخروطينية

# الرياضيات

المستوى الرابع

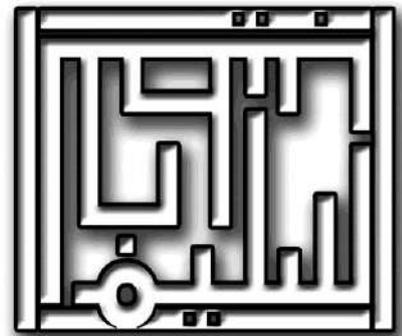
التخصص: العلمي

إعداد الاستاذ

## سليم الخطيب

0787800852 \ الوحدات \  
0795024143 \ ماركا \  
0799988354 \ الاشرافية \  
0798513729 \ حي نزال \  
0797319219 \ الجامعة الاردنية \

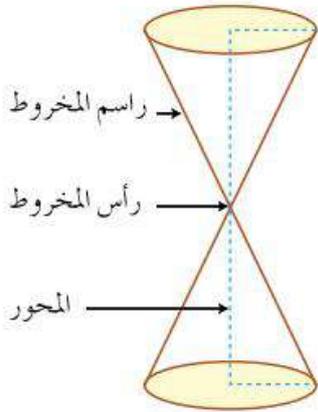
مركز زهرة النظر  
مركز الهادفون العلمي  
مركز كفر عانة  
مركز زهرة الحصاد  
مركز تقارب



[f /al2s6ora.saleem.al5a6eeb](https://www.facebook.com/al2s6ora.saleem.al5a6eeb)

0786230407

الشكل (٥-١) يبين مخروطاً دائرياً قائماً مزدوجاً، حدد الشكل الناتج إذا قطع مستوى

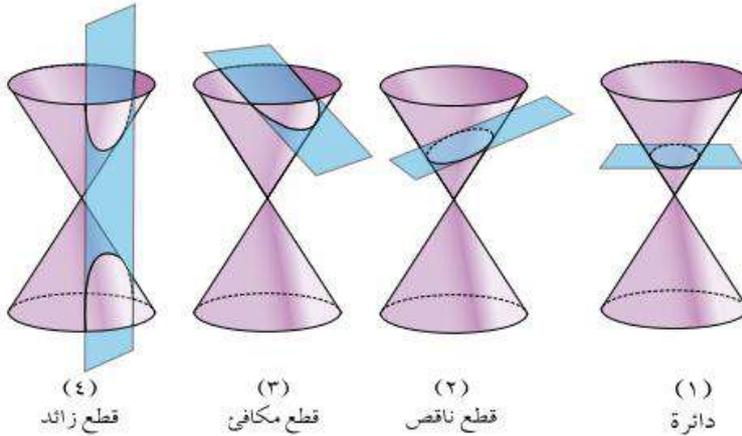


الشكل (٥-١)

المخروط في كل من الحالات الآتية:

- (١) بشكل أفقي (عمودي على المحور ولا يحتوي الرأس).
- (٢) بشكل مائل قليلاً عن المحور بحيث يقطع أحد المخروطين دون الآخر.
- (٣) بشكل مائل موازٍ لراسم المخروط بحيث يقطع أحدهما دون الآخر.
- (٤) فرعي المخروط ولا يمر بالرأس.

انظر الأشكال الناتجة عن كل حالة:



(٤) قطع زائد (٣) قطع مكافئ (٢) قطع ناقص (١) دائرة

(١) إذا كان المستوى القاطع عمودياً على المحور ولا يمر بالرأس، فإن الشكل الناتج **دائرة** (Circle).

(٢) إذا كان المستوى القاطع مائلاً قليلاً على المحور، ويقطع أحد المخروطين دون الآخر، فإن الشكل الناتج يُسمى **قطعاً ناقصاً** (Ellipse).

(٣) إذا زاد ميل المستوى القاطع ليصبح موازياً لراسم المخروط ويقطع أحد المخروطين دون الآخر، فإن الشكل الناتج يُسمى **قطعاً مكافئاً** (Parabola).

(٤) إذا قطع المستوى فرعي المخروط، وكان القطع لا يحتوي على نقطة الرأس، فإن الشكل الناتج يُسمى **قطعاً زائداً** (Hyperbola).

تسمى الأشكال السابقة الناتجة **قطع مخروطية**، وسندرس في هذه الوحدة كلاً منها بالتفصيل.

• الدائرة :

الدائرة: هي المحل الهندسي الذي ترسمه لنقطة (س،ص) تتحرك بحيث يكون بعدها عن نقطة تسمى المركز مقدار ثابت يسمى نصف القطر.

- المعادلة بالصورة القياسية :

$$(س-د)^2 + (ص-ه)^2 = ر^2$$

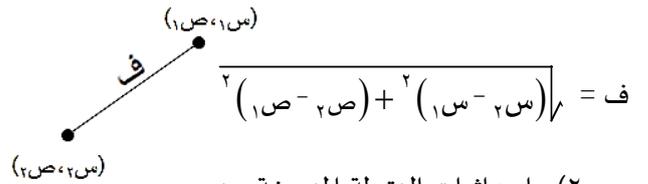
• حيث :

(د،ه) : المركز

ر : نصف القطر

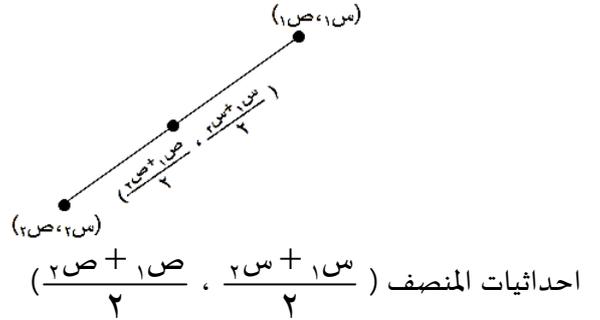
- قوائمه مهمة للحل :

(١) المسافة بين النقطتين (س<sub>١</sub>،ص<sub>١</sub>) (س<sub>٢</sub>،ص<sub>٢</sub>)



(٢) احداثيات النقطة المنصفة بين

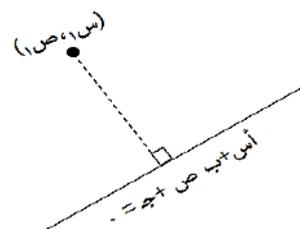
النقطتين (س<sub>١</sub>،ص<sub>١</sub>) (س<sub>٢</sub>،ص<sub>٢</sub>)



(٣) البعد بين نقطة (س<sub>١</sub>،ص<sub>١</sub>) عند المستقيم

$$أس + ب ص + ج = ٠$$

$$\frac{|أس١ + ب ص١ + ج|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}} = \text{البعد}$$



أسئلة :

(١) جد معادلة الدائرة التي مركزها (٢، ٤) ونصف قطرها ٤ وحدات؟

$$\text{الحل: } (س-٢)^2 + (ص-٤)^2 = ١٦$$

(٢) جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل و نصف قطرها ٥ وحدات؟

$$\text{الحل: } (س-٠)^2 + (ص-٠)^2 = ٢٥$$

(٣) جد معادلة الدائرة التي مركزها (٥، ٣) وطول قطرها ٦ وحدات؟

$$\text{الحل: } (س-٥)^2 + (ص-٣)^2 = ٩$$

(٤) جد احداثيات المركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها (س+٣) + (ص-١) = ١٢

الحل: المركز: (-٣، ١)

$$\text{نصف القطر} = ر = \sqrt{١٢}$$

(٥) جد احداثيات المركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها س + (ص-٧) = ٨١

الحل: المركز = (٧، ٠)

$$\text{نصف القطر} = ر = ٩$$

(٦) جد معادلة الدائرة التي مركزها (٥، -٣) و تمر بنقطة الاصل؟

الحل:

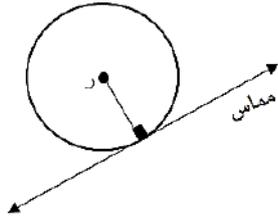
$$\text{معادلة الدائرة: } (س-٥)^2 + (ص-٠)^2 = ر^2$$

النقطة (٠،٠) تحقق المعادلة (٥-٠) + (٣+٠) = ٣٤

$$٣٤ = ر^2 \iff ٣٤ = (س-٥)^2 + (ص-٠)^2$$

SALAEEN ALSAATEEB

٣) إذا رسم مماس لدائرة عند نقطة فإن نصف القطر يكون عموديا على



هذا المماس عند نقطة التماس.

٤) إذا مس دائرة محورين فإن المركز هو (ر، ر) مع مراعاة إشارة الأرباع ويختلف ذلك من ربع الى ربع.

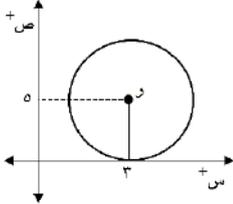
٥) إذا مست دائرة محور السينات فإن ه = ر (مع اهمال الإشارة).

٦) إذا مست دائرة محور الصادات فإن د = ر (مع اهمال الإشارة).

تذكر أن نصف القطر عمودي على المماس

اسئلة:

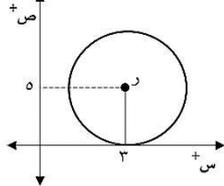
١) جد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، ٥) وتمس محور السينات؟



الحل:

$$٢٥ = (٥-ص)^2 + (٣-س)^2$$

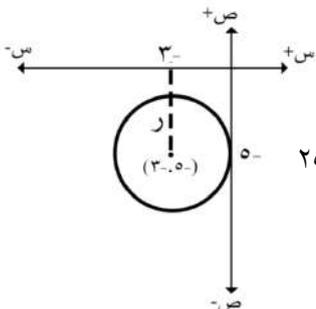
٢) جد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، ٥) وتمس محور الصادات؟



الحل:

$$٩ = (٥-ص)^2 + (٣-س)^2$$

٣) جد معادلة الدائرة التي مركزها (٣-، ٥-) وتمس محور السينات؟



الحل:

$$٢٥ = (٥+ص)^2 + (٣+س)^2$$

٧) جد معادلة الدائرة التي مركزها (-٢، ٤) وتمر بالنقطة (٢، ٥)؟

الحل: معادلة الدائرة =  $(٢+س)^2 + (٤-ص)^2 = ر^2$

النقطة (٢، ٥) تحقق المعادلة:

$$٥٣ = ر^2 \leftarrow ر^2 = (٤-٥)^2 + (٢+٥)^2$$

$$٥٣ = (٢+س)^2 + (٤-ص)^2 = \text{معادلة الدائرة}$$

٨) جد معادلة الدائرة التي فيها نهايتا القطرهما النقطتان (٤، ١) (٦، ٣)؟

الحل:

المركز ينصف القطر

احداثيات المركز =  $\left(\frac{٦+٤}{٢}, \frac{٣+١}{٢}\right) = (١-٥)$  المركز

طول نصف القطر = المسافة بين المركز واي نقطة على الدائرة

$$ر = \sqrt{(١-١)^2 + (٤-٥)^2} = \sqrt{١+١} = \sqrt{٢}$$

$$\text{معادلة الدائرة} = (س-٥)^2 + (ص+١)^2 = ٥$$

حالات خاصة

• اسئلة التماس:

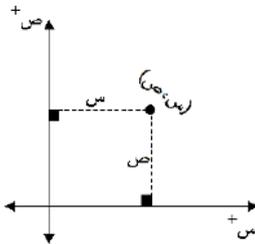
١) إذا كانت (س، ص) نقطة

في المستوى البياني فإن:

س: بعد النقطة العمودية

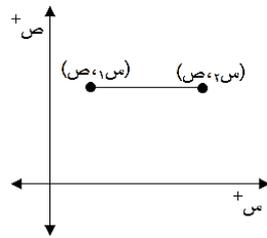
عن محور الصادات

ص: بعد النقطة العمودية عن محور السينات

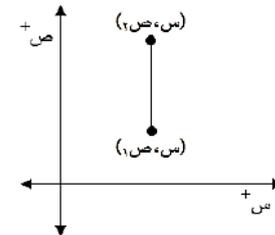


حالات خاصة

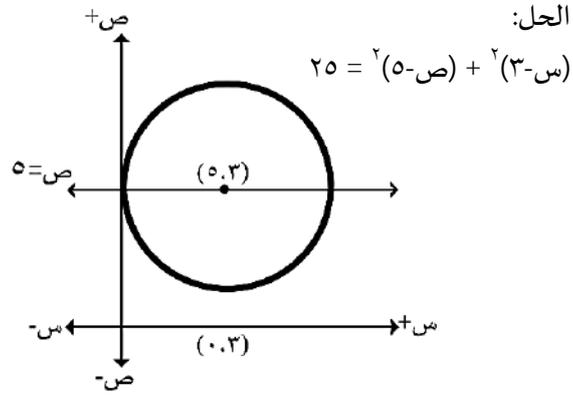
٢) أ) الاحادي الصادي ثابت  
المسافة = الفرق في السينات



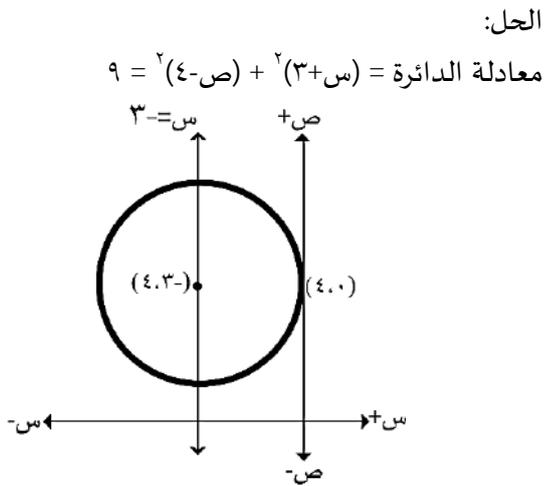
ب) الاحداثي السيني ثابت  
المسافة = الفرق في الصادات



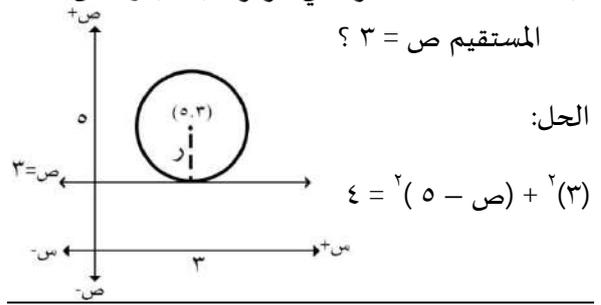
٨) جد معادلة الدائرة التي مركزها يقع على المستقيم  $ص = ٥$  وتمس محور السينات عند النقطة  $(٠, ٣)$  ؟



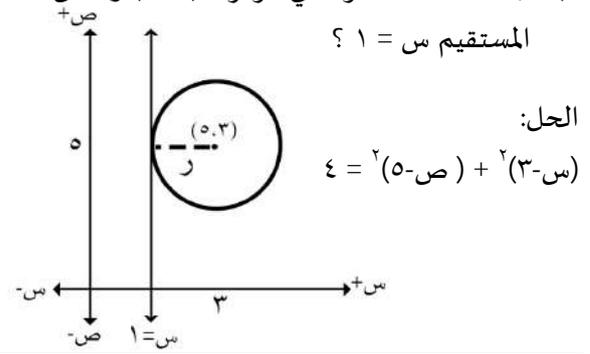
٩) جد معادلة الدائرة التي مركزها يقع على المستقيم  $(ص = ٣)$  وتمس محور الصادات عند النقطة  $(٤, ٠)$  ؟



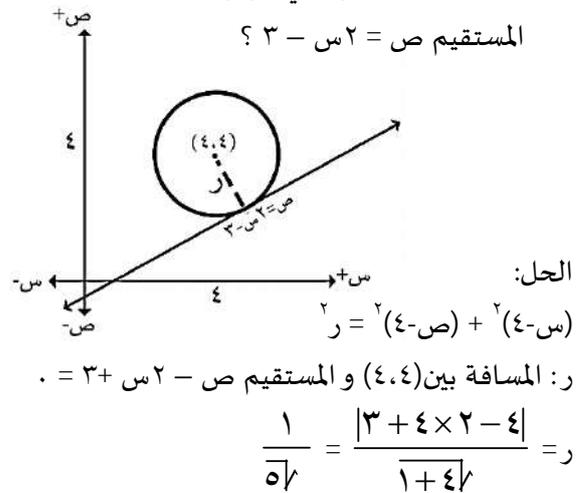
٤) جد معادلة الدائرة التي مركزها  $(٣, ٥)$  وتمس المستقيم  $ص = ٣$  ؟



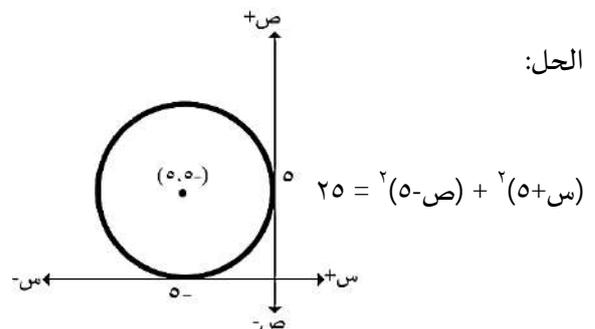
٥) جد معادلة الدائرة التي مركزها  $(٣, ٥)$  وتمس المستقيم  $ص = ١$  ؟



٦) جد معادلة الدائرة التي مركزها  $(٤, ٤)$  وتمس المستقيم  $ص = ٢ - ٣$  ؟



٧) جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين عند النقطتين  $(٥, ٠)$  ،  $(٠, ٥)$  ؟



١٣) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (٢، ١) و تمس محور السينات عند (٠، ٧)؟

الحل:

$$r^2 = (r-2)^2 + (7-r)^2$$

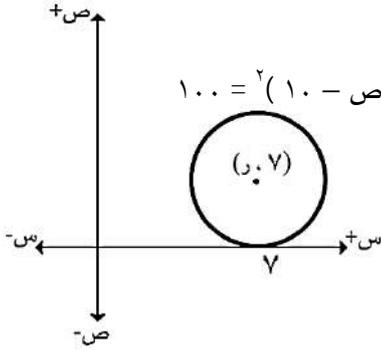
النقطة (٢، ١) تحقق المعادلة:

$$r^2 = (r-2)^2 + (7-r)^2$$

$$r^2 = r^2 + r^2 - 4r + 4 + 49 - 14r + 49$$

$$r = 10$$

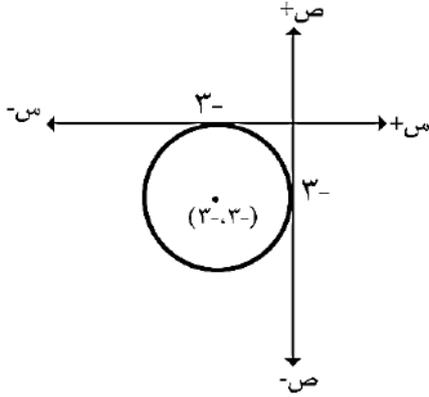
$$\therefore 10 = (10-2)^2 + (7-10)^2$$



١٤) جد معادلة الدائرة التي تقع في الربع الثالث و تمس المحورين السينات و الصادات علما بأن طول قطرها ٦ وحدات؟

الحل:

$$9 = (3+r)^2 + (3+r)^2$$



١٠) جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين و طول نصف قطرها ٤ وحدات؟

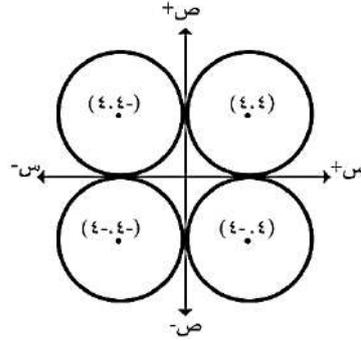
الحل:

$$16 = (4-s)^2 + (4-s)^2$$

$$16 = (4+s)^2 + (4-s)^2$$

$$16 = (4-s)^2 + (4+s)^2$$

$$16 = (4+s)^2 + (4+s)^2$$

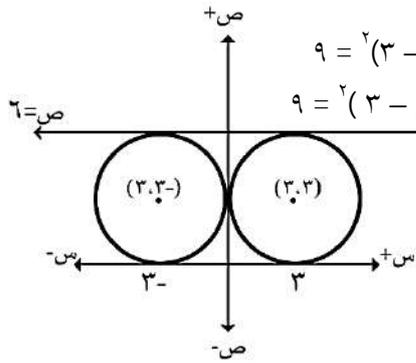


١١) جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين و تمس المستقيم  $s = 6$ ؟

الحل:

$$9 = (3-s)^2 + (3-s)^2$$

$$9 = (3-s)^2 + (3+s)^2$$

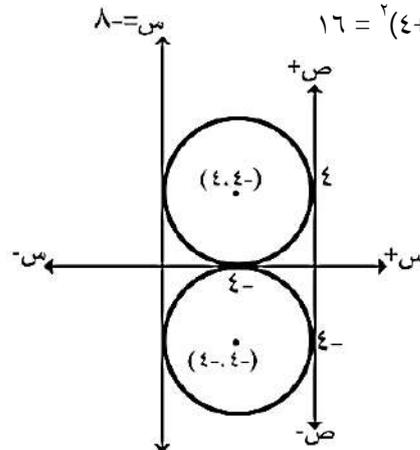


١٢) جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين و تمس المستقيم  $s = 8$ ؟

الحل:

$$16 = (4-s)^2 + (4-s)^2$$

$$16 = (4+s)^2 + (4-s)^2$$



(١٧) جد معادلة الدائرة التي تمس محور السينات عند نقطة الاصل وتمر بالنقطة (٥، -١) ؟

الحل:

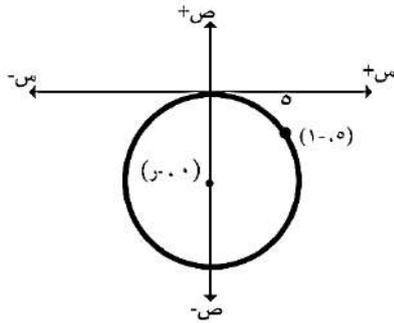
$$r^2 = (r + 5)^2 + (-1)^2$$

النقطة (٥، -١) تحقق المعادلة:

$$r^2 = (r + 10)^2 + (-5)^2$$

$$13 = r \iff r^2 = r^2 + 2r - 1 + 25$$

$$\therefore 169 = (13 + r)^2 + r^2$$



(١٨) جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم  $ص = ٧ - ٢س$  وتمر بمحور الصادات عند النقطة (٣، ٠) ؟؟

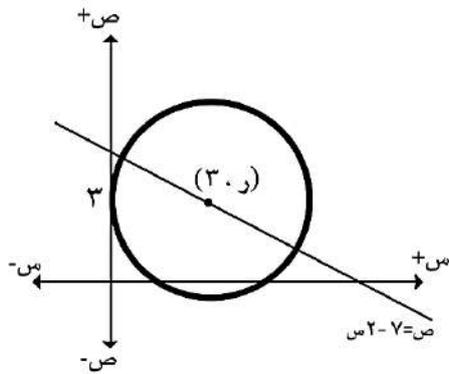
الحل:

$$r^2 = (r - 3)^2 + (7 - 2r)^2$$

المستقيم  $ص = ٧ - ٢س$  يمر بالمركز (٣، ١)

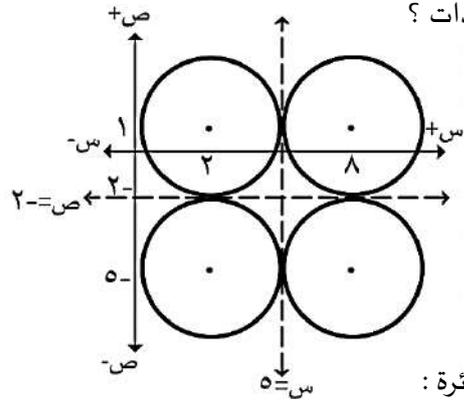
$$٣ = ٧ - ٢ر \iff ٢ر = ٤$$

$$\therefore ٤ = (٣ - ر)^2 + (٢ - ر)^2$$



(١٥) جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيم (ص = -٢) (س = ٥)، علما بأن طول نصف قطرها ٣ وحدات ؟

الحل:



معادلة الدائرة:

$$9 = (1 - ر)^2 + (٨ - ر)^2$$

$$9 = (1 - ر)^2 + (٢ - ر)^2$$

$$9 = (٥ + ر)^2 + (٨ - ر)^2$$

$$9 = (٥ + ر)^2 + (٢ - ر)^2$$

(١٦) جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتمر بالنقطة (٨، -١) ؟

الحل:

$$r^2 = (r + 8)^2 + (r - 1)^2$$

النقطة (٨، -١) تحقق المعادلة:

$$r^2 = (r - ٨)^2 + (r + ١)^2$$

$$١ - ٢ر + ١٦ = ٦٤ - ١٦ر + ١٦ + ٢ر + ١$$

$$٦٥ = ١٨ر - ٢ر$$

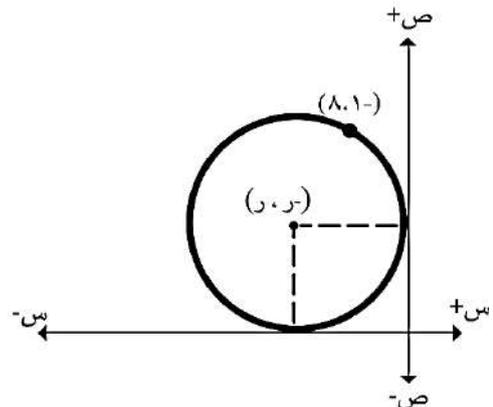
$$٦٥ = (٥ - ر)(١٣ - ر)$$

$$\boxed{٥ = ر} \quad \boxed{١٣ = ر}$$

معادلة الدائرة:

$$١٦٩ = (١٣ - ر)^2 + (١٣ + ر)^2$$

$$٢٥ = (٥ - ر)^2 + (٥ + ر)^2$$



١٩) جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم  $ص = ٢س + ٤$  وتتمس محور السينات عند النقطة  $(١, ٠)$  ؟

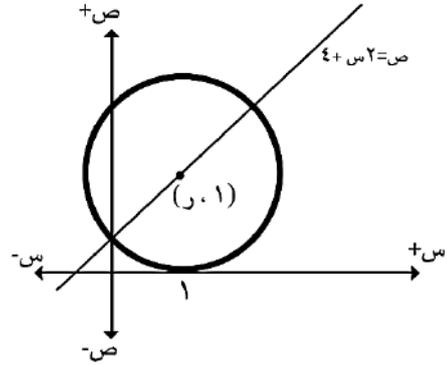
الحل:

$$ر^2 = (١ - ص)^2 + (ر - ٢س)^2$$

المستقيم  $ص = ٢س + ٤$  يمر بالنقطة  $(١, ١)$

$$١ = ٢ + ٤ \Rightarrow ٦ = ر$$

$$٣٦ = (٦ - ص)^2 + (١ - س)^2$$



$$\begin{aligned} د = ر^2 &\Leftarrow ر^2 = ٣ + (ر - ٣)^2 \\ &\Leftarrow ر^2 = ٣ + ر^٢ + ١٢ - ٦ر - ٩ \\ &\Leftarrow ٣ر^٢ - ١٢ر + ١٢ = ٠ \\ &\Leftarrow (٣ - ر)(٣ - ر) = ٠ \\ ر = ٣, ٢ = د \\ \text{معادلة الدائرة: } &٤ = ص^٢ + (٤ - س)^2 \end{aligned}$$

٢١) جد معادلة الدائرة التي تتمس المحورين وتتمس المستقيم  $٣س + ٤ص = ١٢$  في الربع الاول ؟

الحل:

$$ر^2 = (ر - ص)^2 + (ر - ٣س)^2$$

المسافة بين المركز والمستقيم = نصف القطر

$$\begin{aligned} ر = \frac{|١٢ - ٣ر - ٤ر|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|١٢ - ٧ر|}{٥} \\ |١٢ - ٧ر| = ٥ر \end{aligned}$$

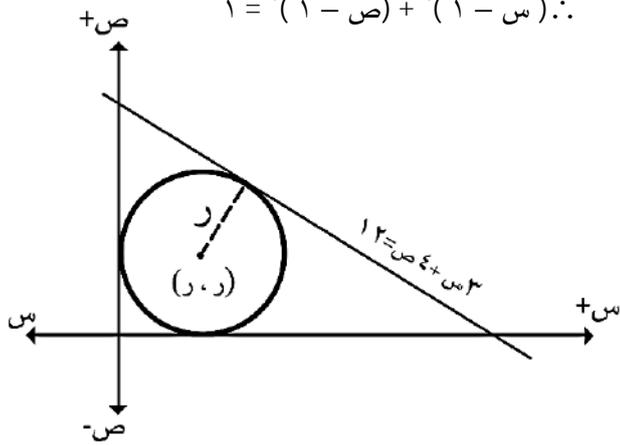
إما:

$$٥ر = ١٢ - ٧ر \Rightarrow ٦ = ر$$

$$\therefore ٣٦ = (٦ - ص)^2 + (٦ - ٣س)^2$$

$$\leftarrow ٥ر = ١٢ - ٧ر \Rightarrow ١ = ر$$

$$\therefore ١ = (١ - ص)^2 + (١ - ٣س)^2$$



٢٠) جد معادلة الدائرة التي تتمس المستقيم  $ص = \frac{١}{\sqrt{٣}}س$  في النقطة  $(٣, \sqrt{٣})$  ويقع مركزها على محور السينات ؟

الحل:

$$ر^2 = (د - ص)^2 + (٠ - س)^2$$

النقطة  $(٣, \sqrt{٣})$

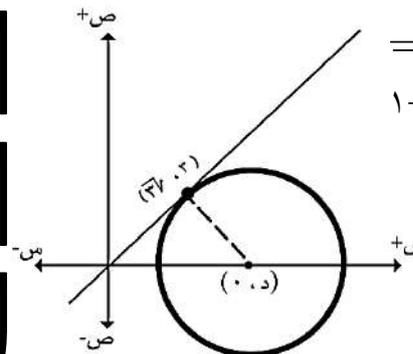
$$\text{تحقق المعادلة: } ر^2 = ٣ + (د - ٣)^2 \dots \text{ [١]}$$

المسافة بين المركز والمستقيم تساوي نصف القطر

$$ص = \frac{١}{\sqrt{٣}}س \Rightarrow ٠ = \frac{١}{\sqrt{٣}}س - ص$$

$$ر = \frac{\left| \frac{د \times ١}{\sqrt{٣}} - ٠ \right|}{\sqrt{1 + \left( \frac{١}{\sqrt{٣}} \right)^2}}$$

$$ر = \frac{\left| \frac{د}{\sqrt{٣}} \right|}{\sqrt{1 + \frac{١}{٣}}}$$



(٢٣) جد معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها (٢) سم وتمر بالنقطة (٢، ٤) وتمس المستقيم الذي معادلته  $s - 2v = 0$ .

الحل:

نفرض ان مركز الدائرة (د، هـ)

بعد النقطة (د، هـ) عن المستقيم  $s - 2v = 0$ .

$$\varepsilon = \frac{|2 - 2h - d|}{\sqrt{2}} \quad 2 = \frac{|2 - h - d|}{\sqrt{2}}$$

$$\text{أما } d - 2 - h = \varepsilon \quad \text{أو} \quad d - h - 2 = -\varepsilon$$

$$d - h = 6 \quad \text{أو} \quad d - h = 2$$

$$d + 6 = h \quad \text{أو} \quad d + 2 = h$$

كذلك:

$$\sqrt{2} \cdot 2 = \sqrt{(4-h)^2 + (2-d)^2}$$

$$8 = (4-h)^2 + (2-d)^2$$

$$8 = (4-h)^2 + (4-h)^2 \quad \text{أو} \quad 8 = (4-h)^2 + (2-d)^2$$

$$4 = (4-h)^2$$

$$h = 4 - 2 = 2 \quad \text{أو} \quad h = 4 + 2 = 6$$

$$h = 4 - 2 = 2 \quad \text{أو} \quad h = 4 + 2 = 6$$

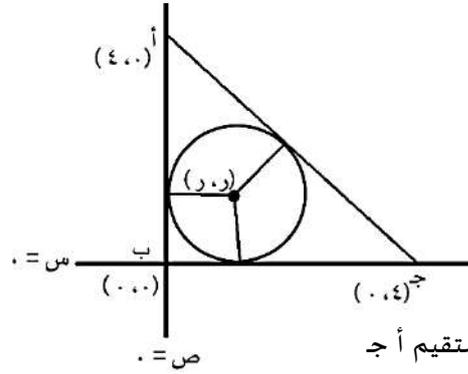
$$d + 2 = h \quad \text{أو} \quad d = 4 \quad \text{أو} \quad d = 0$$

المركز: (٢، ٠)، (٦، ٤)

$$\text{معادلة الدائرة: } (s-2)^2 + v^2 = 2 \quad \text{أو} \quad (s-6)^2 + v^2 = 8$$

$$\text{أو: } s^2 - 4s + 4 + v^2 = 2 \quad \text{أو} \quad s^2 - 12s + 36 + v^2 = 8$$

(٢٢) بالاعتماد على الشكل الذي يمثل المثلث أ، ب، ج أوجد معادلة الدائرة التي تمس أضلاعه.



الحل:

نجد معادلة المستقيم أ ج

$$v - 4 = m(s - 0) \quad \text{أو} \quad v - 4 = m s$$

$$1 - \frac{0-4}{4-0} = m$$

$$v - 4 = 1(s - 0) \quad \text{أو} \quad v - 4 = s$$

$$v - 4 = s$$

$$v = s + 4$$

المسافة بين (ر، ر) والمستقيم  $v = s + 4$  هي ر

$$r = \frac{|r - (s + 4)|}{\sqrt{2}}$$

$$r = \frac{|4 - r|}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}r = |4 - r|$$

$$4 - r = \sqrt{2}r \quad \text{أو} \quad r - 4 = \sqrt{2}r$$

$$r = \frac{4}{\sqrt{2} + 2} = \frac{4}{\sqrt{2} + 2} \times \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} - 2} = \frac{4(\sqrt{2} - 2)}{2 - 4} = \frac{4(\sqrt{2} - 2)}{-2} = 2(2 - \sqrt{2})$$

$$r = \frac{4(\sqrt{2} - 2)}{-2} = 2(2 - \sqrt{2})$$

$$4 - r = \sqrt{2}r \quad \text{أو} \quad r - 4 = \sqrt{2}r$$

$$r = \frac{4}{\sqrt{2} + 2} = \frac{4}{\sqrt{2} + 2} \times \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} - 2} = \frac{4(\sqrt{2} - 2)}{2 - 4} = \frac{4(\sqrt{2} - 2)}{-2} = 2(2 - \sqrt{2})$$

$$\sqrt{2}r - 4 = \frac{\sqrt{2}r - 4}{2} \times \frac{1}{2} =$$

المعادلة:

$$((\sqrt{2}r - 4) - 2)^2 + ((\sqrt{2}r - 4) - 2)^2 = 2$$

الحل:

$$3 = \frac{6}{2} = أ$$

$$4 = \frac{8}{2} = ب$$

$$9 = ج$$

$$م = (أ، ب) \leftarrow (3، 4)$$

$$ر = \sqrt{أ^2 + ب^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

حل آخر: (أكمال المربع):

$$9 = \left(\frac{6}{2}\right)^2، \quad 16 = \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$س + 6 + 9 = س + 9 + 8ص - 2ص + 9 + 16 = 16 + 9 + 9$$

$$34 = (س + 3) + (ص - 4)$$

$$المركز: (3، 4)، \quad ر = 5$$

$$2 \left[ (س + 2) + (ص - 2) \right] = 64$$

الحل:

$$4(س + 2) + 4(ص - 2) = 64$$

$$(س + 2) + (ص - 2) = 16$$

$$المركز (2، 3)$$

$$نصف القطر = ر = 4$$

$$3 \left[ (س + 3) + (ص + 9) \right] = 36$$

الحل:

$$9(س + 3) + 9(ص + 9) = 36$$

$$(س + 3) + (ص + 9) = 4$$

$$المركز = (3، 4)، \quad نصف القطر = ر = 2$$

$$4 \left[ س + 2ص + 4س + 6ص - 12 \right] = 0$$

الحل:

$$المركز = (2، 3)، \quad ر = \sqrt{4 + 9 + 12} = \sqrt{25} = 5$$

$$5 \left[ س + 2ص - 2س - 6ص - 6 \right] = 0$$

الحل:

$$المركز = (1، 3)، \quad ر = \sqrt{1 + 9 + 6} = \sqrt{16} = 4$$

توجد صورة عامة لمعادلة الدائرة :

$$س^2 + ص^2 + 2أس + 2بص + ج = 0$$

شروط هذه المعادلة :

$$(1) \text{ معامل } س^2 = \text{معامل } ص^2 = 1$$

$$(2) \text{ المعادلة = صفر}$$

المركز (أ، ب)

$$نصف القطر = \sqrt{أ^2 + ب^2 - ج}$$

إثبات المبرك و نصف القطر :

$$ر^2 = (س - د) + (ص - ه)$$

$$س^2 - 2دس + د^2 + ص^2 - 2هص + ه^2 = ر^2$$

$$س^2 - 2دس + د^2 + ص^2 - 2هص + ه^2 - ر^2 = 0$$

نفرض أن :

$$أ = د - د، \quad ب = ه - ه، \quad ج = د^2 + ه^2 - ر^2$$

$$س^2 + 2أس + 2بص + ج = 0$$

العامة	القياسية	
(أ، ب)	(د، ه)	المركز
$ر^2 = د^2 + ه^2 - ج$		
$= (أ)^2 + (ب)^2 - ج$	ر	نصف القطر
$ر = \sqrt{أ^2 + ب^2 - ج}$		

أسئلة :

أوجد مركز و نصف قطر الدائرة في كل من الحالات التالية :

$$1 \left[ س^2 + 2ص + 6س - 8ص - 9 \right] = 0$$

نستخدم الصورة العامة في الحالات التالية فقط :

- (١) تمر الدائرة بثلاث نقاط  
(٢) تمر بنقطتين ومركزها يقع على مستقيم

أسئلة :

١ | جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط : (٠ ، ٨) (٠ ، ٠) (٤ ، ٤) ؟

الحل:

$$س^٢ + ص^٢ + ٢س + ٢ب + ج = ٠$$

النقطة (٠ ، ٠)

تحقق المعادلة (٠ = ج + ٠ + ٠ + ٠)  $ج = ٠$

النقطة (٠ ، ٨)

تحقق المعادلة (٠ = ٠ + ٠ + ٠ + ١٦ + ٦٤)  $٤ = أ$

النقطة (٤ ، ٤)

تحقق المعادلة (٠ = ٠ + ١٦ - ٣٢ - ١٦ + ١٦)

$٠ = ب$

معادلة الدائرة :  $س^٢ + ص^٢ - ٨س = ٠$

٢ | جد معادلة الدائرة التي تمر (٠ ، ٢) (٠ ، ٠) (١٠ ، ٣)

الحل:

$$س^٢ + ص^٢ + ٢س + ٢ب + ج = ٠$$

النقطة (٠ ، ٠) تحقق المعادلة (٠ = ج + ٠ + ٠ + ٠)

$٠ = ج$

النقطة (٠ ، ٢) تحقق المعادلة (٠ = ٠ + ٠ + ٤ + ٠ + ٤)

$١ = أ$

النقطة (١٠ ، ٣) تحقق المعادلة (٠ = ٠ + ٢ب - ٦ - ١ + ٩)

$٠ = ب$

معادلة الدائرة =  $س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٤ص = ٠$

$$٦س^٢ + ٢ص^٢ - ٢س = ١٤$$

الحل:

$$٦س^٢ + ٢ص^٢ - ٢س - ١٤ = ٠$$

$$٦س^٢ + ٢ص^٢ - ٢س - ٧ = ٠$$

المركز =  $(٠ ، \frac{١}{٢})$  ،  $ر = \sqrt{٧ + ٠ + \frac{١}{٤}}$

$$٧س^٢ + ٢ص^٢ - ٦س - ٤ص = ٩$$

الحل:

$$٧س^٢ + ٢ص^٢ - ٦س - ٤ص - ٩ = ٠$$

المركز = (٢ ، ٣) ،  $ر = \sqrt{٩ + ٤ + ٩}$

$$٨(س+١) - ٢ص^٢ - ٦٤ص = ٠$$

الحل:

$$٨س^٢ + ٢ص^٢ + ٨س + ١ - ٢ص^٢ - ٦٤ص = ٠$$

$$٨س^٢ + ٢ص^٢ - ٢س - ٦٣ص = ٠$$

المركز = (١ ، -١) ،  $ر = \sqrt{٦٣ + ١ + ١}$

$$٩س^٢ - ٨١ = ٢(٩ - ٣ص)$$

الحل:

$$٨١ = ٢(٩ - ٣ص) + ٢س^٢$$

$$٨١ = ٢(٣ - ٣ص) + ٢س^٢$$

$$٩ = ٢(٣ - ٣ص) + ٢س^٢$$

المركز = (٣ ، ٠) ،  $ر = ٣$

$$١٠ | ٨ص - ٢ص^٢ = ٣س - ٥$$

الحل:

$$٨ص - ٢ص^٢ = (٣ + س)(٥ - س)$$

$$٨ص - ٢ص^٢ = ٢س^٢ - ٢س - ١٥$$

$$٢ص^٢ + ٢س - ٢س^٢ - ٨ص + ١٥ = ٠$$

المركز = (٤ ، ١) ،  $ر = \sqrt{١٥ + ١٦ + ١}$

٣] جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (٠، ١) (٠، ٧)

الحل:

$$س^2 + ص^2 + ٢أس + ٢بص + ج = ٠$$

النقطة (٠، ١) تحقق المعادلة = (٠ + ١ + ٢ + ٠ + ج) = ٠

$$ج = ١ - ٢ = -١ \quad \boxed{١}$$

النقطة (٠، ٧) تحقق المعادلة = (٠ + ٤٩ + ١٤ + ٠ + ج) = ٠

$$ج = ١٤ - ٤٩ = -٣٥ \quad \boxed{٢}$$

من معادلة ١] و ٢]

$$١ - ٢ = ١٤ - ٤٩ \Rightarrow ٣٨ = ٤٨ \Rightarrow ١٠ = ١٠$$

النقطة (٣، ٥) تحقق المعادلة = ٣٥ - ٩ + ٤٠ + ٦ + ج = ٠

$$ب = \frac{١-}{٦}$$

$$\boxed{٣} \quad \text{معادلة الدائرة: } س^2 + ص^2 - ٨س - ٣ص + ٧ = ٠$$

٤] جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (٦، ٢) (١، ٣)

الحل:

$$س^2 + ص^2 + ٢أس + ٢بص + ج = ٠$$

النقطة (٦، ٢) تحقق المعادلة = ٤ - ٣٦ + ١٢ + ٤ + ج = ٠

$$ج = ٤ - ١٢ - ٤ = -١٢ \quad \boxed{١}$$

النقطة (١، ٣) تحقق المعادلة = ٩ + ١ + ٦ + ٢ + ج = ٠

$$ج = ١٠ - ٦ - ٢ = ٢ \quad \boxed{٢}$$

النقطة (٣، ٥) تحقق المعادلة = ٢٥ - ٩ + ١٠ - ٦ + ج = ٠

$$ج = ٣٤ - ١٠ - ٦ = ١٨ \quad \boxed{٣}$$

من المعادلة ١] و ٢] تحذف ج:

$$٤ - ١٢ + ٢بص = ٤ - ١٢ + ٢بص$$

$$١٠ = ٢ب - ١٦ \quad \boxed{+}$$

$$٣٠ = ١٠ + ١٠ - ٢ب$$

$$\boxed{٤} \quad ٣ = ب - ١$$

من المعادلة ١] و ٣] تحذف ج:

$$٤ - ١٢ + ٢بص = ٤ - ١٢ + ٢بص$$

$$٣٤ = ٦ + ١١ \quad \boxed{+}$$

$$٦ - ١٨ + ٢ب = ٦ - ١٨ + ٢ب$$

$$\boxed{٥} \quad ١ - ٣ = ب - ١$$

من المعادلة ٤] و ٥] تحذف أ:

$$٣ = ب - ١$$

$$١ = ب - ٣ \quad \boxed{+}$$

$$١ - ٣ = ب - ٣ \Rightarrow ١ = ب$$

بالتعويض بمعادلة ٤]: (٣ = ١ + أ) :  $\boxed{٤} \Rightarrow \boxed{٢} = أ$

بالتعويض بمعادلة ١]:

$$\boxed{٢٠} = ج - ٢ \Rightarrow ج = ٢٠ + ٢ = ٢٢$$

معادلة الدائرة:

$$\boxed{٥} \quad س^2 + ص^2 + ٤س - ٢ص - ٢٠ = ٠$$

٥] جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (٣، ١) والنقطة

(١، ٥) ويقع مركزها على محور السينات؟

الحل:

$$س^2 + ص^2 + ٢أس + ٢بص + ج = ٠$$

المركز (أ، -ب) يمر بالمحور السيني (ص = ٠)

$$٠ = ب - أ \Rightarrow \boxed{٠} = ب$$

النقطة (١، ٣) تحقق معادلة الدائرة:

$$\boxed{١} \quad ١٠ = ج + ١ + ٩ \Rightarrow ج = ١٠ - ١٠ = ٠$$

النقطة (٥، ١) تحقق المعادلة:

$$\boxed{٢} \quad ٢٦ = ج + ٢٥ + ١ \Rightarrow ج = ٢٦ - ٢٦ = ٠$$

من المعادلة ١] و ٢]  $٢٦ - ١٢ = ١٠ - ١٦ \Rightarrow ١٤ = ١٤$

$$\boxed{٤} = أ$$

بالتعويض بمعادلة ١]  $١٠ = ٤ + ٦ - ج \Rightarrow ج = ٦ - ٤ = ٢$

$$\boxed{٣٤} = ج - ٢$$

# معادلة الدائرة:  $\boxed{٥} \quad س^2 + ص^2 + ٨س - ٢ص - ٣٤ = ٠$

٦] جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٤، -١)، (٥، -٢) ويقع مركزها على محور الصادات ؟

الحل:

$$س^٢ + ص^٢ + ٢س + ٢ب + ج = ٠$$

المركز (-، أ) ، (-، ب) تمر بمحور الصادات (س = ٠)

$$٠ = أ \Rightarrow ٠ = أ$$

النقطة (٤، -١) تحقق المعادلة:  $١٦ - ١ + ٢ب + ج = ٠$

$$ج = ٢ب - ١٧ \dots\dots [١]$$

النقطة (٥، -٢) تحقق المعادلة:  $٢٥ + ٤ + ٢ب + ج = ٠$

$$ج = -٤ب - ٢٩ \dots\dots [٢]$$

من المعادلة [١] و [٢]  $١٧ - ٢ب = -٤ب - ٢٩$

$$١٢ = ٢ب \Rightarrow ٦ = ب$$

بالتعويض بالمعادلة [١]:  $ج = ٢ \times ٦ - ١٧ = -٥$

معادلة الدائرة:

$$س^٢ + ص^٢ - ١٢س - ١٠ص - ٢١ = ٠$$

٧] جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٢، ٣) و (١، -١) ويقع مركزها على الخط المستقيم

س - ٣ص = ١١ ؟

الحل:

$$س^٢ + ص^٢ + ٢س + ٢ب + ج = ٠$$

المركز (-، أ) ، (-، ب) تمر بالمستقيم س - ٣ص = ١١

$$٠ = ١١ - ٣ب - أ \dots\dots [١]$$

النقطة (٢، ٣) تحقق المعادلة:  $٤ + ٩ + ٢ب + ٦ + ج = ٠$

$$٤ + ٦ + ٢ب + ج = -١٣ \dots\dots [٢]$$

النقطة (١، -١) تحقق المعادلة:  $١ + ١ + ٢ب + ٢ + ج = ٠$

$$٢ + ٢ب + ج = -٢ \dots\dots [٣]$$

من المعادلة [٢] و [٣] نحذف ج:

$$١٣ = ٦ + ٢ب$$

$$٢ = ٢ب - ١٢ \Rightarrow ١٦ = ٢ب \Rightarrow ٨ = ب$$

$$١١ = ٢ + ٢ب \Rightarrow ٩ = ٢ب \Rightarrow ٤.٥ = ب$$

من المعادلة [١] و [٤] نحذف أ فذلك من خلال ضرب

المعادلة [١] بالعدد (٦):

$$٦٦ = ١٨ب + ٦أ$$

$$١١ = ٤ب + أ \quad [٤]$$

$$٥٥ = ٢٢ب \Rightarrow ٢.٥ = ب$$

بالتعويض بالمعادلة [١]  $١١ = ٤ \times ٢.٥ + أ$

$$أ = \frac{٧}{٢}$$

بالتعويض بالمعادلة [٢]:  $١٣ = ٤ب + ١٥ + ١٤$

$$ج = -١٤$$

معادلة الدائرة:

$$س^٢ + ص^٢ - ٧س + ٥ص - ١٤ = ٠$$

٨] جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (١، -٢) و (٤، -٣) ويقع مركزها على المستقيم س + ٤ص = ٥ ؟

الحل:

$$س^٢ + ص^٢ + ٢س + ٢ب + ج = ٠$$

المركز (-، أ) ، (-، ب) يحقق معادلة المستقيم: س + ٤ص = ٥

$$٥ = ٤ب - أ \dots\dots [١]$$

النقطة (١، -٢) تحقق المعادلة:  $١ + ٤ + ٢ب - ٤ + ج = ٠$

$$٢ب + ج = -٥ \dots\dots [٢]$$

النقطة (٤، -٣) تحقق المعادلة:  $١٦ + ٩ + ٢ب - ١٨ + ج = ٠$

$$٢ب + ج = -٢٥ \dots\dots [٣]$$

من المعادلة [٢] و [٣] نحذف ج:

$$٥ = ٢ب - ١٢$$

$$٢٥ = ٦ + ٢ب \Rightarrow ١٩ = ٢ب \Rightarrow ٩.٥ = ب$$

$$٢٠ = ٢ب - ١٢ \Rightarrow ٣٢ = ٢ب \Rightarrow ١٦ = ب$$

من المعادلة ١ و ٤ نحذف ب فذلك من خلال ضرب

المعادلة ٢ بالعدد (٢):

$$٥ = ١٣ - ٤ب$$

$$٤٠ = ١٢٠ - ٨ب \quad \boxed{+}$$

$$\boxed{٣ = أ} \quad \leftarrow ٤٥ = ١٥٠ - ٨ب$$

بالتعويض بالمعادلة ١:  $(٥ = ٤ب - ٩) \leftarrow ١ = ب$

بالتعويض بالمعادلة ٢:  $(٥ = ج + ٤ - ٦) \leftarrow ٥ = ج$

معادلة الدائرة:

$$. = ٥ + ٢ص + ٦س - ٢ص - ٢س$$

أسئلة:

١| اذا كان نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

$$س^٢ + ٢ص + ل + س - ١٠ - ١٥ = صفر$$

يساوي ٧ وحدات فجد قيمة الثابت ل ؟

الحل:

$$٤٠ + \frac{٢ل}{٤} = ٤٩ \leftarrow \sqrt{١٥ + ٢٥ + \frac{٢ل}{٤}} = ٧ = ر$$

$$\boxed{٦ \pm = ل} \leftarrow ٣٦ = ٢ل \leftarrow ٩ = \frac{٢ل}{٤}$$

٢| اذا كان  $س^٢ + ٢ص + ٦س - ١٠ = ص = ك$  تمثل معادلة

دائرة طول نصف قطرها ٦ وحدات فجد قيمة الثابت ك .

الحل:

$$. = ٥ + ٢ص - ١٠ - ٦س = ك$$

$$٦ = ر = \sqrt{٤٧ + ٢٥ + ٦ك} \leftarrow ٣٦ = ٢٩ + ك$$

$$\boxed{٧ = ك}$$

٣| جد طول الجزء الذي تقطعه الدائرة:

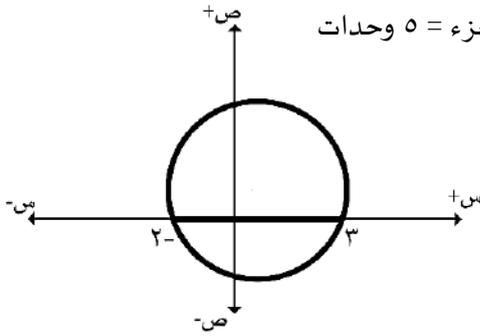
$$س^٢ + ٢ص - ٣س + ٦ = ٠ \text{ مع محور السينات ؟}$$

الحل:

$$س^٢ + ٢ص - ٣س + ٦ = ٠ \leftarrow س^٢ - ٣س + ٦ = ٠$$

$$(س + ٢)(س - ٣) = ٠ \quad \boxed{س = ٣} \quad \boxed{س = -٢}$$

طول الجزء = ٥ وحدات



٤| جد طول القطع التي تقطعه الدائرة:

$$س^٢ + ٢ص + ٨س - ١٠ + ١٦ = ٠ \text{ مع محور الصادات .}$$

مع محور الصادات .

الحل:

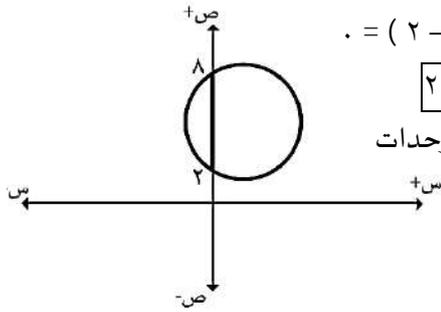
تقطع الدائرة محور الصادات  $\leftarrow س = ٠$

$$. = ١٦ + ١٠ - ٠ + ٢ص = ٠$$

$$٢ص = ١٠ - ١٦ = -٦$$

$$ص = -٣ \quad \boxed{ص = ٨} \quad \boxed{ص = ٢}$$

طول الجزء = ٦ وحدات



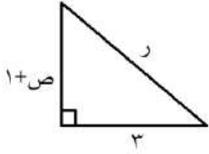
٥| جد معادلة الدائرة التي مركزها (٥، ٣) وتقطع مع

محور السينات وت رلهذه الدائرة طوله ٨ وحدات ؟

الحل:

$$٢ر = (٣ - ص) + (٥ - س)$$

٧] جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل و يقطعها مستقيمان متوازيان طول وتر الاول ٨ وحدات و طول وتر الثاني ٦ وحدات و المسافة بينهما وحدة واحدة



$$r^2 = 16 + v^2$$

$$v = \sqrt{16 - r^2}$$

$$r^2 = 9 + (1 + v)^2$$

$$r^2 = 9 + (1 + \sqrt{16 - r^2})^2$$

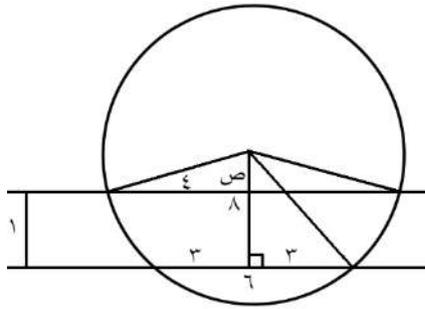
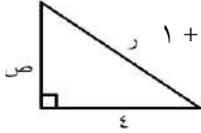
$$\frac{r}{2} = \frac{r}{2} - 16 + 2 + 1 + \sqrt{16 - r^2} + 9$$

$$0 = \sqrt{16 - r^2} - 2 + 6$$

$$2 = \sqrt{16 - r^2} \Leftrightarrow 6 = \sqrt{16 - r^2}$$

$$r^2 = 16 - 9 = 7 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{7}$$

معادلة الدائرة:  $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 7$



تذكر

قانون فيثاغورس:

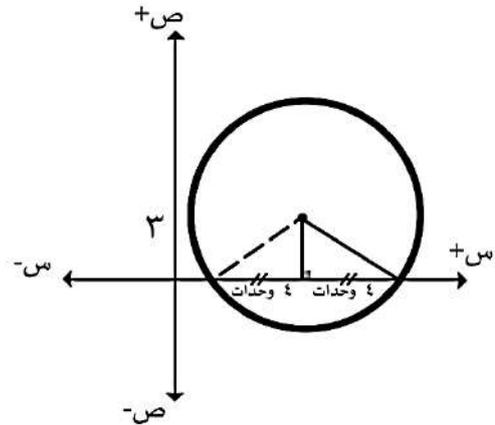
$$(الوتر)^2 = (الضلع_1)^2 + (الضلع_2)^2$$

$$r^2 = 9 + 16 = 25$$

$$r^2 = (5 - 3)^2 + (3 - v)^2$$

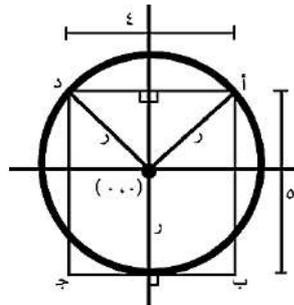
تذكر

أن العمود الساقط من مركز الدائرة على الوتر ينصفه.



٦] معتمدا على الرسم الذي يظهر فيه دائرة مركزها نقطة الاصل و المستطيل أ، ب، ج، د حيث أب = ٥ ، أد = ٤ فما معادلة الدائرة.

الحل:

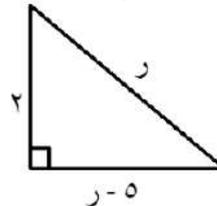


$$r^2 = (5 - 0)^2 + 4^2$$

$$\frac{r}{2} + 10 - 25 + 4 = \frac{r}{2}$$

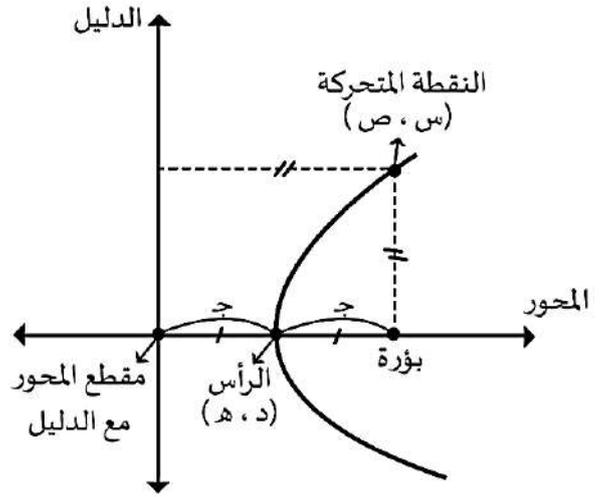
$$10 = r \Leftrightarrow r = \frac{29}{10}$$

معادلة الدائرة:  $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (\frac{29}{10})^2$



القطع المكافئ :

القطع المكافئ: هو المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) المتحركة في المستوى التي يكون بعدها عن نقطة ثابتة (ب) تسمى البؤرة مساويا دائما لبعدها عن مستقيم معلوم (ل) يسمى الدليل لا يحوي النقطة (ب) .



عناصر القطع المكافئ :

- ١) البؤرة : نقطة داخل القطع وتقع دائما على المحور
- ٢) الدليل : مستقيم خلف القطع ويكون دائما عموديا على المحور.
- ٣) المحور : هو المستقيم م الذي يقسم القطع الى جزئين متماثلين.
- ٤) الرأس : هي نقطة تقع على المحور ويقع في المنتصف بين البؤرة والدليل .

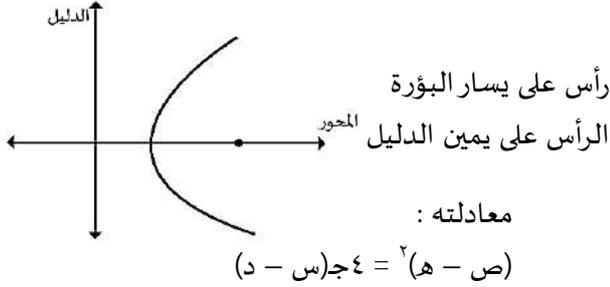
ملاحظات :

- ١) المسافة بين الرأس والدليل يساوي المسافة بين الرأس والبؤرة = ج
- ٢) ج دائما موجبة لانها تعبر عن مسافة .
- ٣) بعد البؤرة عن الدليل = ٢ ج
- ٤) الاختلاف المركزي لهذا القطع (هـ = ١) دائما

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ

١] المحور يوازي محور السينات :

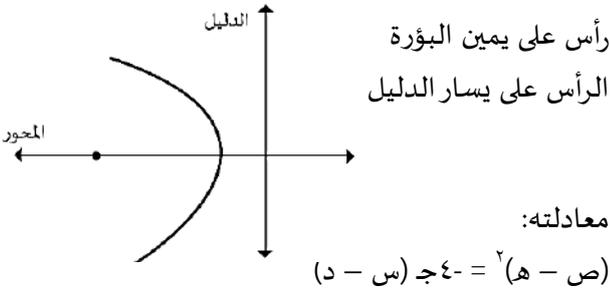
أ) إتجاه فتحة القطع لليمين يسمى "سيبي موجب"



معادلته :

$$(ص - هـ)² = ٤ج(س - د)$$

ب) إتجاه فتحة القطع لليسار يسمى "سيبي سالب"

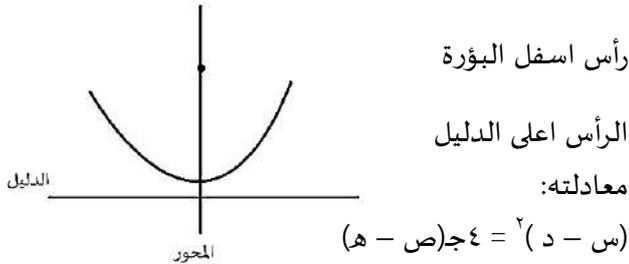


معادلته :

$$(ص - هـ)² = -٤ج(س - د)$$

٢] المحور يوازي محور الصادات :

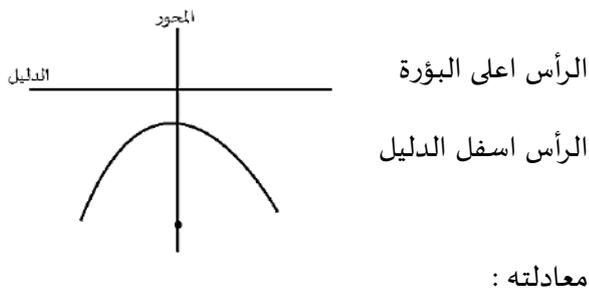
أ) إتجاه فتحة القطع للأعلى يسمى "صادي موجب"



معادلته :

$$(د - س)² = ٤ج(ص - هـ)$$

ب) إتجاه فتحة القطع للأسفل يسمى "صادي سالب"



معادلته :

$$(د - س)² = -٤ج(ص - هـ)$$

ملاحظة مهمة

- التربيع في المعادلة عكس نوع القطع .
- إذا اعطانا السؤال خصائص وطلب منا معادلة نرسم .

أسئلة :

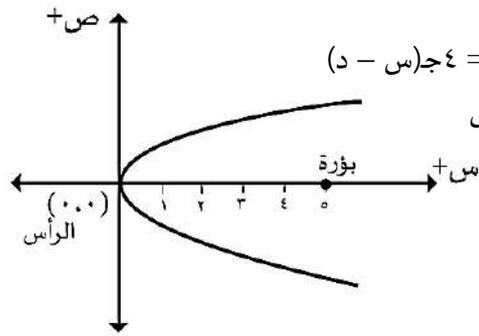
جد معادلة القطع المكافئ في كل من الحالات التالية :

١ رأسه (٠ ، ٠) وبؤرته (٠ ، ٥) ؟

الحل:

$$(ص - هـ) = ٤ج(د - س)$$

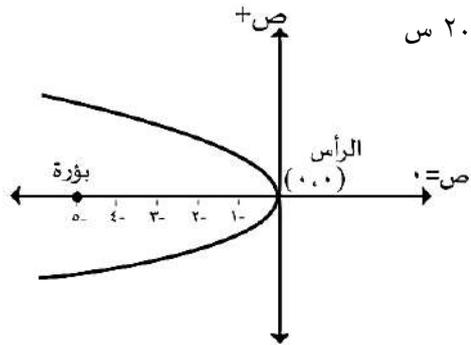
$$ص = ٢٠ = ٤ج$$



٢ رأسه (٠ ، ٠) وبؤرته (٠ ، -٥) ؟

$$(ص - هـ) = ٤ج(د - س)$$

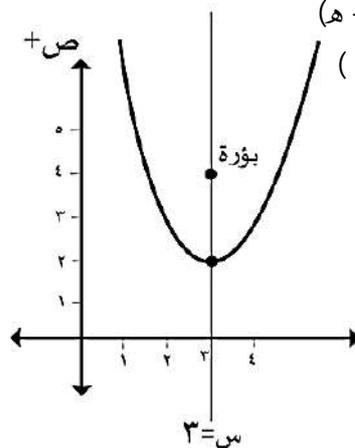
$$ص = ٢٠ = ٤ج$$



٣ رأسه (٢ ، ٣) ، وبؤرته (٤ ، ٣) ؟

$$(ص - هـ) = ٤ج(د - س)$$

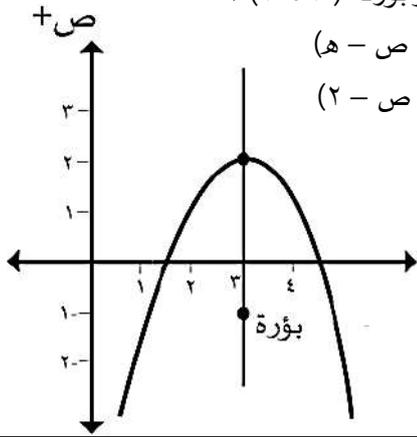
$$(ص - ٣) = ٨ج(د - ٢)$$



٤ رأسه (٢ ، ٣) وبؤرته (١٠ ، ٣) ؟

$$(ص - د) = ٤ج(هـ - س)$$

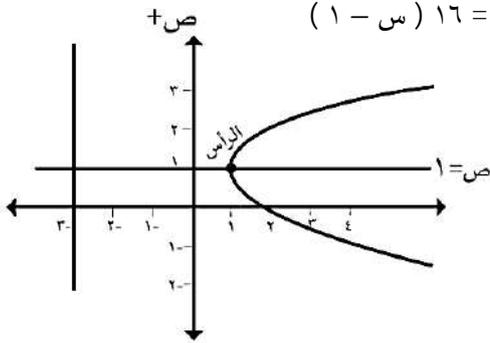
$$(ص - ٣) = ١٢ج(٢ - س)$$



٥ رأسه (١ ، ١) ودليله س = ٣ ؟

$$(ص - هـ) = ٤ج(د - س)$$

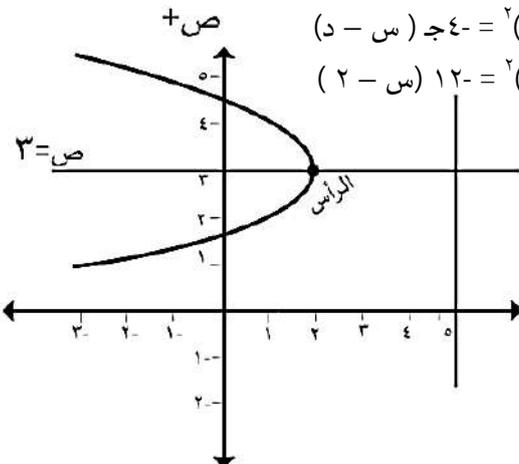
$$(ص - ١) = ١٦ج(١ - س)$$



٦ رأسه (٣ ، ٢) ودليله س = ٥ ؟

$$(ص - هـ) = ٤ج(د - س)$$

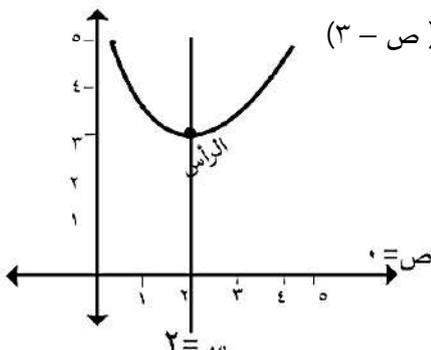
$$(ص - ٢) = ١٢ج(٣ - س)$$



٧ رأسه (٣ ، ٢) ودليله محور السينات ؟

$$(ص - د) = ٤ج(هـ - س)$$

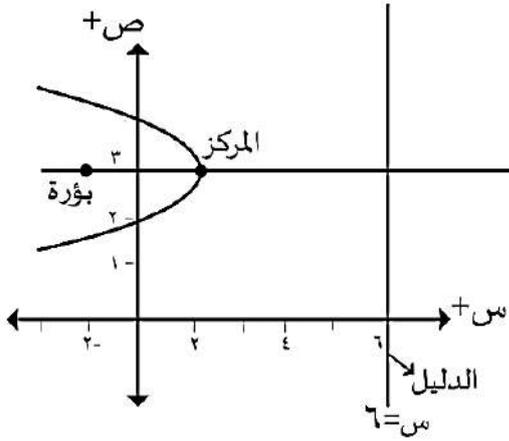
$$(ص - ٢) = ١٢ج(٣ - س)$$



١١ | أوجد معادلة المحل الهندسي الذي تتحرك عليه النقطة ن (س ، ص) بحيث بعدها عن النقطة (٣ ، ٢-) يساوي بعدها عن المستقيم  $s = 6$  ؟  
\* تعريف القطع المكافئ :

$$(ص - ٢) = \sqrt{(س - ٣)^2}$$

$$(ص - ٢) = \sqrt{(س - ٣)^2}$$



ملاحظة مهمة

- البؤرة = الرأس + ج
- الدليل = الرأس - ج

\* إذا مر القطع المكافئ بنقطة أو نقطتين فإننا :  
(١) نحدد نوع القطع سيني أو صادي  
(٢) نكتب المعادلة مع اهمال الاشارة .  
(٣) النقطة تحقق المعادلة.

أسئلة :

١ | جد معادلة القطع المكافئ اذي رأسه (٣ ، ٢-) محوره يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (٧ ، ٠) ؟  
الحل:

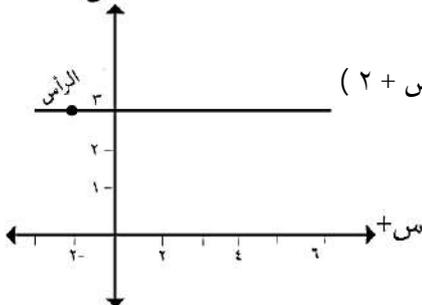
$$(ص - ٢) = \sqrt{(س - ٣)^2}$$

$$(ص - ٢) = \sqrt{(س - ٣)^2}$$

$$\frac{ص - ٢}{س - ٣} = \frac{١٦}{٨} \iff (ص - ٢) = \frac{١٦}{٨}(س - ٣)$$

$$٢ = ج$$

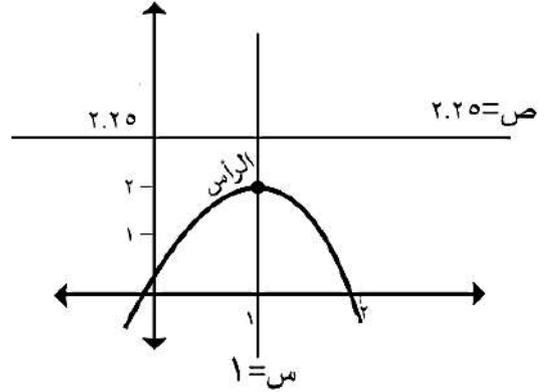
$$(ص - ٢) = \frac{١٦}{٨}(س - ٣)$$



٨ | رأسه (٢ ، ١) ودليله  $s = 2.25$  ؟

$$(ص - ١) = \sqrt{(س - ٢)^2}$$

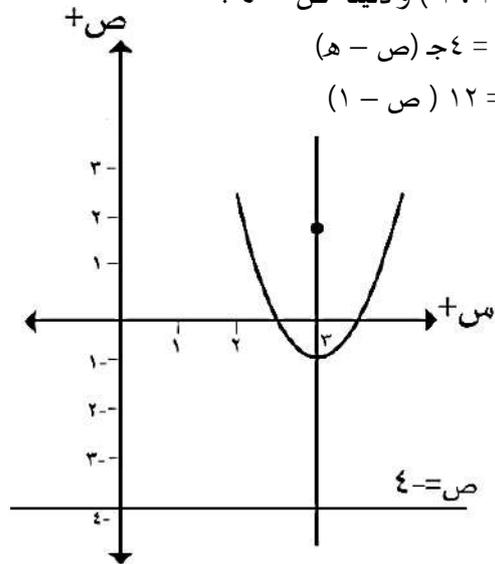
$$(ص - ١) = \sqrt{(س - ٢)^2}$$



٩ | بؤرته (٢ ، ٣) ودليله  $s = 4$  ؟

$$(ص - ٣) = \sqrt{(س - ٢)^2}$$

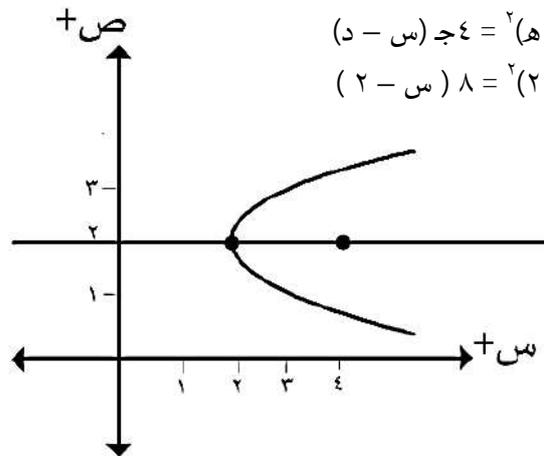
$$(ص - ٣) = \sqrt{(س - ٢)^2}$$



١٠ | بؤرته (٢ ، ٤) ودليله محور الصادات ؟

$$(ص - ٤) = \sqrt{(س - ٢)^2}$$

$$(ص - ٤) = \sqrt{(س - ٢)^2}$$



٢] جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه  $(-2, 2)$  ومحوره

يوازي المستقيم  $v = 7$  ويمر بالنقطة  $(4, 5)$  ؟

$$(ص - هـ) = ٢(٤ - س)$$

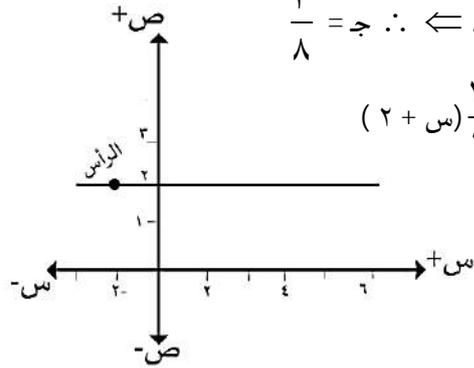
$$(ص - ٢) = ٢(٤ - (س + ٢))$$

النقطة  $(4, 5)$  تحقق المعادلة :

$$(٢ - ٥) = ٢(٤ - (س + ٢))$$

$$\frac{٣}{٨} = ج \cdot \frac{٢٤}{٢٤} = \frac{٩}{٢٤}$$

$$(ص - ٢) = ٢(٤ - (س + ٢))$$



٣] جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته النقطة  $(3, 1)$

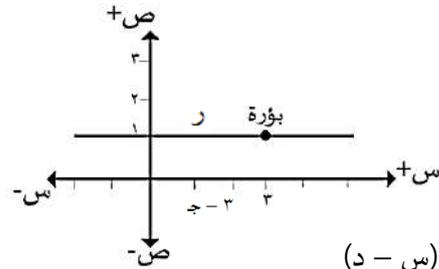
ومحوره يوازي محور السينات ويمر بمنحناه

بالنقطة  $(0, 5)$  ؟

الحل:

$$ر(٣ - ج, ١)$$

$$ج = ؟؟$$



$$(ص - هـ) = ٢(٤ - (س - د))$$

$$(ص - ١) = ٢(٤ - (س - ٣))$$

النقطة  $(0, 5)$  تحقق المعادلة

$$١٦ = ٤(٣ - ج)$$

$$٤ = ٣ - ج$$

$$ج = ٣ - ٤ = -١$$

$$٤ = ج$$

$$(ص - ١) = ٢(٤ - (س - ٣))$$

$$ج = -١$$

$$(ص - ١) = ٢(٤ - (س - ٣))$$

٤] جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور

السينات وبؤرته  $(-3, 3)$  ويمر بالنقطة  $(0, 1)$  ويقع

رأسه على يمين بؤرته ؟

الحل:

$$ر: (-٣ - ج, ٣)$$

$$ج = ؟؟$$

$$(ص - هـ) = ٢(٤ - (س - د))$$

$$(ص - ٣) = ٢(٤ - (س + ٣))$$

النقطة  $(0, 1)$  تحقق المعادلة :

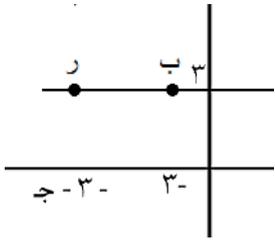
$$١٦ = ٤(٣ - ج)$$

$$ج = ٣ - ٤ = -١$$

ج = ١ تهمل لان الرأس يقع على يمين البؤرة

$$ج = -٤$$

$$\therefore (ص - ٣) = ٢(٤ - (س - ٣))$$



٥] جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور

الصادات وبؤرته  $(3, 1)$  ويمر بالنقطة  $(5, 1)$  ويقع

رأسه أسفل بؤرته؟

الحل:

$$ر: (١, ٣ - ج)$$

$$ج = ؟؟$$

$$(س - د) = ٢(٤ - (ص - هـ))$$

$$(٣ - س) = ٢(٤ - (ص - ١))$$

النقطة  $(5, 1)$  تحقق المعادلة :

$$٤ = ٤(١ - (١ + ج))$$

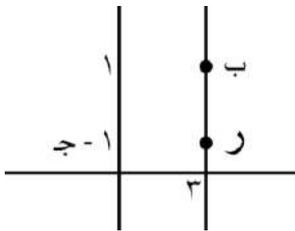
$$١ = ج$$

اما: ج = -١ تهمل لان الرأس أسفل البؤرة

$$أو: ج = ١$$

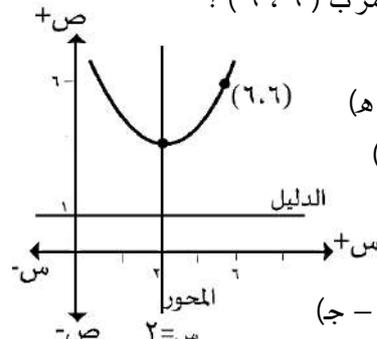
المعادلة :

$$(س - ٣) = ٢(٤ - (ص - ١))$$



٦] جد معادلة القطع المكافئ الذي معادله محوره  $s = 2$  و معادله دليله  $v = 1$  ويمر ب  $(6, 6)$  ؟

الحل:



$$(s - 2) = 4(v - 1) \quad (s - 2) = 4(6 - 1)$$

$$(s - 2) = 4(v - 1) \quad (s - 2) = 20$$

$$s - 2 = 20 \quad s = 22$$

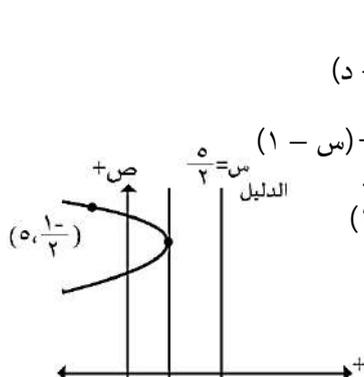
المعادلات:

$$s = 2 \quad v = 1$$

$$s = 22 \quad v = 1$$

٨] جد معادلة القطع المكافئ الذي يقع رأسه على المستقيم  $s = 1$  و معادله دليله  $s = 5 - 5$  و يمر بالنقطة  $(5, \frac{1}{2})$ .

الحل:



$$(s - 5) = 4(v - \frac{1}{2}) \quad (1 - 5) = 4(v - \frac{1}{2})$$

$$(s - 5) = 4(v - \frac{1}{2}) \quad -4 = 4(v - \frac{1}{2})$$

$$(s - 5) = 4(v - \frac{1}{2}) \quad -4 = 4v - 2$$

$$(s - 5) = 4(v - \frac{1}{2}) \quad -4 = 4v - 2$$

$$(s - 5) = 4(v - \frac{1}{2}) \quad -4 = 4v - 2$$

النقطة  $(5, \frac{1}{2})$  تحقق المعادلة:

$$9 = (5 - 5) = 4(v - \frac{1}{2}) \quad 9 = 4(v - \frac{1}{2})$$

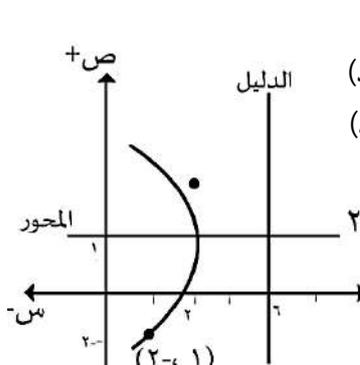
$$9 = 4(v - \frac{1}{2}) \quad 9 = 4v - 2$$

$$9 = 4v - 2 \quad 11 = 4v$$

$$v = \frac{11}{4}$$

٧] جد معادلة القطع المكافئ الذي معادله محوره  $v = 2$  و معادله دليله  $s = 6$  و يمر بمنحناه بالنقطة  $(2, 1)$ .

الحل:



$$(s - 6) = 4(v - 2) \quad (2 - 6) = 4(v - 2)$$

$$(s - 6) = 4(v - 2) \quad -4 = 4(v - 2)$$

$$(s - 6) = 4(v - 2) \quad -4 = 4v - 8$$

$$(s - 6) = 4(v - 2) \quad -4 = 4v - 8$$

$$(s - 6) = 4(v - 2) \quad -4 = 4v - 8$$

النقطة  $(2, 1)$  تحقق المعادلة:

$$16 = (2 - 6) = 4(v - 2) \quad 16 = 4(v - 2)$$

$$16 = 4(v - 2) \quad 16 = 4v - 8$$

$$16 = 4v - 8 \quad 24 = 4v$$

$$v = 6$$

٩] جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره هو محور السينات و يمر بالنقطتين  $(8, 10)$  و  $(4, 4)$  ؟

الحل:

$$(s - 4) = 4(v - 4) \quad (8 - 4) = 4(v - 4)$$

$$(s - 4) = 4(v - 4) \quad 4 = 4(v - 4)$$

$$(s - 4) = 4(v - 4) \quad 4 = 4v - 16$$

$$(s - 4) = 4(v - 4) \quad 4 = 4v - 16$$

$$(s - 4) = 4(v - 4) \quad 4 = 4v - 16$$

النقطة  $(8, 10)$  تحقق المعادلة:

$$64 = (8 - 4) = 4(v - 4) \quad 64 = 4(v - 4)$$

$$64 = 4(v - 4) \quad 64 = 4v - 16$$

$$64 = 4v - 16 \quad 80 = 4v$$

$$v = 20$$

SALAMAT

١٠] جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره هو محور

السينات ويمر بالنقطتين (٤، ١)، (٥، ٨).

الحل:

$$(ص - ه) ج٤ = ٤ (س - د)$$

$$ص = ٤ (س - د)$$

النقطة (٤، ١) تحقق المعادلة:

$$١٦ = ٤ (د - ١) \dots (١)$$

النقطة (٥، ٨) تحقق المعادلة:

$$٦٤ = ٤ (د - ٥) \dots (٢)$$

بقسمة المعادلتين (١) على (٢):

$$\frac{د-١}{د-٥} = \frac{١}{٤} = \frac{٤(د-١)}{٤(د-٥)} = \frac{٤د-٤}{٤د-٢٠}$$

$$٣ = د - ٥ \Leftarrow ٩ = د٣ \Leftarrow ٤ = د - ٥ \Leftarrow ٣ = د$$

بالتعويض بالمعادلة (١):

$$١٦ = ٤ (٩ - ١) \Leftarrow ٢ = ج$$

المعادلة: ص = ٨ - (س - ٣)

١١] جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره المستقيم

س = ٢ ويمر بالنقطتين (٣، ١)، (٥، ٣).

الحل:

$$(س - د) ج٤ = ٤ (ص - ه)$$

$$(س - ٢) ج٤ = ٤ (ص - ه)$$

النقطة (٣، ١) تحقق المعادلة:

$$١ = ٤ (١ - د) \dots (١)$$

النقطة (٥، ٣) تحقق المعادلة:

$$٩ = ٤ (٣ - د) \dots (٢)$$

بالقسمة معادلة (١) على (٢):

$$\frac{١-١}{٣-١} = \frac{١}{٩} \Leftarrow \frac{٤(١-١)}{٤(٣-١)} = \frac{١}{٩}$$

$$١٢ = ٣ - ه \Leftarrow ٩ = ه - ١٢ = ٣ - ه$$

ه =  $\frac{٣-١٢}{٢} \Leftarrow$  بالتعويض بالمعادلة (١):

$$١ = ٤ (١ - د) \Leftarrow \frac{٣}{٢} = ١ - د$$

$$\frac{١}{٢} = د$$

المعادلة: (س - ٢) ج٤ = ٤ (ص +  $\frac{٣}{٢}$ )

١٢] جد معادلة القطع المكافئ الذي يقع رأسه على

المستقيم س = ١ وبؤرته على المستقيم ص = ٢ ويمر

بالنقطة (٣، ٤).

الحل:

$$(ص - ه) ج٤ = ٤ (س - د)$$

$$(ص - ٢) ج٤ = ٤ (س + ١)$$

النقطة (٣، ٤) تحقق المعادلة:

$$٤ = ٤ (٢ - ٣) \Leftarrow ١ = ج$$

$$\frac{١}{٤} = ج \Leftarrow ١٦ = ٤$$

المعادلة: (ص - ٢) ج٤ = ٤ (س + ١)

١٣] جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي

الصادات ورأسه يقع على المستقيم ص = س ويمر

بالنقطتين (٤، ٣)، (٠، ٣).

الحل:

$$(س - د) ج٤ = ٤ (ص - ه)$$

الرأس (د، ه) يحقق معادلة المستقيم ص = س، ه = د

$$(س - د) ج٤ = ٤ (ص - ه)$$

النقطة (٣، ٤) تحقق المعادلة:

$$٤ = ٤ (د - ٣) \dots (١)$$

النقطة (٠، ٣) تحقق المعادلة:

$$٠ = ٤ (د - ٣) \dots (٢)$$

بالقسمة المعادلة (١) على (٢):

$$١ = \frac{٤(د-٣)}{٤(د-٣)} = \frac{٤(د-٣)}{٤(د-٣)}$$

$$١٦ = د + ٨ \Leftarrow ٨ = د \Leftarrow ٢ = د$$

ه = ٢.

بالتعويض بالمعادلة (١):

$$٤ = ٤ (٢ - ٣) \Leftarrow ٤ = ج$$

المعادلة: (س - ٢) ج٤ = ٤ (ص - ٢)

ملاحظة مهمة

إذا مر القطع المكافئ بثلاث نقاط فإننا نستخدم الصورة العامة :

(أ) محوره يوازي محور السينات فإن القطع سيني و معادلته :

$$س = أص^٢ + ب ص + ج \quad أ \neq \text{صفر}$$

و يكون : (١) سيني موجب أ < .

(٢) سيني سالب أ > .

(ب) محوره يوازي محور الصادات فإن القطع صادي و معادلته :

$$ص = أس + ب + ج \quad أ \neq \text{صفر}$$

و يكون : (١) صادي موجب أ < .

(٢) صادي سالب أ > .

أسئلة :

١] جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات و يمر بالنقاط (٠ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١- ، ٦-).

الحل:

$$س = أص^٢ + ب ص + ج$$

النقطة (٠ ، ٣) تحقق المعادلة :

$$٣ = ٠ + ٠ + ج \quad \leftarrow (ج = ٣)$$

النقطة (١ ، ٤) تحقق المعادلة :

$$٤ = أ + ب + ٣ \quad \leftarrow أ + ب = ١ \quad \dots (١)$$

النقطة (٦- ، ١-) تحقق المعادلة :

$$٦ = أ - ب + ٣ \quad \leftarrow أ - ب = ٣ \quad \dots (٢)$$

من المعادلة (١) و (٢) تحل بالحذف :

$$١ = \cancel{أ} - \cancel{ب}$$

$$٣ = \cancel{أ} + \cancel{ب}$$

$$٤ = أ٢ \quad \leftarrow (أ = ٢) (ب = ١-)$$

$$\text{المعادلة : } س = ٢ص^٢ - ص + ٣$$

٢] جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقاط (٣ ، ٢) ، (١ ، ٦) ، (١ ، ٠) و دليله يوازي محور السينات .

$$\text{الحل : } ص = أس^٢ + ب س + ج$$

النقطة (١ ، ٠) تحقق المعادلة :

$$٠ = ١ + ٠ + ج \quad \leftarrow (ج = ١-)$$

النقطة (٣ ، ٢) تحقق المعادلة :

$$٢ = ٩ + ٣ + ١- \quad \dots (١)$$

النقطة (١ ، ٦) تحقق المعادلة :

$$٦ = ١ + ٦ + ١- \quad \dots (٢)$$

من المعادلة (١) ، (٢) بالحذف و ذلك بضرب المعادلة (١) بالعدد {-٢} :

$$٢- = \cancel{١٨} - \cancel{٦} - ٢-$$

$$١ + \cancel{٦} + \cancel{١٣٦} = ١ \quad \leftarrow$$

$$\leftarrow (١ = \frac{١-}{٩}) \quad \frac{١-}{٩} = ١$$

بالتعويض بمعادلة (١) :

$$٢ = ١ + ٣ + ١- \quad \leftarrow (ب = \frac{٣}{٢})$$

$$\text{المعادلة : } ص = \frac{١-}{٩} س^٢ + \frac{٣}{٢} س + ١$$

٣] جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور

الصادات و يمر بالنقاط (٩ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ١) ؟

الحل:

$$ص = أس^٢ + ب س + ج$$

النقطة (٩ ، ٣) تحقق المعادلة :

$$٩ = ٨١ + ٣ + ج \quad \dots (١)$$

النقطة (٣ ، ٢) تحقق المعادلة :

$$٣ = ٩ + ٢ + ج \quad \dots (٢)$$

النقطة (١ ، ١) تحقق المعادلة :

$$١ = ١ + ١ + ج \quad \dots (٣)$$

من المعادلة (١) ، (٢) بالحذف :

$$٩ = ٨١ + ٣ + ج$$

$$\leftarrow ٣ = ٩ + ١ + ج$$

$$٦ = ٨٠ + ٢ + ج \quad \dots (٤)$$

من المعادلة (٤) و (٥) : وذلك بضرب المعادلة (٤) بالعدد {٢-} :

$$\cancel{2} - 6 = 4 - 2$$

$$\cancel{2} + 8 = 6 \quad \boxed{+}$$

$$1 = 1 \quad \leftarrow \quad 2 = 2$$

بالتعويض بالمعادلة (٤) :

$$1 = 1 \quad \leftarrow \quad 2 = 2 + 3$$

بالتعويض بالمعادلة (١) :

$$2 = 2 - 1 + 1 \quad \leftarrow \quad (2 = 2)$$

المعادلة :

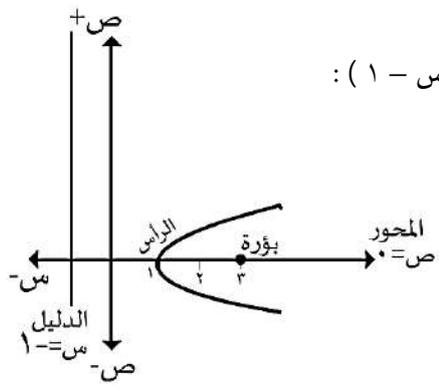
$$ص = 2 - س + 2$$

**ملاحظة مهمة**

إذا اعطانا السؤال معادلة و طلب منا الخصائص فإننا :  
 (١) نجعل المعادلة على الوضع القياسي ( وذلك عن طريق إكمال مربع )  
 (٢) نرسم لايجاد الخصائص .

**أسئلة :**

- في الاسئلة الاتية جد :
- أ : إحداثيات الرأس .
- ب : إحداثيات البؤرة .
- ج : معادلة الدليل .
- د : معادلة المحور .
- هـ : نقطة تقاطع الدليل مع المحور .



- ١ | ص = ٨ (س - ١) :
- أ : (٠ ، ١)
- ب : (٠ ، ٣)
- ج : س = ١
- د : ص = ٠
- هـ : (٠ ، -١)

من المعادلة (١) و (٣) بالحذف :

$$9 = 9 + 3 + 1$$

$$1 = 1 + 1 + 1 \quad \boxed{-}$$

$$8 = 8 + 2 + 1 \dots \dots (٥)$$

من المعادلة (٤) و (٥) بالحذف :

$$\cancel{4} - 5 = 6 - 4$$

$$\cancel{4} - 4 = 4 - 4 \quad \boxed{-}$$

(٤) بالتعويض بمعادلة (٤)  $1 = 2$

$$6 = 6 + 1 + 1 \quad \leftarrow \quad 6 = 6 - 1$$

$$1 = 1 - 2 + 4 + 1 \quad \leftarrow \quad 3 = 3$$

المعادلة :

$$ص = 2س - ٤س + ٣$$

٤ | جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقاط (١ ، ٢) ، (٤ ، ٢) ، (٣ ، ٨) ومحوره يوازي الصادات .  
 الحل:

$$ص = ٢س + ٣س + ٤$$

النقطة (١ ، ٢) تحقق المعادلة :

$$2 = 2 + 1 + 1 \dots \dots (١)$$

النقطة (٢ ، ٤) تحقق المعادلة :

$$4 = 4 + 2 + 1 \dots \dots (٢)$$

النقطة (٣ ، ٨) تحقق المعادلة :

$$8 = 8 + 3 + 1 \dots \dots (٣)$$

من المعادلة (١) و (٢) بالحذف :

$$4 = 4 + 2 + 1$$

$$2 = 2 + 1 + 1 \quad \boxed{-}$$

$$3 = 3 + 1 + 1 \dots \dots (٤)$$

من المعادلة (١) و (٣) بالحذف :

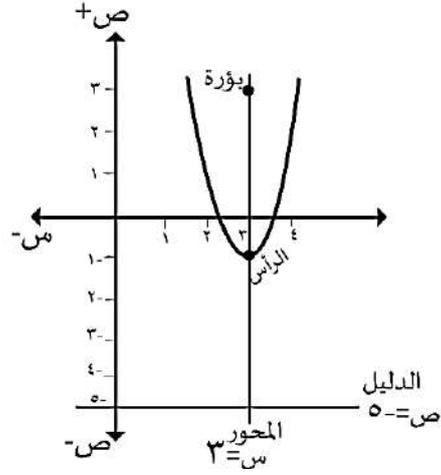
$$8 = 8 + 3 + 1$$

$$2 = 2 + 1 + 1 \quad \boxed{-}$$

$$6 = 6 + 2 + 1 \dots \dots (٥)$$

٢ |  $(س - ٣) = ١٦ (ص + ١)$

- أ: (١٠، ٣)  
ب: (٣، ٣)  
ج: ص = ٥  
د: س = ٣  
هـ: (٥، ٣)



٥ |  $(٢ - ص) = ٤ (٤ - س)$

الحل:

$٤ (٢ - ص) = ١٦ (٤ - س)$

$٤ (٢ - ص) = ٦٤ - ١٦س$

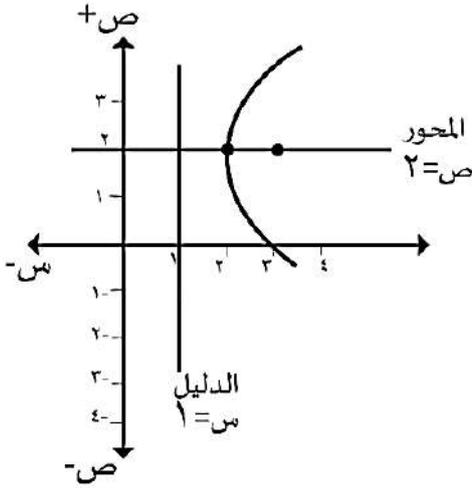
أ: (٢، ٢)

ب: (٢، ٣)

ج: س = ١

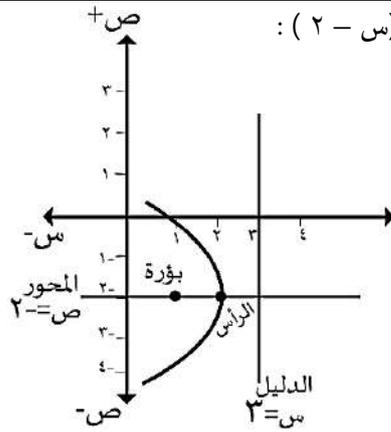
د: ص = ٢

هـ: (٢، ١)



٣ |  $(٢ + ص) = ٤ - (٢ - س)$

- أ: (٢، ٢)  
ب: (٢، ١)  
ج: س = ٣  
د: ص = ٢  
هـ: (٢، ٣)



٦ |  $١٢ - ٢ص + ٢٤ = ٠$

$١٢ - ٢ص = ٢٤$

$١٢ = ٢ص + ٢٤$

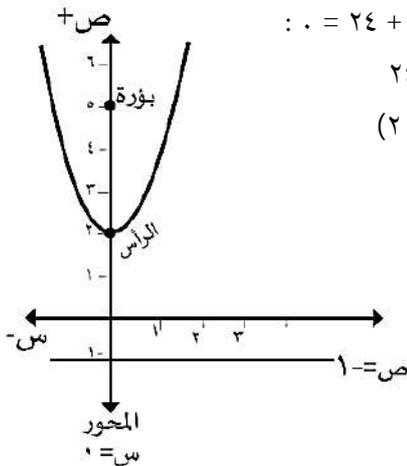
أ: (٢، ٠)

ب: (٥، ٠)

ج: ص = ١

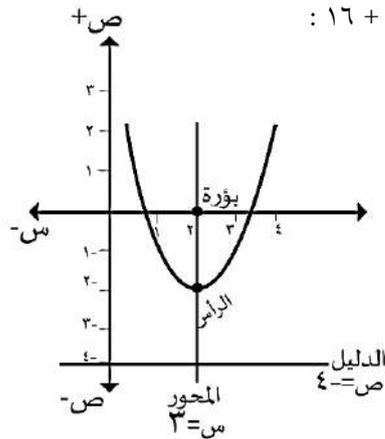
د: س = ٠

هـ: (١، ٠)



٤ |  $(٢ - س) = ٨ص + ١٦$

- أ: (٢، ٢)  
ب: (٠، ٢)  
ج: ص = ٤  
د: س = ٢  
هـ: (٤، ٢)



٧ |  $٦ص + ١٢ - ٣ = ٠$

$٦ص + ٩ = ٣$

$١٢ = ٦ص + ٣$

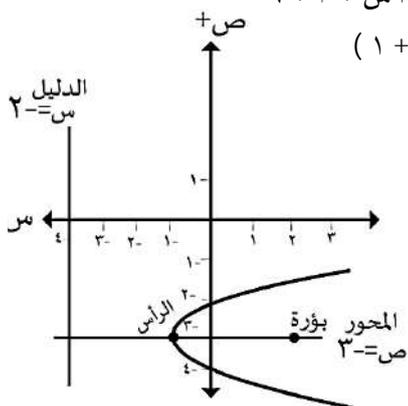
أ: (٣، ١)

ب: (٣، ٢)

ج: س = ٤

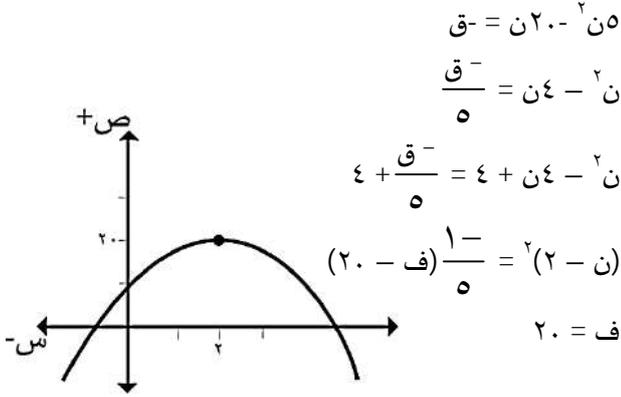
د: ص = ٣

هـ: (٣، ٤)



أسئلة عملية على القطع المكافئ :

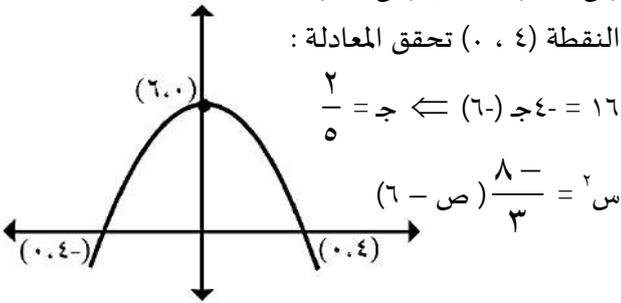
١ | قذف جسم رأسيا الى اعلى حسب العلاقة  
ف(ن) = ٢٠ - ن - ٥ ن<sup>٢</sup> حيث أن "ن" (الزمن بالثواني)  
"ف" (المسافة بالامتر) احسب أقصى ارتفاع يصل له  
الجسم مستخدما تعريف القطع المكافئ . الحل:



٢ | نفق على شكل قطع مكافئ طول قاعدته ٨ م وارتفاعه  
٦ م ، أوجد معادلة النفق ؟

الحل:

(س - ٤) = ٤ - ج (ص - ٥)  
(س - ٤) = ٤ - ج (ص - ٦)  
النقطة (٤ ، ٠) تحقق المعادلة :



٣ | أطلقت قذيفة من مستوى سطح الارض أفقيا الى اعلى و

عادت الى نفس المستوى وكان مسارها على شكل منحنى  
قطع مكافئ فإذا كان أعلى إرتفاع وصلت اليه القذيفة (٥٠ م)  
وأقصى مدى لها (٤٠ م) معتبرا نقطة انطلاق القذيفة  
النقطة (٠ ، ٠) ، جد ما يلي :

أ) معادلة القطع المكافئ .

ب) إرتفاع القذيفة عن سطح الارض عندما يكون هذا  
الارتفاع مساويا للمسافة بين نقطة إنطلاق القذيفة و  
مسقطها على الارض .

٨ | ٤ ص<sup>٢</sup> - ٤ س - ٨ = ٣

٤ ص<sup>٢</sup> - ٢ ص + ١ = ١ + س + ٣/٤

(١ - ص) = (٣/٤ + س)

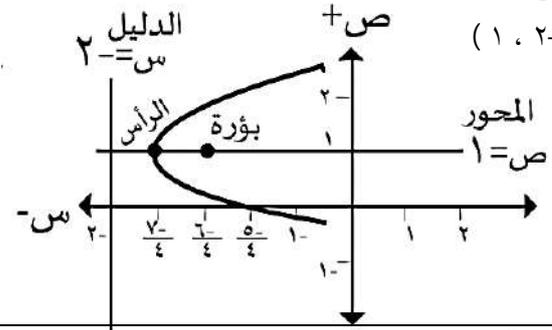
أ : (١ ، ٣/٤)

ب : (١ ، ٦/٤)

ج : س = ٢ -

د : ص = ١

هـ : (١ ، ٢ -)



٩ | ٢ ص<sup>٢</sup> - ١٢ ص + ١٦ = ١٤ س

٢ ص<sup>٢</sup> - ١٢ ص + ١٦ = ١٤ س + ١٤

ص<sup>٢</sup> - ٦ ص + ٨ = ٧ س + ٧

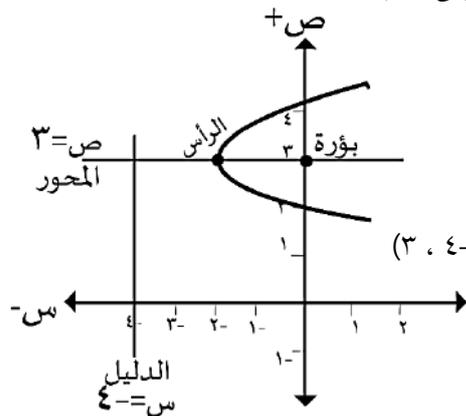
ص<sup>٢</sup> - ٦ ص + ٩ = ٩ + ٧ س + ٧

(ص - ٣) = ٨ (س + ٢)

أ : (٣ ، ٢ -)

ب : (٣ ، ٠)

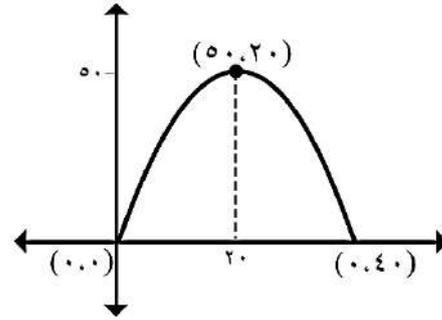
ج : س = ٤ -



د : ص = ٣ = هـ : (٣ ، ٤ -)

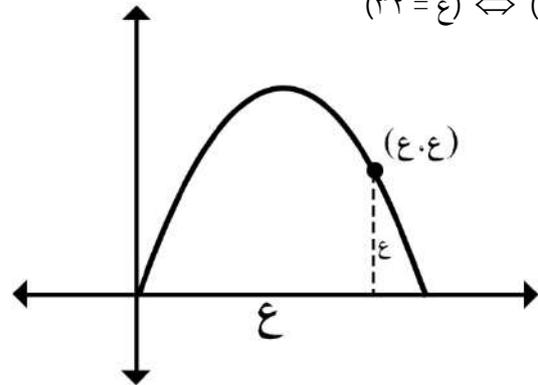
الحل:

(أ) (س - د) = ٤ - (ص - هـ)  
 (س - ٢٠) = ٤ - (ص - ٥٠)  
 النقطة (٠, ٠) تحقق المعادلة:  
 (٥٠ - ٠) = ٤ - (٢٠ - ٠)  
 ٢٠ = ٤ - ٢٠ = ٤٠٠  
 ٢ = ج ← ج ٢٠٠ = ٤٠٠  
 (س - ٢٠) = ٨ - (ص - ٥٠)



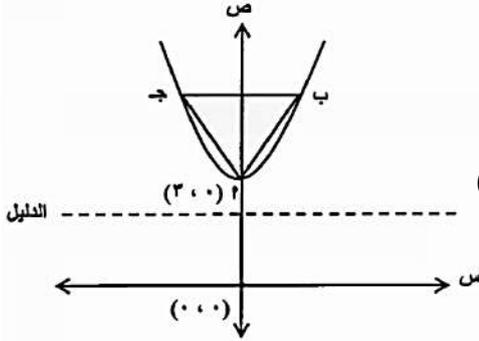
(ب) النقطة (ع, ع) تحقق المعادلة:

(٥٠ - ع) = ٨ - (٢٠ - ع)  
 ٤٠٠ + ع٨ = ٤٠٠ + ع٤٠ - ٢٠  
 ٠ = ع٣٢ - ٢٠  
 (٣٢ = ع) ⇔ (٠ = ع)



أسئلة:

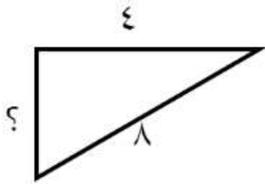
اعتمادا على الشكل الذي يمثل قطاعا مكافئا ، اذا علمت ان المثلث أ ب ج متطابق الاضلاع طول ضلعه (٨) وحدات فيه الضلع ب ج يوازي دليل القطع المكافئ ، جد معادلة هذا القطع .



الحل:

+ص

رأس (٣, ٠)



٦٤ = ١٦ - ص<sup>٢</sup>

ص = √٤٨

ص = ٤ √٣

أ: (٤, ٤ + ٣ √٣)

(س - ٠) = ٤ - (ص - ٣)

النقطة (٤, ٤ + ٣ √٣) تحقق المعادلة:

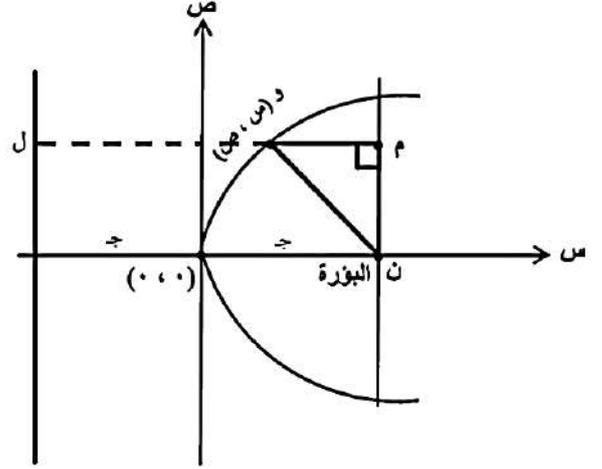
١٦ = ٤ - (٤ + ٣ √٣ - ٣)

١٦ = ٤ - ١ - ٣ √٣  
 ١٦ = ٣ - ٣ √٣  
 ١٣ = -٣ √٣  
 ١٣/٣ = -√٣

المعادلة: (س) = ٤/٣ (ص - ٣)

## الوحدة الخامسة: القواطع المخروطية

٢] يمثل الشكل الآتي قطعاً مكافئاً والنقطة  $(س، ص)$  و  $(ص، س)$  تتحرك على منحنى القطع بحيث يبقى المثلث  $م$  و  $ن$  قائم الزاوية في  $م$ ، وكان  $م$  و  $و$  و  $ن = ٣$  وحدات، جد معادلة القطع المكافئ.



الحل:

$$ص = ٣ \text{ ج } س$$

$$م + و = ٣$$

$$م + و = ٣ \text{ ج } ٢$$

لكن  $و = ٣ - م$  (حسب تعريف القطع المكافئ)

$$م + و = ٣ \text{ ج } ٢ = ٣$$

$$\frac{٣}{٢} = ج$$

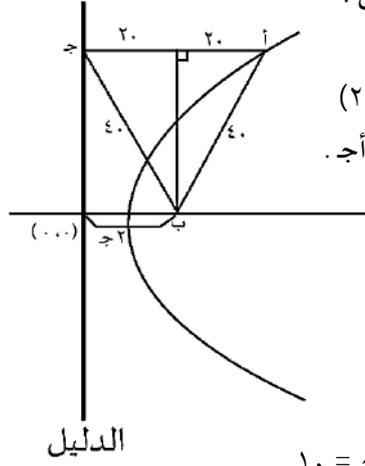
$$ص = ٣ \text{ ج } س \iff ص = \frac{٣}{٢} \times ٤ = ٦$$

المعادلة:

$$ص = ٦ = س$$

## سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

٣] الشكل ادناه يمثل منحنى قطع مكافئ بؤرته النقطة  $ب$ ، وكان المثلث  $أ ب ج$  متطابق الاضلاع طول ضلعه  $٤٠$  وحدة فجد معادلة القطع المكافئ.



الحل:

$$(ص - هـ) = ٤٠ \text{ ج } (س - ٢)$$

نقيم عمودي من  $ب$  على  $أ ج$ .

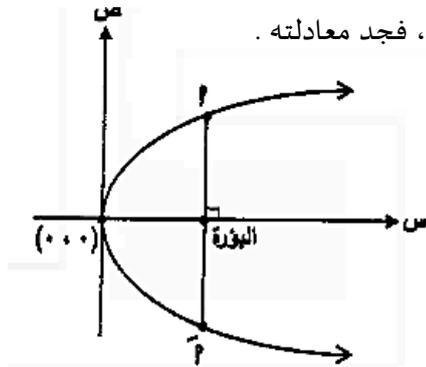
$$ب م = ٢ = ج ٢٠ \iff ج = ١٠$$

∴ الرأس:  $ر(د، هـ) = (١٠، ٤٠)$

$$(ص - ٤٠) = ٤٠ \times (س - ١٠)$$

$$ص = ٤٠ = (س - ١٠)$$

٤] معتمداً على الشكل الذي يمثل قطعاً مكافئاً، اذا علمت أن  $أ أ' (٨)$  وحدات، فجد معادلته.



الحل:

المعادلة

$$(ص - هـ) = ٨ \text{ ج } (س - د)$$

$$ص = ٨ \text{ ج } س$$

$$\text{ولكن } ٨ = ج ٤$$

$$ج = ٢$$

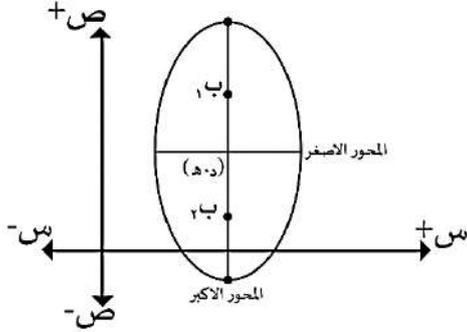
$$ص = ٨ = ٢ \times ٤ = س$$

### القطع الناقص :

القطع الناقص : هو المحل الهندسي للنقطة ق(س ، ص) المتحركة في المستوى التي يكون فيها مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub> (تسميان البؤرتين) يساوي مقدار ثابت (طول المحور الاكبر).

(ب) اذا كان المحور الكبر موازي لمحور الصادات فإن

$$\text{معادلته: } 1 = \frac{(س-د)^2}{ب^2} + \frac{(ص-ه)^2}{ا^2}$$



اذا كان المحور على الصادات نبداً بالصادات في المعادلة.

### ملاحظات :

- (١) المحور الاكبر: هو القطع الواصلة بين الرأسين و طوله (أ٢) و يقع عليه المركز و الرأسين و البؤرتين .
- (٢) المحور الاصغر: هو القطع المستقيم العمودي على المحور الاكبر و مارة بالمركز و طولها (ب٢).
- (٣) البعد البؤري : هو البعد بين البؤرتين (ب٢ج).
- (٤) المسافة بين الرأس و البؤرة القريبة هي (أ - ج) .
- (٥) المسافة بين الرأس و البؤرة البعيدة (أ + ج)
- (٦) الاختلاف المركزي = ه =  $\frac{ب}{ا} > ١$  .
- (٧) الرأسان : هما نقطتا تقاطع المحور الاكبر مع القطع
- (٨) الولدان : هما نقطتا تقاطع المحور الاصغر مع القطع

### القوانينه :

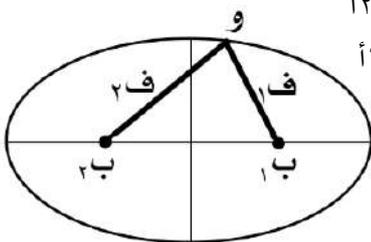
(١) قانون العلاقة بين أ ، ب ، ج :

$$ب^2 - أ^2 = ج^2$$

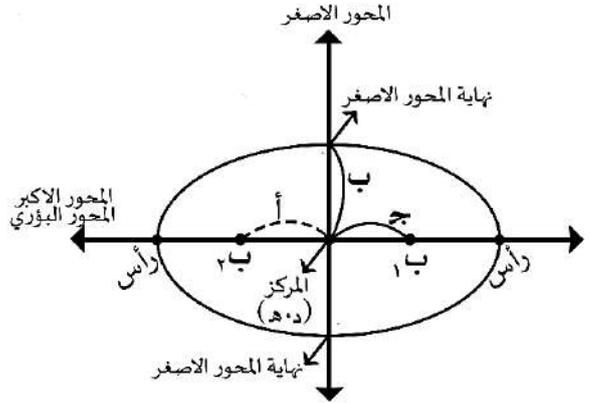
(٢) قانون تعريف القطع الناقص :

$$ب١ + ب٢ = أ٢$$

$$\text{أو: } ب١ + ب٢ = أ٢$$



$$أ < ج$$



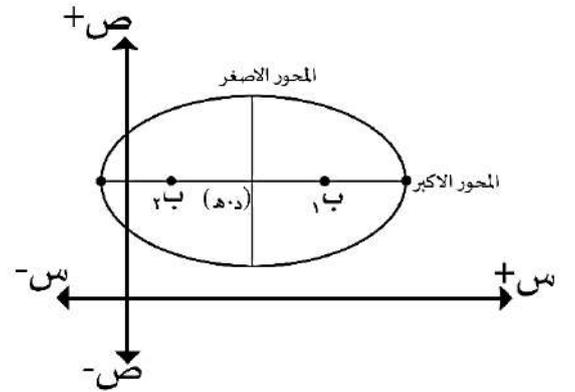
### عناصر هذا القطع :

- (د ، ه) : المركز و يقع في المنتصف بين البؤرتين و الرأسين و نهايتي المحور الاصغر .
- أ : المسافة بين الرأس و المركز .
- ب : المسافة بين نهاية المحور الاصغر و المركز .
- ج : المسافة بين البؤرة و المركز .

### معادلة القطع :

(أ) اذا كان المحور الاكبر موازي لمحور السينات فإن القطع سيبي و معادلته :

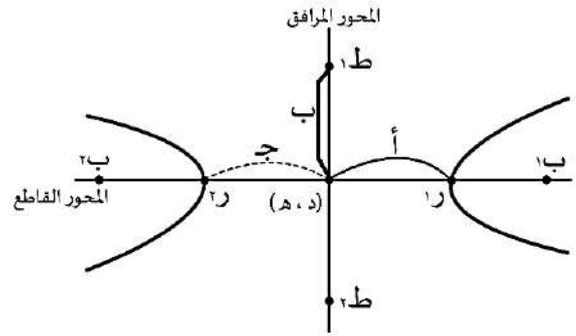
$$1 = \frac{(س-د)^2}{ب^2} + \frac{(ص-ه)^2}{ا^2}$$



اذا كان المحور على السينات نبداً بالسينات بالمعادلة .

القطع الزائد :

القطع الزائد : هو المحل الهندسي للنقطة (س ، ص) المتحركة في المستوى التي يكون الفرق المطلق بين بعدها عن نقطتين ثابتتين : ب<sub>١</sub> ، ب<sub>٢</sub> (تسميان البؤرتين) يساوي مقدار ثابت (طول محور القاطع).



م (د ، هـ) : المركز ويقع في المنتصف بين البؤرتين والرأسين ونهايتي المحور المرافق .

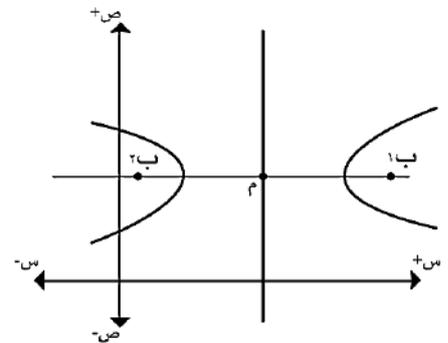
أ : المسافة بين الرأس والمركز .

ب : المسافة بين نهاية المحور المرافق والمركز .

ج : المسافة بين البؤرة والمركز .

معادلة القطع :

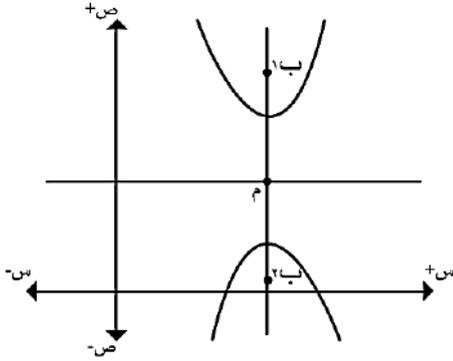
أ) اذا كان المحور القاطع يوازي محور السينات فإن القطع سيبي ومعادلته :



$$١ = \frac{٢(ص - هـ)}{ب} - \frac{٢(د - س)}{٢أ}$$

اذا كان المحور على السينات نبدأ بالسينات بالمعادلة.

ب) اذا كان المحور القاطع يوازي الصادات فإن القطع صادي ومعادلته :



$$١ = \frac{٢(د - س)}{ب} - \frac{٢(ص - هـ)}{٢أ}$$

ملاحظات :

(١) المحور القاطع : هي القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين وطولها (أ٢)

(٢) المحور المرافق : هي القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع وطولها (ب٢).

(٣) البعد البؤري : هو البعد بين البؤرتين (ج٢).

(٤) المسافة بين الرأس والبؤرة القريبة (ج - أ).

(٥) المسافة بين الرأس والبؤرة البعيدة (ج + أ).

(٦) الاختلاف المركزي = هـ =  $\frac{ج}{أ} < ١$  .

(٧) الرأسان هما نقطتا تقاطع المحور القاطع مع القطع

القوانين :

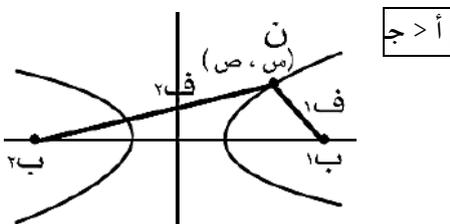
(١) قانون العلاقة بين أ ، ب ، ج :

$$ج^٢ = أ^٢ + ب^٢$$

(٢) قانون تعريف القطع الزائد :

$$٣) |ن ب١ - ن ب٢| = أ٢$$

$$أو |ف١ - ف٢| = أ٢$$



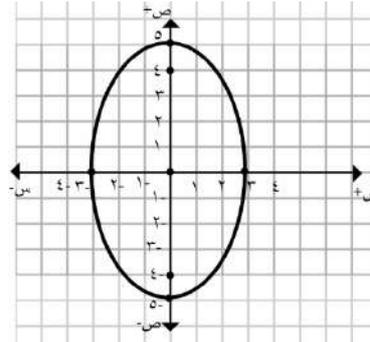
إيجاد العناصر الأساسية للقطع :

- اذا طلب منا خصائص و اعطانا السؤال معادلة فإننا نحدد نوع القطع ثم نرسم .
- ملاحظة :  
أ : في القطع الناقص  $\Leftarrow$  الأكبر .  
أ : في القطع الزائد  $\Leftarrow$  الأصغر .
- يجب ان تكون المعادلة بالصورة القياسية .

أسئلة :

- في كل من المعادلات التالية ، أوجد :
- (أ) المركز . (ب) الرأسين . (ج) البؤرتان . (د) نهايتي المحور الأصغر (المرافق) . (هـ) طول المحور الأكبر أو القاطع . (و) طول المحور الأصغر أو المرافق . (ز) البعد البؤري . (ح) معادلة المحور (الأكبر ، القاطع) . (ط) معادلة المحور (الأصغر ، المرافق) . (ي) الاختلاف المركزي .

$$١ = \frac{ص^2}{٢٥} + \frac{س^2}{٩} \quad [١]$$



الحل: قطع ناقص صادي

$$ج^2 - أ^2 = ب^2$$

$$ج^2 - ٢٥ = ٩$$

$$ج^2 = ١٦ \Leftarrow ج = ٤$$

$$أ = ٥ ، ب = ٣$$

(أ) المركز: (٠ ، ٠)

(ب) الرأسان: (٥ ، ٠) ، (٠ ، ٥)

(ج) البؤرتان: (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤)

(د) نهايتي المحور الأصغر: (٠ ، ٣) ، (٠ ، -٣)

(هـ) طول المحور الأكبر:  $١٠ = ٥ \times ٢ = أ٢$

(و) طول المحور الأصغر:  $٦ = ٣ \times ٢ = ب٢$

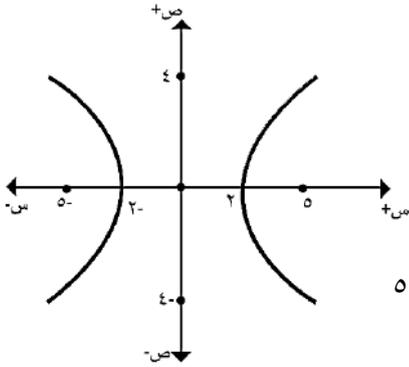
(ز) البعد البؤري:  $٨ = ٤ \times ٢ = ج٢$

(ح) معادلة المحور الكبير:  $ص = ٠$

(ط) معادلة المحور الأصغر:  $س = ٠$

(ي) الاختلاف المركزي:  $ه = \frac{ج}{أ} = \frac{٤}{٥} < ١$  دائما .

$$١ = \frac{ص^2}{١٦} - \frac{س^2}{٩} \quad [٢]$$



الحل: قطع زائد :

$$أ = ٣ ، ب = ٤$$

$$ج^2 = أ^2 + ب^2$$

$$ج^2 = ٩ + ١٦$$

$$ج^2 = ٢٥ \Leftarrow ج = ٥$$

(أ) المركز: (٠ ، ٠)

(ب) الرأسان: (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٣)

(ج) البؤرتان: (٥ ، ٠) ، (٠ ، ٥)

(د) نهايتي المحور المرافق: (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٤)

(هـ) طول المحور القاطع:  $٦ = ٣ \times ٢ = أ٢$

(و) طول المحور المرافق:  $٨ = ٤ \times ٢ = ب٢$

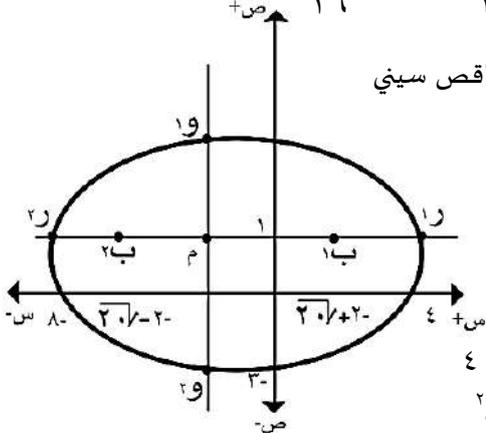
(ز) البعد البؤري:  $١٠ = ٥ \times ٢ = ج٢$

(ح) معادلة المحور القاطع:  $ص = ٠$

(ط) معادلة المحور المرافق:  $س = ٠$

(ي) الاختلاف المركزي:  $ه = \frac{ج}{أ} = \frac{٥}{٣} > ١$  دائما .

$$١ = \frac{ص^2}{١٦} + \frac{س^2}{٣٦} \quad [٣]$$



الحل: قطع ناقص سيني

$$أ = ٦ ، ب = ٤$$

$$ج^2 = أ^2 - ب^2$$

$$ج^2 = ٣٦ - ١٦$$

$$ج^2 = ٢٠ \Leftarrow ج = ٢\sqrt{٥}$$

أ) المركز: (١، ٢-)

ب) الرأسان: (١، ٤)، (١، ٨-)

ج) البؤرتان: (١، ٢- + ٢)، (١، ٢- - ٢)

د) نهايتا المحور الاصغر: (٥، ٢-)، (٣-، ٢-)

هـ) طول المحور الاكبر:  $12 = 6 \times 2 = 2a$

و) طول المحور الاصغر:  $8 = 4 \times 2 = 2b$

ز) البعد البؤري:  $2c = 2 \times \sqrt{20} = 2\sqrt{20}$

ح) معادلة المحور الاكبر:  $1 = \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20}$

ط) معادلة المحور الاصغر:  $2 = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{20}$

ي) الاختلاف المركزي:  $هـ = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{20}}{6} > 1$

$$٤٠٠ = ٢٥(س - ٢) + ١٦(ص - ١)$$

الحل: قطع ناقص صادي

$$١ = \frac{(س - ٢)^2}{٢٥} + \frac{(ص - ١)^2}{١٦}$$

$$٥ = ا، ب = ٤$$

$$ج = ا - ب = ١ - ٤ = -٣$$

أ) المركز: (١، ٢)

ب) الرأسان: (٦، ٢)، (٤-، ٢)

ج) البؤرتان: (٤، ٢)، (٢-، ٢)

د) نهايتا المحور الاصغر: (١، ٦)، (١، ٢-)

هـ) طول المحور الاكبر:  $10 = 5 \times 2 = 2a$

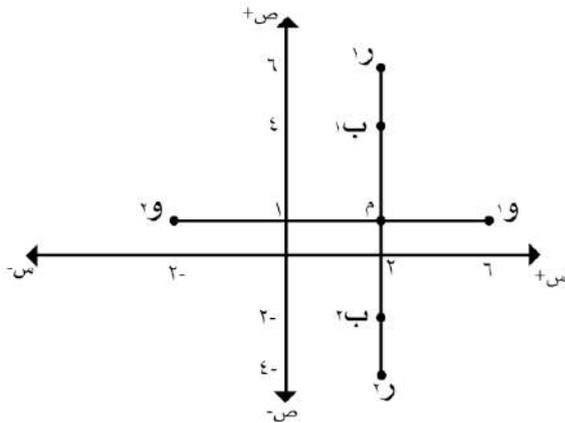
و) طول المحور الاصغر:  $8 = 4 \times 2 = 2b$

ز) البعد البؤري:  $6 = 3 \times 2 = 2c$

ح) معادلة المحور الاكبر:  $2 = \frac{y^2}{10} - \frac{x^2}{16}$

ط) معادلة المحور الاصغر:  $1 = \frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{16}$

ي) الاختلاف المركزي:  $هـ = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} > 1$



$$١ = \frac{(س - ٤)^2}{٨١} - \frac{(ص - ١)^2}{٢٥}$$

الحل: قطع زائد سيني

$$٩ = ا، ب = ٥$$

$$ج = ا + ب = ١٤$$

$$ج = ٢٥ + ٨١ = ١٠٦$$

أ) المركز: (١، ٤-)

ب) الرأسان: (١، ١٣-)، (١، ٥)

ج) البؤرتان: (١، ٤- + ٤)، (١، ٤- - ٤)

د) نهايتا المحور المرافق: (٦، ٤-)، (٤-، ٤-)

هـ) طول المحور القاطع:  $18 = 9 \times 2 = 2a$

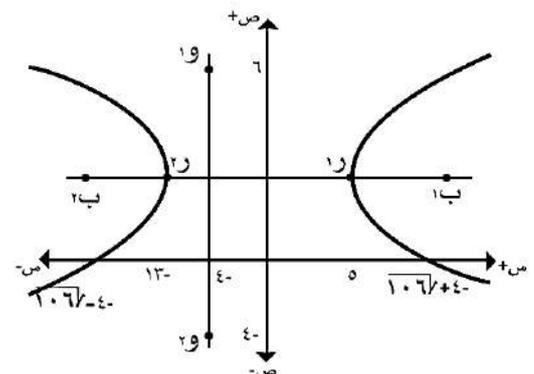
و) طول المحور المرافق:  $10 = 5 \times 2 = 2b$

ز) البعد البؤري:  $2c = 2 \times \sqrt{106} = 2\sqrt{106}$

ح) معادلة المحور القاطع:  $1 = \frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{25}$

ط) معادلة المحور المرافق:  $٤ = \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{81}$

ي) الاختلاف المركزي:  $هـ = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{106}}{9} < 1$



$$\boxed{٧} \text{ س}^2 + ٤\text{ص} + ٦\text{س} - ٨\text{ص} + ٩ = ٠$$

الحل: قطع ناقص سيني

$$\text{س}^2 + ٦\text{س} + ٤\text{ص} + ٨\text{ص} - ٩ = ٠$$

$$٩ - = (١ - ١ + ٢\text{ص} - \text{ص}^2)٤ + (٩ - ٩ + ٦\text{س} + \text{س}^2)$$

$$٩ - = ٤ - (١ + ٢\text{ص} - \text{ص}^2)٤ + ٩ - (٩ + ٦\text{س} + \text{س}^2)$$

$$١ = \frac{\text{ص}^2(١ - \text{ص})٤}{٤} + \frac{\text{س}(٣ + \text{س})}{٤}$$

$$١ = \text{ص}^2(١ - \text{ص}) + \frac{\text{س}(٣ + \text{س})}{٤}$$

$$\sqrt{٣} = \text{ج} \leftarrow \sqrt{١ - ٤} = \text{ج} , ١ = \text{ب} , ٢ = \text{أ}$$

(أ) المركز: (٣- ، ١)

(ب) الرأسان: (١ ، ١-) ، (١ ، ٥-)

(ج) البؤرتان: (١ ، \sqrt{٣} + ٣-) ، (١ ، \sqrt{٣} - ٣-)

(د) نهايتا المحور الاصغر: (٢ ، ٣-) ، (٠ ، ٣-)

(هـ) طول المحور الاكبر: ٢ = ٢ × ٢ = ٤

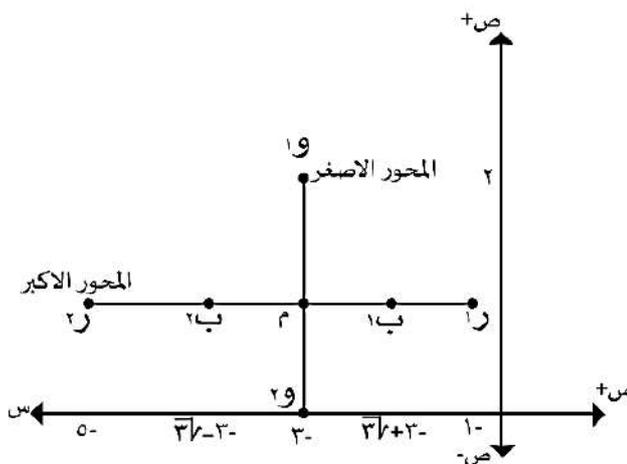
(و) طول المحور الاصغر: ٢ = ١ × ٢ = ٢

(ز) البعد البؤري: ٢ = \sqrt{٣} × ٢ = ٢\sqrt{٣}

(ح) معادلة المحور الاكبر: ص = ١

(ط) معادلة المحور الاصغر: س = ٣-

(ي) الاختلاف المركزي: هـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} > ١



$$\boxed{٦} \text{ (س-١٤) - }^2(٣ - \text{ص}) = ٦٣$$

الحل: قطع زائد سيني

$$٦٣ \div (٦٣ = \text{ص} - ١) - \text{س}^2(٢ - \text{ص}) = ٦٣$$

$$١ = \frac{\text{ص}^2(١ - \text{ص})}{٧} - \text{س}^2 \frac{\text{ص} - ٢}{٩}$$

$$١ = \frac{\text{ص}^2(١ - \text{ص})}{٧} - \frac{\text{س}^2(٢ - \text{ص})}{٩}$$

$$\sqrt{٧} = \text{ب} , \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٧}} = \text{أ}$$

$$\sqrt{\frac{٥٨}{٧}} = \text{ج} \leftarrow \sqrt{٧ + \frac{٩}{٧}} = \text{ج} \leftarrow \text{ب}^2 + \text{أ}^2 = \text{ج}^2$$

(أ) المركز: (٢ ، ١)

(ب) الرأسان: (١ ، \frac{٣}{\sqrt{٧}} + ٢) ، (١ ، \frac{٣}{\sqrt{٧}} - ٢)

(ج) البؤرتان: (١ ، \sqrt{\frac{٥٨}{٧}} + ٢) ، (١ ، \sqrt{\frac{٥٨}{٧}} - ٢)

(د) نهايتا المحور المرافق: (٢ ، \sqrt{٧} + ١) ، (٢ ، \sqrt{٧} - ١)

(هـ) طول المحور القاطع: ٢ = \frac{٣}{\sqrt{٧}} \times ٢ = \frac{٦}{\sqrt{٧}}

(و) طول المحور المرافق: ٢ = \sqrt{٧}

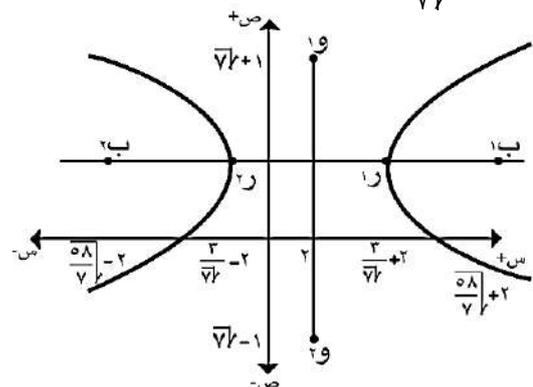
(ز) البعد البؤري: ٢ = \sqrt{\frac{٥٨}{٧}}

(ح) معادلة المحور القاطع: ص = ١

(ط) معادلة المحور المرافق: س = ٢

(ي) الاختلاف المركزي:

$$\text{هـ} = \frac{\sqrt{\frac{٥٨}{٧}}}{\frac{٦}{\sqrt{٧}}} = \frac{\sqrt{٥٨}}{٦} > ١$$



$$\boxed{8} \quad 4س^2 - 2ص^2 + 16س - 10ص - 17 = 0$$

الحل:

$$4س^2 + 16س - 2ص^2 - 10ص - 17 = 0$$

$$4(س^2 + 4س + 4) - (4 + 4س + 4ص^2) - 10ص - 17 = 0$$

$$4(س + 2)^2 - (4 + 4س + 4ص^2) - 10ص - 17 = 0$$

$$\frac{4(س + 2)^2}{4} - \frac{(4 + 4س + 4ص^2)}{4} - \frac{10ص}{4} - \frac{17}{4} = 0$$

$$1 = \frac{(س + 2)^2}{4} - \frac{(1 + س + ص^2)}{1} - \frac{5ص}{2} - \frac{17}{4}$$

قطع زائد سيبي:

$$\boxed{A} \quad 10ص = 2ص^2 + 10ص - 10ص + 10ص \Rightarrow 10ص = 2ص^2 + 10ص - 10ص + 10ص$$

(أ) المركز: (٢، -٥)

(ب) الرأسان: (٢، -٥ + ٢)، (٢، -٥ - ٢)

(ج) البؤرتان: (٢، -٥ + ٢)، (٢، -٥ - ٢)

(د) نهايتا المحور المرافق: (٢، -٥ + ٢)، (٢، -٥ - ٢)

(هـ) طول المحور القاطع:  $2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$

(و) طول المحور المرافق:  $2\sqrt{10} = 2\sqrt{10} \times 2 = 4\sqrt{10}$

(ز) البعد البؤري:  $2 = 2 = 2 \times 2 = 4$

(ح) معادلة محور القاطع:  $ص = -٥$

(ط) معادلة المحور المرافق:  $س = ٢$

(ي) الاختلاف المركزي:  $ه = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$$\boxed{9} \quad 4س^2 + 2ص^2 + 6س + 8ص + 23 = 0$$

الحل:

$$4س^2 + 6س + 2ص^2 + 8ص + 23 = 0$$

$$4(س^2 + 1.5س + 0.75) + 2(ص^2 + 4ص + 4) + 23 - 3 = 0$$

$$4(س + 0.75)^2 + 2(ص + 2)^2 + 20 = 0$$

$$4(س + 0.75)^2 + 2(ص + 2)^2 = -20$$

$$1 = \frac{(س + 0.75)^2}{9} + \frac{(ص + 2)^2}{36}$$

قطع ناقص سيبي

$$\boxed{A} \quad 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

(أ) المركز: (٣، -١)

(ب) الرأسان: (٣، -١)، (٣، -١)

(ج) البؤرتان: (٣، -١ + ٣)، (٣، -١ - ٣)

(د) نهايتا المحور الاصغر: (٣، -١)، (٣، -١)

(هـ) طول المحور الاكبر:  $12 = 6 \times 2 = 12$

(و) طول المحور الاصغر:  $6 = 3 \times 2 = 6$

(ز) البعد البؤري:  $2 = 2 = 2 \times 2 = 4$

(ح) معادلة المحور الاكبر:  $ص = -١$

(ط) معادلة المحور الاصغر:  $س = ٣$

(ي) الاختلاف المركزي:  $ه = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$$\boxed{10} \quad 4س^2 - 2ص^2 + 18س + 8ص + 31 = 0$$

الحل:

$$4س^2 + 18س - 2ص^2 + 8ص + 31 = 0$$

$$4(س^2 + 4.5س + 2.25) - (4 + 4س + 4ص^2) + 8ص + 31 - 3 = 0$$

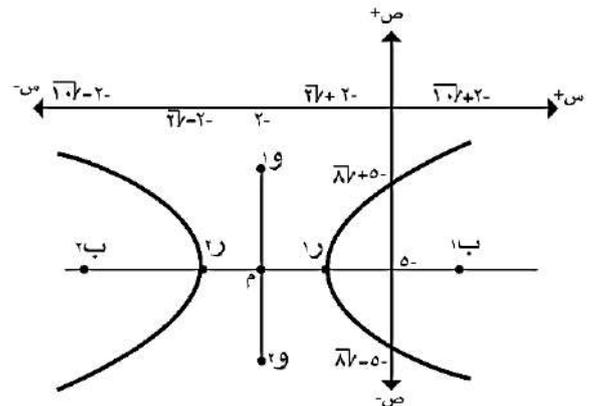
$$4(س + 2.25)^2 - (4 + 4س + 4ص^2) + 8ص + 24 = 0$$

$$4(س + 2.25)^2 - (4 + 4س + 4ص^2) + 8ص + 24 = 0$$

$$1 = \frac{(س + 2.25)^2}{4} - \frac{(1 + س + ص^2)}{1}$$

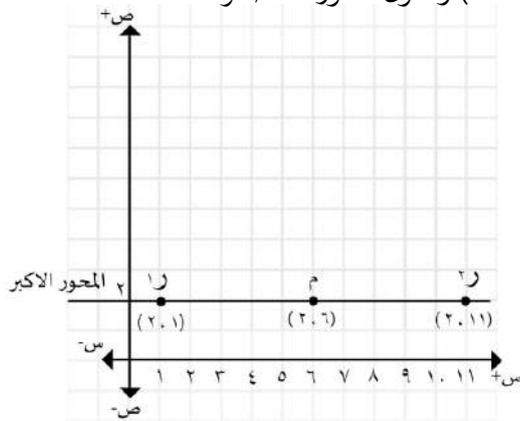
قطع زائد سيبي:

$$\boxed{A} \quad 13\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 13\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$



أسئلة:

١] جد معادلة القطع الناقص الذي رأساه (٢، ١) و (١١، ٢) وطول محوره الأصغر ٨.



القطع ناقص سيني

$$\text{المركز (2.6, 1.4)} \quad \text{أ} = 0.5$$

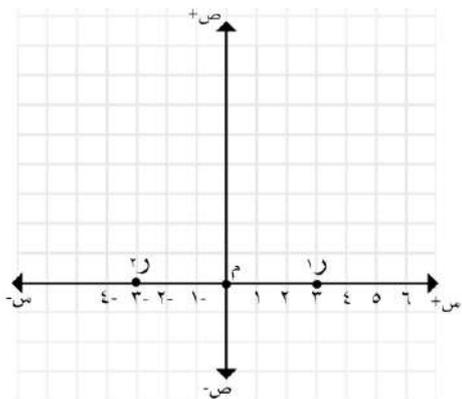
$$2 = \text{ب} \leftarrow 8 = \text{ب} 2$$

$$1 = \frac{(س-د)^2}{\text{أ}^2} + \frac{(ص-هـ)^2}{\text{ب}^2}$$

$$1 = \frac{(س-2.6)^2}{0.25} + \frac{(ص-1.4)^2}{4}$$

٢] جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (٠، ٣) و (٠، -٣) وطول

المحور المرافق (٤) وحدات:



الحل: المركز (٠، ٠)

$$\text{أ} = 3, \quad 2 = \text{ب} \leftarrow 4 = \text{ب} 2$$

$$1 = \frac{(س-د)^2}{\text{أ}^2} - \frac{(ص-هـ)^2}{\text{ب}^2}$$

$$1 = \frac{س^2}{9} - \frac{ص^2}{4}$$

أ) المركز: (١، -١)

ب) الرأسان: (١-، ٣)، (١-، ١-)

ج) البؤرتان: (١-،  $\sqrt{13}/2 + 1$ ), (١-،  $\sqrt{13}/2 - 1$ )

د) نهايتا المحور المرافق: (٢، ١)، (٤-، ١)

هـ) طول المحور القاطع:  $2 = 2 \times 2 = 4$

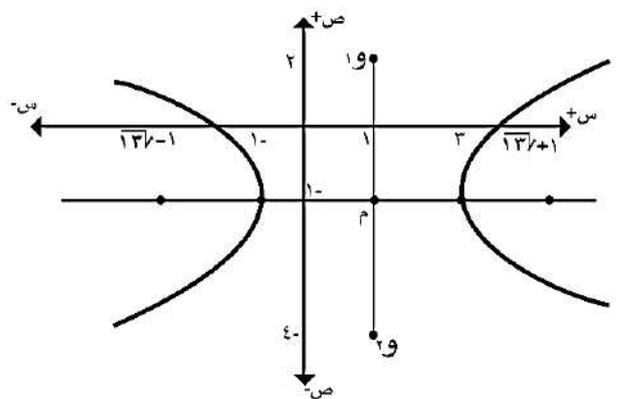
و) طول المحور المرافق:  $2 = 3 \times 2 = 6$

ز) البعد البؤري:  $2 = \sqrt{13}/2 \times 2 = \sqrt{13}$

ح) معادلة محور القاطع:  $ص = 1$

ط) معادلة محور المرافق:  $س = 1$

$$\text{ي) الاختلاف المركزي: هـ} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$



إيجاد المعادلة:

إذا أعطانا السؤال خصائص وطلب منا معادلة فإننا

نرسم ويجب إيجاد:

(١) نوع القطع.

(٢) المركز.

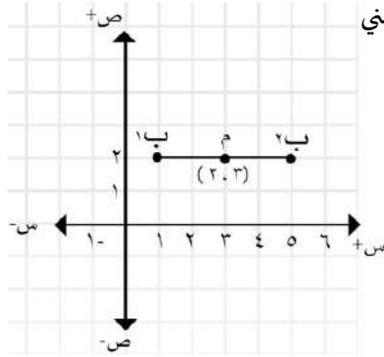
(٣) أ

(٤) ب

$$1 = \frac{(ص-هـ)^2}{ب^2} - \frac{(د-س)^2}{أ^2}$$

$$1 = \frac{(ص-١)^2}{٥} - \frac{(٢-س)^2}{٤}$$

٥] جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٢، ١)، (٢، ٥) وطول المحور الاكبر ٦ أمثال البعد البؤري .



الحل: القطع ناقص سيني

المركز: (٢، ٣)

$$ج = ٢$$

$$أ = ٢ \times ٦ = ١٢$$

$$أ = ١٢$$

$$ج^2 - أ^2 = ب^2$$

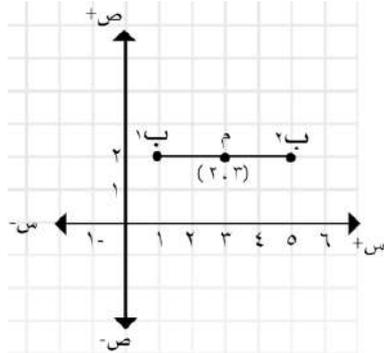
$$٤ - ١٤٤ = ب^2$$

$$ب = \sqrt{١٤٠}$$

$$1 = \frac{(ص-هـ)^2}{ب^2} + \frac{(د-س)^2}{أ^2}$$

$$1 = \frac{(ص-٢)^2}{١٤٠} + \frac{(س-٣)^2}{١٤٤}$$

٦] جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (٢، ١)، (٢، ٥) والبعد البؤري له ضعف طول المحور القاطع .



الحل: قطع زائد سيني

المركز (٢، ٣)

$$ج = ٢$$

$$ج = ٢ \times ١٢ = ٢٤$$

$$أ = ٢٤$$

$$٤ = أ \leq أ = ٤$$

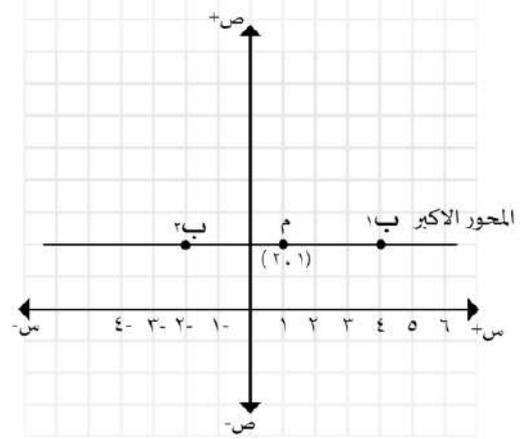
$$ج^2 - أ^2 = ب^2 \Rightarrow ٤ - ١٤٤ = ب^2 \Rightarrow ب = \sqrt{١٤٠}$$

$$1 = \frac{(ص-هـ)^2}{ب^2} - \frac{(د-س)^2}{أ^2}$$

$$1 = \frac{(ص-٢)^2}{٣} - \frac{(س-٣)^2}{١}$$

٣] جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٢، -٢) ، (٢، ٤) وطول المحور الاكبر = ١٠ .

الحل: قطع ناقص سيني



المركز (٢، ١)

$$ج = ٣ ، أ = ١٠ \Rightarrow أ = ٥$$

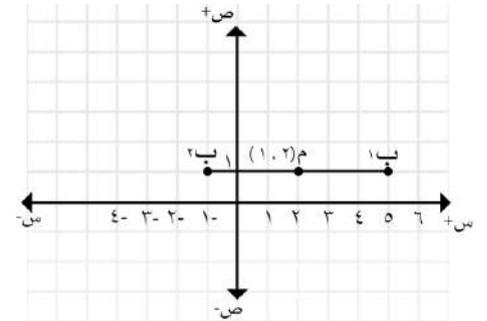
$$ج^2 - أ^2 = ب^2 \Rightarrow ٩ - ٢٥ = ب^2 \Rightarrow ب = ٤$$

$$1 = \frac{(ص-هـ)^2}{ب^2} + \frac{(د-س)^2}{أ^2}$$

$$1 = \frac{(ص-٢)^2}{١٦} + \frac{(س-١)^2}{٢٥}$$

٤] جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (١، ٥) ، (١، -١) وطول المحور القاطع (٤) وحدات .

الحل: قطع زائد سيني



المركز: (١، ٢)

$$ج = ٣ ، أ = ٤ \Rightarrow أ = ٤$$

$$ج^2 - أ^2 = ب^2 \Rightarrow ٩ - ١٦ = ب^2 \Rightarrow ب = ٥$$

٧] جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما النقطتان  $(2 \pm, 0)$  ورأساه هما النقطتان  $(0, 5)$ .

الحل:

المركز:  $(0, 0)$

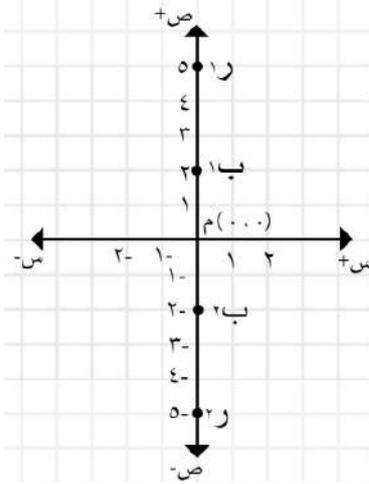
$$5 = أ$$

$$2 = ج$$

$$ج^2 - أ^2 = ب^2$$

$$2^2 - 5^2 = ب^2$$

$$ب = \sqrt{21}$$



$$1 = \frac{(ص-هـ)^2}{أ^2} + \frac{(س-د)^2}{ب^2}$$

$$1 = \frac{ص^2}{25} + \frac{س^2}{21}$$

٨] جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه  $(4 \pm, 0)$  و يتقاطع مع محور الصادات في النقطتين  $(3 \pm, 0)$ .

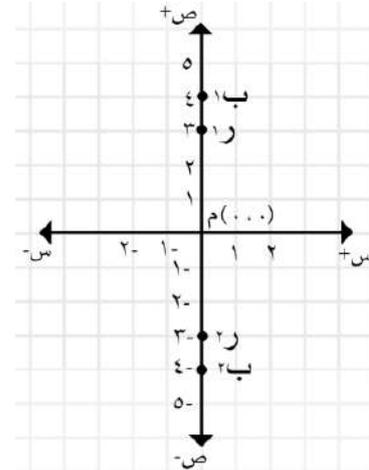
الحل: قطع زائد صادي

$$4 = ج, 3 = أ$$

$$ج^2 - أ^2 = ب^2$$

$$3^2 - 4^2 = ب^2$$

$$ب = \sqrt{7}$$

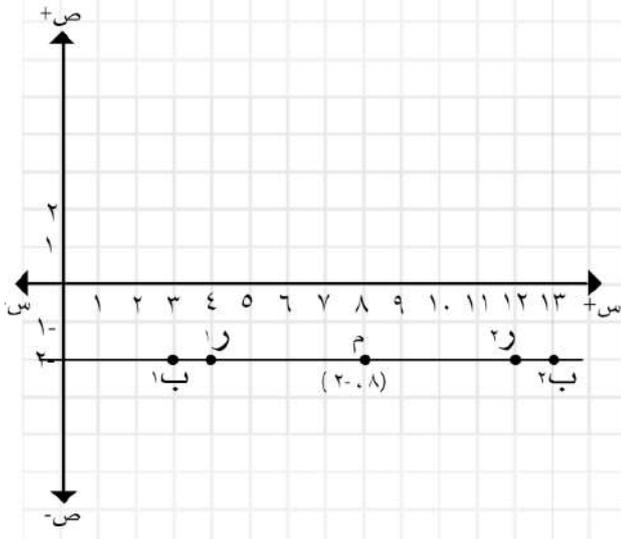


$$1 = \frac{(ص-هـ)^2}{أ^2} - \frac{(س-د)^2}{ب^2}$$

$$1 = \frac{ص^2}{9} - \frac{س^2}{7}$$

٩] جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه  $(2, 4)$  و  $(2, -4)$  ورأساه هما النقطتان  $(2, 13)$  و  $(2, 3)$ .

الحل: القطع ناقص سيني



المركز:  $(2, 8)$

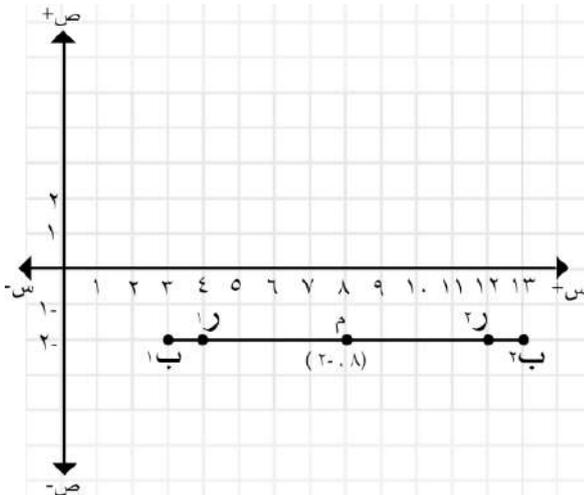
$$5 = ج, 4 = أ$$

$$ج^2 - أ^2 = ب^2 \Rightarrow 3^2 - 4^2 = ب^2 \Rightarrow ب = 3$$

$$1 = \frac{(ص+8)^2}{9} + \frac{(س-8)^2}{25}$$

١٠] جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما النقطتان  $(2, 4)$  و  $(2, -4)$  وبؤرتاه هما النقطتان  $(2, 13)$  و  $(2, 3)$ .

الحل: القطع زائد سيني



المركز: (٨، ٢)

أ = ٤ ، ج = ٥

$$ج^2 = أ^2 + ب^2 \Rightarrow ٢٥ = ١٦ + ب^2 \Rightarrow ب = ٣$$

$$١ = \frac{٢(٨-س)}{١٦} - \frac{٢(٢+ص)}{٩}$$

الحل : قطع زائد صادي

المركز: (٠، ٠)

أ = ٢ ، ج = ٤

$$ج^2 = أ^2 + ب^2 \Rightarrow ١٦ = ٤ + ب^2 \Rightarrow ب = \sqrt{١٢}$$

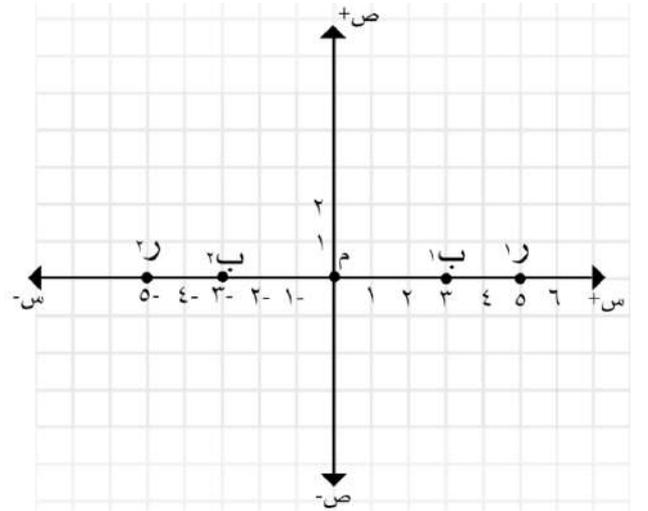
$$١ = \frac{٢(٠-ص)}{١٢} - \frac{٢(٠-س)}{٤}$$

١١] جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٠، ٣)

(٠، ٣-) و يتقاطع مع محور السينات عند س = ٥

س = -٥

الحل: القطع ناقص سيني



المركز: (٠، ٠)

أ = ٥ ، ج = ٣

$$ج^2 = أ^2 - ب^2 \Rightarrow ٩ = ٢٥ - ب^2 \Rightarrow ب = ٤$$

$$١ = \frac{٢ص}{١٦} + \frac{٢س}{٢٥}$$

الحل:

ناقص سيني

م (٠، ٠)

أ = ٥

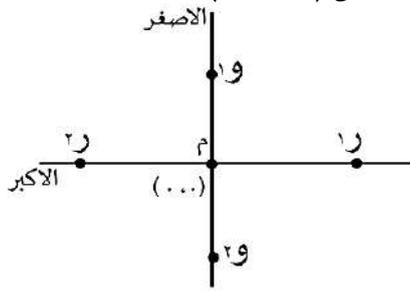
ب = ٣

$$١ = \frac{٢(د-س)}{أ^2} + \frac{٢(ص-هـ)}{ب^2}$$

$$١ = \frac{٢(٠-ص)}{٩} + \frac{٢(٠-س)}{٢٥}$$

١٣] جد معادلة القطع الناقص رأساه (٠، ٥ ±) و يقطع

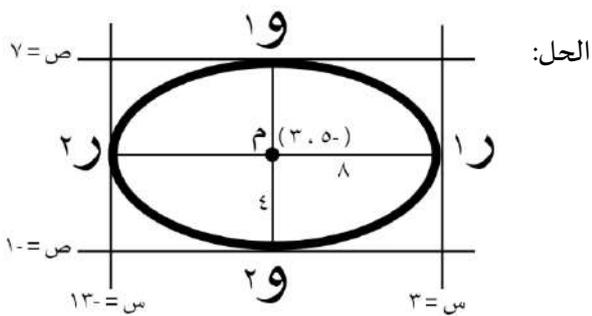
محور الصادات في النقطتان (٠، ٣ ±).



١٤] جد معادلة القطع الناقص الذي يمس المستقيمتان

التالية:

س = ٣ ، س = -٣ ، ص = -١ ، ص = ٧



الحل:

قطع ناقص سيني

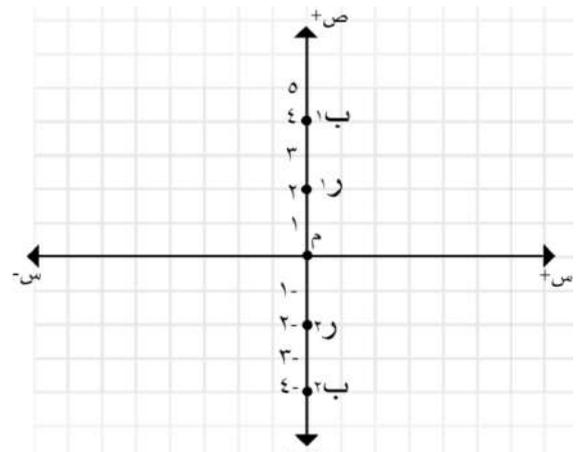
المركز: (٣، ٥-)

أ = ٨ ، ب = ٤

$$١ = \frac{٢(٣-ص)}{١٦} + \frac{٢(٥+س)}{٦٤}$$

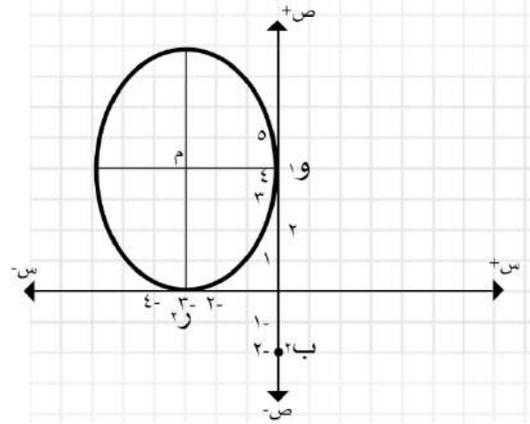
١٢] جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (٤، ٠)

(٤، ٠) و يقطع محور الصادات عند (ص = ٢، -٢)



١٥] جد معادلة القطع الناقص الذي يمس المحورين عند النقطتين  $(0, 3)$  ،  $(4, 0)$  و المحور الاكبر يوازي أحدهما.

الحل:



القطع ناقص صادي

المركز:  $(4, 3)$

$3 = ب$  ،  $4 = أ$

$$١ = \frac{٢(٤-ص)}{٩} + \frac{٢(٣+س)}{١٦}$$

١٦] جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما  $(2, 1)$  و  $(8, 1)$  ويقع رأسه على محور السينات .

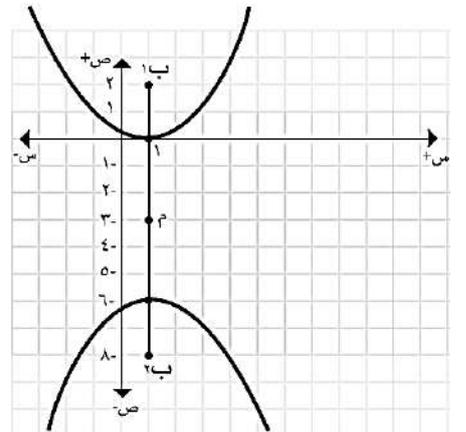
الحل: قطع زائد صادي

المركز:  $(3, 1)$

$3 = أ$  ،  $٥ = ج$

$٤ = ب$  ،  $٢٥ = أ + ب = ٣ + ٩$

$$١ = \frac{٢(٣+ص)}{٩} - \frac{٢(١-س)}{١٦}$$



١٧] جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ومحوره الاكبر على محور الصادات وطول محوره الاصغر  $(4)$  وحدات وبعده البؤري يساوي  $(2\sqrt{5})$  وحدة .

الحل: قطع ناقص صادي

المركز  $(0, 0)$

$٢ = ب$  ،  $٤ = ب$

$٢ = ج$  ،  $٢\sqrt{5} = ج$

$٣ = أ$  ،  $٥ = أ - ب = ٤ - ٢$

$$١ = \frac{٢ص}{٩} + \frac{٢س}{٤}$$



١٨] جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ، ومحوره القاطع على محور الصادات وطول محوره المرافق يساوي  $(4)$  وحدات وبعده البؤري يساوي  $(2\sqrt{5})$  وحدة .

الحل: القطع زائد صادي

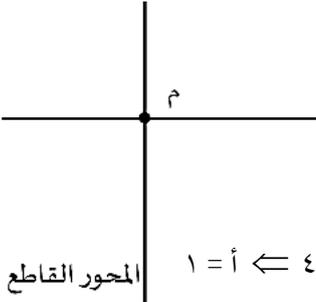
المركز  $(0, 0)$

$٢ = ب$  ،  $٤ = ب$

$٢ = ج$  ،  $٢\sqrt{5} = ج$

$١ = أ$  ،  $٥ = أ + ب = ٤ + ١$

$$١ = \frac{٢(٠-ص)}{٤} - \frac{٢(٠-س)}{١}$$



١٩] جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه النقطة  $(3, 2)$  وإحدى بؤرتيه النقطة  $(3, 1)$  وطول محوره الاكبر يساوي  $(2\sqrt{10})$  وحدة .

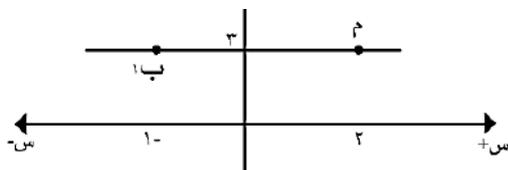
الحل: قطع ناقص سيني .

المركز  $(3, 2)$

$٣ = ج$  ،  $٢ = أ$  ،  $٢\sqrt{10} = أ$

$١ = ب$  ،  $٩ = أ - ب = ٢ - ١$

$$١ = \frac{٢(٣-ص)}{١} + \frac{٢(٢-س)}{١٠}$$



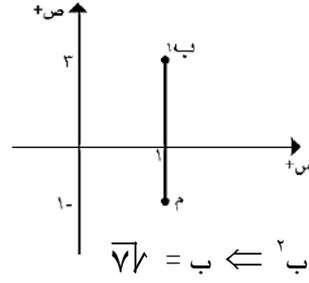
## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

SALHEEM ALSAATHEEB

٢٠] جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه النقطة

(١، -١) وإحدى بؤرتيه هي (١، ٣) وطول محوره القاطع يساوي (٦) وحدات .



الحل: القطع زائد صادي  
المركز (١، -١)

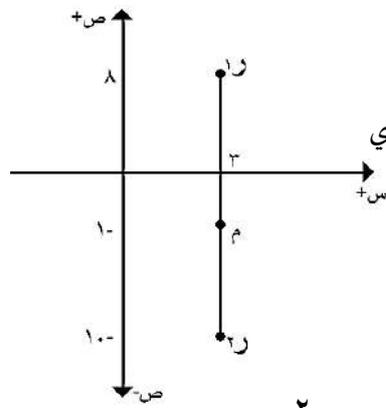
$$ج = ٤ ، ٦ = أ = ٣$$

$$ج = ٦ ، ١٦ = أ + ب = ٩ + ب \Rightarrow ب = ٧$$

$$١ = \frac{٢(١+ص)}{٩} - \frac{٢(١-س)}{٧}$$

٢١] أكتب معادلة القطع الذي رأساه (٣، -١٠) (٣، ٨) و

اختلافه المركزي  $\frac{٢}{٣}$ .



الحل: قطع ناقص صادي  
المركز (٣، -١٠)

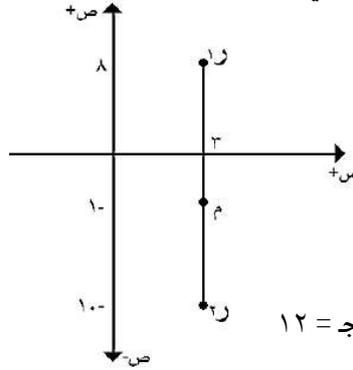
$$٩ = أ ، ٦ = ج \Rightarrow \frac{٦}{٣} = \frac{ج}{٩} = \frac{ب}{٩} \Rightarrow ب = ٦$$

$$ج = ٦ ، ٣٦ = أ - ب = ٩ - ب \Rightarrow ب = ٣٠$$

$$١ = \frac{٢(٣-س)}{٤٥} + \frac{٢(١+ص)}{٨١}$$

٢٢] اكتب معادلة القطع الذي رأساه (٣، -١٠) (٣، ٨) و

اختلافه المركزي  $(\frac{٤}{٣})$ .



الحل: القطع زائد صادي  
المركز (٣، -١٠)

$$٩ = أ$$

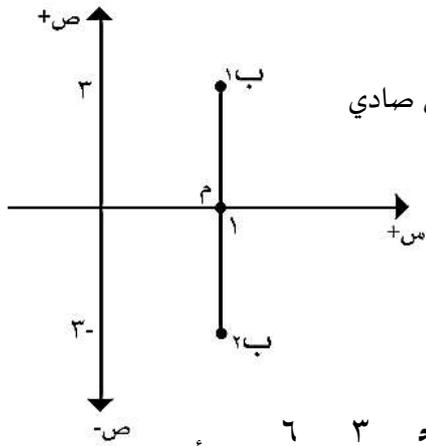
$$١٢ = ج \Rightarrow \frac{٤}{٣} = \frac{ج}{٩} = \frac{ب}{٩} \Rightarrow ب = ١٢$$

$$ج = ١٢ ، ١٤٤ = أ + ب = ٩ + ب \Rightarrow ب = ١٣٥$$

$$١ = \frac{٢(٣-س)}{٦٣} - \frac{٢(١+ص)}{٨١}$$

٢٣] جد معادلة القطع الذي بؤرتاه (١، ٣) و (١، -٣) واختلافه

المركزي (٦، ٠).



الحل: القطع ناقص صادي

المركز: (٠، ١)

$$ج = ٣ \Rightarrow ٦ = أ = ٣ \Rightarrow ١٠ = أ + ب \Rightarrow ب = ٧$$

$$ج = ٣ ، ٩ = أ - ب = ٣ - ب \Rightarrow ب = ٦$$

$$١ = \frac{٢(١-س)}{١٦} + \frac{٢(٠-ص)}{٢٥}$$

٢٤] جد معادلة القطع الذي بؤرتاه (٥±، ٢) و اختلافه

المركزي  $(\frac{٥}{٣})$ .

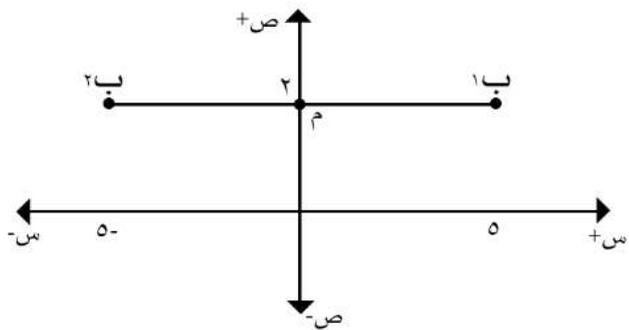
الحل: قطع زائد سيني

المركز (٢، ٠)

$$٥ = ج ، ٣ = أ \Rightarrow \frac{٥}{٣} = \frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٣} \Rightarrow ب = ٥$$

$$ج = ٥ ، ٢٥ = أ + ب = ٣ + ب \Rightarrow ب = ٢٢$$

$$١ = \frac{٢(٢-ص)}{١٦} + \frac{٢(٠-س)}{٩}$$



٢٥] جد معادلة القطع الذي مركزه (٢، ١) وأحد رأسيه (١، ٤) واختلافه المركزي  $(\frac{1}{3})$ .

الحل: القطع ناقص سيني  
المركز (٢، ١)

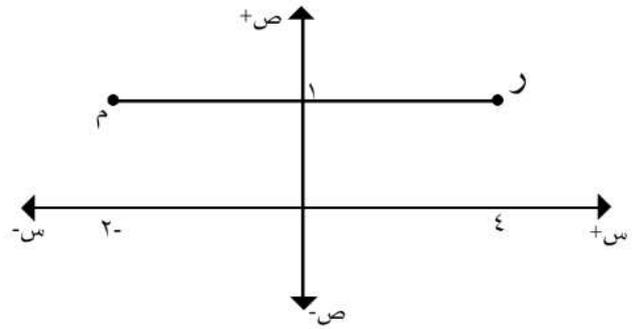
$$2 = a \leftarrow 6 = a \leftarrow h = \frac{a}{3} = \frac{a}{6} = \frac{a}{6} = h \leftarrow 2 = \frac{a}{3} \leftarrow a = 6$$

$$c^2 - a^2 = b^2$$

$$3^2 - 6^2 = b^2 \leftarrow b^2 - 36 = 9 \leftarrow b^2 = 45$$

$$1 = \frac{c^2(1-v)}{a^2} + \frac{c^2(2+s)}{a^2}$$

$$1 = \frac{9(1-v)}{36} + \frac{9(2+s)}{36}$$



٢٦] جد معادلة القطع الذي مركزه (٢، ٣) وأحد رأسيه النقطة (٥، ٣) واختلافه المركزي  $h = 2$ .

الحل: القطع زائد سيني  
المركز (٢، ٣)

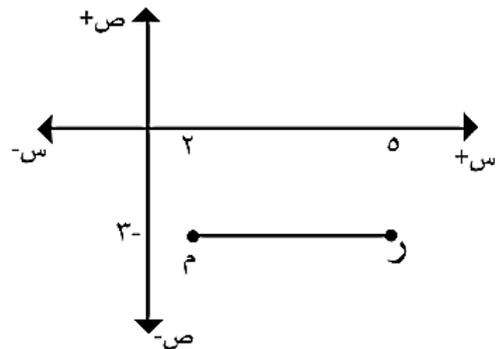
$$6 = a \leftarrow 2 = \frac{a}{3} = \frac{a}{3} = h \leftarrow 3 = a \leftarrow 6 = \frac{a}{3} \leftarrow a = 6$$

$$c^2 - a^2 = b^2$$

$$2^2 - 6^2 = b^2 \leftarrow b^2 + 36 = 4 \leftarrow b^2 = -32$$

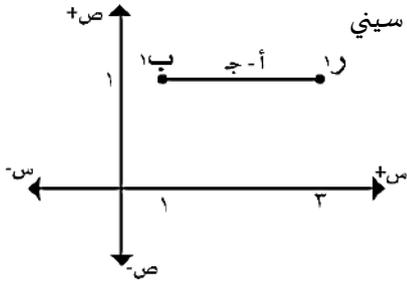
$$1 = \frac{c^2(3+v)}{a^2} - \frac{c^2(2-s)}{a^2}$$

$$1 = \frac{9(3+v)}{36} - \frac{9(2-s)}{36}$$



٢٧] جد معادلة القطع الذي اختلافه المركزي  $\frac{2}{3}$  وأحد رأسيه (٣، ١) والبؤرة القريبة (١، ١).

الحل: القطع ناقص سيني



المركز (١، ١)

$$2 = a \leftarrow 2 = a \leftarrow h = \frac{a}{3} = \frac{a}{3} = h \leftarrow 2 = \frac{a}{3} \leftarrow a = 6$$

$$4 = c \leftarrow 3 = c \leftarrow h = \frac{c}{3} = \frac{c}{3} = h \leftarrow 4 = \frac{c}{3} \leftarrow c = 12$$

$$c^2 - a^2 = b^2$$

$$16 - 36 = b^2 \leftarrow b^2 = -20$$

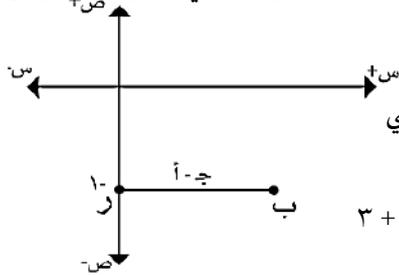
المركز (١، ٣)

$$1 = \frac{c^2(h-v)}{a^2} + \frac{c^2(d-s)}{a^2}$$

$$1 = \frac{16(1-v)}{36} + \frac{16(3+s)}{36}$$

٢٨] جد معادلة القطع الذي اختلافه المركزي (٢.٥) و

أحد رأسيه النقطة (٠، ١) والبؤرة القريبة من هذا الرأس (٣، ١).



الحل: القطع زائد سيني

المركز (١، ١)

$$3 = a \leftarrow 3 = a \leftarrow h = \frac{a}{2} = \frac{a}{2} = h \leftarrow 3 = \frac{a}{2} \leftarrow a = 6$$

$$2 = a \leftarrow 6 = a \leftarrow h = \frac{a}{2} = \frac{a}{2} = h \leftarrow 2 = \frac{a}{2} \leftarrow a = 4$$

$$c^2 - a^2 = b^2$$

$$5^2 - 4^2 = b^2 \leftarrow b^2 = 9$$

المركز (١، ٢)

$$1 = \frac{c^2(1+v)}{a^2} - \frac{c^2(2+s)}{a^2}$$

$$1 = \frac{9(1+v)}{36} - \frac{9(2+s)}{36}$$

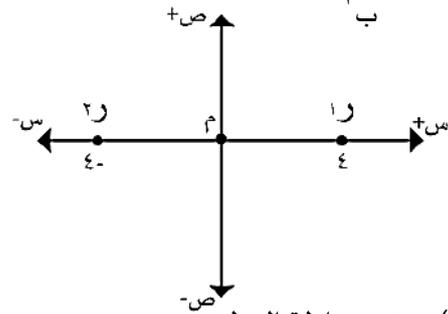
٢٩] جد معادلة القطع الناقص الذي رأساه (-٤، ٠) ، (٠، ٤) ويمر بالنقطة (٣، ٢).

الحل: القطع الناقص سيني

المركز (٠، ٠)

$$١ = \frac{(ص-هـ)^2}{ب^2} + \frac{(د-س)^2}{ا^2}$$

$$١ = \frac{(٠-ص)^2}{ب^2} + \frac{(٠-س)^2}{١٦}$$



النقطة (٣، ٢) تحقق معادلة القطع:

$$١ = \frac{٩}{ب^2} + \frac{٤}{١٦} \Leftarrow ب = \sqrt{١٢}$$

$$١ = \frac{ص^2}{١٢} + \frac{س^2}{١٦}$$

٣٠] جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (-٢، ٠) ، (٢، ٠) ويمر بالنقطة (٢، ٣).

الحل: القطع زائد سيني

المركز (٠، ٠)

٢ = ا

$$١ = \frac{(ص-هـ)^2}{ب^2} - \frac{(د-س)^2}{ا^2}$$

$$١ = \frac{(٠-ص)^2}{ب^2} - \frac{(٠-س)^2}{٤}$$

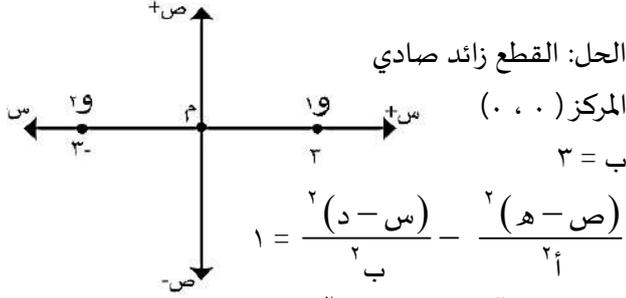
النقطة (٢، ٣) تحقق معادلة القطع

$$\frac{٤}{٥} = ب \Leftarrow ١ - \frac{٩}{٤} = \frac{٤}{ب^2} \Leftarrow ١ = \frac{٤}{ب^2} - \frac{٩}{٤}$$

$$١ = \frac{ص^2}{١٦} - \frac{س^2}{٤}$$

٣١] جد معادلة القطع الزائد الذي فيه نهايتي المحور

المرافق (٠، ٣) ، (٠، -٣) ويمر بالنقطة (٣، ٢):



الحل: القطع زائد صادي

المركز (٠، ٠)

٣ = ب

$$١ = \frac{(د-س)^2}{ب^2} - \frac{(ص-هـ)^2}{ا^2}$$

$$١ = \frac{(٠-س)^2}{٩} - \frac{(٠-ص)^2}{ا^2}$$

النقطة (٣، ٢) تحقق المعادلة:

$$\frac{١٣}{٩} = \frac{٩}{ا^2} - ١ = \frac{٤}{٩} - \frac{٩}{ا^2}$$

$$١ = \frac{س^2}{٩} - \frac{ص^2}{ا^2} \therefore \frac{٩}{١٣} = ا$$

٣٢] جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (١، ٢) و

بؤرته (٢، ٦) ويمر بالنقطة (٤، ٦).

الحل: القطع ناقص سيني

المركز: (٢، ١)

$$ج = ٥ ، ج = ا - ا = ب - ب \Leftarrow ٢٥ = ا - ا$$

$$٢٥ = ا - ا$$

$$١ = \frac{(ص-هـ)^2}{ب^2} + \frac{(د-س)^2}{ا^2}$$

$$١ = \frac{(٢-ص)^2}{ب^2} + \frac{(١-س)^2}{ب^2 + ٢٥}$$

النقطة (٦، ٤) تحقق معادلة القطع:

$$١ = \frac{١٦}{ب^2} + \frac{٩}{ب^2 + ٢٥}$$

$$\frac{١٦ - ب^2}{ب^2} = \frac{٩}{ب^2 + ٢٥}$$

$$٩(ب^2 + ٢٥) = (١٦ - ب^2)ب^2$$

$$٩ب^2 + ٢٢٥ = ١٦ب^2 - ب^4$$

٣٤] جد معادلة القطع الناقص السيني مركزه (٠، ٠).

ويمر بالنقطتين (٢، ٦)، (٣، ٤).

الحل: القطع ناقص سيني مركزه (٠، ٠)

$$١ = \frac{(ص-ه)^2}{ب^2} + \frac{(د-س)^2}{ا^2}$$

$$١ = \frac{ص^2}{ب^2} + \frac{س^2}{ا^2}$$

النقطة (٢، ٦) تحقق المعادلة:

$$١ = \frac{٤}{ب^2} + \frac{٣٦}{ا^2} \dots \dots \dots (١)$$

النقطة (٣، ٤) تحقق المعادلة:

$$١ = \frac{٩}{ب^2} + \frac{١٦}{ا^2} \dots \dots \dots (٢)$$

بالحذف: معادلة (١) مع المعادلة (٢) نحذف ب:

$$١ = \frac{٤}{ب^2} + \frac{٣٦}{ا^2} \dots \dots \dots \text{نضرب ب (٩)}$$

$$١ = \frac{٩}{ب^2} + \frac{١٦}{ا^2} \dots \dots \dots \text{نضرب ب (-٤)}$$

$$١ = \frac{٣٦}{ب^2} + \frac{٣٤٢}{ا^2}$$

$$١ = \frac{٣٦}{ب^2} + \frac{٦٤-}{ا^2} \quad [+]$$

$$٥٢ = \frac{٢٦٠}{٥} = ا^2 \leftarrow ٥ = \frac{٢٦٠}{ا^2}$$

بالتعويض بالمعادلة (١)

$$١ = \frac{٤}{ب^2} + \frac{٣٦}{٥٢}$$

$$١٣ = ا^2 \leftarrow \frac{٤}{١٣} = \frac{٤}{ب^2} \leftarrow ١ = \frac{٤}{ب^2} + \frac{٩}{١٣}$$

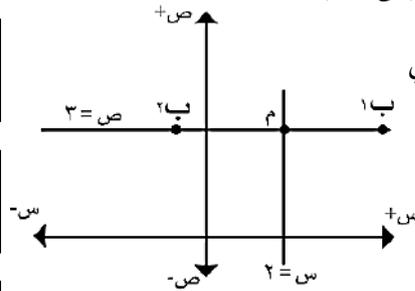
$$(١ = \frac{ص^2}{١٣} + \frac{س^2}{٥٢})$$

ب<sup>٤</sup> - ٤٠٠ = . => ب = ٢٠

$$١ = \frac{(٢-ص)^2}{٢٠} + \frac{(١-س)^2}{٤٥}$$

٣٣] جد معادلة القطع الذي اختلافه المركزي ( $\frac{٢١}{٣}$ )

ويمر بالنقطة (٤-، ٣-) ومركزه يقع على المستقيم (س=٢) وبؤرته على المستقيم (ص=٣).



الحل: القطع زائد سيني المركز (٢، ٣)

$$ه = ا = \frac{٢١}{٣}$$

$$\leftarrow ج = ا = \frac{٢١}{٣}$$

$$ج^2 = ا^2 + ب^2 \leftarrow ا^2 = ا^2 + ب^2$$

$$ب^2 = ا^2 - ا^2 \leftarrow ب^2 = ا^2 - ا^2$$

$$١ = \frac{(ص-ه)^2}{ب^2} - \frac{(د-س)^2}{ا^2}$$

$$١ = \frac{(ص-٣)^2}{ا^2 \frac{٤}{٣}} - \frac{(د-٢)^2}{ا^2}$$

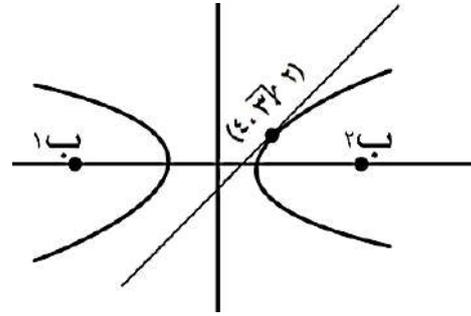
النقطة (٤-، ٣-) تحقق المعادلة:

$$١ = \frac{٢٧}{ا^2} - \frac{٣٦}{ا^2} \leftarrow ١ = \frac{٣٦}{ا^2 \frac{٤}{٣}} - \frac{٣٦}{ا^2}$$

$$١ = \frac{٩}{ا^2} \leftarrow ا^2 = ٩ \leftarrow ا = ٣$$

$$١ = \frac{(٣-ص)^2}{١٢} - \frac{(٢-د)^2}{٩}$$

٣٥] قطع زائد مركزه (٠، ٠) وبؤرتاه على محور السينات ويمس المستقيم  $v = \sqrt{3}s - 2$  عند النقطة  $(2, \sqrt{3})$ ، أوجد معادلته .



الحل:

ميل القطع عند  $(2, \sqrt{3}) =$  ميل المستقيم

ميل المستقيم:

$$v' = \sqrt{3}$$

ميل القطع = ميل المستقيم

$$\sqrt{3} = \frac{b' - \sqrt{3}a'}{2a'}$$

$$2a' = b' - \sqrt{3}a'$$

ميل القطع:

$$= \frac{2v' - \frac{v'^2}{a'}}{b' - \frac{v'^2}{a'}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - \frac{3}{a'}}{b' - \frac{3}{a'}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - \frac{3}{a'}}{b' - \frac{3}{a'}}$$

$$v' = \frac{2\sqrt{3} - \frac{3}{a'}}{b' - \frac{3}{a'}}$$

بالتعويض بالمعادلة:

$$1 = \frac{2\sqrt{3} - \frac{3}{a'}}{b' - \frac{3}{a'}} = \frac{2\sqrt{3}a' - 3}{b'a' - 3}$$

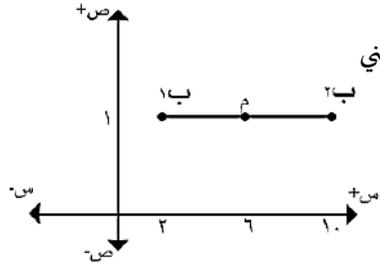
$$a' = 4 \leftarrow b' = 8$$

∴ المعادلة:

$$1 = \frac{v^2}{8} - \frac{s^2}{4}$$

أسئلة على تعريف القطع :

١] جد معادلة القطع المخروطي الذي فيه النقطة  $(2, 1)$ ،  $(1, 10)$ ،  $(1, 2)$  تتحرك بحيث يكون مجموع بعدها عن نقطتين  $(1, 0)$ ،  $(1, 10)$  يساوي ١٠ .



الحل: القطع ناقص سيني

$$m = (1, 6)$$

$$j = 4$$

$$\frac{10}{2} = \frac{10}{2} \leftarrow a = 5$$

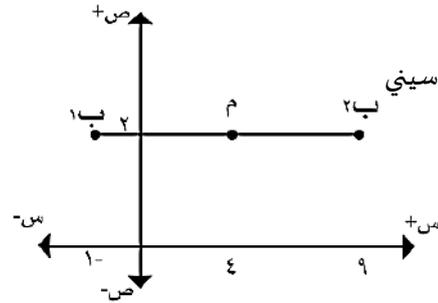
$$j^2 = a^2 - b^2 \leftarrow 16 = 25 - b^2 \leftarrow b^2 = 9 \leftarrow b = 3$$

$$1 = \frac{(d-h)^2}{a^2} + \frac{(s-d)^2}{b^2}$$

$$1 = \frac{(1-5)^2}{9} + \frac{(6-s)^2}{25}$$

٢] جد معادلة القطع المخروطي الذي فيه النقطة

$(2, 4)$  تتحرك بحيث يكون الفرق المطلق بين بعدها عن نقطتين ثابتتين  $(2, 1)$ ،  $(2, 9)$  يساوي مقدار ثابت هو (٨) .



الحل: القطع زائد سيني

$$m = (2, 4)$$

$$j = 5$$

$$\frac{8}{2} = \frac{8}{2} \leftarrow a = 4$$

$$j^2 = a^2 + b^2 \leftarrow 25 = 16 + b^2 \leftarrow b^2 = 9 \leftarrow b = 3$$

$$j^2 = a^2 + b^2 \leftarrow 25 = 16 + b^2 \leftarrow b^2 = 9 \leftarrow b = 3$$

$$1 = \frac{(d-h)^2}{a^2} - \frac{(s-d)^2}{b^2}$$

$$1 = \frac{(2-4)^2}{9} - \frac{(4-s)^2}{16}$$

٦] اذا كان طول المحور القاطع لقطع زائد يساوي ٣ أمثال طول محوره المرافق فما قيمة الاختلاف المركزي لهذا القطع

الحل:

$$\begin{aligned} 2 \times 3 &= 6 \Rightarrow 2 = 3 \\ 3 + 6 &= 9 \Rightarrow 3 = 9 \\ 3 + 9 &= 12 \Rightarrow 3 = 12 \\ \therefore \frac{3}{3} &= \frac{12}{3} = 4 = \text{هـ} \end{aligned}$$

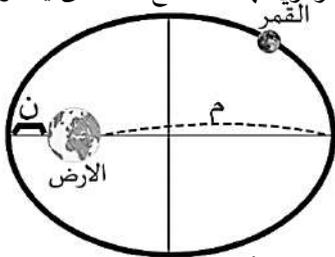
٧] قطع مخروطي بعده البؤري يساوي ٣ أمثال طول محوره المرافق فجد الاختلاف المركزي لهذا القطع .

الحل:

$$\begin{aligned} 2 \times 3 &= 6 \Rightarrow 2 = 3 \\ 3 + 6 &= 9 \Rightarrow 3 = 9 \\ 3 + 9 &= 12 \Rightarrow 3 = 12 \\ \therefore \frac{3}{12} &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \text{هـ} \end{aligned}$$

٨] يدور القمر حول الارض في مدار على شكل قطع ناقص بحيث تقع الارض في إحدى بؤرتي المدار فإذا كانت أطول

مسافة بين الارض و القمر تساوي (م) وأقصر مسافة بينها (ن) فأثبت ان الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص يساوي



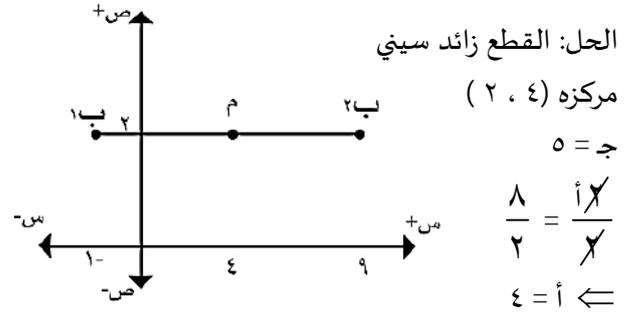
$$\frac{M-N}{M+N}$$

الحل:

$$\begin{aligned} M + A &= M & M + A &= M \\ N - A &= N & N - A &= N \\ \hline M + A &= M & M + A &= M \\ N - A &= N & N - A &= N \\ \hline M + A &= M & M + A &= M \\ N - A &= N & N - A &= N \\ \hline \frac{M-N}{2} &= \frac{M-N}{2} & \frac{M-N}{2} &= \frac{M-N}{2} \\ \therefore \frac{M-N}{M+N} &= \frac{M-N}{M+N} = \frac{1}{2} = \text{هـ} \end{aligned}$$

٣] جد معادلة القطع المخروطي الذي فيه النقطة

ن (س ، ص) تتحرك في المستوى الديكارتي بحيث  $|OB_2 - OB_1| = 8$  حيث  $B_1(1, 2)$  ،  $B_2(9, 2)$ .



الحل: القطع زائد سيني

مركزه (٤ ، ٢)

ج = ٥

$$\frac{8}{2} = \frac{A}{B}$$

← أ = ٤

$$3 = B \Rightarrow 25 = 16 + B^2 \Rightarrow B = 3$$

$$1 = \frac{(D-S)^2}{A^2} - \frac{(C-S)^2}{B^2}$$

$$1 = \frac{(2-S)^2}{16} - \frac{(4-S)^2}{9}$$

٤] اذا كان م ، ن نقطتان ماديتان النقطة (م) تدور في مدار

على شكل قطع ناقص بحيث تقع النقطة (ن) في إحدى

بؤرتي هذا المدار فإذا كان طول المحور الاكبر = ١٠

و إختلافه المركزي = ٣ ، جد :

(أ) أطول مسافة بين م ، ن (ب) أقصر مسافة بين م ، ن

الحل:

$$10 = A \Rightarrow 5 = A$$

$$10 = \frac{3}{5} = \frac{C}{A} \Rightarrow C = 6$$

$$A \text{ أطول مسافة: } A + C = 10 + 6 = 16$$

$$B \text{ أقصر مسافة: } A - C = 10 - 6 = 4$$

٥] اذا كان طول المحور الاكبر لقطع ناقص يساوي ضعف

طول المحور الاصغر فما قيمة الاختلاف المركزي لهذا القطع

الناقص .

الحل:

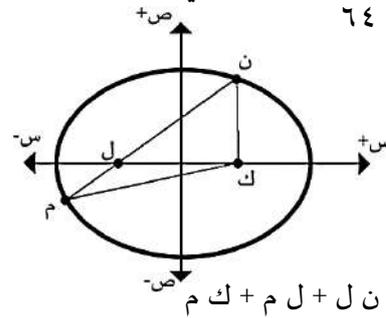
$$2 = A \Rightarrow 2 = A$$

$$3 = B \Rightarrow 4 = B - A \Rightarrow 3 = B - 2 \Rightarrow B = 5$$

$$\therefore \frac{3}{5} = \frac{C}{A} = \frac{C}{2} \Rightarrow C = \frac{6}{5}$$

٩] ك ، ل هما بؤرتا القطع المخروطي الممثل في الشكل

الذي معادلته  $1 = \frac{ص^2}{64} + \frac{س^2}{100}$  ، فما محيط المثلث



( ن م ك ) .

الحل:

$$10 = أ$$

محيط المثلث = ك ن + ن ل + ل م + م ك =

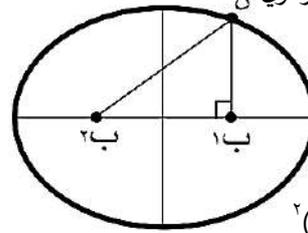
$$\text{محيط المثلث} = أ٢ + أ٢ = ٤٤$$

$$\text{محيط المثلث} = ١٠ \times ٤ =$$

$$\text{محيط المثلث} = ٤٠ م$$

١٠] في الشكل قطع ناقص بؤرتاه ب١ ، ب٢ ، ن ب١ = ٣

ن ب٢ = ٥ ، فجد الاختلاف المركزي ن



الحل:

$$ن(ب١ب٢) + ن(ب١ن) = ن(ب١ب٢)$$

$$٤ = ب١ب٢ + ٩ = ٢٥$$

$$ب١ب٢ = ٢٠ \leftarrow ٤ = ج٢ \leftarrow ج = ٢$$

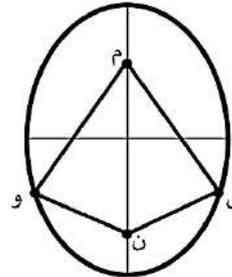
$$ن ب١ + ن ب٢ = ٢٠ + ٣ = ١٢ = ٥ + ٣ =$$

$$١٢ = ٨ \leftarrow ٤ = أ$$

$$\therefore ه = \frac{ج}{أ} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

١١] ( م ، ن ) هما بؤرتا القطع المخروطي الممثل بالشكل

الذي معادلته  $1 = \frac{ص^2}{64} + \frac{س^2}{36}$  ، فما محيط الشكل



الرباعي ( م ، ل ، ن ، ك ) .

الحل:

$$٨ = أ$$

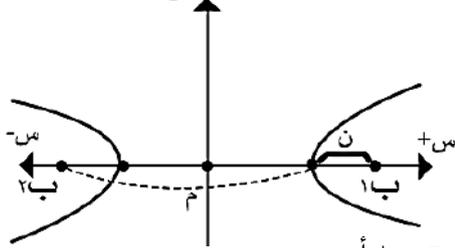
محيط الشكل = م ل + ل ن + ن و + و م

$$١٢ = أ٢ + أ٢$$

$$\text{المحيط} = ٨ \times ٤ = ٣٢$$

١٢] معتمدا على الشكل اذا كانت م  $\times$  ن = ٩ وكان

الاختلاف المركزي =  $\sqrt{٢}$  ، اكتب معادلة القطع الزائد الممثل في الشكل علما بان المركز هو نقطة الاصل .



الحل:

$$ن - ج = أ ، أ + ج = م$$

$$٩ = أ^2 - ج^2 = (أ + ج)(أ - ج) = ن \times م$$

$$ه = \frac{ج}{أ} = \frac{\sqrt{٢}}{١} \leftarrow ج = \sqrt{٢} أ$$

$$\text{بالتعويض: } ٩ = أ^2 - ٢أ^2 = -أ^2 \leftarrow أ = ٣$$

$$ج = ٣ \times \sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$$

$$ج^2 = أ^2 + ب^2$$

$$١٢ = ب^2 + ٩ \leftarrow ب = ٣\sqrt{٢}$$

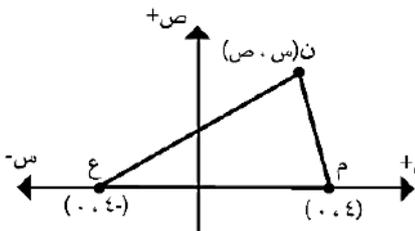
المعادلة :

$$١ = \frac{ص^2}{ب^2} - \frac{س^2}{أ^2}$$

$$١ = \frac{ص^2}{١٨} - \frac{س^2}{٩}$$

١٣] في الشكل المجاور اذا تحركت النقطة ن(س ، ص) في

المستوى الديكارتي بحيث يكون م ن + ن ع + م ع = ٢٨ .  
جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س ، ص) .



الحل:

القطع ناقص سيني

مركزه (٠ ، ٠) .

محيط المثلث ن م ع = ن م + م ع + ع ن =

$$٢٨ = ج٢ + أ٢ =$$

$$١٠ = أ \leftarrow ٢٨ = ٨ + أ٢ =$$

$$ج^2 = أ^2 + ب^2 \leftarrow ١٦ = ب^2 - ١٠٠ =$$

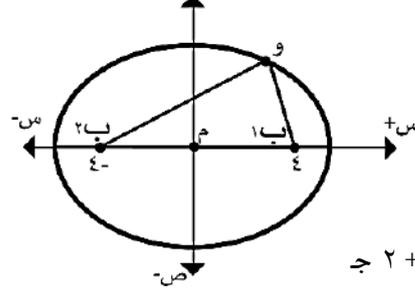
$$ب = ٨\sqrt{٢} \leftarrow ٨٤ = ب^2$$

$$١ = \frac{ص^2}{٨٤} + \frac{س^2}{١٠٠}$$

١٤] قطع ناقص بؤرتاه ب(٠، ٤)، ب'(٠، -٤) و

النقطة و(س، ص) تقع على منحنى القطع بحيث أن محيط

المثلث و ب١ ب٢ يساوي ٢٤ ، جد معادلته ض



الحل:

قطع ناقص سيني

المركز (٠، ٠)

أ = ٤

محيط المثلث = ٢ + أ٢ = ج

$$٨ = أ \leftarrow ٢٤ = ٨ + أ٢ =$$

$$ج٢ = أ٢ - ب٢ \leftarrow ١٦ = ١٦ - ٦٤ = ب٢$$

$$ب = ٤\sqrt{٢}$$

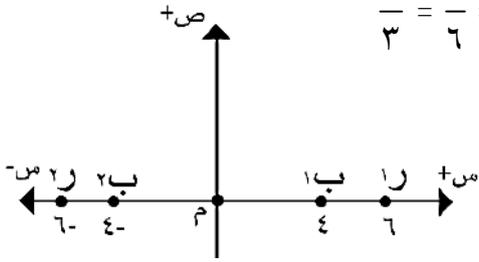
$$١ = \frac{ص}{٨٤} + \frac{س}{٦٤}$$

$$١ = \frac{ص}{٢٠} + \frac{س}{٣٦} = \text{معادلة القطع}$$

البؤرتان: (٠، ٤ ±)

الرأسان: (٠، ٦ ±)

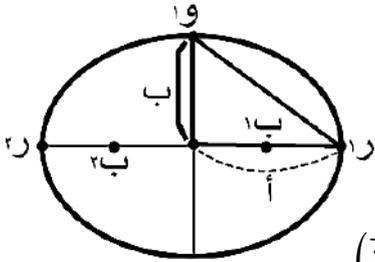
$$\frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٦} = \frac{ج}{أ} = هـ$$



١٦] قطع ناقص اذا كان البعد بين البؤرتين = نصف

المسافة بين الرأس وإحدى نهايتي المحور الاصغر، أوجد

الاختلاف المركزي.



الحل:

$$ج٢ = \frac{١}{٢} (١٥١)$$

$$ج٢ = \frac{١}{٢} (\sqrt{٢} + \sqrt{٢})$$

$$ج٤ = \sqrt{٢} + \sqrt{٢} \dots (١)$$

$$ج٢ = أ٢ - ب٢ \leftarrow ب٢ = أ٢ - ج٢ \dots (٢)$$

بالتعويض بالمعادلة (١):

$$ج٤ = \sqrt{٢} + \sqrt{٢} \leftarrow ١٦ = ج٢ - أ٢ = ج٢ - ١٢$$

$$١٧ = ج٢ \leftarrow أ = \sqrt{\frac{١٧}{٢}}$$

$$هـ = \frac{ج}{أ} = \frac{\sqrt{١٧}}{\sqrt{\frac{١٧}{٢}}} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{١٧}}$$

١٥] في القطع الناقص في الشكل ، (ل) المسافة بين إحدى

البؤرتين والرأس القريب منها (م) المسافة بين البؤرة نفسها

والرأس البعيد عنها وكان  $\frac{ل}{م} = \frac{١}{٥}$  وطول المحور الاصغر

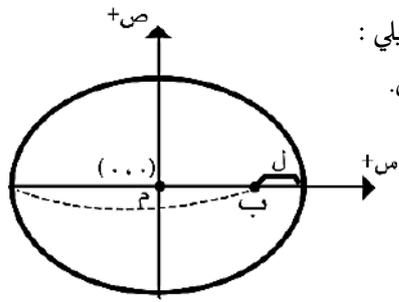
٤  $\sqrt{٥}$  ، جد كلا مما يلي :

(١) احداثيات البؤرتين.

(٢) احداثيات الرأسين.

(٣) معادلة القطع .

(٤) الاختلاف المركزي .



الحل:

$$\frac{ل}{م} = \frac{١}{٥} \leftarrow م = ٥ل$$

$$ب٢ = ٤ \sqrt{٥} \leftarrow ب = ٢ \sqrt{٥}$$

$$ل + م = أ٢ \leftarrow \frac{ل + ٥ل}{٢} = أ٢ \leftarrow \frac{٦ل}{٢} = أ٢$$

$$أ٢ = ٣ل$$

$$ل = أ٢ - ب٢ \leftarrow ج = أ٢ - ل \leftarrow ل - ٣ل = ج \leftarrow ل = ٢$$

$$ج٢ = أ٢ - ب٢ \leftarrow ٢٠ = ٢٠ - ٢٠ = أ٢ \leftarrow ٢٠ = أ٢$$

$$\leftarrow ل = ٢$$

$$أ = ٢ \times ٣ = ٦ ، ج = ٢ \times ٢ = ٤$$

١٧] إذا كان  $r_1$  ،  $r_2$  يمثلان الاختلافين المركزيين للقطعين

$$المخروطيين : \frac{r_1}{a} - \frac{r_2}{b} = 1 , \frac{r_1}{c} - \frac{r_2}{l} = 1$$

$$فأثبت أن  $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$  .$$

الحل:

القطع الاول :	القطع الثاني :
$a = b$ ، $c = k$	$a = k$ ، $b = l$
$a + c = k$	$a + l = k$

∴ القطعان لهما نفس (ج)

$$r_1 = \frac{a}{a} = \frac{a}{k} , r_2 = \frac{a}{l} = \frac{a}{a - k}$$

تعويض بالعلاقة :  $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{a}{k} + \frac{a}{a - k}$

$$\frac{1}{\frac{a}{k}} + \frac{1}{\frac{a}{a - k}} = \frac{k}{a} + \frac{a - k}{a} = \frac{k + a - k}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

١٩] إذا كان  $\frac{r_1}{a} = \frac{r_2}{b} + 1$  الاختلاف المركزي له هو

$$r_1 , r_2 , \frac{r_1}{a} - \frac{r_2}{b} = 1 \text{ والاختلاف المركزي له هو } r_2$$

$$\text{أثبت أن } (r_1)^2 + (r_2)^2 = 2$$
 .

الحل:

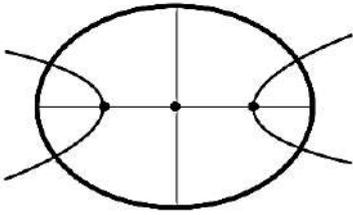
$$\frac{r_1}{a} = r_2 , \frac{r_1}{a} = r_2$$

$$\frac{r_1}{a} + \frac{r_1}{a} = (r_2)^2 + (r_2)^2$$

$$2 = \frac{2r_1^2}{a^2} = \frac{2r_2^2 + 2r_2^2 + 2r_2^2 - 2r_2^2}{a^2} =$$

٢٠] قطعان مخروطيان أحدهما زائد والاخر ناقص لهما

نفس المركز ورأسا القطع الزائد هما بؤرتا القطع الناقص و كان طول المحور المرافق يساوي طول المحور الاصغر اذا كان  $r_1$  هو الاختلاف المركزي للقطع الناقص و  $r_2$  الاختلاف المركزي للقطع الزائد ، أثبت ان  $r_1 \times r_2 = 1$  .



الحل:

$$r_1 = a + b , r_2 = a - b$$

$$r_1 - r_2 = 2b$$

$$r_1 + r_2 = 2a$$

لان :  $r_1 = a$  من المعطيات

∴  $r_2 = a$

$$r_1 \times r_2 = \frac{2a}{2} \times \frac{2b}{2} = a \times b = 1$$

١٨] إذا كانت المعادلة :  $17 = \frac{r_1}{a} + \frac{r_2}{b}$

تمثل قطع ناقص محوره الاكبر لمحور السينات أثبت أن :

$$k = \frac{17}{r_1 + r_2}$$

الحل:

$$1 = \frac{r_1}{17} + \frac{r_2}{17}$$

$$1 = \frac{r_1}{17} + \frac{r_2}{17}$$

$$k = \frac{17}{r_1 + r_2}$$

القطع ناقص سيني  $\frac{17}{k} = a$  ←

$$r_1 - r_2 = 2a = 2 \times \frac{17}{k} = \frac{34}{k}$$

$$r_1 + r_2 = \frac{17}{k}$$

∴  $k = \frac{17}{r_1 + r_2}$

ملاحظة مهمة

- (١) مساحة الدائرة =  $\pi$  نق<sup>٢</sup>  
 (٢) مساحة القطع الناقص =  $\pi$  أ ب

اسئلة :

١] جد مساحة القطع الناقص الذي يعادلته :

$$١ = \frac{ص^2}{٢٥} + \frac{س^2}{١٦}$$

الحل:

$$٥ = أ ، ٤ = ب$$

$$\text{مساحة القطع} = \pi \text{ أ ب} = \pi \times ٤ \times ٥ = \pi ٢٠$$

٢] جد نصف قطر الدائرة التي مساحتها تساوي مساحة

$$\text{القطع الناقص} \frac{ص^2}{١٦} + \frac{س^2}{٨١} = ١$$

$$\text{الحل: أ} = \sqrt{٨١} \Leftarrow \text{أ} = ٩ ، \text{ب} = ٤$$

$$\text{مساحة الدائرة} = \text{مساحة القطع}$$

$$\pi \text{ نق}^2 = \pi \text{ أ ب}$$

$$\text{نق}^2 = ٤ \times ٩ = ٣٦ \Leftarrow \text{نق} = ٦$$

٣] جد معادلة القطع الناقص الذي مساحته  $\pi ٤٠$  وحدة

مربعة ومركزها نقطة الاصل ومحوره الاكبر ينطبق على محور الصادات وطول محوره الاصغر ١٠ وحدات .

الحل:

$$١٠ = ب \Leftarrow ٥ = ب$$

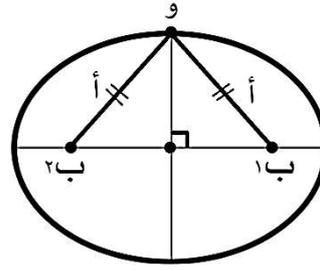
$$\text{المساحة} = \pi \text{ أ ب} = \pi \times ٥ \times ٨ = \pi ٤٠ \Leftarrow \text{أ} = ٨$$

المركز (٠ ، ٠)

$$\text{القطع الناقص صادي: } ١ = \frac{ص^2}{ب^2} + \frac{س^2}{أ^2}$$

$$١ = \frac{ص^2}{٢٥} + \frac{س^2}{٦٤}$$

٢١] في القطع الناقص برهن أن :  $ج^2 = أ^2 - ب^2$



الحل:

$$\text{وب} ١ + \text{وب} ٢ = أ^2$$

$$\Leftarrow \text{وب} ١ = \text{وب} ٢ = أ$$

من نظرية فيثاغورس :

$$أ^2 = ب^2 + ج^2$$

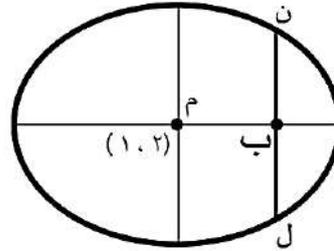
$$\therefore ج^2 = أ^2 - ب^2$$

٢٢] الشكل يمثل قطع ناقص معادلته :

$$١ = \frac{ص^2}{١٦} + \frac{س^2}{٢٥} = \frac{ص^2(١-ص)}{١٦} + \frac{س^2(٢-س)}{٢٥}$$

فيه قطع المستقيم (ل ، ن) المارة في بؤرته ، جد طول

القطع المستقيم (ل ن) .



الحل:

$$٥ = ب ، ٤ = أ$$

$$ج = ٣$$

$$\text{البؤرة (٥ ، ١)}$$

$$\text{إن احداثيات النقطة ن} = (٥ ، ١) ، \text{ل} = (٥ ، ٣)$$

نعوض بالمعادلة :

$$\frac{١٦}{٢٥} = \frac{ص^2(١-ص)}{١٦} \Leftarrow ١ = \frac{ص^2(١-ص)}{١٦} + \frac{٩}{٢٥}$$

$$\frac{ص}{٥} \pm \frac{١-ص}{٤}$$

$$\frac{١١-ص}{٥} ، \frac{٢١}{٥} = ص$$

$$\therefore \text{ن ل} = \frac{١١-ص}{٥} - \frac{٢١}{٥} = \frac{٣٢}{٥}$$

$$|٥| \quad ١ = \frac{ص^2}{٧} + \frac{س^2}{٧}$$

دائرة

$$|٦| \quad ١ = ٢ص^2 + ٢س^2$$

قطع مكافئ

$$|٧| \quad ١ = \frac{ص^2}{٤} + \frac{س^2}{٥}$$

قطع ناقص

سؤال : جد قيمة ك التي تجعل القطع  $٢س^2 + كص^2 = ٨$

(أ) قطع ناقص :  $(٠, ٠), (\infty, ٢)$

(ب) قطع زائد :  $(٠, ٠), (\infty, -)$

(ج) دائرة :  $\{٢\}$

تتميز القواطع حسب الاختلاف المركزي :

(١) الاختلاف المركزي للدائرة = ه = ٠

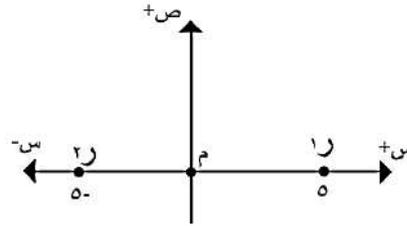
(٢) الاختلاف المركزي للقطع المكافئ (ه = ١)

(٣) الاختلاف المركزي للقطع الناقص (٠ < ه < ١)

(٤) الاختلاف المركزي للقطع الزائد (ه > ١)

٤] جد معادلة القطع الناقص الذي مساحته  $(\pi ٢٠)$

وحدة مربعة ورأساهما النقطتين  $(٠, ٥), (٠, ٠)$ .



الحل:

قطع ناقص سيني

المركز  $(٠, ٠)$

أ = ٥

$$\text{المساحة} = \text{أ} \text{ب} = \pi \text{ب} \text{ه} = \pi \text{ب} ٥ = \pi ٢٠ \Rightarrow \text{ب} = ٤$$

$$١ = \frac{ص^2}{٢٠} + \frac{س^2}{١٦}$$

$$١ = \frac{ص^2}{١٦} + \frac{س^2}{٢٥}$$

ملاحظات على تمييز القواطع :

(١) القطع المكافئ : يوجد فيه  $س^2$  أو  $ص^2$  فقط .

(٢) معادلة الدائرة : معامل  $س^2$  = معامل  $ص^2$  و

الإشارة بينهما موجبة .

(٣) معادلة القطع الناقص : معامل  $س^2$   $\neq$  معامل  $ص^2$

والإشارة بينهما موجبة .

(٤) القطع الزائد : إشارة معامل  $س^2$  عكس إشارة  $ص^2$

سؤال : ميز نوع القطع في كل مما يلي :

$$|١| \quad ٣٦ = ٤ص^2 + ٤س^2$$

دائرة

$$|٢| \quad ٧ = ٢س^2 + ٤ص^2 - ٦س$$

قطع ناقص

$$|٣| \quad ١ = \frac{ص^2}{٨} - \frac{س^2}{٩}$$

قطع زائد

$$|٤| \quad ١ = \frac{ص^2}{٧} - \frac{س^2}{٧}$$

قطع زائد

أسئلة صمغ القطوع :

١] جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه مركز الدائرة التي معادلتها  $(س - ٢) + (٤ - ص) = ٣٦$  وطول محوره الاصغر يساوي طول قطر هذه الدائرة و معادلة محوره الاصغر هي  $س = ١٠$ .

الحل : مساعد (دائرة)

$$(س - ٢) + (٤ - ص) = ٣٦$$

$$٤(س - ٣) + ٤(ص - ٢) = ٣٦$$

$$٩ = (س - ٣) + (ص - ٢)$$

$$٦ = ر \leq ٦$$

المطلوب (ناقص):

$$٦ = طول محوره الاصغر = ٢ب$$

$$١ = معادلة محوره الاصغر: س = ١٠$$

ناقص سيني

المركز (-١، ٢)

$$٤ = ج ، ب = ٣$$

$$٥ = أ \leq ٢ب - أ = ج$$

$$١ = \frac{(س - د)}{٢أ} + \frac{(ص - هـ)}{٢ب}$$

$$١ = \frac{(س + ١)}{٢٥} + \frac{(ص - ٢)}{٩}$$

٢] جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة  $(٤ ، ٢)$  ويقع مركزها في بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته  $(س + ٢) = ١٢(ص - ٢)$ .

الحل:

المساعد : (مكافئ)

بؤرة :  $(٢- ، ٥)$

$$(س + ٢) = ١٢(ص - ٢)$$

ر :  $(٢- ، ٢)$

$$٣ = ج$$

المطلوب : (دائرة)

تمر بالنقطة  $(٤ ، ٢)$

مركز :  $(٢- ، ٥)$

$$٢ر = (س - د) + (ص - هـ)$$

$$٢ر = (س + ٢) + (ص - ٥)$$

النقطة  $(٤ ، ٢)$  تحقق المعادلة

$$٣٦ = ٩ + ٤٥ = ٢ر$$

$$٤٥ = (س + ٢) + (ص - ٥) = المعادلة$$

٣] جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها في بؤرة القطع

المكافئ الذي معادلته :  $ص = \frac{١}{٤}س + س + ٣$  ، وتمس

دليله .

### المحل الهندسي :

المحل الهندسي : هو المنحنى الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى تحت شروط معينة .

### خطوات حل أسئلة المحل الهندسي :

- (١) نحول الكلمات الى معادلة .
- (٢) نستخدم قانون المسافة بين نقطتين والمسافة بين نقطة و خط مستقيم .
- (٣) نبسط المعادلة وذلك عن طريق التخلص من الجذور والقيمة المطلقة والاقواس .
- (٤) نحدد نوع المعادلة للقطع ان امكن .

### انواع اسئلة المحل الهندسي :

النوع الاول : أسئلة تعتمد على تعريف القطوع ( الدائرة ، المكافئ ، الزائد ، الناقص )

النوع الثاني : أسئلة لا ينطبق عليها تعريف القطع .

١] جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة (س ، ص) في المستوى بحيث يكون بعدها ثابتا مقداره وحدة واحدة عن المستقيم  $ص = ٣س + ٥$  وتمر أثناء حركتها بنقطة الاصل .

الحل: ف = ١

$$(س ، ص) \leftrightarrow ٥ = ٣س - ٤ص$$

$$١ = \frac{|٥ - ٣س - ٤ص|}{٥} = \frac{|٥ - ٣س - ٤ص|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$$

$$٥ = |٥ - ٣س - ٤ص|$$

$$٥ \pm = ٥ - ٣س - ٤ص$$

$$(س ، ص) \leftrightarrow ٥ = ٥ = ٣س - ٤ص$$

النقطة (٠ ، ٠) لا تحقق المعادلة

$$(س ، ص) \leftrightarrow ٥ = ٥ = ٣س - ٤ص$$

النقطة (٠ ، ٠) تحقق المعادلة

$$\therefore ٥ = ٣س - ٤ص$$

٢] جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة (س ، ص)

في المستوى بحيث تبعد بعدا ثابتا مقداره (٣) وحدات عن المستقيم (ص = ١) وتمر بالنقطة (٠ ، -٤) .

الحل:

$$٣ = ف$$

$$(س ، ص) \leftrightarrow ٣ = ١ + ص$$

$$٣ = \frac{|١ + ص|}{\sqrt{٠ + ١}}$$

$$٣ \pm = |١ + ص|$$

$$٣ = ١ + ص \leftrightarrow (ص = ٢)$$

النقطة (٠ ، -٤) لا تحقق المعادلة .

$$٣ = ١ + ص \leftrightarrow (ص = -٤)$$

النقطة (٠ ، -٤) تحقق المعادلة

∴ معادلة المحل الهندسي (ص = -٤) .

٣] جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعدين

متساويين من نقطتين ثابتتين (٠ ، ٢) ، (٠ ، -٢) .

الحل:

$$ف = ف$$

$$(س ، ص) \leftrightarrow (٠ ، ٢) = (س ، ص) \leftrightarrow (٠ ، -٢)$$

$$\sqrt{(٠ - ص)^2 + (٢ + ص)^2} = \sqrt{(٠ - ص)^2 + (٢ - ص)^2}$$

$$\sqrt{ص^2 + (٢ + ص)^2} = \sqrt{ص^2 + (٢ - ص)^2}$$

$$\sqrt{ص^2 + ٤ + ٤ص + ص^2} = \sqrt{ص^2 + ٤ - ٤ص + ص^2}$$

$$٨ = ٤ص$$

(س = ٠) معادلة المحل الهندسي .

٤] جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) التي تتحرك في المستوى بحيث أن بعدها عن المستقيم س = ٩ يساوي ٣ أمثال بعدها عن النقطة (٠ ، ١) .

الحل:

$$ف = ٣$$

$$(س ، ص) \leftrightarrow (س ، ص) = ٩ - س \leftrightarrow (س ، ص) \leftrightarrow (٠ ، ١)$$

$$\sqrt{(١-ص)^2 + (٠-س)^2} = \frac{|٩-س|}{١+١}$$

$$(٩-س)^2 = (١-ص)^2 + ص^2$$

$$٨١ - ١٨س + ٩ = ١ - ٢ص + ١ + ص^2$$

$$٩ص^2 + ٢س = ٧٢ \Leftrightarrow \frac{ص^2}{٨} + \frac{س}{٩} = ١ \text{ قطع ناقص}$$

٥] جد معادلة المحل الهندسي للنقطة (س ، ص) المتحركة في المستوى بحيث يكون بعدها عن النقطة (٠ ، ٤) يساوي  $\frac{٤}{٣}$  بعدها عن المستقيم ص = ٩ .

الحل:

$$ف = \frac{٤}{٣}$$

$$(س ، ص) \leftrightarrow (س ، ص) = (٤ ، ٠) \leftrightarrow (س ، ص) \leftrightarrow (٤ ، ٠) \leftrightarrow (س ، ص) \leftrightarrow (٤ ، ٠) \leftrightarrow (س ، ص) \leftrightarrow (٤ ، ٠)$$

$$\sqrt{(٤-ص)^2 + (٤-س)^2} = \frac{٤}{٣}$$

$$(٤-ص)^2 + (٤-س)^2 = \frac{١٦}{٩}$$

$$٨١ + ٧٤ص - ١٦ص^2 = ١٦ + ٨ص - ١٦ص^2$$

$$٩ + ٨ص - ١٦ص^2 = ١٦ + ٨ص - ١٦ص^2$$

$$٩ - ٧ = ٢ص - \frac{٧}{٩} \text{ قطع زائد}$$

٦] اثبت ان معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (ج ، ٠) و معادلة دليله س = - ج ورأسه هو نقطة الاصل تعطى بالعلاقة ص<sup>٢</sup> = ٤ ج س .

الحل: من تعريف القطع المكافئ

$$ف = ف$$

$$(س ، ص) \leftrightarrow (س ، ص) = (٠ ، ج) \leftrightarrow (س ، ص) \leftrightarrow (٠ ، ج) \leftrightarrow (س ، ص) \leftrightarrow (٠ ، ج)$$

$$\sqrt{(ج-ص)^2 + (٠-س)^2} = \sqrt{ص^2 + (٠-س)^2}$$

$$(ج-ص)^2 + س^2 = ص^2 + س^2$$

$$٢ج - ٢ص + ٢جس = ٢ص + ٢جس$$

$$ص^2 = ٤ ج س$$

٧] جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة (س ، ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون بعدها عن النقطة (٠ ، ٢) الى بعدها عن المستقيم ص = ٥ بنسبة ١ : ٣ .

الحل:

$$ف \times ٣ = ف$$

$$(س ، ص) \leftrightarrow (س ، ص) = (٢ ، ٠) \leftrightarrow (س ، ص) \leftrightarrow (٢ ، ٠) \leftrightarrow (س ، ص) \leftrightarrow (٢ ، ٠)$$

$$\sqrt{(٢-ص)^2 + (٢-س)^2} = \frac{|٥-ص|}{٣}$$

$$٩(٢-ص)^2 + ٩(٢-س)^2 = (٥-ص)^2$$

$$٢٢٥ + ٩ص - ٩ص^2 = ٤ + ٨ص - ٩ص^2$$

$$٢٢١ - ٨٦ص + ٨ص^2 = ٠ \text{ قطع زائد}$$

٨] جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعدين متساويين من المحورين .

الحل:

$$ف = ف$$

$$(س ، ص) \leftrightarrow (س ، ص) = (٠ ، ٠) \leftrightarrow (س ، ص) \leftrightarrow (٠ ، ٠) \leftrightarrow (س ، ص) \leftrightarrow (٠ ، ٠)$$

$$\frac{|ص|}{١} = \frac{|س|}{١}$$

$$(س = ص) \text{ أو } (س = -ص)$$

٩] جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة (س، ص) في المستوى بحيث تبعد بعدا ثابتا مقداره وحدتان عن المستقيم  $s + 8v = 2$  وتمر اثناء حركتها برأس القطع المكافئ الذي معادلته:  $(s - 1)^2 = 8(v - 2)$ .

أسئلة: جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة

و (س، ص) في الحالات التالية:

١]  $s^2 + n^2 = 1$  /  $v = n - 2$

الحل:  $n = v + 2$  نعوض في (س)

$s^2 = (v + 2)^2 - 1$

(س - ١) =  $(v + 2)$  قطع مكافئ.

٢]  $s = \text{جان} / \text{ص} = \text{جتان} + 2$ .

الحل:

$\text{جان} + \text{جتان} = 1$

$s^2 = (v - 2)^2 + 1$  دائرة

٣]  $s = \text{ظتان} - 1 / \text{ص} = 2 \text{قتان} + 5$ .

الحل:

$s - 1 = \text{ظتان} / \text{قتان} = \frac{v - 5}{2}$

$\text{ظتان} = \text{قتان} - 1$

$(s - 1)^2 = \frac{(v - 5)^2}{4}$

$1 = \frac{(v - 5)^2}{4} - (s - 1)^2$  قطع زائد

٤]  $s = 5 + 3 \text{جاه} / \text{ص} = 2 + 3 \text{جتاه}$

الحل:

$\text{جاه} = \frac{5 - s}{3} / \text{جتاه} = \frac{v - 2}{3}$

$\text{جاه} + \text{جتاه} = 1$

$1 = \frac{(v - 2)^2}{9} + \frac{(s - 5)^2}{9}$  دائرة

٥]  $s = \text{جتان} - \text{جان} / \text{ص} = \text{جان} 2$

الحل:

$s^2 = (\text{جتان} - \text{جان})^2 = 2 \text{جان} \text{جتان} + \text{جان}^2$

$1 = \text{جان}^2 - 1 = \text{ص}$

$\therefore s^2 = 1 - \text{ص}$  قطع مكافئ

S  
A  
L  
I  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
I  
E  
E  
B

١٠] اثبت ان معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه

(٠، ج) و (٠، ص) وطول محوره الاكبر ٢ أ، يعطى بالعلاقة:

$\frac{s}{a} + \frac{v}{b} = 1$  ، حيث أن  $b^2 = a^2 - c^2$ .

الحل: من تعريف القطع الناقص

$f + f' = 2a$

$(s, v) \leftrightarrow (c, 0) + (s, v) \leftrightarrow (0, -c)$

$\sqrt{(s-c)^2 + v^2} + \sqrt{(s+c)^2 + v^2} = 2a$

$\sqrt{(s-c)^2 + v^2} = 2a - \sqrt{(s+c)^2 + v^2}$

$s^2 - 2cs + c^2 + v^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(s+c)^2 + v^2} + (s+c)^2 + v^2$

$2cs - 2c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(s+c)^2 + v^2}$

$cs - c^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{(s+c)^2 + v^2}$

$a\sqrt{(s+c)^2 + v^2} = 2a^2 - cs + c^2$

$a^2((s+c)^2 + v^2) = (2a^2 - cs + c^2)^2$

$a^2(s^2 + 2cs + c^2 + v^2) = 4a^4 - 4a^2cs + 4a^2c^2 + c^2s^2 - 4a^2cs + 4a^2c^2 + c^4$

$(a^2 - c^2)s^2 + 2a^2cs + (a^2 - c^2)v^2 = 4a^4 - 4a^2cs + 4a^2c^2 + c^2s^2 - 4a^2cs + 4a^2c^2 + c^4$

$\frac{a^2s^2}{a^2 - c^2} + \frac{2a^2cs}{a^2 - c^2} + \frac{(a^2 - c^2)v^2}{a^2 - c^2} = \frac{4a^4 - 4a^2cs + 4a^2c^2 + c^2s^2 - 4a^2cs + 4a^2c^2 + c^4}{a^2 - c^2}$

$1 = \frac{v}{b} + \frac{s}{a}$

$$|6| \text{ س} = 5 + 3 \text{ جا ه} / \text{ص} = 2 + 2 \text{ جتا ه}$$

الحل:

$$\frac{\text{س} - 5}{3} = \text{جا ه} / \frac{\text{ص} - 2}{2} = \text{جا ه}$$

$$\text{جا ه} + \text{جتا ه} = 1$$

$$1 = \frac{(3 - \text{س})}{9} + \frac{(2 - \text{ص})}{4}$$

قطع ناقص

$$|7| \text{ س} = \text{جا ه} + \text{جتا ه} / \text{ص} = 2 \text{ جا ه جتا ه}$$

الحل:

$$\text{ص} = 4 \text{ جا ه جتا ه}$$

$$2 = \frac{\text{ص}}{2} = \text{جا ه جتا ه}$$

$$\text{س} = 2 (\text{جا ه} + \text{جتا ه})$$

$$= \text{جا ه} + 2 \text{ جا ه جتا ه} + \text{جتا ه}$$

$$= 2 + 1 = 2 + \text{جا ه جتا ه} = \frac{\text{ص}}{2} + 1$$

$$\text{س} = 2 - \frac{\text{ص}}{2} = 1 \text{ قطع زائد}$$

$$|8| \text{ س} = \text{أ} (\text{جتان} - \text{جان}) / \text{ص} = \text{ب} (\text{جتان} + \text{جان})$$

الحل:

$$\frac{\text{س}}{\text{أ}} = \text{جان} + \text{جتان}$$

$$\frac{\text{س}}{\text{أ}} = \text{جان} + 2 \text{ جان جتان} + \text{جتان}$$

$$\frac{\text{س}}{\text{أ}} = 1 + \text{جان} \Leftrightarrow \frac{\text{س}}{\text{أ}} - 1 = \text{جان}$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{ب}} = \text{جتان} - \text{جان}$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{ب}} = \text{جتان} - 2 \text{ جان جتان} + \text{جان}$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{ب}} = 1 - \text{جان} = 1 - \left( \frac{\text{س}}{\text{أ}} - 1 \right)$$

$$2 = \frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}}$$

أ = ب دائرة

أ ≠ ب قطع ناقص

$$|9| \text{ س} = 5 + \text{جان} + \text{جتان} / \text{ص} = 2 \text{ جان}$$

الحل:

$$\text{س} - 5 = \text{جان} + \text{جتان}$$

$$(\text{س} - 5) = 2 (\text{جان} + \text{جتان})$$

$$= \text{جان} + 2 \text{ جان جتان} + \text{جتان}$$

$$= 1 + \text{جان} = 2 \text{ جان}$$

$$(\text{س} - 5) = 1 + \text{ص} \text{ قطع مكافئ}$$

$$|10| \text{ س} = \text{ن} + \frac{1}{\text{ن}} / \text{ص} = \text{ن} - \frac{1}{\text{ن}}$$

الحل:

$$\text{س} = 2 \left( \text{ن} + \frac{1}{\text{ن}} \right) = 2 \text{ن} + \frac{2}{\text{ن}}$$

$$\text{ص} = 2 \left( \text{ن} - \frac{1}{\text{ن}} \right) = 2 \text{ن} - \frac{2}{\text{ن}}$$

$$\text{بالطرح: س} = 2 \text{ص} = 4 \text{ قطع زائد}$$

$$|11| \text{ ن} = 2 \text{ لوس} / \text{ص} = \sqrt{1 - \text{ه}}$$

الحل:

$$\text{ص} = 2 \text{ه} - 1 \Leftrightarrow \text{ص} = 2 \text{ه} - 1$$

$$\frac{\text{ن}}{2} = 2 \text{ لوس} \Leftrightarrow \text{ه} = \frac{\text{ن}}{2}$$

$$\text{ه} = \frac{\text{ن}}{2}$$

$$1 - \text{ص} = \text{س}$$

$$\text{س} + \text{ص} = 1 \text{ معادلة دائرة}$$

١٢ | تتحرك النقطة و (س ، ص) في المستوى بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين : س = ظا ه + ظتا ه ، ص = ظتا ه حيث ه زاوية متغيرة ، جد معادلة مسار النقطة (و) ثم بين نوع هذا المسار .

الحل:

$$ص = ظتا ه$$

$$س = ظا ه + ظتا ه$$

$$\frac{ظا ه + ظتا ه}{ظتا ه} = \frac{ظا ه}{ظتا ه} + \frac{ظتا ه}{ظتا ه}$$

$$= \frac{ظا ه + ظتا ه}{ظتا ه}$$

$$= \frac{ظا ه}{ظتا ه} + \frac{ظتا ه}{ظتا ه} = \frac{ظا ه}{ظتا ه} + ١$$

$$\frac{س}{ص} = \frac{ظا ه}{ظتا ه} + ١$$

لكن : ١ + ظتا ه = ظتا ه

$$١ + ص = ظتا ه$$

$$\frac{س}{ص} = ١ + ص$$

$$س = ص + ص^٢$$

$$٤ = ص - ص^٢$$

$$١ = \frac{ص}{٤} - \frac{ص^٢}{٤}$$

معادلة قطع زائد

حل أسئلة الكتاب  
القطوع المخروطية

# الرياضيات

المستوى الرابع

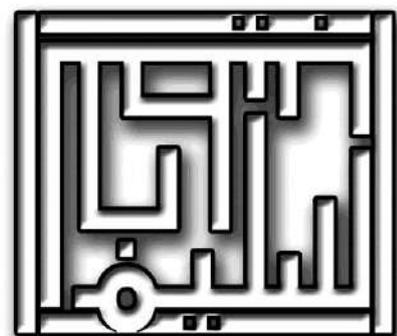
التخصص: العلمي

إعداد الاستاذ

سليم الخطيب

0787800852 \ الوحدات \  
0795024143 \ ماركا \  
0799988354 \ الاشرافية \  
0798513729 \ حي نزال \  
0797319219 \ الجامعة الاردنية \

مركز زهرة النظر  
مركز الهادفون العلمي  
مركز كفر عانة  
مركز زهرة الحصاد  
مركز تقارب



[f /al2s6ora.saleem.al5a6eeb](https://www.facebook.com/al2s6ora.saleem.al5a6eeb)

0786230407

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

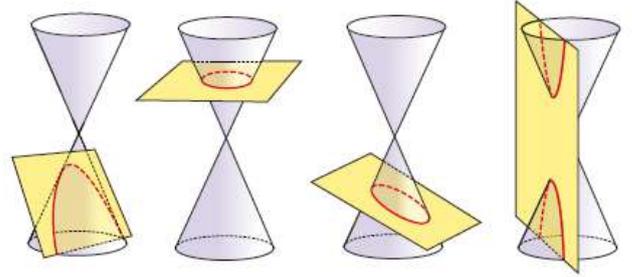
سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

### الفصل الأول: القطوع المخروطية

أولاً: القطع المخروطي

تمارين ومسائل ص (٣٢٠)

١) اعتماداً على الشكل (٥-٣)، اكتب اسم القطع المخروطي الناتج في كل حالة:



الشكل (٥-٣)

الحل:

أ) قطع زائد ب) قطع ناقص ج) دائرة د) قطع مكافئ

٢) اكتب اسم الشكل الناتج عن قطع مستوى لمخروط قائم مزدوج في كل من الحالات الآتية:

أ. اذا قطع المستوى فرعي المخروط حيث لا يحتوي القطع على رأس المخروط.

الحل: (قطع ناقص)

ب. اذا قطع المستوى المخروط بشكل عمودي على المحور، ولا يحوي رأس المخروط.

الحل: (دائرة)

ج. اذا قطع المستوى المخروط بشكل مائل مواز لرأس المخروط بحيث يقطع أحدهما دون الآخر.

الحل: (قطع مكافئ)

د. اذا قطع المستوى المخروط بشكل مائل قليلاً عن المحور، بحيث يقطع أحد المخروطين دون الآخر.

الحل: (قطع ناقص)

ثانياً: المحل الهندسي

• تدرّب (١) ص (٣٢٢)

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى ب(س، ص) التي تبعد بعداً ثابتاً مقداره وحدة واحدة عن النقطة الثابتة ك(٢، -٤).

الحل:

المحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى هو دائرة مركزها المقطة (٢، -٤) ونصف قطرها = ١ وحدة.

∴ معادلة المحل الهندسي = معادلة الدائرة

$$\leftarrow (س - ٢)^2 + (ص + ٤)^2 = ١^2$$

$$\leftarrow (س - ٢)^2 + (ص + ٤)^2 = ١$$

• تدرّب (٢) ص (٣٢٣)

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ف المستوى ج(س، ص)، بحيث تبعد بعداً ثابتاً مقداره  $(\sqrt{٥})$  وحدة طول عن المستقيم م: ص = -٢س، وتمر أثناء حركتها بالنقطة (-١، -٣).

الحل:

المحل الهندسي الناتج هو خط مستقيم، ولايجاد معادلته:

$$\text{البعد} = \sqrt{٥}$$

$$\text{م: ص} = ٢س + ٠$$

النقطة (س، ص)

$$\text{البعد} = \frac{|٢س + ص + ٠|}{\sqrt{٢^2 + ١^2}}$$

$$\left| \frac{٢س + ص}{\sqrt{٥}} \right| = \frac{|٢س + ص + ٠|}{\sqrt{٥}} = \sqrt{٥}$$

$$|٢س + ص| = ٥$$

$$\therefore ٢س + ص = ٥ \text{ أو } ٢س + ص = -٥$$

وبما أن النقطة المتحركة تمر أثناء حركتها بالنقطة (-١، -٣)

$$\text{فإن معادلة المستقيم} = ٢س + ص = -٥$$

• تدرّب (٣) ص (٣٢٤)

SALAMAT

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

**الحل:**

معادلة المحل الهندسي هي:

$$\left| \frac{4-s}{\sqrt{(1)+1}} \right|^2 = \sqrt{(3-s)^2 + (5-s)^2}$$

تربيع الطرفين

$$\begin{aligned} (4-s)^2 &= (3-s)^2 + (5-s)^2 \\ 16 - 8s + s^2 &= 9 - 6s + s^2 + 25 - 10s + s^2 \\ 16 - 8s + s^2 &= 34 - 16s + 2s^2 \\ 0 &= 18 - 8s + s^2 \end{aligned}$$

### الفصل الثاني: معادلات القطوع المخروطية

**أولاً: الدائرة**

• **تدريب (١) ص (٣٢٧)**

(١) جد معادلة الدائرة التي نهايتها قطرهما النقطتان (٣، ٧)، (١، ٥).

**الحل:**

معادلة الدائرة التي نهايتها قطرهما النقطتان (٣، ٧)، (١، ٥).

$$\left( \frac{s+3}{2}, \frac{s+7}{2} \right)$$

$$\text{نجد احداثيات المركز} = \left( \frac{1+3}{2}, \frac{5+7}{2} \right) = (2, 6)$$

$$\sqrt{(1-3)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = \text{نوه} = 2\sqrt{5} \text{ وحدة طول}$$

$$\text{نوه} = 2\sqrt{5} \text{ وحدة}$$

$$\therefore \text{معادلة الدائرة هي } (s-2)^2 + (s-6)^2 = 20$$

(٢) جد احداثيي مركز وطول نصف قطر الدائرة التي

$$\text{معادلتها: } (s+1)^2 + (s-4)^2 = 30$$

**الحل:**

معادلة الدائرة على الصورة القياسية:

$$\therefore \text{مركز الدائرة هو } (-1, 4), \text{ نوه} = \sqrt{30} \text{ وحدة}$$

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ج(س، ص) المتحركة في المستوى، التي يكون بعدها عن محور الصادات مساوياً لثلاثة أمثال بعدها عن النقطة د(٢، ١).

**الحل:**

معادلة المحل الهندسي هي:

$$\left| \frac{s}{\sqrt{1}} \right| = \sqrt{(1+s)^2 + (2-s)^2} \times 3$$

(محور الصادات معادلته = ٠)

$$|s| = \sqrt{(1+s)^2 + (2-s)^2} \times 3$$

$$s^2 = (1+s)^2 + (2-s)^2 \times 9$$

$$s^2 = 9 + 18s + 9s^2 + 4 - 4s + s^2 \times 9$$

**تمارين ومسائل ص (٣٢٥)**

(١) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى ب(س، ص) التي تبعد بعداً ثابتاً مقداره (٧) وحدات عن النقطة الثابتة ك(٢، ٦).

**الحل:**

معادلة المحل الهندسي هي:

$$(s-2)^2 + (s-6)^2 = 49$$

(٢) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ع(س، ص) التي تتحرك في المستوى، بحيث تبعد بعداً ثابتاً مقداره (٤) وحدات عن المستقيم الذي معادلته س = ١، وتمرأثناء حركتها بالنقطة د(٣، ٢).

**الحل:**

معادلة المحل الهندسي هي:

$$\left| \frac{s-1}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2}} \right| = 4 = \text{البعد}$$

$$|s-1| = 4 \Rightarrow s = 5 \text{ تهمل}$$

او  $s = -3$  لان النقطة د(٣، ٢) تقع عليه

(٣) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة د(س، ص) المتحركة في المستوى، التي يكون بعدها عن النقطة ه(٥، ٣) مساوياً دائماً لمثلي بعدها عن المستقيم الذي معادلته ص = ٤.

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

### • تدرّب (٢) ص (٣٢٨)

جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (٤، -١) وتمس محور السينات. متدا تلاحظ من خلال حل كل من مثال (٢) وتدريب (٢)؟

#### الحل:

بما ان الدائرة تمس محور السينات ، فإن نقطة التماس (٤، ٠) ، وبما ان المركز (٤، -١) نجد:

$$نوه = \sqrt{(٤-٤)^2 + (-١-٠)^2} = ١ \text{ وحدة}$$

∴ المعادلة (س - ٤) + ص = ١ وهي الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

### • تدرّب (٣) ص (٣٢٨)

جد معادلة الدائرة في كل من الحالات الآتية:

(١) مركزها النقطة (٤، -١) وتمس المستقيم الذي معادلته ص = -٢

#### الحل:

$$\text{نجد نق} = \frac{|١س + ١ص + ١ج|}{\sqrt{(١)^2 + (١)^2}} = \text{البعد بين نقطة ومستقيم}$$

حيث (٤، -١) = (س١، ص١)

٠ = معامل س في المستقيم

ب = معامل ص

ج = ٢ = الحد الثابت لأن المعادلة ص + ٢ = ٠

$$\frac{1}{١} = \frac{|٢ + ١(-١) + ٤(٠)|}{\sqrt{(١)^2 + (١)^2}} = \text{وحدة طول}$$

∴ معادلة الدائرة هي : (س - ٤) + (ص + ١) = ١

(٢) تمس المحورين الإحداثيين وطول نصف قطرها يساوي (٣) وحدات (ادرس جميع الحالات الممكنة).

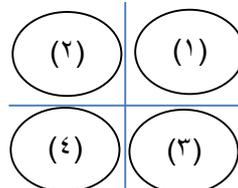
#### الحل:

بما ان الدائرة تمس المحورين ونصف قطرها = ٣ وحدات

لاحظ الشكل:

(١) الحل الاول:

الدائرة تقع في الربع الاول



مركزها (٣، ٣) ، نق = ٣

∴ معادلة الدائرة هي : (س - ٣) + (ص - ٣) = ٩

(٢) الحل الثاني: الدائرة تقع في الربع الثاني

المركز (٣، -٣) ، نق = ٣

∴ معادلة الدائرة هي : (س + ٣) + (ص - ٣) = ٩

(٣) الحل الثالث: الدائرة تقع في الربع الثالث

∴ معادلة الدائرة هي : (س + ٣) + (ص + ٣) = ٩

(٤) الحل الرابع: الدائرة تقع في الربع الرابع

∴ معادلة الدائرة هي : (س - ٣) + (ص + ٣) = ٩

### • تدرّب (٤) ص (٣٢٩)

جد مركز وطول نصف قطر الدائرة المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

$$(١) س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٦ص - ٦ = ٠$$

#### الحل:

بما ان المعادلة على الصورة العامة ، فإن مركز الدائرة

= (-نصف معامل س ، -نصف معامل ص)

د = ١ ، هـ = -٣ ، ج = الحد الثابت = -٦

$$\therefore \text{احداثيا المركز} = \left( \frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢} \right) = (١ ، ١.٥)$$

$$\text{طول نصف القطر} = \sqrt{(١-١.٥)^2 + (١.٥-١)^2} = ٠.٥$$

$$= \sqrt{(١-١)^2 + (١-١.٥)^2} = ٠.٥$$

$$= \sqrt{١ + ٩ + ١} = \sqrt{١١} = ٣.٣١٦ \text{ وحدة طول}$$

حل آخر: يمكن تحويل المعادلة الى الصورة القياسية بإكمال المربع ثم ايجاد المركز ونصف القطر.

$$(٢) (٣س + ٦) + (٣ص - ١٢) = ٣٦$$

#### الحل:

يمكن تحويل المعادلة الى الصورة القياسية على الصورة

$$(س - د) + (ص - هـ) = نق$$

$$\frac{٣٦}{٣} = \frac{١٢ - ٣ص}{٣} + \frac{٦ + ٣س}{٣}$$

بالقسمة على ٣ ولاحظ انها داخل (٠)

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

$\therefore \left(\frac{b}{4}, \frac{a}{4}\right) = \left(\frac{b}{4}, \frac{a}{4}\right) = \left(\frac{b}{4}, \frac{a}{4}\right)$   
وبحل المعادلتين (١) و (٢) نجد أن  $b = 8$  ،  $a = -34$   
 $\therefore$  الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي :

$x^2 + y^2 + 8x - 34y = 0$   
ملاحظة: يمكن حل السؤال على المسافة بين نقطتين  
 $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$  ، المركز  $(h, k)$  ،  
 $r = \sqrt{5}$  وحدة طول

### تمارين ومسائل (٣٣٢-٣٣٣)

(١) جد معادلة الدائرة في كل حالة من الحالات الآتية:  
أ) مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٨ وحدات.

الحل:

معادلة الدائرة  $x^2 + y^2 = r^2$  (٨)

ب) مركزها النقطة  $(-2, 1)$  وتمر بالنقطة  $(5, 1)$ .

الحل:

معادلة الدائرة  $x^2 + y^2 + 2(x-h) + 2(y-k) + c = 0$   
لأن  $49 = (1-s)^2 + (2+s)^2$   
نوه  $r = \sqrt{(1-1)^2 + (2-5)^2} = 7$  وحدة طول

ج) مركزها النقطة  $(3, -7)$  وتمس محور السينات.

الحل:

معادلة الدائرة  $x^2 + y^2 + 2(x-h) + 2(y-k) + c = 0$   
لأن  $49 = (7+s)^2 + (3-s)^2$   
= البعد بين المركز والمماس  $7 = |7|$  وحدة طول

د) نهايتا قطر فيها هما النقطتان  $(6, -1)$  ،  $(4, 3)$ .

الحل:

معادلة الدائرة  $x^2 + y^2 + 2(x-h) + 2(y-k) + c = 0$   
لأن  $(5\sqrt{2})^2 = (1-s)^2 + (5-s)^2$   
المركز  $\left(\frac{3+1}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = (2, 2.5)$   
نوه  $r = \sqrt{(1-1)^2 + (5-6)^2} = 5\sqrt{2}$  وحدة طول

هـ) طول نصف قطرها يساوي (٥) وحدات وتمس المحورين  
الاحداثيين ويقع مركزها في الربع الرابع.

ومنه  $x^2 + (y+2)^2 = (x-4)^2 + y^2$   
 $\therefore$  المركز  $(-2, 4)$  ،  $r = 2$  وحدة طول

### • تدرّب (٥) ص (٣٣٠)

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط  $(0, 0)$  ،  $(2, 0)$  ،  $(0, -1)$  ،  
(٣) ثم جد مركزها وطول نصف قطرها .

الحل:

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي

$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$  ، نعوض النقاط

$(0, 0) \rightarrow 0 = 0 + 0 + C$

$(2, 0) \rightarrow 4 + 0 + 4A + C = 0$

$2 = 4 + 2B$

$(3, -1) \rightarrow 9 + 1 + 6A - 2B + C = 0$

$1 - 6 = 4A - 2B$

$\therefore$  معادلة الدائرة  $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$

احداثيا مركز الدائرة =

$\left(\frac{2-0}{2}, \frac{0-(-1)}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right)$

نوه  $r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$r = \sqrt{(2-2)^2 + (0-1)^2} = 1$  وحدة طول

### • تدرّب (٦) ص (٣٣١)

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين  $(-1, 3)$  ،  $(5, 1)$  ويقع  
مركزها على محور الصادات.

الحل:

بما ان الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي:

$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$  ، مركزها على محور  
الصادات احداثياته  $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$  ، ولما ان النقاط  $(-1, 3)$  ،

$(5, 1)$  تقع على الدائرة ، فإنها تحقق معادلتها ومنه:

$1 + 9 + 2A(-1) + 6B + C = 0$  (١)

$25 + 1 + 10A + 2B + C = 0$  (٢)

وبما ان المركز = (-نصف معامل س ، -نصف معامل ص)

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

الحل:

معادلة الدائرة  $(x-5)^2 = (x+5)^2 + (y-5)^2$  لأن  
الدائرة تقع في الربع الرابع وتمس المحورين فإن المركز  $(5, 5)$

وتمر بالنقطتين  $(4, 4)$ ،  $(2, 0)$ ، ويقع مركزها على محور  
السينات.

الحل:

الدائرة يقع مركزها على محور السينات  $\left(5, \frac{1}{4}\right)$  ←  
ب = ٥ ←

تمر بالنقطة  $(2, 0)$  ← ج = ٤ -

تمر بالنقطة  $(4, 4)$  ← ج + ١٤ = ٣٢ - ← ٧ = ١ -

∴ المعادلة هي:  $x^2 + y^2 - 7x - 4y - 4 = 0$

ز) تمر بالنقط  $(-5, 0)$ ،  $(3, 4)$ ،  $(1, 2)$ .

الحل:

نكون نظاما من ثلاث معادلات بثلاث متغيرات ونحلها  
النظام:

$$-15 = ج + ٢٥ - \quad (1)$$

$$-13 = ج + ٤ + ١٣ - \quad (2)$$

$$١ + ٢ = ج + ٥ - \quad (3)$$

ومن الحل نجد أن  $أ = ٤$ ،  $ب = ٢$ ،  $ج = ٥ -$

∴ المعادلة هي:  $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 5 = 0$

ح) تمر بالنقطة  $(1, 2)$  وتمس محور السينات عند النقطة  
 $(0, 7)$ .

الحل:

الدائرة تمس محور السينات عند النقطة  $(0, 7)$  ←

مركز الدائرة  $\left(7, \frac{1}{4}\right) = \left(7, \frac{1}{4}\right)$  ←  $١٤ - = ١ -$

وتمس النقطة  $(0, 7)$  ← ج = ٤٩

وتمر بالنقطة  $(1, 2)$  ← ب = ٢٠ -

∴ المعادلة هي:  $x^2 + y^2 - 14x - 20y + 49 = 0$

٢) جد إحداثيي المركز وطول نصف قطر الدائرة المعطاة  
معادلتها في كل مما يأتي:

$$١٤٤ = ٢ ص + ٢ س \quad (أ)$$

الحل:

المركز  $(0, 0)$ ،  $نوه = \sqrt{144} = ١٢$  وحدة طول

$$٢ (٤ + ص) - ١٣ = ٢ (١١ + س) \quad (ب)$$

الحل:

نكتب المعادلة على الصورة القياسية

$$١٣ = ٢ (٤ + ص) + ٢ (١١ + س)$$

المركز  $(-١١, ٤)$ ،  $نوه = \sqrt{13}$  وحدة طول

$$٨١ = ٢ (٧ - ص) + ٢ س \quad (ج)$$

الحل:

المركز  $(٧, ٠)$ ،  $نوه = \sqrt{81} = ٩$  وحدة طول

$$٦ ص - ٨ س = ٩ - ٢ ص + ٢ س \quad (د)$$

الحل:

نكتب المعادلة على الصورة العامة:

$$٠ = ٩ - ٦ ص - ٨ س - ٢ ص + ٢ س$$

$$\text{المركز} = \left(\frac{٦+٢}{٢}, \frac{٨+٢}{٢}\right) = (٤, ٣)$$

$$\text{نوه} = \sqrt{٩ - ٢(٣) + ٢(٤)}$$

$$= \sqrt{٩ + ٩ + ١٦} = \sqrt{٣٤} \text{ وحدة طول}$$

$$٠ = ٢٧ - ٦ ص + ٢ ص٣ + ٢ س٣ \quad (هـ)$$

الحل:

نكتب المعادلة على الصورة القياسية:

$$٣ س٣ + ٢ ص٣ - ٦ ص + ٢٧ = ٠ \text{ نقسم على } ٣$$

$$٠ = ٩ - ٢ ص + ٢ ص٣ + ٩$$

المركز  $(٠, ١)$

$$\text{نوه} = \sqrt{٩ - ٢(١) + ٢(٠)} = \sqrt{٧} \text{ وحدة طول}$$

S  
A  
L  
A  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

٥) تتحرك النقطة ل(س، ص) في المستوى بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين  $س = ٣ + ٢ج$  ،  $ص = ٤ + ٢ج$  حيث ه زاوية متغيرة، جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ل، وبين نوعه.

الحل:

$$\text{بما ان } س = ٣ + ٢ج \leftarrow ج = \frac{س-٣}{٢} \leftarrow (١)$$

$$ص = ٤ + ٢ج \leftarrow ج = \frac{ص-٤}{٢} \leftarrow (٢)$$

لكن  $ج = \frac{س-٣}{٢} = \frac{ص-٤}{٢}$  متطابقة مثلثية

$$\therefore ١ = \frac{٣-س}{٢} + \frac{٤-ص}{٢}$$

$$\leftarrow (س-٣) + (ص-٤) = ٢ \text{ وهي معادلة المحل}$$

الهندسي

∴ المحل الهندسي هو دائرة مركزها (٣، ٤) وطول نصف قطرها = ٢ وحدة

٦) جد قيم الثابت ج التي تجعل المعادلة

$$س^٢ + ص^٢ + ٨س - ٤ص + ج = ٠ \text{ معادلة دائرة.}$$

الحل:

$$\text{بما ان } س^٢ + ص^٢ + ٨س - ٤ص + ج = ٠ \text{ معادلة دائرة فإن}$$

$$\left(\frac{٨}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{-٤}{٢}\right)^٢ - ج < صفر$$

مركز الدائرة (-٤، ٢)

$$٨ = أ \leftarrow أ = \frac{٨}{٢} = ٤$$

$$ب = \frac{-٤}{٢} = -٢$$

$$\therefore ج < -٢ + ٤ = ٢$$

$$١٦ + ٤ < ج < ٢٠ \leftarrow ج < ٢٠ \text{ قيم ج } = (-٠٦٠٠, ٢)$$

٧) جد معادلة الدائرة التي تمس كلاً من المستقيمين  $س = ٠$ ،

$ص = ٢$ ، وتمر بالنقطة (٤، ٠) ويقع مركزها في الربع الاول وطول نصف قطرها أكبر من وحدتين.

الحل:

$$\text{معادلة الدائرة هي } (س-٢)^٢ + (ص-٥)^٢ = ر$$

$$٢-ر = ه \leftarrow ر = ٢-ه$$

$$\therefore ر = (٢-ه)^٢ + (ص-٥)^٢$$

$$\text{و } (٢-س)^٢ + (١٠+ص)^٢ = ١٠٠$$

الحل:

$$\frac{١٠٠}{٢} = (٢-س)^٢ + \left(\frac{١٠+ص}{٢}\right)^٢$$

$$(س-١)^٢ + (٥+ص)^٢ = ٢٥ \leftarrow \text{المركز } (١، -٥)،$$

نق = ٥ وحدة طول

$$\text{ز } (٤+س)^٢ + ص^٢ = ١٦$$

الحل:

نكتب المعادلة على الصورة القياسية:

$$(٤+س)^٢ + ص^٢ = ١٦$$

← المركز (-٤، ٠)، نق = ٤ وحدة طول

٣) جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم الذي معادلته  $ص = ٢س = ٤$  وتمس محور السينات عند النقطة (١، ٠).

الحل:

$$\text{المركز } (د، ه) = (١، ه)$$

وبما ان المركز يقع على المستقيم  $ص = ٢س = ٤$  يحقق

$$\text{معادلته } ه = ٢ \times ١ = ٢ \leftarrow ه = ٢$$

∴ احداثيا المركز (١، ٢)

نق = المسافة بين (١، ٢)، (٠، ١) = ٦ وحدات

$$\therefore \text{معادلة الدائرة هي } (س-١)^٢ + (ص-٢)^٢ = ٣٦$$

٤) جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (-٢، ٢) وتمس المستقيم الذي معادلته  $ص = ٣س + ١٠$ .

الحل:

مركز الدائرة (-٢، ٢)، نق = البعد بين المركز والمماس الذي

$$\text{معادلته } ٣س - ص = ١٠$$

$$\text{نق} = \frac{|١٠ + (٢-٣) \times ١ - ٢ \times ٣|}{\sqrt{٢(١-٣) + ٢(٣)}} = \frac{٦}{١,٧}$$

$$= \frac{|١٠ + ٢ + ٦|}{١,٧} = \frac{١٨}{١,٧}$$

$$\therefore \text{معادلة الدائرة هي } (س+٢)^٢ + (ص+٢)^٢ = \frac{٣٦}{١,٧}$$

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

∴ معادلة الدائرة هي

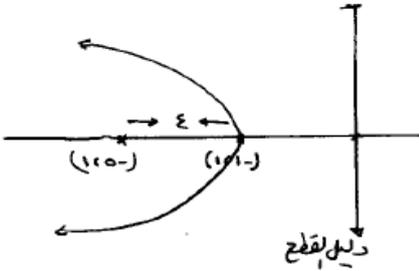
$$r^2 - 4 = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 4 - s) + \sqrt{2}(\sqrt{2} + 4 - s)$$

ثانياً: القطع المكافئ

• تدرّب (١) ص (٣٣٨)

جد معادلة القطع المكافئ في كل مما يأتي، ثم ارسم منحناه:  
(١) رأسه النقطة (١، ١)، وبؤرته النقطة (١، ٥).

الحل:



لاحظ ان القطع مفتوح لليسار

∴ معادلة القطع هي (ص - هـ) = ٢(ج - د)

وحيث ان الرأس (د، هـ) = (١، ١)

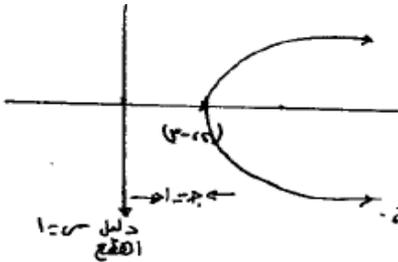
وبعد الرأس عن البؤرة = ج = ٤ وحدات

∴ المعادلة (ص - ١) = ٢(٤ - (س + ١))

$$= (ص - ١) = ١٦ - ٢(س + ١)$$

(٢) رأسه النقطة (٢، ٣)، ومعادلة دليله س = ١.

الحل:



حيث ج = البعد بين الرأس والبؤرة

= البعد بين الرأس والدليل

معادلة القطع المكافئ هي:

$$(ص + ٣) = ٢(٤ - (س - ٢))$$

$$(ص + ٣) = ٢(٤ - (س - ٢))$$

بما ان (٤، ٠) تقع على الدائرة

$$\left( \frac{4}{2} \right)^2 + \left( \frac{0}{2} \right)^2 = r^2 \Rightarrow 4 = r^2 \Rightarrow r = 2$$

ومنه

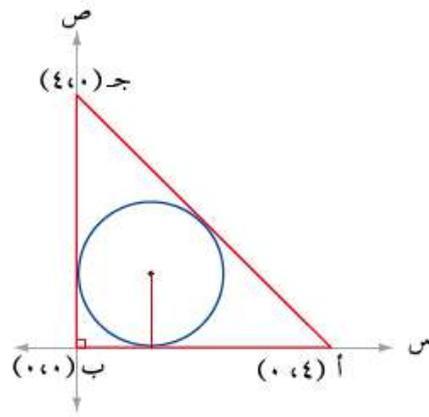
$$r^2 - 4 = 2 + 4 - s \Rightarrow 4 - 4 = 6 - s \Rightarrow s = 2$$

∴  $r = 2$  أو  $r = -2$  ترفض

عندما  $r = 10 \Rightarrow$  المركز (٨، ١٠) ← معادلة الدائرة

$$100 = (س - ٨) + (ص - ١٠)$$

(٨) معتمدا الشكل (١١-٥) الذي يمثل دائرة مرسومة داخل المثلث أ ب ج وتمس أضلاعه، جد معادلة هذه الدائرة.



الشكل (١١-٥)

الحل:

الدائرة تمس المحورين ∴ المركز (د، د)

بعد الدائرة عن المستقيم أ ب ج = س

نجد معادلة أ ب ج ← ص = س - ٤ + س ← س + ص - ٤ = ٠

$$\left| \frac{4-s}{\sqrt{2}} \right| = \left| \frac{4-s+s}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}} \right| = s = \text{البعد}$$

∴  $2\sqrt{2} = |4-s|$  بتربيع الطرفين

$$16 + s^2 - 2\sqrt{2}s = 2 \Rightarrow s^2 - 2\sqrt{2}s + 14 = 0$$

$$\left( s - \sqrt{2} \right)^2 = -12 \Rightarrow s = \sqrt{2} \pm 2\sqrt{3}$$

$$\therefore s = \frac{8 + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = s = \text{نوه}$$

←  $2\sqrt{2} + 4$  تهمل لأن نق  $4 > 2\sqrt{2} + 4$  حسب الشكل المعطى

$$\left( \frac{4-s}{\sqrt{2}} \right)^2 = s^2$$

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

القطع مفتوح نحو اليمين و  $ج = ٣$

معادلة القطع المكافئ هي:

$$ص^٢ = ٤ \times ٣$$

$$ص^٢ = ١٢$$

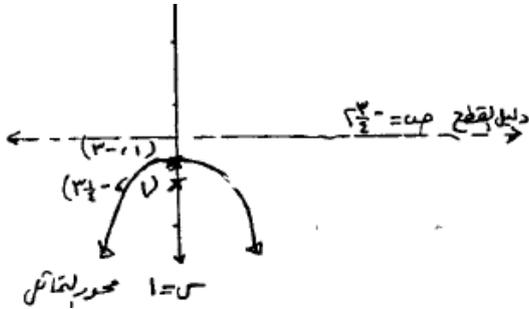
### • تدرّب (٣) ص (٣٤١)

جد احداثي الرأس والبؤرة ومعادلة المحور والدليل للقطع

المكافئ الذي معادلته  $(١ - س) = ٢ - ص - ٣$ ، ثم ارسم

منحناه بشكل تقريبي.

الحل:



نكتب المعادلة على الصورة القياسية:

$$(١ - س) = ٢ - (ص + ٣)$$

ومنه نجد أن القطع مفتوح نحو الأسفل

احداثيات الرأس =  $(١, ٣)$ ،  $ج = ١/٤$

∴ احداثيات البؤرة =  $(١, ٣ + ١/٤)$

معادلة الدليل هي:  $ص = ٣ - ١/٤ = ١١/٤$

معادلة محور التماثل هي:  $س = ١$

### • تدرّب (٤) ص (٣٤٣)

جد عناصر القطع المكافئ الذي معادلته

$$س^٢ = ٤ + ٤ - ٠$$

الحل:

نكتب معادلة القطع على الصورة القياسية:

$س^٢ = ٤(١ - ص)$  فيكون منحنى القطع مفتوحا نحو الأعلى و

$ج = ١$

الرأس  $(١, ٠)$ ، البؤرة  $(٢, ٠)$

معادلة الدليل هي:  $ص = ٠$

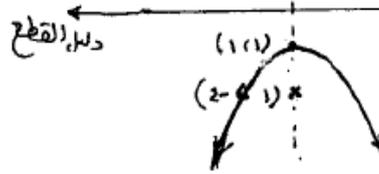
### • تدرّب (٢) ص (٣٤٠)

جد معادلة القطع المكافئ في كل مما يأتي، ثم ارسم منحناه

بشكل تقريبي:

(١) رأسه النقطة  $(١, ١)$ ، وبؤرته النقطة  $(١, -٤)$ .

الحل:



بما ان البؤرة تقع أسفل الرأس : القطع مفتوح للأسفل ،

و  $ج =$  البعد بين الرأس والبؤرة =  $٥$  وحدات

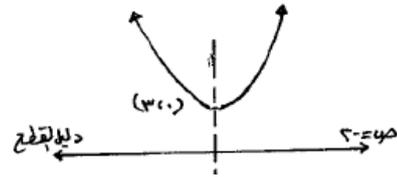
∴ معادلة القطع المكافئ هي :

$$(١ - س) = ٢ - ٤ \times ٥$$

$$(١ - س) = ٢ - ٢٠$$

(٢) رأسه النقطة  $(٣, ٠)$ ، ومعادلة دليله  $ص + ٢ = ٠$ .

الحل:



الرأس  $(٣, ٠)$ ، ومعادلة دليله  $ص + ٢ = ٠$ ،  $ص = -٢$

القطع مفتوح نحو الأعلى و  $ج = ٥$

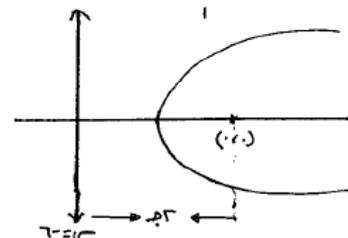
معادلة القطع المكافئ هي:

$$(٠ - س) = ٢ - ٥ \times (٣ - س)$$

$$س^٢ = ٢٠ - (٣ - س)$$

(٣) بؤرته النقطة  $(٠, ٠)$ ، ومعادلة دليله  $س = ٦$ .

الحل:



## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

معادلة محور التماثل هي  $s = 0$ .

• تَدْرِب (١٥) (٣٤٤)

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين  $(0, 0)$ ،  $(3, 1)$ ، ومحوره المستقيم الذي معادلته  $s = 2$ .

بما ان محور القطع معادلته  $s = 2$ : الرأس  $(2, ٥)$ ، هـ.  
∴ معادلة القطع المكافئ هي:

$$(s + 2)^2 = 4(s - ٥)$$

الحل:

النقطة  $(0, 0)$  تقع على المنحنى ←  $ج \times هـ = ١٠$   
النقطة  $(3, 1)$  تقع على المنحنى

$$١٢ = ٩ + ج + ٤ ← ج = ١٣، هـ = \frac{١٢}{١٣}$$

∴ المعادلة هي:  $(s + 2)^2 = \frac{٥}{٣}(s + ١٢)$

تَمَارِيهِ وَمَسَائِلُ (٣٤٥- ٣٤٦)

(١) جد معادلة القطع المكافئ في كل حالة مما ياتي، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي:

(أ) رأسه النقطة  $(-1, 0)$ ، وبؤرته النقطة  $(0, ٥)$ .

الحل:

$$ص^2 = ١٦(س + ١)$$

حيث  $ج = ٤$ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو اليسار

(ب) رأسه النقطة  $(-1, 0)$ ، وبؤرته النقطة  $(3, ٣)$ .

الحل:

$$ص^2 = ١٦(س + ١)$$

حيث  $ج = ٤$ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو اليمين

(ج) رأسه النقطة  $(2, 3)$ ، وبؤرته النقطة  $(٢, ٨)$ .

الحل:

$$(س - ٢)^2 = ٢٠(س - ٣)$$

حيث  $ج = ٥$ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو الأعلى

(د) رأسه النقطة  $(2, 3)$ ، وبؤرته النقطة  $(٢, -2)$ .

الحل:

$$(س - ٢)^2 = ٢٠(س - ٣)$$

حيث  $ج = ٥$ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو الأسفل

(هـ) بؤرته النقطة  $(1, 0)$ ، ومعادلة دليله  $ص = 3$

الحل:

$$(س - ١)^2 = ٦(س + \frac{٣}{٢})$$

حيث  $ج = ٢$  = البعد بين البؤرة والدليل  $3$

←  $ج = \frac{٣}{٢}$ ، والمنحنى مفتوح نحو الأعلى

(و) بؤرته النقطة  $(0, 0)$ ، ومعادلة دليله  $س = ٥$

الحل:

$$ص^2 = ١٠(س - ٥)$$

حيث  $ج = ٥$  ←  $ج = \frac{٥}{٢}$ ، والمنحنى مفتوح نحو اليسار

(ز) بؤرته النقطة  $(2, ٥)$ ، ومعادلة دليله  $س = 1, ٢٥$

الحل:

$$(س + ٥)^2 = ١٤٥(س - ١٤٦٢٥)$$

حيث  $ج = ٢$  ←  $٤٧٥ = ج$  ←  $ج = \frac{٤٧٥}{٢}$ ، والمنحنى مفتوح نحو

اليمين، ورأسه  $(١٤٦٢٥ - ٥)$

(ح) رأسه النقطة  $(2, 3)$ ، ومعادلة دليله  $س = ١٠$

الحل:

$$(س + ٣)^2 = ١٢(س - ٢)$$

حيث  $ج = ٣$ ، والمنحنى مفتوح نحو اليمين

(ط) رأسه النقطة  $(-1, 2)$ ، ومعادلة دليله  $ص = ٥$

الحل:

$$(س + ١)^2 = ٢(س - ٢)$$

حيث  $ج = ٣$ ، والمنحنى مفتوح نحو الأسفل

(٢) جد كلا من إحداثي الرأس، وإحداثي البؤرة، ومعادلة

الدليل، ومعادلة المحور، لكل من القطوع التالية:

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

$$٤ج = ٨ ← ج = ٢ \text{ الفتحة لليمين}$$

البؤرة (٣، ٠)

$$\text{الدليل س} = ٢ - ٢ = ٤ -$$

$$\text{المحور ص} = ٣$$

$$\text{هـ) } ٣س = ٤ - ٢ = ٨ + ص = ١٢$$

الحل:

$$\text{س} = ٢ - \frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٣} + ص$$

$$\text{س} = ٢ - \frac{٤}{٣} + ص = ٤ + \frac{٤}{٣}$$

$$\text{س} = ٢ - \frac{٤}{٣} + ص = \frac{١٦}{٣}$$

$$\text{س} = ٢ - \frac{٤}{٣} + ص = ٢ + ص$$

$$٢ = \frac{٤}{٣} = ٤ ← ج = \frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٣}$$

الرأس (٢، ٠) الفتحة للأعلى

البؤرة (٢، ٠) (٢، ٠)

$$\text{الدليل ص} = ٢ - \frac{٢}{٣}$$

$$\text{المحور س} = ٠$$

$$\text{و) } ٤س - ٣ص = ١٢ + ٩ + ٢ص = ٠$$

الحل:

$$٣ص = ٩ - ٢ص = ١٢ + ٤س \text{ بالقسمة على } ٣$$

$$\text{ص} = ٣ - \frac{٤}{٣} = ٤ + \frac{٤}{٣}$$

$$\text{ص} = ٣ - \frac{٤}{٣} + ٤ = \frac{٩}{٤} + ٤ + \frac{٤}{٣}$$

$$\text{ص} = ٢ - \frac{٤}{٣} + \frac{٢٥}{٤} = \frac{٢٥}{٤} + \frac{٤}{٣}$$

$$\text{ص} = ٢ - \frac{٤}{٣} + \frac{٧٥}{٣٦} = \frac{٧٥}{٣٦} + \frac{٤}{٣}$$

$$٤ج = ٨ ← ج = \frac{٤}{٣}$$

الرأس (٣، ٧٥) الفتحة لليمين

البؤرة (٣، ٧٥) (٣، ٧٥)

$$\text{الدليل} = \frac{١}{٣} - \frac{٧٥}{٣٦} = \text{س}$$

$$\text{المحور ص} = \frac{٣}{٣}$$

$$\text{أ) } (٣ - ص) = ٢ = ١٢ + (س + ١)$$

الحل:

الرأس (٣، ١)

$$٤ج = ١٢ ← ج = ٣$$

الفتحة لليمين

البؤرة (٣، ٢) = (٣، ٢ + ١)

$$\text{الدليل : س} = ٣ - ١ = ٤ -$$

$$\text{معادلة المحور ص} = ٣$$

$$\text{ب) } (٥ + ص) = ٢ = ٢ - ص$$

الحل:

الفتحة للأعلى

الرأس (٢، ٥)

$$٤ج = ١ ← ج = \frac{١}{٤}$$

البؤرة (٥، ٢) (٥، ٢)

$$\text{الدليل ص} = ٢ - \frac{١}{٤}$$

$$\text{ج) } ص = ٢$$

الحل:

ص = ٢ الفتحة لليمين

الرأس (٠، ٠)

$$٤ج = ١ ← ج = \frac{١}{٤}$$

البؤرة (٠، ١) (٠، ١)

$$\text{الدليل س} = \frac{١}{٤} -$$

$$\text{المحور ص} = ٠$$

$$\text{د) } ٢ص = ٢ - ١٢ - ص = ١٦ + ١٤$$

الحل:

$$٢ص = ٢ - ١٢ - ص = ١٦ + ١٤$$

$$\text{ص} = ٦ - ٨ + ٧ = ٧$$

$$\text{ص} = ٦ - ٩ + ٨ = ١٦ + ١٤$$

$$\text{ص} = ٢ - ٨ + ٢ = ٢ (٣ - ص)$$

الرأس (٣، ٢)

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

$$\frac{36}{8} = \frac{9}{2} \leftarrow \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \leftarrow 3 = 3 \text{ بتعويضها في (1)}$$

$$36 = 36(3 - 6)$$

$$36 = 9 \times 4 = 36 \leftarrow 1 = 1$$

$$\text{المعادلة هي } (2 - s)^2 = 4(3 + s)$$

$$(2 - s)^2 = 4(3 + s)$$

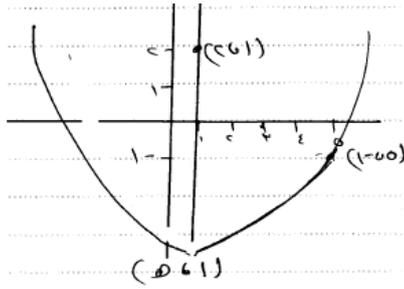
(٥) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات، وبؤرته النقطة (١، ٢) ويمر بالنقطة (٥، ١) ويقع رأسه أسفل بؤرته.

الحل:

الفتحة للأعلى

$$(s - s)^2 = 4(s - s)$$

$$\text{الرأس} = (1, 2)$$



$$s - 2 = s - 2 \leftarrow s = s - 2$$

المعادلة

$$(s - s)^2 = 4(s - s)$$

$$(s - s)^2 = 4(s - s)$$

$$\text{يمر بالنقطة } (5, 1)$$

$$(1 - 5)^2 = 4(1 - 5)$$

$$16 = 4(1 - 5)$$

$$16 = 4(1 - 5) \leftarrow 16 = 4(1 - 5)$$

$$16 = 4(1 - 5) \leftarrow 16 = 4(1 - 5)$$

$$0 = 4 - 3 - 2$$

$$0 = (1 + s)(4 - s)$$

$$s = 4 - 2 = 2 \leftarrow s = 4 - 2 = 2$$

$$\text{الرأس} = (2, 1)$$

$$\text{المعادلة } (s - 1)^2 = 4(s + 2)$$

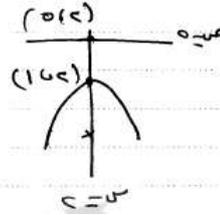
(٣) جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة محوره  $s = 2$ ، ومعادلة دليله  $s = 5$ ، وتبعد بؤرته ٨ وحدات عن دليله، ومفتوح نحو الأسفل.

الحل:

$$(s - s)^2 = 4(s - s)$$

الرأس

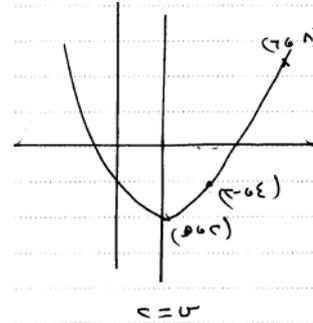
$$2 = 2 \leftarrow 8 = 8$$



$$(2 - s)^2 = 4(10 - s)$$

(٤) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (٦، ٨)، (٤، ٢)، ومحور تماثله المستقيم الذي معادلته  $s = 2$ .

الحل:



الرأس (٢، ٥) مفتوح للأعلى

$$(s - 2)^2 = 4(s - 5)$$

$$\text{يمر بالنقطة } (6, 8)$$

$$(8 - 2)^2 = 4(6 - 5)$$

$$36 = 4(6 - 5) \leftarrow 36 = 4(6 - 5)$$

$$\text{يمر بالنقطة } (4, 2)$$

$$(2 - 4)^2 = 4(4 - 5)$$

$$4 = 4(4 - 5) \leftarrow 4 = 4(4 - 5)$$

$$\text{بقسمة (1) على (2)}$$

$$\frac{36}{4} = 9 \leftarrow \frac{4(4 - 5)}{4(4 - 5)} = \frac{36}{4}$$

$$9 = 4 - 5 \leftarrow 9 = 4 - 5$$

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

ج = ١ - تهمل

كل = ٢ من احداثيات النقطة

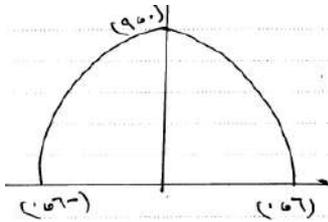
$$ج = ٣ ، ب = ٢ ← ج = ٣ \times ٢ = ٦$$

$$المحيط = ٦ = ٢ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣}$$

$$= \frac{٢٤}{٣} + \frac{٢٤}{٣} = ٨ + \frac{٢٤}{٣}$$

٨) قاعدة قوس على شكل قطع مكافئ تقع على أرض مستوية طولها ١٢ متراً، ورأس القوس يرتفع ٩ أمتار فوق سطح الأرض. اكتب المعادلة الممثلة لهذا القوس، علماً أنه متمائل حول محور الصادات.

الحل:



$$(س - ٠) = ٢(٤ - (س - ٩))$$

يمر بالنقطة (٠، ٦)

$$٦ = ٢(٤ - (٠ - ٩))$$

$$٣٦ = ٣٦ - ٢(س - ٩)$$

$$المعادلة هي: س = ٢(٤ - (س - ٩))$$

ثالثاً: القطع الناقص

• تدرّب (١) ص (٣٥٠)

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل، ومحوره الأصغر يوازي محور الصادات وطوله يساوي ٤ وحدات، واحدى بؤرتيه النقطة (٠، ٣). ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

الحل:

المركز (٠، ٠) المحور الأصغر // محور الصادات : ب = ٢ = ٤

$$ب = ٢$$

احدى البؤرتين (٠، ٣)

$$\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١ \quad (٠، ٣) = (٠، ٣ - ٠) = (٠، ٣) \quad ج = ٣$$

٦) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات، ويمر بمنحناه بالنقط (٠، ٢)، (٢، ٥)، (٤، ٢) ويقع رأسه أسفل بؤرته.

الحل:

$$س = ص + ٢$$

$$النقطة (٠، ٢) \quad ٢ = ٢ + ٠ \quad ج = ٢$$

$$النقطة (٢، ٥) \quad ٥ = ٢ + ٢ + ٤$$

$$٥ - ٢ = ٢ + ٤ - ٢$$

$$النقطة (٤، ٢) \quad ٢ = ٢ + ٤ - ١١$$

$$٢ - ٢ = ٤ - ١١$$

$$٢ + ٤ = ٢ + ٤$$

$$٠ = ٤ - ١١$$

$$٦ = ٤ + ١٨$$

$$٠ = ٤ - ١١$$

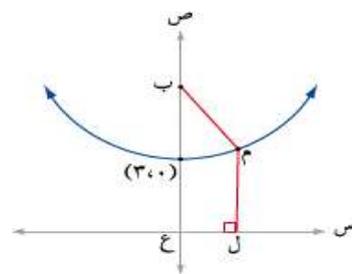
$$\frac{١}{٤} = \frac{٦}{٤} = ١ \quad ٦ = ١٢$$

$$بتعويضها ١٦ \times \frac{١}{٤} = ٤ - ب = ٠$$

$$٤ - ٤ = ب = ٠$$

$$س = \frac{١}{٤} ص + ٢$$

٧) في الشكل (٥ - ٢٤) قطع مكافئ رأسه النقطة (٠، ٣) وبؤرته النقطة ب ودليله محور السينات، والنقطة (٢،  $\frac{١}{٣}$ ) تقع على منحناه. جد محيط الشكل الرباعي ل م ب ع.



الشكل (٥-٢٤)

الحل:

$$كل = \frac{١}{٣} = ب \quad \text{حسب تعريف القطع المكافئ}$$



## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

(٤) الاختلاف المركزي

الحل:

$$٤س + ١٦ + ٣ص = ١٧٦$$

$$٤(س + ٤) + ٣ص = ١٧٦$$

$$٤(س + ٤) + ٣ص = ١٧٦$$

$$٤س + ١٦ + ٣ص = ١٧٦$$

$$١ = \frac{٢(٢-س)}{٤٨} + \frac{٢ص}{٦٤} \leftarrow ١ = \frac{٢ص}{٦٤} + \frac{٢(٢-س)}{٤٨}$$

$$٨ = ١ \leftarrow ٦٤ = ٢١ \leftarrow$$

$$٤٨\sqrt{٧} = ب \leftarrow ٤٨ = ٢ب \leftarrow$$

$$٤ = ج \leftarrow ١٦ = ٢ب - ٢١ = ٢ج \leftarrow$$

(٢) الرأسان (٠، ١) ، (١، ٠)

(٣) البؤرتان (٠، ٢) ، (٤، ٠)

(٤) الاختلاف المركزي ه =  $\frac{٤}{٨} = \frac{٣}{٤} = ٠,٥$

(د) مركزه نقطة الأصل، ومحوره الأكبر يوازي محور السينات، ويمر منحناه بالنقطة (١، ٣)، واختلافه المركزي ٠,٥.

الحل:

$$١ = \frac{٢ص}{٣٩} + \frac{٢س}{١٣}$$

(ه) يمر بالنقطة (٨، ٣) ويقع مركزه على المستقيم س = ٢، وبؤرتاه تقعان على المستقيم الذي معادلته ص = ٣ واختلافه المركزي ٠,٦.

الحل:

$$١ = \frac{٢(٣-ص)}{٦٤} + \frac{٢(٢-س)}{١٠٠}$$

(و) رأساه النقطتان (٢، ٠)، (٠، ٨)، وطول محوره الأصغر يساوي أربعة أمثال المسافة بين احد رأسيه والبؤرة القريبة من ذلك الرأس.

الحل:

$$١ = \frac{٢ص}{١٦} + \frac{٢(٣+س)}{٢٥}$$

(ز) نهايتا محوره الأصغر النقطتان (٣±، ٠)، ويمر بالنقطة (٢، ٣).

الحل:

$$١ = \frac{٢ص}{٩} + \frac{٢ص٥}{٨١}$$

(ح) جد عناصر القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

$$١ = \frac{٢ص}{٢٥} + \frac{٢س}{١٤٤} \text{ (أ)}$$

الحل:

قطع سيني

$$١٢ = ١ \leftarrow ١٤٤ = ٢١$$

$$٥ = ٢ب \leftarrow ٢٥ = ٢ب$$

$$١١٩\sqrt{٧} = ج \leftarrow ١١٩ = ٢٥ - ١٤٤ = ٢ج$$

المركز (٠، ٠)

### تمارين ومسائل ص (٣٥٨ - ٣٥٩)

(١) جد معادلة القطع الناقص في كل مما يأتي، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي:

(أ) رأساه النقطتان (٤، ١)، (٢، ١) وطول محوره الأصغر ٤ وحدات.

الحل:

$$١ = \frac{٢(١-ص)}{٤} + \frac{٢(١-س)}{٩}$$

(ب) بؤرتاه النقطتان (٠، ٢±)، ورأساه النقطتان (٠، ٥±).

الحل:

$$١ = \frac{٢ص}{٢١} + \frac{٢س}{٢٥}$$

(ج) مركزه نقطة الأصل، وبؤرتاه تقعان على محور السينات، وبعده البؤري ٦ وحدات، والفرق بين طولي محوريه يساوي ٢ وحدة.

الحل:

$$١ = \frac{٢ص}{١٦} + \frac{٢س}{٢٢}$$

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

S  
A  
L  
A  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

$$\frac{\sqrt{50}V}{10} = \frac{7}{4} = \text{الأختلاف المركزي}$$

$$\text{د) } 7 = 2س + 2ص + 2ع = 6س - 7$$

الحل:

$$7 = 2س + 2ص + 2ع = 6س - 7$$

$$7 - 2 + 9 = (1 + 2ص + 2ع) + 9 + 6س - 7$$

$$(س - 3) + 2(1 + ص) = 4 \text{ بالقسمة على } 4$$

$$1 = \frac{2(1+ص)}{4} + \frac{2(س-3)}{4}$$

المركز (١، ٣) ناقص سيني

$$2 = 1 \leftarrow 4 = 2ا$$

$$2\sqrt{2} = 2 \leftarrow 2 = 2ب$$

$$2\sqrt{2} = 2 \leftarrow 2 = 2 - 4 = 2ج$$

المركز (١، ٣)

$$\text{البؤرتان } (1 - \sqrt{2}, 3), (1 + \sqrt{2}, 3)$$

$$\text{الرأسان } (1, 2 - 3), (1, 2 + 3)$$

$$\text{طول المحور الأكبر} = 4$$

$$\text{طول المحور الأصغر} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{4} = \text{الأختلاف المركزي}$$

$$\text{هـ) } 64 = 2(س - 3) + 2(4 + 2ص)$$

الحل:

$$64 = 2(س - 3) + 2(4 + 2ص)$$

$$1 = \frac{2(س-3)}{64} + \frac{2(2+ص)}{16}$$

ناقص سيني

$$8 = 1 \leftarrow 64 = 2ا$$

$$4 = 1 \leftarrow 16 = 2ب$$

$$4\sqrt{2} = 2 \leftarrow 48 = 16 - 64 = 2ج$$

المركز (٢، ٣)

$$\text{البؤرتان } (2 - \sqrt{2}, 3), (2 + \sqrt{2}, 3)$$

$$\text{الرأسان } (2, 8 + 3) = (2, 11), (2, 5 - 3)$$

$$(2, 5) = (2, 8 - 3)$$

الرأسان (٠، ١٢ ±)

البؤرتان (٠، ١١٩ ±)

طول المحور الأكبر = ٢٤

طول المحور الأصغر = ١٠

$$\frac{119V}{12} = \frac{7}{4} = \text{الأختلاف المركزي}$$

$$\text{ب) } 1 = \frac{2(1+ص)}{81} + \frac{2(4-س)}{25}$$

الحل:

قطع صادي

$$9 = 1 \leftarrow 81 = 2ا$$

$$5 = 1 \leftarrow 25 = 2ب$$

$$5\sqrt{2} = 2 \leftarrow 56 = 25 - 81 = 2ج$$

المركز (١، ٤)

$$\text{البؤرتان } (5\sqrt{2} + 1, 4), (5\sqrt{2} - 1, 4)$$

الرأسان (١، ٤)، (٨، ٤)

طول المحور الأكبر = ١٨

طول المحور الأصغر = ١٠

$$\frac{5\sqrt{2}V}{9} = \frac{7}{4} = \text{الأختلاف المركزي}$$

$$\text{ج) } 100 = 2ص + 2ع$$

الحل:

$$1 = \frac{2ص}{25} + \frac{2س}{100} \text{ بالقسمة على } 100$$

$$10 = 1 \leftarrow 100 = 2ا$$

$$5 = 1 \leftarrow 25 = 2ب$$

$$5\sqrt{2} = 2 \leftarrow 75 = 25 - 100 = 2ج$$

ناقص سيني

المركز (٠، ٠)

البؤرتان (٠،  $\sqrt{75}V$  ±)

الرأسان (٠، ١٠ ±)

طول المحور الأكبر = ٢٠

طول المحور الأصغر = ١٠

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

معادلة المحور الأصغر هي س = ١-

$$1 = \frac{2(2-s)}{9} + \frac{2(1+s)}{25} \leftarrow$$

$$(١، ٥) \text{ المركز} \leftarrow د = ١-$$

$$(٢، ٣) = (د + ج، هـ) \leftarrow ر(١- + ج، هـ)$$

$$ج = ٤، هـ = ٢$$

$$ج^2 - ١ = ٢$$

$$١٦ = ٢١ - ٩ \leftarrow ٢١ = ٢٥$$

(٤) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه النقطة (١، ١).

واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ

$$(ص - ١) - ٢ = ١٢ - ٣ = ٠، وطول محوره الأصغر يساوي (١٠).$$

وحدات.

الحل:

$$1 = \frac{2(1-s)}{25} + \frac{2(1-s)}{29}$$

(٥) قطع ناقص بؤرتاه النقطتان ب(٤، ٠)، ب(٤، -٤).

والنقطة ن(س، ص) تقع على منحنى القطع حيث ان محيط

المثلث ن ب ب يساوي ٢٤ سم، جد معادلته.

الحل:

$$1 = \frac{2ص}{45} + \frac{2س}{64}$$

(٦) تتحرك النقطة (س، ص) حيث يتحدد موقعها

بالمعادلتين س = ٥ + ٣جاه، ص = ٢ + ٢جتاه، حيث هـ

زاوية متغيرة، بين أن النقطة (و) تتحرك على منحنى قطع

ناقص، ثم جد بعده البؤري.

الحل:

$$\frac{س-٥}{٣} = \text{جاه}، \frac{٢-ص}{٣} = \text{جتاه}، \text{جا}^2 + \text{جتا}^2 = ١$$

$$1 = \frac{2(٢-ص)}{٤} + \frac{2(٥-س)}{٩}$$

(٧) قطع ناقص مساحته (٤٠π) وحدة مربعة، ورأساه

النقطتان (٨±، ٠)، جد معادلته.

الحل:

طول المحور الأكبر = ١٦

طول المحور الأصغر = ٨

$$\frac{\sqrt{٤٨}}{٨} = \frac{ج}{٣} = \text{الاختلاف المركزي}$$

$$٤ = ٢س + ٢ص٣ = \frac{٤}{٣}$$

الحل:

$$١ = \frac{2ص٣}{\frac{٤}{٣}} + \frac{2س٤}{\frac{٤}{٣}} = \frac{٤}{٣}$$

$$١ = \frac{2ص}{\frac{٤}{٣}} + \frac{2س}{\frac{٤}{٣}} \text{ ناقص صادي}$$

$$٢ = ١ \leftarrow \frac{٤}{٩} = ٢١$$

$$٢ = ٢ \leftarrow \frac{١}{٣} = ب$$

$$٢ = ٢ \leftarrow \frac{١}{٣} = ج \leftarrow \frac{١}{٩} = \frac{٣}{٩} - \frac{٤}{٩} = \frac{١}{٣} - \frac{٤}{٩} = ٢$$

المركز (٠، ٠)

البؤرتان (١/٣ ±، ٠)

الرأسان (٢/٣ ±، ٠)

$$\frac{٤}{٣} = \frac{٢}{٣} \times ٢ = \text{طول المحور الأكبر}$$

$$\frac{٢}{٣\sqrt{٣}} = \text{طول المحور الأصغر}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{٣}{٣} \times \frac{١}{٣} = \frac{٣}{٣} = \frac{٣}{٣} = \text{الاختلاف المركزي}$$

(٣) جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه مركز

الدائرة التي معادلتها (٢-٦) + (٤-٤) = ٣٦،

وطول محوره الأصغر يساوي طول قطر هذه الدائرة،

ومعادلة محوره الأصغر هي س = ١-

الحل:

$$٣٦ = ٢(٢-٤) + ٢(٣-٤)$$

$$٩ = ٢(٢-٤) + ٢(٣-٤)$$

← مركز الدائرة (٢، ٣)

نصف قطرها نق = ٣، القطر = ٦

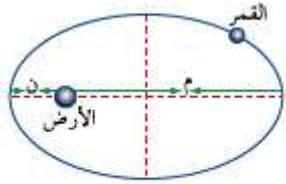
مركز الدائرة (٢، ٣) هو احد بؤرتي القطع الناقص

$$\text{طول المحور الأصغر} = \text{قطر الدائرة} \leftarrow ٦ = ب \leftarrow ٣ = ب$$

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

(١١) يدور القمر حول الأرض في مدار على شكل قطع ناقص، حيث تقع الأرض في إحدى بؤرتي المدار، فإذا كانت أطول مسافة بين الأرض والقمر تساوي (م) كم، وأقصر مسافة بينهما تساوي (ن) كم، كما في الشكل (٥-٣٦)، فأثبت أن الإختلاف المركزي لهذا القطع الناقص يساوي  $\frac{ن-م}{ن+م}$ .



الشكل (٥-٣٦)

**الحل:**

$$م + أ = ن$$

$$ن - أ = م$$

$$\text{بالجمع} \quad ٢ن = ٢م + ٢أ \quad \leftarrow \quad ٢ن = ٢م + ٢أ$$

$$\text{بالطرح} \quad ٢ن - ٢م = ٢ن - ٢م - ٢أ \quad \leftarrow \quad ٢أ = ٢ن - ٢م$$

$$\text{وهو المطلوب} \quad ه = \frac{ن-م}{ن+م} = \frac{ن-م}{ن+م} = \frac{ن-م}{ن+م}$$

**بإعاً: القطع الزائد**

• **تدرب (١) ص (٣٦٣)**

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ومحوره المرافق يوازي محور الصادات وطوله يساوي ١٢ وحدة، واحدى بؤرتيه النقطة (١٠، ٠)، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

**الحل:**

$$١ = \frac{٢ص}{٣٦} - \frac{٢س}{٦٤}$$

• **تدرب (٢) ص (٣٦٦)**

جد معادلة القطع الزائد الذي نهايتا محوره المرافق النقطتان (٠، ٢±) ويمر بالنقطة (٣، ١).

**الحل:**

$$١ = \frac{٢ص}{٤} - \frac{٢س}{٣٦}$$

$$\frac{٢ص}{٦٤} + \frac{٢س}{٤٠} = ١ \quad \leftarrow \quad \frac{٢ص}{٦٤} + \frac{٢س}{٤٠} = ١$$

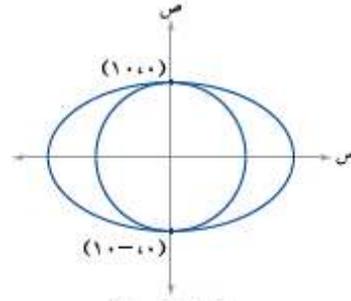
(٨) جد طول نصف قطر الدائرة التي مساحتها تساوي مساحة

$$\text{القطع الناقص الذي معادلته} \quad \frac{٢ص}{١٦} + \frac{٢س}{٨١} = ١$$

**الحل:**

$$\text{نصف القطر} = ٦, \quad \pi أ ب = \pi ن$$

(٩) يمثل الشكل (٥-٣٥) دائرة و قطع ناقص مشتركين في المركز (٠، ٠)، إذا كانت مساحة القطع الناقص تساوي مثلي مساحة الدائرة المرسومة داخله، فجد كلا مما يأتي:



الشكل (٥-٣٥)

المركزي

(أ) الإختلاف

للقطع الناقص

**الحل:**

$$ه = \frac{٣\sqrt{٧}}{٢}$$

(ب) معادلة القطع الناقص

**الحل:**

$$١ = \frac{٢ص}{١٠٠} + \frac{٢س}{٤٠٠}$$

$$(١٠) \text{ لمعادلة القطع الناقص} \quad \frac{٢(ص-ل)}{٢ب} + \frac{٢(س-ل)}{٢ا} = ١$$

أثبت أن  $ب = ٢(١-ه)$  حيث ه: الإختلاف المركزي للقطع الناقص.

**الحل:**

$$ه = \frac{ب}{ا} \quad \leftarrow \quad ه = \frac{ب}{ا}$$

$$ب = ٢(١-ه) \quad \leftarrow \quad ب = ٢(١-ه)$$

$$ب = ٢(١-ه) \quad \leftarrow \quad ب = ٢(١-ه) \quad \text{وهو المطلوب}$$

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

تمارين ومسائل ص (٣٧٠-٣٧١)

(أ) جد معادلة القطع الزائد في كل مما يأتي، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي:

(أ) رأساه النقطتان  $(٠, ٣)$  و  $(٠, -٣)$ ، وطول محوره المرافق ٤ وحدات.

الحل:

المركز  $(٠, ٠)$  سيني

$$٣ = أ، ٢ = ب ← ٤ = ب$$

$$١٣ = ٤ + ٩ ← ٢ = ب + ٢ = أ$$

$$١ = \frac{٢}{٤} - \frac{٢}{٩}$$

(ب) بؤرتاه النقطتان  $(٠, ١٣)$  و  $(٠, -٥)$ ، ورأساه النقطتان  $(٠, ٥)$  و  $(٠, -٥)$ .

الحل:

المركز  $(٠, ٠)$  قطع زائد صادي

$$٢٥ = أ ← ٥ = ب$$

$$١٦٩ = أ ← ١٣ = ب$$

$$٤ = ب ← ٢ = ب + ٢٥ = أ ← ١٦٩ = أ$$

$$١ = \frac{٢}{١٤٤} - \frac{٢}{٢٥}$$

(ج) مركزه نقطة الأصل، ومحوره القاطع منطبق على محور

الصادات وطوله ١٢ وحدة، واختلافه المركزي  $\frac{٣}{٤}$ .

الحل:

$$١٢ = أ ← ١٢ = ب$$

$$٩ = ٦ × \frac{٣}{٤} = أ × \frac{٣}{٤} = ب ← \frac{٣}{٤} = أ$$

$$٤٥ = ب ← ٢ = ب + ٣٦ = أ ← ٨١ = أ$$

قطع صادي

$$١ = \frac{٢}{٤٥} - \frac{٢}{٣٦}$$

(د) رأساه النقطتان  $(١, ٣)$  و  $(١, ١)$  ويمر بالنقطة  $(٣, ٠)$ .

الحل:

القطع سيني

$$١٢ = أ ← ٤ = ب ← ٣ = أ$$

$$المركز يتوسط الرأسان = \left( \frac{١+٣}{٢}, \frac{١+٣}{٢} \right) = (١, ١)$$

• تدرّب (٣) ص (٣٦٧)

جد عناصر القطع الزائد الذي معادلته

$$\frac{٢}{٢٥} - \frac{٢(١-س)}{١٤٤} = ١$$

ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

الحل:

$$١٠ = أ ← ٢٥ = ب ← ٥ = أ، طول المحور القاطع = ١٠$$

ومعادلته  $س = ١$

$$ب ← ١٤٤ = ب ← ١٢ = ب، طول المحور المرافق = ٢٤،$$

ومعادلته  $ص = ٠$ .

$$١٣ = ج ← ٢ = ب - ٢ = أ$$

المركز  $(٠, ١)$

البؤرتان  $(١٣ ± ٠, ١)$

الرأسان  $(٥ ± ٠, ١)$

طرفي المحور المرافق  $(٠, ١٢ ± ١)$

• تدرّب (٤) ص (٣٦٨)

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، واحدى

بؤرتيه النقطة  $(٠, ٥)$  واختلافه المركزي  $\frac{٥}{٣}$ .

الحل:

$$١ = \frac{٢}{١٦} - \frac{٢}{٩}$$

• تدرّب (٥) ص (٣٦٩)

جد عناصر القطع الزائد اذا علمت معادلته في كل مما يأتي:

$$(١) ٥٣ + ص + ٢ = ٤س - ٢$$

الحل:

$$١ = \frac{٢(٣+ص)}{٢} - \frac{٢(١-س)}{٥}$$

$$(٢) ٣٦ = ٢ص - ٢$$

الحل:

$$١ = \frac{٢ص}{٩} - \frac{٢}{٤}$$

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

$$١٢ = ١ \leftarrow ١٤٤ = ٢١$$

$$٥ = ٢ \leftarrow ٢٥ = ٢١$$

$$١٣ = ٣ \leftarrow ١٦٩ = ٢٥ + ١٤٤ = ٢١ + ٢١ = ٢١$$

المركز (٠، ٠)

البؤرتان (٠، ١٣±)

الرأسان (٠، ١٢±)

طول المحور القاطع = ٢٤

طول المحور المرافق = ١٠

$$\frac{١٣}{١٢} = \frac{٣}{١} = \frac{٣}{١}$$

$$١ = \frac{٢(١+س)}{١٦} - \frac{٢(٢-ص)}{٣٦} \text{ (ب)}$$

الحل:

قطع صادي

المركز (٢، ١٠)

$$٦ = ١ \leftarrow ٣٦ = ٢١$$

$$٤ = ٢ \leftarrow ١٦ = ٢١$$

$$٥٢\sqrt{٧} = ٣ \leftarrow ٥٢ = ١٦ + ٣٦ = ٢١ + ٢١ = ٢١$$

البؤرتان (٥٢\sqrt{٧} ± ٢، ١٠)

الرأسان (٦ ± ٢، ١٠)

طول المحور القاطع = ١٢

طول المحور المرافق = ٨

$$\frac{٥٢\sqrt{٧}}{٦} = \frac{٣}{١} = \frac{٣}{١}$$

$$١٦ - ٢س = ٢ص \text{ (ج)}$$

الحل:

$$١٦ - ٢س = ٢ص \text{ (ج)}$$

$$١ = \frac{٢ص}{١٦} - \frac{٢س}{٤} \text{ قطع سيني}$$

المركز (٠، ٠)

$$٢ = ١ \leftarrow ٤ = ٢١$$

$$٤ = ٢ \leftarrow ١٦ = ٢١$$

$$٢٠\sqrt{٧} = ٣ \leftarrow ٢٠ = ١٦ + ٤ = ٢١ + ٢١ = ٢١$$

البؤرتان (٠، ٢٠\sqrt{٧} ±)

$$١ = \frac{٢(١-ص)}{٢١} - \frac{٢(١+س)}{٢١}$$

$$١ = \frac{٢(١-ص)}{٢١} - \frac{٢(١+س)}{٤} \text{ يمر بالنقطة (٢، ٣)}$$

$$١ = \frac{٤}{٢١} - \frac{٩}{٤}$$

$$\frac{١٦}{٥} = \frac{٤}{٤} \times ٤ = ٢ \leftarrow \frac{٥}{٤} = ١ - \frac{٩}{٤} = \frac{٤}{٢١}$$

$$١ = \frac{٢(١-ص)}{\frac{١٦}{٥}} - \frac{٢(١+س)}{٤} \text{ المعادلة}$$

هـ) مركزه نقطة الأصل، ومحوره القاطع منطبق على محور السينات وطوله ٨ وحدات، وطول محوره المرافق ٤ وحدات.

الحل:

قطع زائد سيني

المركز (٠، ٠)

$$٤ = ١ \leftarrow ٨ = ١٢$$

$$٢ = ٢ \leftarrow ٤ = ٢١$$

$$١ = \frac{٢ص}{٤} - \frac{٢س}{١٦}$$

و) مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تقعان على محور الصادات، وطول محوره المرافق ٢\sqrt{٧} وحدة، واختلافه المركزي ٣.

الحل:

قطع صادي

$$٢\sqrt{٧} = ٢ \leftarrow ٢\sqrt{٧} = ٢١$$

$$١٣ = ٣ \leftarrow ٣ = \frac{٣}{١}$$

$$٢ + ٢١ = ٢١٩ \leftarrow ٢١ + ٢١ = ٢١$$

$$\frac{١}{٤} = \frac{٢}{٨} = ٢ \leftarrow ٢ = ٢١٨$$

$$١ = \frac{٢ص}{٢} - \frac{٢س}{٤}$$

٢) جد عناصر كل قطع زائد اذا علمت معادلته في كل مما يأتي:

$$١ = \frac{٢ص}{٢٥} - \frac{٢س}{١٤٤} \text{ (أ)}$$

الحل:

القطع سيني

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

الرأسان  $(٠, ٢ \pm)$

طول المحور القاطع = ٤

طول المحور المرافق = ٨

$$\frac{٢٠\sqrt{٢}}{٢} = \frac{٢٠}{٢} = \text{الاختلاف المركزي}$$

$$\text{د) } ٤س^٢ - ٢ص^٢ - ١٠ = ١٧ + ٦س$$

الحل:

$$٤س^٢ - ٢ص^٢ - ١٠ = ١٧ + ٦س$$

$$٤(س^٢ - ٤س + ٤) - ٢(ص^٢ + ١٠) = ١٧ + ٦س$$

$$٢٥ - ١٧ + ١٦ =$$

$$٤(س - ٢)^٢ - ٢(ص + ٥)^٢ = ٨ \text{ بالقسمة على } ٨$$

$$١ = \frac{٢(ص+٥)}{٨} - \frac{٢(س-٢)}{٢}$$

المركز  $(٠, ٢)$

$$٢\sqrt{٢} = ١ \leftarrow ٢ = ٢١$$

$$٨\sqrt{٢} = ٨ \leftarrow ٨ = ٢ب$$

$$١٠\sqrt{٢} = ١٠ \leftarrow ١٠ = ٨ + ٢ = ٢ب + ٢١ = ٢ج$$

البؤرتان  $(٠, ١٠\sqrt{٢} \pm ٢)$

الرأسان  $(٥, ٢\sqrt{٢} \pm ٢)$

طول المحور القاطع = ٢

طول المحور المرافق = ٨

$$\frac{١٠\sqrt{٢}}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١٠}{٢} = \text{الاختلاف المركزي}$$

$$\text{هـ) } ٩س^٢ - ٢ص^٢ = ٣٦$$

الحل:

$$١ = \frac{٢ص^٢}{٩} - \frac{٢س^٢}{٤} \text{ بالقسمة على } ٣٦$$

قطع زائد سيني

$$٢ = ١ \leftarrow ٤ = ٢١$$

$$٣ = ٢ \leftarrow ٩ = ٢ب$$

$$١٣\sqrt{٢} = ١٣ \leftarrow ١٣ = ٢ج$$

المركز  $(٠, ٠)$

البؤرتان  $(٠, ١٣\sqrt{٢} \pm)$

الرأسان  $(٠, ٢ \pm)$

طول المحور القاطع = ٤

طول المحور المرافق = ٦

$$\frac{١٣\sqrt{٢}}{٢} = \frac{١٣}{٢} = \text{الاختلاف المركزي}$$

$$\text{و) } ٤س^٢ - ٢ص^٢ = ٣$$

الحل:

بالقسمة على  $\frac{٤}{٣}$  او بالضرب في  $\frac{٣}{٤}$

$$١ = \frac{٢ص^٢}{٤} - \frac{١س^٢}{٣} \text{ سيني}$$

المركز  $(٠, ٠)$

$$١ = ١ \leftarrow ١ = ٢١$$

$$٢ = ٢ \leftarrow ٤ = ٢ب$$

$$\frac{٧\sqrt{٢}}{٢} = ٧ \leftarrow ٧ = ٤ + ٣ = ٢ب + ٢١ = ٢ج$$

البؤرتان  $(٠, \frac{٧\sqrt{٢}}{٢} \pm)$

الرأسان  $(٠, \frac{١}{٣} \pm)$

طول المحور القاطع =  $\frac{٢}{٣}$

طول المحور المرافق =  $\frac{٤}{٣}$

الاختلاف المركزي =

$$\frac{٣\sqrt{٢} \times ٧\sqrt{٢}}{٣} = \frac{٣\sqrt{٢}}{١} \times \frac{٧\sqrt{٢}}{٣} = \frac{٧\sqrt{٢}}{١} = \frac{٧}{١}$$

$$\text{ز) } ١ = (٣ - ص)^٢ - (٢ + س)^٢$$

الحل:

$$١ = \frac{٢(٣-ص)}{١} - \frac{٢(٢+س)}{١}$$

$$١ = ١ \leftarrow ١ = ٢١$$

$$١ = ١ \leftarrow ١ = ٢ب$$

$$٢\sqrt{٢} = ٢ \leftarrow ٢ = ١ + ١ = ٢ج$$

المركز  $(٣, ٢)$  سيني

البؤرتان  $(٣, ٢\sqrt{٢} \pm ٢)$

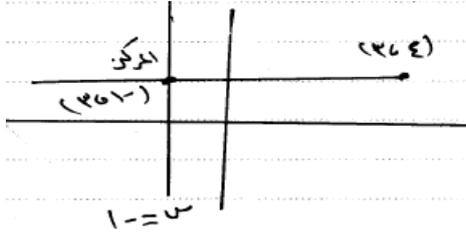
الرأسان  $(٣, ١ \pm ٢)$

S  
A  
L  
A  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

المركز يقع على المستقيم س = ١-



المركز (٣، ١-)

$$٥ = ١- - ٤ = ١$$

$$٢٩ = ٤ + ٢٥ = ٢ب + ٢أ = ٢ج$$

$$١ = \frac{٢(٣-ص)}{٤} - \frac{٢(١+س)}{٢٥} \text{ المعادلة}$$

٥) قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته

$$١س - ٢كص = ٩٠، \text{ وطول محوره القاطع}$$

(٦  $\sqrt{٢}$ ) وحدة، وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص

الذي معادلته ٩س + ٦ص = ٥٧٦، جد قيمة كل من

ل، ك حيث ل، ك أعداد حقيقية.

الحل:

$$١ = \frac{٢ص}{٩٠} - \frac{٢س}{٩٠} \quad (١)$$

$$\frac{٩٠}{٩٠} = ب، \frac{٩٠}{٩٠} = أ$$

$$١٨ = ٢ \times ٩ = ٢أ \leftarrow \sqrt{٢} \sqrt{٣} = أ \leftarrow \sqrt{٢} \sqrt{٦} = ١٢$$

$$٥ = \frac{٩٠}{١٨} = ل \leftarrow \frac{٩٠}{٩٠} = ١٨ \leftarrow$$

٢) القطع الناقص، بالقسمة على ٥٧٦

$$١ = \frac{٢ص}{٣٦} + \frac{٢س}{٦٤}$$

$$٣٦ = ٢ب، ٦٤ = ٢أ$$

$$٢٨ = ٣٦ + ٦٤ = ٢ب + ٢أ = ٢ج$$

$$\leftarrow ٢٨ = \text{للقطع الزائد}$$

$$٢ب + ٢أ = ٢ج$$

$$٢ب = ١٠ \leftarrow ٢ب + ١٨ = ٢٨$$

$$\leftarrow ٢ب = ١٠ \leftarrow \frac{٩٠}{٩٠} = ل \leftarrow \frac{٩٠}{٩٠} = ٩$$

طول المحور القاطع = ٢

طول المحور المرافق = ٢

$$\frac{\sqrt{٢}}{٢} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \text{الاختلاف المركزي}$$

٣) جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه مركز الدائرة

التي معادلتها  $(٣-ص)^2 + (٦-٢س)^2 = ٣٦$ ، وطول

محوره المرافق يساوي طول قطر هذه الدائرة، ومعادلة

محوره المرافق س = ١-.

الحل:

$$٤(٣-ص)^2 + ٤(٢-ص)^2 = ٣٦ \text{ بالقسمة على ٤}$$

$$٩ = (٢-ص)^2 + (٣-ص)^2$$

المركز (٢، ٣) = بؤرة القطع الزائد

نصف القطر = ٣

المحور المرافق = ٢ب = طول القطر

$$٣ = ب \leftarrow ٦ = ب٢$$

معادلة المحور المرافق س = ١-  $\leftarrow$  قطع زائد سيني

المركز (٢، ١-) مركز القطع

$$٣ = ب، ٤ = ١- - ٣ = ج$$

$$٢ب + ٢أ = ٢ج$$

$$٧ = ٢أ \leftarrow ٩ + ٢أ = ١٦$$

$$١ = \frac{٢(٢-ص)}{٩} - \frac{٢(١+س)}{٧}$$

٤) جد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه مركز الدائرة

التي معادلتها  $(٨-٢س)^2 + (٦-ص)^2 = ١٦$ ، وطول

محوره المرافق يساوي قطر هذه الدائرة، ومركزه يقع على

المستقيم الذي معادلته س = ١-.

الحل:

$$١٦ = (٤-ص)^2 + (٣-ص)^2$$

$$١٤ = (٣-ص)^2 + (٤-ص)^2$$

$$\text{المركز (٣، ٤)، } ٢ = \sqrt{٤} = ص$$

رأس القطع الزائد (٣، ٤)

طول المحور المرافق = ٢ب = ٤ = ب : ٢ =

SALAMATI

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

٦) تتحرك النقطة (س، ص) حيث يتحدد موقعها بالمعادلتين  
س = ٥قاه - ٤، ص = ٢ = ٣ظاه، حيث ه زاوية متغيرة، جد  
معادلة مسار النقطة (و)، ثم بين نوعه.

الحل:

$$٥قاه = س + ٤ \leftarrow قاه = \frac{س+٤}{٥}$$

$$قاه^2 = \frac{٢(س+٤)}{٢٥}$$

$$٣ظاه = ص - ٢ \leftarrow ظاه = \frac{ص-٢}{٣}$$

$$ظاه^2 = \frac{٢(ص-٢)}{٩}$$

$$لكن قاه^2 - ظاه^2 = ١$$

$$١ = \frac{٢(س+٤)}{٢٥} - \frac{٢(ص-٢)}{٩}$$

S  
A  
L  
I  
M  
A  
L  
S  
A  
T  
E  
E  
B

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

### أسئلة الوحدة ص (٣٧٢ - ٣٧٥)

(١) جد عناصر كل قطع اذا علمت معادلته في كل مما يأتي:

$$(أ) \text{ س }^2 = ٣ص + ٢$$

الحل:

$$\text{س }^2 = ٣(ص + \frac{٢}{٣}) \text{ قطع مكافئ}$$

$$\text{الرأس } (\frac{٢}{٣}, ٠)$$

$$ج = \frac{٣}{٤}$$

$$\text{البؤرة } (\frac{١}{٣}, ٠) = (\frac{٣}{٤}, \frac{٢}{٣}, ٠)$$

معادلة المحور = س = ٠

$$\text{معادلة الدليل ص} = \frac{١٧}{١٢} = \frac{٣}{٤} - \frac{٢}{٣}$$

$$(ب) \text{ س }^2 = ٣ص + ٢ص + ٢$$

الحل:

$$\text{س }^2 - ٢ص - ٢ = ٣ص$$

$$\text{س }^2 - ٢(ص + \frac{٣}{٢}) + \frac{٩}{٤} = \frac{٩}{٤}$$

$$\text{س }^2 - ٢(ص + \frac{٣}{٢}) = ٠$$

$$\text{س }^2 - ٢(ص + \frac{٣}{٢}) = ٠$$

$$١ = \frac{٢(ص + \frac{٣}{٢})}{\frac{٩}{٨}}$$

$$١ = \frac{٢(ص + \frac{٣}{٢})}{\frac{٩}{٨}}$$

قطع زائد صادي مركزه  $(\frac{٢}{٣}, ٠)$

$$١ = \frac{٣}{٤}, \text{ ب} = \frac{٣}{٨\sqrt{}}$$

$$(ج) \text{ ص }^2 - ١٥ = ٢ص$$

الحل:

$$\text{ص }^2 + ٢ص + ١٥ = ١٥ \text{ بالقسمة على } ١٥$$

$$١ = \frac{٢ص}{١٥} - \frac{٢ص}{١٥} \text{ قطع ناقص صادي}$$

$$١٥\sqrt{=} = ١ \leftarrow ١٥ = ٢١$$

$$\frac{١٥}{\sqrt{}} = ٢ \leftarrow \frac{١٥}{\sqrt{}} = ٢$$

$$ج = ٢١ - ٢١ = ٢ \text{ ب} - ١٥ = \frac{١٥}{\sqrt{}}$$

المركز (٠, ٠)

أكمل الحل .....

$$(د) \text{ س }^2 + ٢ص + ٢ = ٤ص - ١٢ + ١٢ = ٠$$

الحل:

$$\text{بالقسمة على } ٢: \text{س} + ٢ص + ٢ = ٢ص - ٦ + ٦ = ٠$$

$$(س + ١) + ٢(ص + ١) = ٠$$

$$١٦ = ٣(٣ + ص) + ٢(١ - س)$$

دائرة مركزها (١, ٣)

$$٤ = ١٦\sqrt{=} = ر$$

$$(هـ) \text{ س }^2 + ٩ص + ٣٦ = ٤ - ٨ص + ٨ص = ٤$$

الحل:

$$\text{س }^2 + ٩ص + ٣٦ = ٤$$

$$\text{س }^2 + ٩(ص + ٤) = ٤$$

$$\text{س }^2 + ٩(ص + ٤) = ٤$$

$$١ = \frac{٢(١ - ص)}{٩} - \frac{٢ص}{٤} \text{ قطع زائد سيني}$$

أكمل الحل .....

$$(و) \frac{٣٩}{٤} = ٢(ص + \frac{٣}{٢}) - ٢(٢ + س)$$

الحل:

$$\text{بالقسمة على } \frac{٣٩}{٤} \text{ سيني}$$

$$١ = \frac{٢(ص + \frac{٣}{٢})}{\frac{٣٩}{٤}} - \frac{٢(٢ + س)}{\frac{٣٩}{٤}}$$

$$١ = \frac{٢(ص + \frac{٣}{٢})}{\frac{٣٩}{٤}} - \frac{٢(٢ + س)}{\frac{١٣}{٤}}$$

المركز  $(\frac{٣}{٢}, -٢)$

$$\frac{١٣\sqrt{}}{\sqrt{}} = ١ \leftarrow \frac{١٣}{٤} = ٢١$$

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

$$ج^2 + ١ = ٢$$

$$١٤٠ = ٢ ب \leftarrow ٢ ب + ١٤٤ = ٤$$

قطع ناقص سيني

$$١ = \frac{٢(٢-ص)}{١٤٠} + \frac{٢(٣-ص)}{١٤٤}$$

ج) قطع زائد بؤرتاه النقطتان (٢، -٣)، (٤، ٣)، ورأساه  
النقطتان (٣، ٣)، (١، -٣).

الحل:

المركز (١، ٣)

$$٣ = ج \leftarrow ٦ = ج٢$$

$$٢ = ١ \leftarrow ٤ = ١٢$$

$$ج^2 + ١ = ٢$$

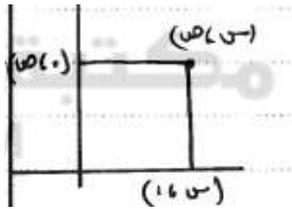
$$٥ = ٢ ب \leftarrow ٢ ب + ٤ = ٩$$

قطع زائد صادي

$$١ = \frac{٢(٣-ص)}{٥} - \frac{٢(١-ص)}{٤}$$

٣) جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى  
الإحداثي، بحيث تبعد بعداً متساوياً عن المحورين  
الإحداثيين، وتمر أثناء حركتها في الربعين الثاني والرابع.

الحل:



$$\sqrt{ص^2} = \sqrt{ص^2}$$

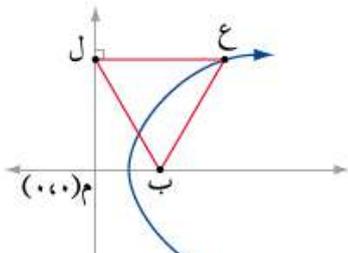
$$|ص| = |ص|$$

$$ص = ص \text{ أو } ص = -ص$$

المحل الهندسي ص = -ص يمر بالربع الثاني والرابع

٤) الشكل (٤٧-٥) يمثل منحنى قطع مكافئ بؤرته النقطة ب،  
إذا علمت ان المثلث ب ع ل متطابق الأضلاع، طول ضلعه  
(٤) وحدة، فجد معادلة

القطع المكافئ.



الشكل (٤٧-٥)

$$ب^2 = \frac{٣٩}{٤} \leftarrow ب = \frac{٣٩}{٢}$$

$$ج^2 + ١ = ٢ ب \leftarrow ٢ ب + ١٤٤ = ٤$$

$$١٣ = \frac{٥٢}{٤} = \frac{٣٩}{٤} + \frac{١٣}{٤} = ٢ ب + ١ \leftarrow$$

$$١٣ \sqrt{١} = ج \leftarrow$$

الرأسان (٢، -١٣/٢)، (٢، ١٣/٢)

الاختلاف المركزي = ه = ج = ٢ = ١٣/٢

٢) جد معادلة القطع المخروطي في كل من الحالات الآتية:  
أ) قطع مكافئ محوره يوازي محور السينات، ويمر بالنقاط  
(٣، ٣)، (٠، ٦)، (٢، ٠).

الحل:

$$س = ص + ٢ ب$$

$$\text{النقطة (٣، ٣)} \leftarrow ٣ = ٣ + ١٩ = ج + ١٩ \text{ --- (١)}$$

$$\text{النقطة (٠، ٦)} \leftarrow ٦ = ٠ + ٠ = ج \text{ --- (٢)}$$

$$\text{النقطة (٢، ٠)} \leftarrow ٠ = ٢ + ١٤ = ج + ١٤ \text{ --- (٣)}$$

(١) مع (٢)

$$٢ - ٠ = ج + ١٩ = ٣$$

$$٣ \times ٦ + ٢ + ١٤ = ٠$$

$$١٢ - ٦ - ١٨ = ٦ - \leftarrow$$

$$١٨ + ٦ + ١٠ = ٠$$

$$٦ - \leftarrow ٦ + ١٦ = ٦ - \leftarrow \text{بتعويضها في (٢)}$$

$$٦ + ٢ + ٢ \times ٤ = ٠$$

$$٧ - = ب \leftarrow ٠ = ٢ + ١٤ =$$

$$\text{المعادلة هي } س = ص - ٧ + ٦$$

ب) قطع ناقص مركزه النقطة (٣، ٢)، وبؤرتاه النقطتان ١)  
(٢، ٥)، (٢، ٠) وطول محوره الاكبر يساوي ٦ أمثال البعد  
البؤري.

الحل:

$$\text{المركز (٢، ٣)} = \left( \frac{٢+٢}{٢}, \frac{٥+٠}{٢} \right)$$

$$٢ = ج$$

$$١٢ = ١٢ \leftarrow ٢ \times ٦ = ١٢$$

$$١٢ = ٢ \times ٦ = ج٦ = ١$$

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

$$س = ١ - \frac{ص}{٣}$$

$$\frac{ص}{٣} = ١ - س \leftarrow ٢ص = ٩ - ٩س$$

$$٢ص = ٩(١ - س) \text{ قطع مكافئ}$$

(٧) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة م(س، ص) المتحركة في المستوى بحيث تبعد بعداً ثابتاً مقداره (٣) وحدات عن المستقيم الذي معادلته  $س٣ + ص٤ = ٥$ ، وتمر أثناء حركتها بمركز الدائرة التي معادلتها  $(س - ٤)٢ + (ص - ٢)٢ = ٩$ .

الحل:

$$٣ = \left| \frac{٥ - ص٤ + س٣}{\sqrt{١٦ + ٩}} \right|$$

$$١٥ = |٥ - ص٤ + س٣|$$

$$١٥ - = ٥ - ص٤ + س٣ \text{ أو } ١٥ = ٥ - ص٤ + س٣$$

$$١٠ - = ص٤ + س٣ \text{ أو } ٢٠ = ص٤ + س٣$$

مركز الدائرة (٤، ٢)

$$٢ \times ٤ + ٤ \times ٣ \quad ٢ \times ٤ + ٤ \times ٣$$

$$٢٠ = ٨ + ١٢ \quad ٢٠ = ٨ + ١٢$$

$$١٠ - \neq ٢٠ \quad \text{تحقق}$$

لا تحقق

المحل الهندسي خط مستقيم معادلته  $س٣ + ص٤ = ٢٠$

(٨) قطع مخروطي اختلافه المركزي  $> ١$ ، وبؤرتاه (٢، -١)، (٢، ١) ويمر بنقطة الأصل، جد عناصر هذا القطع.

الحل:

القطع ناقص سيني

$$\text{المركز} = \left( \frac{١-٢}{٢}, \frac{٢+٢}{٢} \right) = (١, ٠)$$

$$٢ = ج \leftarrow ٤ = ج٢$$

يمر بنقطة الأصل (٠، ٠)

$$١ = \frac{س٢}{٢٢} - \frac{٢(١+ص)}{٢٢}$$

$$١ = \frac{٢}{٢٢} \left( \frac{١}{٢} \right) - \frac{٢}{٢٢}$$

$$٢ = ج \leftarrow ٢ - ٢ = ج٢$$

الحل:

المثلث متطابق الاضلاع كل من زوايا ٦٠ درجة

$$\text{جا } ٣٠ = \frac{ب}{ج} = \frac{١}{٢} \leftarrow \frac{ب}{٤} = \frac{١}{٢} \leftarrow ب = ٢$$

$$\text{بعد البؤرة عن الدليل} = ٢٠ = ٢٠ = ج \leftarrow ج = ١٠$$

الراس (١٠، ٠)، البؤرة (٢٠، ٠)

$$(ص - هـ) = ٢ = ٤ = ج(س - ٥)$$

$$ص = ٢ = ٤ \times ١٠ = (١٠ - س) \times ٤٠$$

(٥) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى الإحداثي ن(س، ص) التي يكون بعدها عن المستقيم  $س٣ + ص٤ = ٧$  يساوي مثلي بعدها عن النقطة ك(١، ٠)، وبين نوعه.

الحل:

البعد بين (س، ص) والمستقيم  $س٣ + ص٤ = ٧$   $\times ٢ =$  البعد بينهما وبين (١، ٠)

$$|س - ١| = \sqrt{٢} \sqrt{٢ + (١ - س)٢}$$

$$\text{بالتربيع} (س - ١)٢ = ٢(٢ + (١ - س)٢)$$

$$س٢ - ٢س + ١ = ٤ + ٤س - ٤س٢ + ٤س٢ + ٤س - ٤س٢$$

$$٤س٢ - ٤س + ٤ = ٤س٢ - ٤س + ٤$$

$$٤س٢ + ٢س٣ + ٢س٢ + ٢س - ٤س٢ - ٤س + ٤ = ٤س٢ - ٤س + ٤$$

(٦) تتحرك النقطة (س، ص) في المستوى الإحداثي حيث يتحدد موقعها في اللحظة  $٠ \leq$  بالمعادلتين  $س = ٢ج٣$ ،  $ص = ٣ج٣$ ، جد معادلة مسار النقطة و، ثم بين نوعه.

الحل:

$$س = ٢ج٣$$

$$\text{لكن } \frac{ص}{٣} = ج٣ \text{ بتعويضها}$$

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

$$ج = ٢ا + ٢ب + ٢ك = ٢ل + ٢ن$$

$$ج < ٢ا + ٢ك \sqrt{٢ل + ٢ن}$$

$$\frac{ج}{٢ا + ٢ك} = \frac{٢ل + ٢ن}{٢} = ٢هـ$$

$$\frac{٢ل + ٢ك}{٢} = ٢(٢هـ)$$

$$\frac{٢ل + ٢ك}{٢} = \frac{١}{٢(٢هـ)}$$

$$\frac{١}{٢(٢هـ)} + \frac{١}{٢(١هـ)}$$

$$\frac{٢ك}{٢ل + ٢ن} + \frac{٢ل}{٢ل + ٢ن}$$

$$١ = \frac{٢ك + ٢ل}{٢ل + ٢ن}$$

(١١) يتكون هذا السؤال من ١٣ فقرة من نوع الاختيار من متعدد، لكل منها ٤ بدائل واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها

$$٣٦ = ٢(١٠ - ٢ص) + ٢(٤ + ٢س)$$

(أ) ٣ وحدات (ب) ٦ وحدات

(ج) ٧ وحدات (د) ٩ وحدات

(٢) معادلة دليل القطع المكافئ الذي معادلته

$$ص + ٢ = ٤س - ٨ = ٠$$

(أ) ١ = (ب) ٣ =

(ج) ١ = (د) ٣ =

(٣) نوع القطع المخروطي الذي معادلته

$$ص + ٣ = ٢س + ٢$$

(أ) دائرة (ب) مكافئ (ج) ناقص (د) زائد

(٤) إذا كانت بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته

$$١ + ٢ = ٨ - (٢س + ١) = ٠$$

فإن د تساوي

(أ) ٥- (ب) ٣- (ج) ٣ (د) ٥

$$ج = ٢ا - ٢ب = ٢$$

$$٤ = ٢ا - ١ - ٢ب = ٥$$

$$١ = \frac{٢س(١+ص)}{١} - \frac{٢س}{٥}$$

(٩) إذا كانت المعادلة:  $١١ = ٢ص + ٢س$  تمثل معادلة

قطع ناقص محوره الأكبر مواز لمحور السينات، أثبت ان

$$١ = \frac{١١}{٢ج + ٢ب}$$

الحل:

بقسمة المعادلة على ١١

$$١ = \frac{٢ص}{١١} + \frac{٢س}{١١}$$

$$\frac{١١}{١١} = ٢ا - \frac{١١}{١١} = ٢ب$$

$$٢ج = ٢ا - ٢ب = ٢ا - ٢ب + ٢ج + ٢ب$$

$$١ = \frac{١١}{٢ج + ٢ب}$$

(١٠) إذا كان  $هـ$ ،  $هـ$  يمثلان الاختلافيين المركزيين للقطعين

المخروطيين اللذين معادلتاهما:

$$١ = \frac{٢س}{٢ل} - \frac{٢ص}{٢ل} ، ١ = \frac{٢ص}{٢ل} - \frac{٢س}{٢ل}$$

$$١ = \frac{١}{٢٢هـ} - \frac{١}{١٢هـ}$$

الحل:

$$١ = \frac{٢ص}{٢ل} - \frac{٢س}{٢ل} \text{ قطع سيني}$$

$$١ = ل ، ب = ك$$

$$ج = ٢ا + ٢ب = ٢ل + ٢ك$$

$$ج < ٢ا + ٢ك \sqrt{٢ل + ٢ك}$$

$$\frac{ج}{٢ل + ٢ك} = \frac{٢ل + ٢ك}{٢} = ٢هـ$$

$$\frac{٢ل + ٢ك}{٢} = ٢(٢هـ)$$

$$\frac{٢ل}{٢ل + ٢ك} = \frac{١}{٢(٢هـ)}$$

$$١ = \frac{٢س}{٢ل} - \frac{٢ص}{٢ل} \text{ قطع زائد صادي}$$

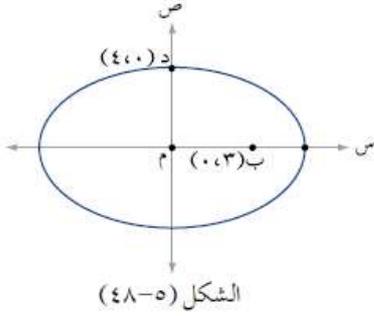
$$١ = ك ، ب = ل$$

## الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

محوره الأصغر النقطة د (٠، ٤). فإن طول محوره الأكبر  
يساوي:

أ) ١٢ (ب) ١٠ (ج) ٧ (د) ٥



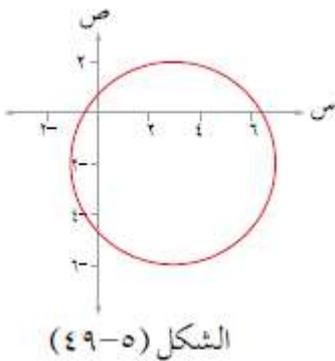
(١١) مساحة القطع الناقص الذي معادلته  
معادلاته  $٤س^٢ + ٩ص^٢ = ٣٦$  بالوحدات المربعة يساوي:

أ)  $\pi ٥$  (ب)  $\pi ٦$  (ج)  $\pi ١٣$  (د)  $\pi ٣٦$

(١٢) قطع مكافئ يقع رأسه على مركز القطع الزائد الذي  
معادلته  $\frac{٩}{٤}(١-س)^٢ - ٨(٢-ص)^٢ = ٧٢$ ، وبؤرته (١  
٣)، فإن معادلة محور تماثل القطع المكافئ هي:

أ)  $س = ١$  (ب)  $س = ١-$   
ج)  $ص = ٢$  (د)  $ص = ٢-$

(١٣) معادلة الدائرة الممثلة بالشكل (٤٩-٥) هي:



أ)  $٥س^٢ + ٢ص - ٦س - ٤ص + ٩ = ٠$   
ب)  $٥س^٢ + ٢ص - ٦س + ٤ص + ٩ = ٠$   
ج)  $٥س^٢ + ٢ص - ٦س - ٤ص - ٩ = ٠$

(٥) احداثيا نهايتي المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته  
 $(٢+س)^٢ - (٣-س)^٢ = ١$  هي:

أ)  $(٣، ١±٢)$  (ب)  $(١±٣، ٢-)$   
ج)  $(٣-، ١±٢)$  (د)  $(١±٣-، ٢)$

(٦) طول المحور الأصغر للقطع الناقص الذي يمس كلاً من  
المستقيمات  $س = ١$ ،  $س = ٩$ ،  $ص = ١-$ ،  $ص = ٥$ . يساوي:

أ) ٣ وحدات (ب) ٤ وحدات  
ج) ٦ وحدات (د) ٨ وحدات

(٧) تتحرك النقطة ن(س، ص) في المستوى بحيث يتحدد  
موقعها بالمعادلة  $\frac{ص^٢}{١٦-٢ل} - \frac{س^٢}{ل} = ١$  حيث ل عدد ثابت،  
إذا كانت  $ل > ١٦$ ، فإن المحل الهندسي لحركة النقطة ن  
يمثل:

أ) قطعاً مكافئاً (ب) قطعاً ناقصاً  
ج) قطعاً زائداً (د) دائرة

(٨) تتحرك النقطة ن(س، ص) في الربعين الأول والثالث من  
المستوى الإحداثي، حيث تبقى على بعدين متساويين من  
المحورين الإحداثيين. إن معادلة المحل الهندسي للنقطة ن  
هي:

أ)  $ص = س$  (ب)  $ص = س^٣$   
ج)  $ص = -س$  (د)  $ص = س^٣$

(٩) قطع مخروطي معادلته  
 $٩(١+س)^٢ + ١٦(٢-ص)^٢ = -١٤٤$ ، فإن اختلافه  
المركزي يساوي:

أ)  $\frac{٣}{٥}$  (ب)  $\frac{٥}{٣}$  (ج)  $\frac{٤}{٥}$  (د)  $\frac{٥}{٤}$

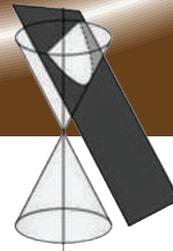
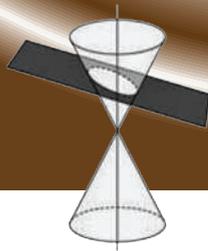
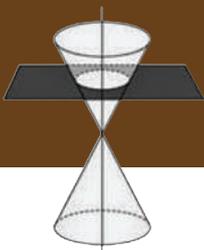
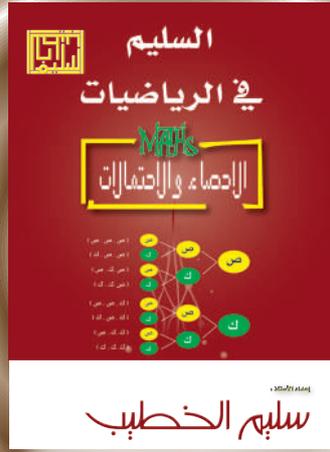
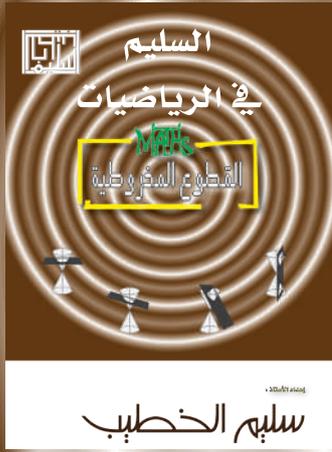
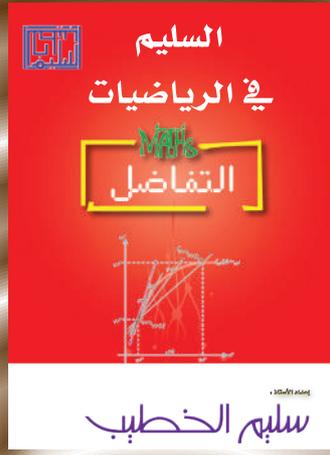
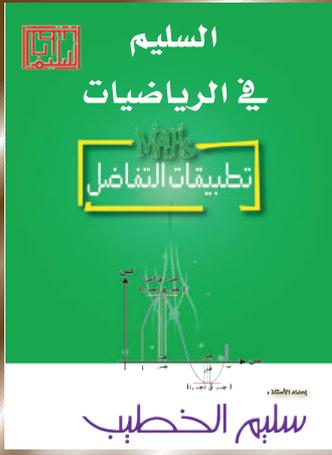
(١٠) الشكل (٤٨-٥) يمثل منحنى قطع ناقص مركزه نقطة  
الأصل، واحدى بؤرتيه النقطة ب(٣، ٠)، واحدى نهايتي

الوحدة الخامسة: القطوع  
المخروطية وتطبيقاتها

سليم الخطيب - ٠٧٨٦٢٣٠٤٠٧

(د)  $s^2 + s^2 - 6s + 4s - 3 = 0$

SALAEEN ALSATBEEB



## أكاديمية سليم الخطيب مركز زهرة النظم الثقافي

الوحدات - شارع مادبا - قرب ألبان ضبعة - فوق مطعم OK  
هاتف : 06 477 33 55 - موبايل : 0787 800 852

إعداد الأستاذ :

0786230407 / سليم الخطيب

[www.facebook.com/saleema5ateeb](https://www.facebook.com/saleema5ateeb)

Email: saleem\_\_al5ateeb@yahoo.com