رياضيات العلمي المستوى (٣) الوحدة (تطبيقات التفاضل)

الدرس (تطبيقات القيم القصوى)

مثال

مجموع عدد مع مثلي عدد آخر يساوي ٤٠ ، جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحل:

٢س + ص = ٤٠ ⟸ ص = ٤٠ − ٢س

ل = س × ص

ل = س (٤٠ − ٢س)

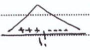
ل = ٤٠س − ٢س^{٢}

ل′ = ٤٠ − ٤س

٠ = ٤٠ − ٤س

٤س = ٤٠

س = ١٠

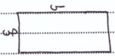


ص = ٤٠ − ٢٠ = ٢٠

مثال

قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٨٠٠م جد بعدي قطعة الأرض لتكون مساحتها أكبر ما يمكن

الحل:



٢س + ٢ص = ٨٠٠ ⟸ ٢ص = ٨٠٠ − ٢س

ص = ٤٠٠ − س

م = س × ص

م = س (٤٠٠ − س)

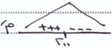
م = ٤٠٠س − س^{٢}

م′ = ٤٠٠ − ٢س

٠ = ٤٠٠ − ٢س

٢س = ٤٠٠

س = ٢٠٠



⟸ ص = ٢٠٠

مثال

متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومجموع أطوال أحرفه يساوي ٦٠٠سم جد أبعاد متوازي المستطيلات التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن .

الحل:

الطول س

العرض س

الارتفاع ص

٤س + ٤س + ٤ص = ٦٠٠

٤ص = ٦٠٠ − ٨س ⟸ ص = ١٥٠ − ٢س

ح = س^{٢} × ص

ح = س^{٢} (١٥٠ − ٢س)

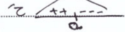
ح = ١٥٠س^{٢} − ٢س^{٣}

ح′ = ٣٠٠س − ٦س^{٢}

٠ = ٣٠٠س − ٦س^{٢}

٠ = ٦س (٥٠ − س)

س = ٠ ، س = ٥٠



$س = ٥٠$ ، $ص = ١٥٠ - ٢ \times ٥٠$

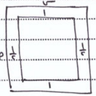
$= ١٥٠ - ١٠٠$

$= ٥٠$

مثال

صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ١٢٨ سم² يراد طباعة اعلان عليها اذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة واسفلها ١ سم وفي كل من الحاشيتين ½ سم جد بعدي الورقة بحيث يكون المساحة المطبوعه أكبر ما يمكن .

الحل:



$١٢٨ = س \times ص \Leftarrow ص = \frac{١٢٨}{س}$

$م = (س - ١)(ص - ٢)$

$م = (س - ١)(\frac{١٢٨}{س} - ٢)$

$م = ١٢٨ - ٢س - \frac{١٢٨}{س} + ٢$

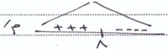
$م' = -٢ + \frac{١٢٨}{س^٢}$

$٠ = -٢ + \frac{١٢٨}{س^٢}$

$٢ = \frac{١٢٨}{س^٢}$

$٢س^٢ = ١٢٨$

$س^٢ = ٦٤ \Leftarrow س = ٨$



$\Leftarrow ص = \frac{١٢٨}{(٨)}$ ، ١٦

مثال

جد النقطة الواقعة في الربع الأول على منحنى $ق(س) = \sqrt{س^{٢} - ٤}$ التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٦، ٠)

الحل:

النقطة (س، ص) $\longleftarrow$ (٦، ٠)

$$ف = \sqrt{(س-٦)^{٢} + ص^{٢}}$$

$$ف = \sqrt{(س-٦)^{٢} + س^{٢} - ٤}$$

$$ف = \sqrt{س^{٢} - ١٢س + ٣٦ + س^{٢} - ٤}$$

$$ف = \sqrt{٢س^{٢} - ١٢س + ٣٢}$$

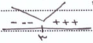
$$ف'(س) = \frac{٤س - ١٢}{٢\sqrt{٢س^{٢} - ١٢س + ٣٢}}$$

$ف'(س) = ٠$

$\Leftarrow$ ٤س − ١٢ = صفر

٤س = ١٢

س = ٣

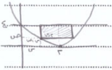


$\Leftarrow$ $(٣، \sqrt{٥})$

مثال

يقع المستطيل أ ب جـ د في المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = س^{٢} - ٤س + ٤$ والمستقيم ص = ٤ بحيث يقع رأساه أ، ب على منحنى ق ورأساه الآخران جـ، د على المستقيم ص = ٤ جد بعدي المستطيل أ ب جـ د لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

الحل:



المساحة = الطول × العرض

$$م = ٢(٣-س) \times (٤-ص)$$

$$م = (٤-٢س)(\cancel{٤} - س^{٢} + ٤س - \cancel{٤})$$

$$م = (٤-٢س)(-س^{٢} + ٤س)$$

$$م = -٤س^{٢} + ١٦س + ٢س^{٣} - ٨س^{٢}$$

$$م = ٢س^{٣} - ١٢س^{٢} + ٨٦س$$

$$م'(س) = ٦س^{٢} - ٢٤س + ٨٦$$

$$٠ = ٣س^{٢} - ٨٤س + ٨$$

$$٠ = ٣س^{٢} - ٤س + ٤$$

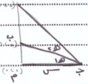
$$٠ = (٣س \ [illegible] \ ٤)(س - ٢)$$

$س = \frac{٢}{٣}$ $\quad$ س = ٢

مثال

أ(٠،٢٠) ، ب(٠،٥) نقطتان ثابتتان ج نقطة تتحرك على محور السينات الموجب جد أكبر قياس ممكن للزاوية أ ج ب.

الحل:



∡ أ ج ب = هـ

∡ أ ج م = هـ٢

∡ ب ج م = هـ١

هـ = هـ٢ - هـ١

$\text{ظاهـ} = \text{ظا}(\text{هـ}_2 - \text{هـ}_1) = \dfrac{\text{ظاهـ}_2 - \text{ظاهـ}_1}{1 + \text{ظاهـ}_2\,\text{ظاهـ}_1}$

$\text{ظاهـ} = \dfrac{\frac{20}{\text{س}} - \frac{5}{\text{س}}}{1 + \frac{20}{\text{س}}\,\frac{5}{\text{س}}}$

$= \dfrac{20\text{س} - 5\text{س}}{\text{س}^2} \quad \dfrac{1}{\frac{\text{س}^2 + 100}{\text{س}^2}}$

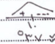
$= \dfrac{15}{\text{س}} \times \dfrac{\text{س}^2}{\text{س}^2 + 100}$

$= \dfrac{15\text{س}}{\text{س}^2 + 100}$

$\text{قا}^2\text{هـ} \times \text{هـ}'(\text{س}) = \dfrac{(\text{س}^2 + 100)(15) - (15\text{س})(2\text{س})}{(\text{س}^2 + 100)^2}$

$\text{هـ}' = 0 \Leftarrow 1500 - 15\text{س}^2 = 0$

$\Leftarrow \text{س} = 10$

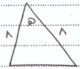


$\text{ظاهـ} = \dfrac{150}{200} = \dfrac{3}{4} \Leftarrow \text{هـ} \approx 37°$

مثال

نحتاج الى قص لوح خشبي على شكل مثلث متطابق الضلعين طول كل منهما ٨سم اذا كانت زاوية رأس المثلث هـ متغيرة جد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

الحل:



$\text{م} = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \text{جاهـ}$

$\text{م} = 4 \times 8 \times \text{جاهـ}$

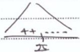
$\text{م} = 32\,\text{جاهـ}$

$\text{م}' = 32\,\text{جتاهـ}$

$0 = 32\,\text{جتاهـ}$

$0 = \text{جتاهـ}$

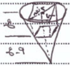
$\text{هـ} = \frac{\pi}{2}$



مثال

جد أكبر حجم لموشور رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته المخروط ٦ سم ، وارتفاعه ٩ سم .

الحل:



$\text{نق} = ٦$

$\text{ع}_{\text{المخروط}} = ٩$

طول ضلع قاعدة الموشور = س

العرض = س

الارتفاع = ع

$\text{ح}_{\text{الموشور}} = \text{س} \times \text{س} \times \text{ع}$

$\text{ح} = \text{س}^{٢} \times \text{ع}$

$(٢\text{نق})^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{س}^{٢}$

$\text{ح} = ٢\,\text{نق}^{٢} \times \left(\frac{١}{٢}(١٨ - ٣\text{نق})\right)$ $\quad ٤\text{نق}^{٢} = ٢\text{س}^{٢}$

$\text{ح} = ١٨\,\text{نق}^{٢} - ٣\,\text{نق}^{٣}$ $\quad ٢\text{نق}^{٢} = \text{س}^{٢}$

$\text{ح}' = ٣٦\,\text{نق} - ٩\,\text{نق}^{٢}$

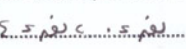
$\frac{\text{نق}}{٩ - \text{ع}} = \frac{٦}{٩}$

$٠ = ٣٦\text{نق} - ٩\text{نق}^{٢}$

$٠ = ٩\text{نق}(٤ - \text{نق})$

$\text{نق} = ٠$ ، $\text{نق} = ٤$

$٩\text{نق} = ٥٤ - ٦\text{ع}$



$٣\text{نق} = ١٨ - ٢\text{ع}$

$٣\text{نق} - ١٨ = -٢\text{ع}$

$\text{ع} = \frac{١}{٢}(١٨ - ٣\text{نق})$

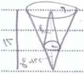
$\text{ح}(٤) = ١٨ \times ١٦ - ٣ \times ٦٤$

$= ٩٦$

مثال

جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ١٢ سم بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي .

الحل:



$\text{ح} = \frac{١}{٣}\pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع}$

$\frac{\text{نق}}{٦} = \frac{١٢ - \text{ع}}{١٢}$

$١٢\text{نق} = ٧٢ - ٦\text{ع}$

$٦\text{ع} = ٧٢ - ١٢\text{نق}$

$\text{ع} = ١٢ - ٢\text{نق}$

$\text{ح} = \frac{١}{٣}\pi\,\text{نق}^{٢}\,(١٢ - ٢\text{نق})$

$\text{ح} = ٤\pi\,\text{نق}^{٢} - \frac{٢\pi}{٣}\,\text{نق}^{٣}$

$\text{ح}' = ٨\pi\,\text{نق} - ٢\pi\,\text{نق}^{٢}$

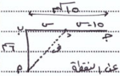
$٠ = ٨\pi\,\text{نق} - ٢\pi\,\text{نق}^{٢}$

$٠ = ٢\pi\,\text{نق}\,(٤ - \text{نق})$

$\text{نق} = ٤$

$\text{ح}(٤) = ٤\pi \times ١٦ - \frac{٢\pi}{٣} \times ٦٤$

مثال



يقف رجل عند النقطة م التي تبعد ٦كم عن النقطة ب يريد أن يصل الى النقطة جـ مرورا بالنقطة د اذا كان يسير بسرعة ٣كم/س عند الانتقال من النقطة م الى النقطة د ، ويسير بسرعة ٦كم/س عند الانتقال من النقطة د الى النقطة جـ نحدد موقع النقطة د بحيث يصل في اقصر وقت ممكن علما بأن البعد بين النقطة ب والنقطة جـ ١٥كم

الحل:

$$\text{ن} = \frac{\text{ف}}{٣} + \frac{١٥ - \text{س}}{٦}$$

حيث ن الزمن ، ف المسافه

علاقه مساعدة (فيثاغورس)

$$\text{ف}^{٢} = \text{س}^{٢} + ٣٦$$

$\Leftarrow$

$$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣٦}$$

$\Leftarrow$

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣٦}}{٣} + \frac{١٥ - \text{س}}{٦}$$

$$\text{ن}'(\text{س}) = \frac{١}{٣} \cdot \frac{٢\text{س}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣٦}} + \frac{١}{٦}(-١)$$

$$= \frac{\text{س}}{٣\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣٦}} - \frac{١}{٦}$$

$$= \frac{٦\text{س} - ٣\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣٦}}{١٨(\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣٦})}$$

$$٠ = ٦\text{س} - ٣\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣٦}$$

$$٣\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣٦} = ٦\text{س}$$

$$٩(\text{س}^{٢} + ٣٦) = ٣٦\text{س}^{٢}$$

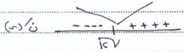
$$٩\text{س}^{٢} + ٩ \times ٣٦ = ٣٦\text{س}^{٢}$$

$$٩ \times ٣٦ = ٢٧\text{س}^{٢}$$

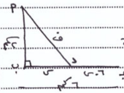
$$٣٦ = ٣\text{س}^{٢}$$

$$١٢ = \text{س}^{٢}$$

$\text{س} = \sqrt{١٢}$ مسافه



مثال



يقع حقل نفط في البحر عند النقطة م التي تبعد ٢كم عن اقرب نقطة ب على الساحل واردنا أن نضخ البترول من الحقل الى المصفاة التي تقع عند النقطة جـ على الساحل وتبعد ٦كم من ب وذلك بواسطة انابيب في البحر على خط مستقيم حتى النقطة د على الساحل ثم بواسطة انابيب على اليابسة على خط مستقيم من د الى جـ على فرض أن الأنابيب في البحر وفي اليابسة في مستوى واحد اذا كانت تكلفة الانابيب تحت سطح البحر ٥٠٠٠٠٠ دينار لكل كيلومتر وعلى اليابسة ٣٠٠٠٠٠ دينار لكل كيلومتر

① اين يجب أن تكون د لتحقيق أقل تكلفه ممكنه ؟

② اين يجب ان تكون د لتحقيق أكبر تكلفه ممكنة ؟

الحل:

$م د = ف$

تكلفة $ف = ٥٠٠٠٠٠ ف$

تكلفه $د جـ = ٣٠٠٠٠٠ (٦ - س)$

$ت = ٥٠٠٠٠٠ ف + ٣٠٠٠٠٠ (٦ - س)$

$ف^{٢} = ٢^{٢} + س^{٢}$

$ف = \sqrt{٤ + س^{٢}}$

$ت(س) = ٥٠٠٠٠٠ \sqrt{٤ + س^{٢}} + ٣٠٠٠٠٠ (٦ - س)$

$ت'(س) = ٥٠٠٠٠٠ \frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{٤ + س^{٢}}} - ٣٠٠٠٠٠$

$٠ = \frac{٥٠٠٠٠٠}{\sqrt{٤ + س^{٢}}} - ٣٠٠٠٠٠$

$٣٠٠٠٠٠ = \frac{٥٠٠٠٠٠}{\sqrt{٤ + س^{٢}}}$

$٣٠٠٠٠٠ \sqrt{٤ + س^{٢}} = ٥٠٠٠٠٠$

$٣ \sqrt{٤ + س^{٢}} = ٥$

$٩ (٤ + س^{٢}) = ٢٥$

$٣٦ + ٩ س^{٢} = ٢٥$

مثال

جد العدد الذي ينتمي للفترة [$\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{2}$] الذي يجعل ناتج جمع العدد ومقلوبه أكبر ما يمكن.

أقل

الحل:

$\text{ل}(\text{س}) = \text{س} + \frac{1}{\text{س}}$

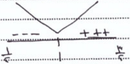
$\text{ل}'(\text{س}) = 1 - \frac{1}{\text{س}^2}$

$0 = 1 - \frac{1}{\text{س}^2}$

$\frac{1}{\text{س}^2} = 1$

$\text{س}^2 = 1$

$\text{س} = 1$



مثال

وعاء اسطواني الشكل مفتوح من الأعلى حجمه $\text{١٠٠٠}\pi$ سم³ جد أقل مساحة ممكنة من الصفيح لتصنيعه.

الحل:

م = محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة القاعدة

$\text{م} = \text{٢}\pi\,\text{نق} \times \text{ع} + \pi\,\text{نق}^2$

$\text{ح} = \pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$

$\text{١٠٠٠}\pi = \pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$

$\text{١٠٠٠} = \text{نق}^2\,\text{ع}$

$\text{ع} = \frac{\text{١٠٠٠}}{\text{نق}^2}$

$\text{م}(\text{نق}) = \text{٢}\pi\,\text{نق} \times \frac{\text{١٠٠٠}}{\text{نق}^2} + \pi\,\text{نق}^2$

$\text{م}(\text{نق}) = \frac{\text{٢٠٠٠}\pi}{\text{نق}} + \pi\,\text{نق}^2$

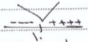
$\text{م}'(\text{نق}) = \frac{-\text{٢٠٠٠}\pi}{\text{نق}^2} + \text{٢}\pi\,\text{نق}$

$0 = \frac{-\text{٢٠٠٠}\pi}{\text{نق}^2} + \text{٢}\pi\,\text{نق}$

$\frac{\text{٢٠٠٠}\cancel{\pi}}{\text{نق}^2} = \text{٢}\cancel{\pi}\,\text{نق}$

$\text{١٠٠٠} = \text{نق}^3$

$\text{١٠} = \text{نق}$

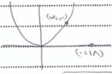


$\text{م}(\text{١٠}) = \text{٢٠٠}\pi + \text{١٠٠}\pi = \text{٣٠٠}\pi$

مثال

جد احداثيي النقطة م (س، ص) الواقعه على منحنى العلاقة ص = س² التي بعدها عن النقطة ب (١٨، ٠) أقل ما يمكن .

الحل:



$$ف = \sqrt{(س - ١٨)^٢ + (ص - ٠)^٢}$$

$$= \sqrt{(س - ١٨)^٢ + س^٤}$$

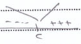
$$ف' = \frac{٢(س - ١٨) + ٤س^٣}{٢\sqrt{(س - ١٨)^٢ + س^٤}} = صفر$$

$$\Leftarrow ٤س^٣ + ٢س - ٣٦ = صفر$$

$$\Leftarrow س = ٢$$

$$(س - ٢)(٤س^٢ + ٨س + ١٨) = ٠$$

$$\Leftarrow س = ٢$$

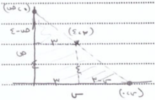


⇐ النقطة (٢، ٤)

مثال

جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، ٤) ويصنع مع المحورين الاحداثيين الموجبين مثلثاً مساحته أقل ما يمكن

الحل:



$$م = \frac{١}{٢} س \times ص$$

$$\frac{س - ٣}{٤} = \frac{س}{ص}$$

$$ص = \frac{٤س}{س - ٣}$$

$$م = \frac{١}{٢} س \left(\frac{٤س}{س - ٣}\right)$$

$$م = \frac{٢س^٢}{س - ٣}$$

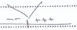
$$م' = \frac{(س - ٣)(٤س) - ٢س^٢}{(س - ٣)^٢} = ٠$$

$$٤س^٢ - ١٢س - ٢س^٢ = صفر$$

$$٢س^٢ - ١٢س = صفر$$

$$٢س (س - ٦) = صفر$$

$$\Leftarrow س = ٦$$

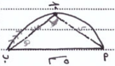


(٦، ٠)، (٣، ٤)

$$م = \frac{٤ - ٠}{٣ - ٦} = \frac{٤}{-٣}$$

$$ص = \frac{-٤}{٣} (س - ٦)$$

مثال



يمثل الشكل نصف الدائرة طول قطرها أب (٥سم) بدأت النقطة جـ الحركة على الدائرة من النقطة ب باتجاه عقارب الساعة لترسم مع القطر مثلثاً جد قياس الزاوية أ ب جـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

الحل:

$\text{م} = \frac{1}{2} \times \text{س} \times \text{ص}$

$\text{جاهـ} = \frac{\text{س}}{5}$ ، $\text{جتاهـ} = \frac{\text{ص}}{5}$

$\text{م} = \frac{1}{2} (5\,\text{جاهـ})(5\,\text{جتاهـ})$

$\text{م} = 12{,}5\ \text{جاهـ جتاهـ}$

$\text{م} = 6{,}25\ (2\,\text{جاهـ جتاهـ})$

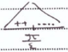
$\text{م} = 6{,}25\ \text{جا}2\text{هـ}$

$\text{م}' = 6{,}25\ \text{جتا}2\text{هـ} \times 2$

$0 = 12{,}5\ \text{جتا}2\text{هـ}$

$\text{جتا}2\text{هـ} = \text{صفر}$

$2\text{هـ} = \frac{\pi}{2}$

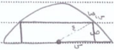


$\Leftarrow \text{هـ} = \frac{\pi}{4}$

مثال

جد أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٤سم بحيث تنطبق قاعدته على قطر الدائرة ورأساه الآخران على الدائرة

الحل:



$(4)^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2$

$\text{س}^2 = 16 - \text{ص}^2$

$\text{س} = \sqrt{16-\text{ص}^2}$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$= 2\text{س} \times \text{ص}$

$\text{م} = 2\sqrt{16-\text{ص}^2} \times \text{ص}$

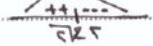
$\text{م} = 2\text{ص}\sqrt{16-\text{ص}^2}$

$\text{م}' = 2\text{ص} \times \frac{-\cancel{2}\text{ص}}{\cancel{2}\sqrt{16-\text{ص}^2}} + \sqrt{16-\text{ص}^2} \times 2$

$\text{م}' = \frac{-2\text{ص}^2}{\sqrt{16-\text{ص}^2}} + 2\sqrt{16-\text{ص}^2}$

$\text{م}' = \frac{-2\text{ص}^2 + 2(16-\text{ص}^2)}{\sqrt{16-\text{ص}^2}}$

$0 = -2\text{ص}^2 + 32 - 2\text{ص}^2$



$4\text{ص}^2 = 32$

$\text{ص}^2 = 8$

$\text{ص} = 2\sqrt{2}$

$\text{م}(4) = 4\sqrt{2}\,\sqrt{8}$

$= 4\sqrt{16} = \boxed{16}$

مثال

قطاع دائري قياس زاويته المركزية هـ بالتقدير الدائري وطول نصف قطر دائرته ٤ وحدات حُوّل إلى مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته نق وارتفاعه ع جد قيمة هـ التي تجعل للمخروط الناتج أكبر حجم ممكن

الحل:

$ح = \frac{\pi}{٣}\,نق^{٢}\,ع$

$ح = \frac{\pi}{٣}\,(١٦ - ع^{٢})\,ع$

$ح = \frac{١٦\pi}{٣}\,ع - \frac{\pi}{٣}\,ع^{٣}$

$ح' = \frac{١٦\pi}{٣} - \pi\,ع^{٢}$

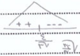
$٠ = \frac{١٦\pi}{٣} - \pi\,ع^{٢}$

$١٦ = نق^{٢} + ع^{٢}$

$نق^{٢} = ١٦ - ع^{٢}$

$ع^{٢} = \frac{١٦}{٣}$

$ع = \frac{٤}{\sqrt{٣}}$



$\Leftarrow نق^{٢} = \frac{٣٢}{٣} \leftarrow نق = \sqrt{\frac{٣٢}{٣}}$

طول القوس = محيط قاعدة المخروط

$هـ\,نق = ٢\pi\,نق$

$هـ \times ٤ = ٢\pi\sqrt{\frac{٣٢}{٣}}$

$هـ = \frac{١}{٢}\,\pi\sqrt{\frac{٣٢}{٣}}$

مثال

مصنع للاجهزة الكهربائية ينتج س جهازاً سنوياً يبيع كل جهاز بسعر (٢٠٠ – ٠٫٠١س) دينار فإذا كان تكلفة انتاج هذه الاجهزة (٥٠س + ٢٠) دينار فكم جهازاً ينتج المصنع لتحقيقه أكبر ربح ممكن سنوياً؟

الحل:

$ر(س) = د(س) - ك(س)$

$= (٢٠٠ - ٠٫٠١س)\,س - (٥٠س + ٢٠)$

$ر(س) = ٢٠٠س - ٠٫٠١س^{٢} - ٥٠س - ٢٠$

$ر(س) = ١٥٠س - ٠٫٠١س^{٢} - ٢٠$

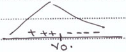
$ر'(س) = ١٥٠ - ٠٫٠٢س$

$٠ = ١٥٠ - ٠٫٠٢س$

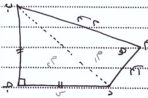
$\frac{٢س}{١٠٠} = ١٥٠$

$٢س = ١٥٠٠٠$

$س = ٧٥٠$



مثال



معتمداً الشكل الذي يمثل الشكل الرباعي م ب جـ د الذي فيه الضلع م ب ثابت طوله ٢سم وفيه م د ثابت طوله ١سم الا أن وضعه متحول يمكنه أن يدور في مستوى حول النقطة م أما الزاوية د جـ ب فهي قائمة والضلعان $\overline{جـ د}$ $\overline{جـ ب}$ متطابقان دوماً، جد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة الشكل الرباعي عندها أكبر ما يمكن

الحل:

$م = م_١ + م_٢$

$= \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ \,جا هـ + \frac{١}{٢} س س$

لكن

$(د ب)^٢ = س^٢ + س^٢$

$(د ب)^٢ = ٢س^٢$

$(د ب)^٢ = ١^٢ + ٢^٢ - ٢ \times ٢ \times ١ \times جتا هـ$

$= ٥ - ٤جتا هـ$

$٢س^٢ = ٥ - ٤جتا هـ$

$س^٢ = \frac{٥}{٢} - ٢ جتا هـ$

$م = جا هـ + \frac{١}{٢}(\frac{٥}{٢} - ٢جتا هـ)$

$م = جا هـ + \frac{٥}{٤} - جتا هـ$

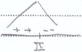
$م' = جتا هـ + جا هـ$

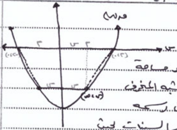
$٠ = جتا هـ + جا هـ$

$- \quad جا هـ = جتا هـ$

$ظا هـ = ١$

$هـ = \frac{\pi}{٤}$





مثال

جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف الذي يمكن رسمه تحت محور السينات بحيث تكون إحدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران ق(س) = س² - ٤ .

الحل:

م = $\frac{1}{٢}$ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

= $\frac{1}{٢}$ (٢س + ٤) (٤ - ص)

= (س + ٢) (٤ - س² + ٤)

= (س + ٢) (٨ - س²)

= ٨س - س³ + ١٦ - ٢س²

م' = ٨ - ٣س² - ٤س

٠ = ٣س² + ٤س - ٨

٠ = (٣س - ٣,٢) (س + ٢,٥)

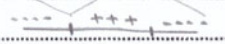
س = $\frac{-٤ \mp \sqrt{١٦ - ٤ \times ٣ \times -٨}}{٦}$

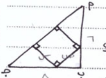
س = $\frac{-٤ \pm \sqrt{١٦ + ٩٦}}{٦}$

= $\frac{-٤ \mp \sqrt{١١٢}}{٦}$

س = ١,١ ، س = -٢,٤٣

س = $\frac{-٤ + \sqrt{١١٢}}{٦}$ ، س = $\frac{-٤ - \sqrt{١١٢}}{٦}$

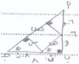




مثال

يمثل الشكل مثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٦ سم ب جـ = ٨ سم وبداخله مستطيل يقع رأسان من رؤوسه على وتر المثلث والرأسان الآخران يقع كل منهما على ضلعي القائمة جد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن

الحل:



م = س × ص

أجـ = ١٠ فيثاغورس

م = ٦ن - $\frac{٦}{٨}$ن²

$\frac{ن}{و} = \frac{٨}{٦}$

⇐ ن = $\frac{٨}{٦}$ و

م' = ٦ - $\frac{١٢}{٨}$ ن

$\frac{س}{٨-ن} = \frac{و}{ص}$

٠ = ٦ - $\frac{١٢}{٨}$ ن

س ص = و (٨ - ن)

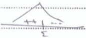
$\frac{١٢}{٨}$ ن = ٦

لكن و = $\frac{٦}{٨}$ ن

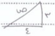
ن = ٦ × $\frac{٨}{١٢}$

⇐ س ص = $\frac{٦}{٨}$ ن (٨ - ن)

ن = ٤



⇐ و = ٣



⇐ ص = ٥

س = $\frac{٣(٤)}{٥} = \frac{١٢}{٥}$

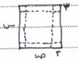
$\frac{-٤ + \sqrt{١١٢}}{٦}$

م ($\frac{-٤ + \sqrt{١١٢}}{٦}$) =

٢٠٠٨ شتوي   ٧ علامات

يُراد طباعة اعلان على ورقة مستطيلة الشكل بحيث يكون عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ٣ سم وفي كل من الجانبين ٢ سم اذا كانت مساحة المنطقة المطبوعه تساوي ١٥٠ سم^٢ جد أبعاد الورقه التي مساحتها اصغر ما يمكن ويمكن استعمالها لطباعة الاعلان

الحل:



طول الورقه = س

عرض الورقه = ص

$م = (س - ٦)(ص - ٤)$

$١٥٠ = (س - ٦)(ص - ٤)$

$ص - ٤ = \frac{١٥٠}{س - ٦}$

$ص = \frac{١٥٠}{س - ٦} + ٤$

$م(س) = س \times ص$

$م(س) = س \times \left(\frac{١٥٠}{س - ٦} + ٤\right)$

$م(س) = \frac{١٥٠ س}{س - ٦} + ٤ س$

$م'(س) = \frac{(س - ٦)(١٥٠) - ١٥٠ س \times ١}{(س - ٦)^٢} + ٤$

$م'(س) = \frac{١٥٠ س - ٩٠٠ - ١٥٠ س}{(س - ٦)^٢} + ٤$

$م'(س) = \frac{- ٩٠٠}{(س - ٦)^٢} + ٤$

$٠ = \frac{- ٩٠٠}{(س - ٦)^٢} + ٤$

$\frac{٩٠٠}{(س - ٦)^٢} = ٤$

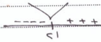
$(س - ٦)^٢ = \frac{٩٠٠}{٤} = ٢٢٥$

$(س - ٦)^٢ = ٢٢٥$

$س - ٦ = ١٥$ او $س - ٦ = - ١٥$

$س = ٢١$ أو $س = - ٩$

مرفوض



ولايجاد ص

$ص = \frac{١٥٠}{س - ٦} + ٤$

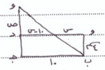
$= \frac{١٥٠}{٢١ - ٦} + ٤$

$= ١٠ + ٤ = ١٤$

٢٠٠٨ شتوي   ٨ علامات

أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٤ سم
ب جـ = ١٠ سم مُدّ الضلع جـ د على استقامته
إلى و ثم وصل ب و فقطع الضلع أ د
في هـ فإذا كان أ هـ = س سم
د و = ص سم جد قيمتي س ، ص
اللتين تجعلان مجموع مساحتي المثلثين
د هـ و ، أ هـ ب أصغر ما يمكن

الحل:



مجموع مساحتي المثلثين = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{١٠}-\text{س}) \times \text{ص} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{٤} \times \text{س}$

من تشابه المثلثات

$\frac{\text{س}}{\text{١٠}-\text{س}} = \frac{\text{٤}}{\text{ص}} \Leftarrow \text{ص} = \frac{\text{٤}(\text{١٠}-\text{س})}{\text{س}}$

الآن

$\text{م} = \frac{(\text{١٠}-\text{س})(\text{١٠}-\text{س}) \times \text{٤}}{\text{٢س}} + \text{٢س}$

$= \frac{\text{٢}(\text{١٠}-\text{س})^{\text{٢}}}{\text{س}} + \text{٢س}$

$= \frac{\text{٢}(\text{١٠٠} - \text{٢٠س} + \text{س}^{\text{٢}})}{\text{س}} + \frac{\text{٢س}^{\text{٢}}}{\text{س}}$

$= \frac{\text{٢٠٠} - \text{٤٠س} + \text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٢س}^{\text{٢}}}{\text{س}}$

$= \frac{\text{٤س}^{\text{٢}} - \text{٤٠س} + \text{٢٠٠}}{\text{س}}$

$\text{م}' = \frac{\text{س}(\text{٨س} - \text{٤٠}) - (\text{٤س}^{\text{٢}} - \text{٤٠س} + \text{٢٠٠}) \times \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

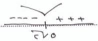
$\text{٠} = \frac{\text{س}(\text{٨س} - \text{٤٠}) - (\text{٤س}^{\text{٢}} - \text{٤٠س} + \text{٢٠٠})}{\text{س}^{\text{٢}}}$

$\text{٠} = \text{٨س}^{\text{٢}} - \text{٤٠س} - \text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٤٠س} - \text{٢٠٠}$

$\text{٤س}^{\text{٢}} - \text{٢٠٠} = \text{صفر}$

$\text{س}^{\text{٢}} = \frac{\text{٢٠٠}}{\text{٤}} = \text{٥٠}$

$\Leftarrow \text{س} = \sqrt{\text{٥٠}} \Leftarrow \text{س} = \text{٥}\sqrt{\text{٢}}$



ولايجاد ص

$\text{ص} = \frac{\text{٤}(\text{١٠}-\text{س})}{\text{س}}$

$= \frac{\text{٤}(\text{١٠} - \text{٥}\sqrt{\text{٢}})}{\text{٥}\sqrt{\text{٢}}}$

٢٠٠٩ شتوي ٨ علامات

اسطوانة دائرية قائمة مجموع محيط قاعدتها وارتفاعها يساوي ٦٦ سم احسب ارتفاع الاسطوانة الذي يجعل حجمها أكبر ما يمكن؟

الحل:

نق : نصف قطر القاعدة ، ع : الارتفاع

ح : حجم الاسطوانة ، م : محيط الاسطوانة

$\Leftarrow \text{٢}\pi\,\text{نق} + \text{ع} = \text{٦٦}$

$\Leftarrow \text{ع} = \text{٦٦} - \text{٢}\pi\,\text{نق}$

$\text{ح} = \pi\,\text{نق}^{\text{٢}}\,\text{ع}$

$= \pi\,\text{نق}^{\text{٢}}(\text{٦٦} - \text{٢}\pi\,\text{نق})$

$= \text{٦٦}\pi\,\text{نق}^{\text{٢}} - \text{٢}\pi^{\text{٢}}\,\text{نق}^{\text{٣}}$

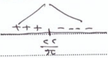
$\frac{\text{دح}}{\text{دنق}} = \text{١٣٢}\pi\,\text{نق} - \text{٦}\pi^{\text{٢}}\,\text{نق}^{\text{٢}}$

$\text{٠} = \text{١٣٢}\pi\,\text{نق} - \text{٦}\pi^{\text{٢}}\,\text{نق}^{\text{٢}}$

$\text{٠} = \text{٦}\pi\,\text{نق}(\text{٢٢} - \pi\,\text{نق})$

نق = صفر أو $\text{نق} = \frac{\text{٢٢}}{\pi}$

تهمل



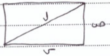
$⟸ ع = ٦٦ - ٢\pi \times \frac{٢٢}{\pi}$

$= ٦٦ - ٤٤ = ٢٢$ م .

٢٠٠٩ صيفي ٧ علامات

مستطيل مساحته ١٦ سم٢ ، جد بعديه عندما يكون طول قطره اصغر مايمكن

الحل:



$ل^٢ = س^٢ + ص^٢$

$م = س \times ص ⟸ ١٦ = س \times ص$

$⟸ ص = \frac{١٦}{س}$

$ل^٢ = س^٢ + \left(\frac{١٦}{س}\right)^٢$

$ل^٢ = س^٢ + \frac{٢٥٦}{س^٢}$

$ل = \sqrt{س^٢ + \frac{٢٥٦}{س^٢}}$

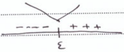
$$\frac{دل}{دس} = \frac{٢س - \frac{٢٥٦\times٢س}{س^٤}}{٢\sqrt{س^٢ + \frac{٢٥٦}{س^٢}}}$$

$$٠ = \frac{س - \frac{٢٥٦}{س^٣}}{\sqrt{س^٢ + \frac{٢٥٦}{س^٢}}}$$

$٠ = س - \frac{٢٥٦}{س^٣}$

$س = \frac{٢٥٦}{س^٣} ⟸ س^٤ = ٢٥٦$

$⟸ س = ٤$



$⟸ ص = \frac{١٦}{س} = \frac{١٦}{٤} = \boxed{٤}$

٢٠١٠ شتوي ٧ علامات

اذا كان الانتاج اليومي لمصنع حديد هو ص طن من نوع الحديد الجيد ، س طن من نوع الحديد الاقل جودة فإذا كانت

$ص = \frac{٤٠ - ٥س}{١٠ - س}$ ، $س \neq ١٠$

وكان سعر الطن من الحديد الجيد يساوي مثلي سعر الطن من الحديد الاقل جودة جد الكمية التي ينتجها المصنع يومياً من كل نوع حتى يحقق أكبر ايراد

الحل:

الايراد = سعر الاول × كمية الاول + سعر الثاني × كميته

$= ٢ل \times ص + ل \times س$

لكن $ص = \frac{٤٠ - ٥س}{١٠ - س}$

⟸

$$د(س) = ٢ل\left(\frac{٤٠ - ٥س}{١٠ - س}\right) + ل س$$

$$= \frac{٨٠ل - ١٠ل س}{١٠ - س} + ل س$$

$$= \frac{٨٠ل - ١٠ل س + ل س(١٠ - س)}{١٠ - س}$$

$$= \frac{٨٠ل - ١٠ل س + ١٠ل س - ل س^٢}{١٠ - س}$$

$$= \frac{٨٠ل - ل س^٢}{١٠ - س}$$

$$دَ(س) = \frac{(١٠ - س)(-٢ل س) - (٨٠ل - ل س^٢)(-١)}{(١٠ - س)^٢}$$

$$٠ = \frac{(١٠ - س)(-٢ل س) + (٨٠ل - ل س^٢)}{(١٠ - س)^٢}$$

$$٠ = -٢٠ل س + ٢ل س^٢ + ٨٠ل - ل س^٢$$

$$٠ = ل س^٢ - ٢٠ل س + ٨٠ل$$

$$٠ = ل(س^٢ - ٢٠س + ٨٠)$$

$$٠ = س^٢ - ٢٠س + ٨٠$$

$$س = ١٠ \pm ٢\sqrt{٥}$$

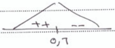
حسب القانون العام لحل المعادلة التربيعية

$س = ١٠ + ٢\sqrt{٥}$ مرفوضه	$س = ١٠ - ٢\sqrt{٥}$

اذا $س \nless ١٠$

فلا ايراد سالب

$$\Leftarrow س = ١٠ - ٢\sqrt{٥} \approx ٥,٦$$



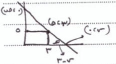
$$\Leftarrow ص = \frac{٤٠ - ٥ \times ٥,٦}{١٠ - ٥,٦}$$

$$= \frac{١٢}{٤,٤} \approx ٢,٧ \text{ طن}$$

٢٠١٠ صيفي	٩ علامات

جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣، ٥) ويقطع من الربع الأول في المستوى الديكارتي مثلثاً مساحته أقل ما يمكن

الحل:



$$مساحة المثلث = \frac{١}{٢} س \times ص$$

$$ظاهـ = \frac{ص}{س} = \frac{٥}{س - ٣}$$

$$\Leftarrow ص = \frac{٥س}{س - ٣}$$

$$\Leftarrow م = \frac{١}{٢} س \times \frac{٥س}{س - ٣}$$

$$م = \frac{٥س^٢}{٢(س - ٣)}$$

$$مَ = \frac{٢(س - ٣)(١٠س) - ٥س^٢(٢)}{(٢(س - ٣))^٢}$$

$$٠ = \frac{٢(س-٣)\times ١٠س - ١٠س^٢}{(٢(س-٣))^٢}$$

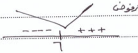
$٠ = (٢س - ٦)\times ١٠س - ١٠س^٢$

$٠ = ٢٠س^٢ - ٦٠س - ١٠س^٢$

$٠ = ١٠س^٢ - ٦٠س$

$٠ = ١٠س(س - ٦)$

$س = صفر$ ، $س = ٦$



$\Leftarrow س = ٦ \Leftarrow$ النقطة $= (٦ ، ٠)$

ولدينا النقطة (٣ ، ٥) يمر بها المستقيم

$\Leftarrow$ الميل $= \frac{٥-٠}{٣-٦}$ ، $\frac{٥}{-٣}$

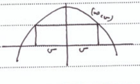
معادلة المستقيم :

$ص - ٠ = \frac{-٥}{٣}(س - ٦)$.

٢٠١١ شتوي ٩ علامات

جد بعدي أكبر مستطيل من حيث المساحة يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث تكون احدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران ق(س) = ٣٦ − س² .

الحل :



$م = ٢س \times ص$

$م = ٢س(٣٦ - س^٢)$

$م = ٧٢س - ٢س^٣$

$م′ = ٧٢ - ٦س^٢$

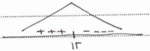
$٠ = ٧٢ - ٦س^٢$

$٦س^٢ = ٧٢$

$س^٢ = ١٢$

$س = \pm\sqrt{١٢}$

$\Leftarrow س = \sqrt{١٢}$



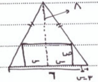
$\Leftarrow ص = ٣٦ - ١٢$

$= ٢٤$

٢٠١١ صيفي

مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم يراد قطع مستطيل منه بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث ويقع كل من الرأسين الآخرين على ساقي المثلث جد بعدي المستطيل لتكون مساحته اكبر ما يمكن ؟ .

الحل :



$م = ٢س \times ص$

لكن

$\frac{ص}{٨} = \frac{٣-س}{٣}$ تشابه مثلثات

$\Leftarrow ص = \frac{٨(٣-س)}{٣}$

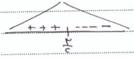
$م = ٢س \times \frac{٨(٣-س)}{٣}$

$م = \frac{١٦}{٣}(٣س - س^٢)$

$م' = \frac{١٦}{٣} \times (٣ - ٢س)$

$٠ = \frac{١٦}{٣}(٣ - ٢س)$

$س = \frac{٣}{٢}$



$ص = \frac{٨(٣ - \frac{٣}{٢})}{٣}$

$= \boxed{٤}$

٢٠١٢ شتوي   ٩ علامات

صندوق على شكل متوازي مستطيلات قاعدته على شكل مستطيل طوله مثلي عرضه اذا كان مجموع ارتفاعه الصندوق ومحيط قاعدته يساوي ٧٢ سم جد ابعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن؟.

الحل:

العرض = س

الطول = ٢س

$٢س + ٤س + ع = ٧٢$

$ع = ٧٢ - ٦س$

$ح = س \times ٢س \times ع$

$= ٢س^٢ \times (٧٢ - ٦س)$

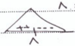
$ح = ١٤٤س^٢ - ١٢س^٣$

$ح' = ٢٨٨س - ٣٦س^٢ = ٠$

$٣٦س(٨ - س) = ٠$

$س = ٠ ، س = ٨$

يهمل



العرض = ٨

الطول = ١٦

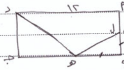
$الارتفاع = ٧٢ - ٦ \times ٨$

$= ٧٢ - ٤٨$

$= ٢٤$

٢٠١٢ صيفي ٧ علامات

من الشكل المجاور أ ب جـ د مستطيل فيه أب = ٨سم ب جـ = ١٢سم



عينت النقطتان ل ، هـ على الضلعين أب ، ب جـ على الترتيب بحيث كان ب ل = ب هـ جد طول ب ل الذي يجعل مساحة الشكل الرباعي أ ل هـ د أكبر ما يمكن.

الحل:

$$\text{م} = \text{٨} \times \text{١٢} - \left(\tfrac{1}{2}\,\text{س} \times \text{س} + \tfrac{1}{2}\,(\text{١٢} - \text{س}) \times \text{٨}\right)$$

$$= \text{٩٦} - \tfrac{1}{2}\,\text{س}^{2} - \tfrac{1}{2}\,(\text{١٢} - \text{س}) \times \text{٨}$$

$$= \text{٩٦} - \tfrac{1}{2}\,\text{س}^{2} - \text{٤}\,(\text{١٢} - \text{س})$$

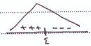
$$= \text{٩٦} - \tfrac{1}{2}\,\text{س}^{2} - \text{٤٨} + \text{٤س}$$

$$\text{م} = \text{٤٨} - \tfrac{1}{2}\,\text{س}^{2} + \text{٤س}$$

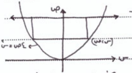
$$\text{م}' = -\text{س} + \text{٤}$$

$$\text{٠} = -\text{س} + \text{٤}$$

$$\text{س} = \text{٤}$$



٢٠١٣ شتوي ٨ علامات



جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل في الشكل الذي يقع رأسان من رؤوسه على منحنى العلاقة ٤ص = س² ويقع رأساه الآخران على المستقيم ص=٦

الحل:

م = الطول × العرض

$$\text{م} = (\text{س} + \text{س}) \times \text{ص}$$

$$= \text{٢س} \times \left(\text{٦} - \frac{\text{س}^{2}}{\text{٤}}\right)$$

$$= \text{١٢س} - \frac{\text{س}^{3}}{\text{٢}}$$

$$\text{م}' = \text{١٢} - \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\,\text{س}^{2}$$

$$\text{٠} = \text{١٢} - \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\,\text{س}^{2}$$

$$\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\,\text{س}^{2} = \text{١٢}$$

$$\text{٣س}^{2} = \text{٢٤}$$

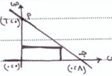
$$\text{س}^{2} = \text{٨}$$

$$\text{س} = \sqrt{\text{٨}}$$

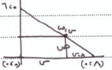
$$\Leftarrow \text{م} = \text{١٢}\sqrt{\text{٨}} - \frac{(\sqrt{\text{٨}})^{3}}{\text{٢}}$$

٢٠١٣ صيفي　٦ علامات

اعتماداً على الشكل المجاور والذي يمثل المثلث ا ب جـ القائم الزاوية في ب جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث.



الحل:



م = س × ص

م = س $\left(\frac{٣}{٤}(٨-\text{س})\right)$

تشابه $\frac{\text{ص}}{٨-\text{س}} = \frac{٦}{٨}$

ص = $\frac{٦}{٨}(٨-\text{س})$

= $\frac{٣}{٤}(٨-\text{س})$

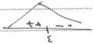
م = $\frac{٣}{٤}(٨\text{س}-\text{س}^٢)$

م' = $\frac{٣}{٤}(٨-٢\text{س})$

٠ = $\frac{٣}{٤}(٨-٢\text{س})$

٨ − ٢س = ٠

س = ٤



م(٤) = $\frac{٣}{٤}(٣٢-١٦)$

= $\frac{٣}{٤}$ × ١٦ = ٣ × ٤ = ١٢

٢٠١٤ شتوي　٩ علامات

حافظة للماء الساخن تتكون من جزأين الجزء الاول وعاء اسطواني الشكل نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) والجزء الثاني: غطاء على شكل نصف كرة نصف قطرها يساوي نصف قطر الاسطوانه (كما في الشكل) إذا كان حجم الحافظة (٣٦٠π) دسم³ جد كلاً من نصف القطر والارتفاع اللذان يجعلان المساحة الكلية لسطح الحافظة أقل ما يمكن.

الحل:

ح = ح الاسطوانه + ح نصف الكرة

$٣٦٠\pi = \pi\,\text{نق}^٢\,\text{ع} + \frac{٢}{٣}\pi\,\text{نق}^٣$

$\cancel{\pi}\,\text{نق}^٢\,\text{ع} = ٣٦٠\cancel{\pi} - \frac{٢}{٣}\cancel{\pi}\,\text{نق}^٣$

$\text{ع} = \frac{٣٦٠}{\text{نق}^٢} - \frac{٢}{٣}\text{نق}$

م = م القاعدة + م الاسطوانه الجانبية + م نصف الكرة

$= \pi\,\text{نق}^٢ + ٢\pi\,\text{نق}\,\text{ع} + ٢\pi\,\text{نق}^٢$

$= \pi\,\text{نق}^٢ + ٢\pi\,\text{نق}\left(\frac{٣٦٠}{\text{نق}^٢} - \frac{٢}{٣}\text{نق}\right) + ٢\pi\,\text{نق}^٢$

$= ٣\pi\,\text{نق}^٢ + \frac{٧٢٠\pi}{\text{نق}} - \frac{٤}{٣}\pi\,\text{نق}^٢$

$\text{م} = \frac{٥\pi}{٣}\text{نق}^٢ + \frac{٧٢٠\pi}{\text{نق}}$

$\text{م}' = \frac{١٠\pi}{٣}\text{نق} - \frac{٧٢٠\pi}{\text{نق}^٢} = ٠$

$\frac{١٠\cancel{\pi}\,\text{نق}}{٣} = \frac{٧٢٠\cancel{\pi}}{\text{نق}^٢} \Leftarrow \text{نق}^٣ = ٢١٦$

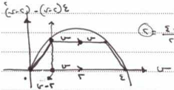
نق = ٦

ع = ١٠

٢٠١٤ صيفي (٧علامات)

جد أبعاد شبه المنحرف الذي يمكن رسمه في الربع الأول بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات، ورأساه الآخران على منحنى الاقتران $ق(س) = ٤س - س^{٢}$ لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

الحل:



$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{-٢} = ②$

م = $\frac{١}{٢}$ (مجموع القاعدتين) x (الارتفاع)

$= \frac{١}{٢}(٢س + ٤)\left(٤(٢-س) - (٢-س)^{٢}\right)$

$= (س+٢)\left(٨ - ٤س - (٤ - ٤س + س^{٢})\right)$

$= (س+٢)(٨ - \cancel{٤س} - ٤ + \cancel{٤س} - س^{٢})$

$= (س+٢)(٤ - س^{٢})$

$= ٤س - س^{٣} + ٨ - ٢س^{٢}$

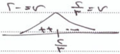
$م' = ٤ - ٣س^{٢} - ٤س$

$٠ = -٣س^{٢} - ٤س + ٤$

$٠ = ٣س^{٢} + ٤س - ٤$

$٠ = (٣س - ٢)(س + ٢)$

$س = \frac{٢}{٣}$ $س = -٢$



القاعدة (١) = $\frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣}$ القاعدة (٢) = ٤

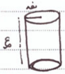
الارتفاع = $٤(٢ - \frac{٢}{٣}) - (٢ - \frac{٢}{٣})^{٢}$

المستوى (٣) **الوحدة (** تطبيقات التفاضل **)** **عصام الشيخ**

التخصص(العلمي **)** **الدرس (** تطبيقات القيم القصوى **)** **ماجستير رياضيات**

٢٠١٥ شتوي **(٩ علامات)**

اسطوانه دائرية قائمة مغلقه نصف قطر قاعدتها (نق) سم وارتفاعها (ع) سم وحجمها (٥٤ π) سم³ جد نصف قطر قاعدة الاسطوانه وارتفاعها اللذان يجعلان مساحة سطحها الكلية أقل ما يمكن .



حل :

$ح = \pi\, \text{نق}^2\, ع$

$٥٤\,\cancel{\pi} = \cancel{\pi}\, \text{نق}^2\, ع$

$٥٤ = \text{نق}^2\, ع$

$ع = \frac{٥٤}{\text{نق}^2}$

$م = ٢\pi\, \text{نق}\, ع + ٢\pi\, \text{نق}^2$

$م = ٢\pi\, \text{نق} \times \frac{٥٤}{\text{نق}^2} + ٢\pi\, \text{نق}^2$

$م = \frac{١٠٨\,\pi}{\text{نق}} + ٢\pi\, \text{نق}^2$

$م' = \frac{-١٠٨\,\pi}{\text{نق}^2} + ٤\pi\, \text{نق}$

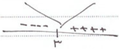
$٠ = \frac{-١٠٨\,\pi}{\text{نق}^2} + ٤\pi\, \text{نق}$

$\frac{١٠٨\,\cancel{\pi}}{\text{نق}^2} = ٤\,\cancel{\pi}\, \text{نق}$

$١٠٨ = ٤\, \text{نق}^٣$

$٢٧ = \text{نق}^٣$

$\text{نق} = ٣$



$ع = \frac{٥٤}{٩} = ٦$

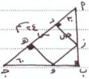
المستوى (٣) **الوحدة (تطبيقات التفاضل)** **عصام الشيخ**

التخصص (العلمي) **الدرس (تطبيقات القيم القصوى)** **ماجستير رياضيات**

٢٠١٥ صيفي **(٨ علامات)**

جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث قائم الزاوية طول وتره ٢٤ سم وقياس احدى زواياه ٣٠° بحيث تقع احدى قاعدتي المستطيل على الوتر ورأساه الآخران على ضلعي القائمة.

الحل:



$م = س \times ص$

$م = (٢٤ - \frac{٤}{\sqrt{٣}}ص)\ (ص)$

$ظا ٣٠ = \frac{ص}{أد}$

$\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{ص}{أد}$

$\boxed{أد = \sqrt{٣}\ ص}$

$م = ٢٤ص - \frac{٤}{\sqrt{٣}}ص^٢$

$م' = ٢٤ - \frac{٨}{\sqrt{٣}}ص$

$ظا ٦٠ = \frac{ص}{جـهـ}$

$\sqrt{٣} = \frac{ص}{جـهـ}$

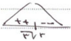
$\boxed{جـهـ = \frac{ص}{\sqrt{٣}}}$

$٠ = ٢٤ - \frac{٨}{\sqrt{٣}}ص$

$\frac{٨}{\sqrt{٣}}ص = ٢٤$

$\frac{ص}{\sqrt{٣}} = ٣$

$ص = ٣\sqrt{٣}$



ايضاً

$أد + س + جـهـ = ٢٤$

$\sqrt{٣}ص + س + \frac{ص}{\sqrt{٣}} = ٢٤$

$س + (\sqrt{٣} + \frac{١}{\sqrt{٣}})ص = ٢٤$

$س = ٢٤ - \frac{٤}{\sqrt{٣}}ص$

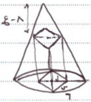
$م = ٢٤ \times ٣\sqrt{٣} - \frac{٤}{\sqrt{٣}} \times (٣\sqrt{٣})^٢$

$= ٣٦\sqrt{٣}$

٢٠١٦ شتوي **٨ علامات**

جد حجم أكبر موشور (منشور) رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم.

الحل:



طول قطر القاعدة = ٢ل

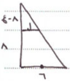
حجم الموشور = $س^٢ \times ع$

$(٢ل)^٢ = س^٢ + س^٢ \Leftarrow ٤ل^٢ = ٢س^٢$

$٢ل^٢ = س^٢$

$\Leftarrow ل^٢ = \frac{س^٢}{٢} \Leftarrow ل = \frac{١}{\sqrt{٢}}س$

ايضاً من التشابه



$\frac{ل}{٦} = \frac{٨-ع}{٨}$

$٨ل = ٤٨ - ٦ع$

$٦ع = ٤٨ - ٨ل$

$٦ع = ٤٨ - \frac{٨}{\sqrt{٢}}س$

$\Leftarrow ع = ٨ - \frac{٨}{٦\sqrt{٢}}س$

$\Leftarrow ح = (س^٢)\ (٨ - \frac{٤}{٣\sqrt{٢}}س)$

$\Leftarrow ح = ٨س^٢ - \frac{٤}{٣\sqrt{٢}}س^٣$

$ح' = ١٦س - \frac{٤}{\sqrt{٢}}س^٢$

$٠ = ١٦س - \frac{٤}{\sqrt{٢}}س^٢$

$٠ = ٤س\ (٤ - \frac{س}{\sqrt{٢}})$

$س = ٠ \quad ، \quad س = ٤\sqrt{٢}$

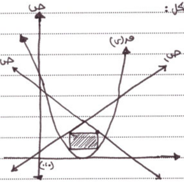
التخصص(العلمي) الوحدة(٣) (تطبيقات التفاضل) عصام الشيخ

المستوى(٣) الدرس(٦) (تطبيقات القيم القصوى) ماجستير رياضيات

٢٠١٦ صيفي ٨ علامات

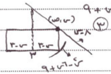
يقع رأسان من رؤوس المستطيل المظلل في الشكل الآتي على منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٦س + ٩، ورأساه الآخران على المستقيمين ص$_{١}$ = ٢س، ص$_{٢}$ = ٨ − س جد بعدي المستطيل اللذين يجعلان مساحته أكبر ما يمكن

الشكل:



الحل: س^{٢} − ٦س + ٩

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٦}{٢×١} = ③$



م = (القاعدة) (الارتفاع)

= ٢(س − ٣) (ص)

= ٢(س − ٣) ((٨ − س) − (س^{٢} − ٦س + ٩))

م = (٢س − ٦) (−١ + ٥س − س^{٢})

م = −٢س + ١٠س^{٢} − ٢س^{٣} + ٦ − ٣٠س + ٦س^{٢}

م = −٢س^{٣} + ١٦س^{٢} − ٣٢س + ٦

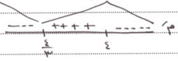
م′ = −٦س^{٢} + ٣٢س − ٣٢

٠ = −٦س^{٢} + ٣٢س − ٣٢

٠ = −٢(٣س^{٢} − ١٦س + ١٦)

٠ = −٢(٣س − ٤)(س − ٤)

س = $\frac{٤}{٣}$ س = ٤



تكون المساحة اكبر ما يمكن عندما س = ٤

⇐ الطول = ٢(س − ٣) = ٢ × (٤ − ٣)

= ٢ × ١ = $\boxed{٢}$

العرض = (٨ − ٤) − (٤^{٢} − ٦ × ٤ + ٩)

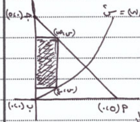
= ٤ − (١٦ − ٢٤ + ٩)

= ٤ − (−٨ + ٩)

= ٤ − ١ = $\boxed{٣}$

التخصص(العلمي) الوحدة(٣) (تطبيقات التفاضل) عصام الشيخ
المستوى(٣) الدرس(٦) (تطبيقات القيم القصوى) ماجستير رياضيات

٢٠١٧ شتوي (٨ علامات)



أ ب جـ مثلث قائم الزاوية، إحداثيات رؤوسه أ(٥، ٠) ب(٠، ٠)، جـ(٠، ٥) رسم داخله مستطيل ينطبق رأسان من رؤوسه على الضلع ب جـ وأحد رأسيه الآخرين على الضلع أ جـ والرأس الآخر على منحنى الاقتران ق(س) = س٢ كما في الشكل جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل المظلل.

الحل:

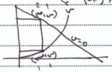
نجد معادلة المستقيم

(٥، ٠) ، (٠، ٥)

م = $\frac{٥ - ٠}{٠ - ٥}$ = $\frac{٥}{-٥}$ = -١

ص = -١(س - ٥) ⇐ ص = ٥ - س

م = س × (ص١ - ص٢)



م = س (٥ - س - س٢)
م = ٥س - س٢ - س٣

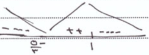
م' = ٥ - ٢س - ٣س٢
٠ = ٥ - ٢س - ٣س٢

٣س٢ + ٢س - ٥ = صفر

(٣س + ٥)(س - ١) = صفر

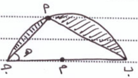
س = $\frac{-٥}{٣}$ س = ١

⇐ س = ١



أكبر مساحة ممكنة = ٥ - ١ - ١ = ٣
وحدة مساحة

٢٠١٧ صيفي (٨ علامات)



يرسم المثلث أ ب جـ داخل نصف دائرة طول قطرها ٨ سم بحيث يقع الرأسان ب ، جـ على نهايتي القطر والرأس الآخر أ يتحرك على منحنى نصف الدائرة كما في الشكل جد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة المنطقة المظللة أصغر ما يمكن

الحل:

$\text{م} = \frac{1}{2}\pi\,\text{نق}^2 - \frac{1}{2}\,\overline{\text{أجـ}} \times \overline{\text{أب}} \times \text{جاهـ}$

$\text{م} = \frac{1}{2}\pi \times 16 - \frac{1}{2} \times 8 \times \overline{\text{أجـ}} \times \text{جاهـ}$

$\text{م} = 8\pi - 4 \times \overline{\text{أجـ}} \times \text{جاهـ}$

لكن: $\text{جتاهـ} = \frac{\overline{\text{أجـ}}}{8}$

$\Leftarrow \overline{\text{أجـ}} = 8\,\text{جتاهـ}$

$\text{م} = 8\pi - 4 \times 8\,\text{جتاهـ}\,\text{جاهـ}$

$\text{م} = 8\pi - 32\,\text{جتاهـ}\,\text{جاهـ}$

$\text{م} = 8\pi - 16 \times 2\,\text{جتاهـ}\,\text{جاهـ}$

$\text{م} = 8\pi - 16\,\text{جا}2\text{هـ}$

$\text{م}' = 0 - 16 \times \text{جتا}2\text{هـ} \times 2$

$0 = -32\,\text{جتا}2\text{هـ} \Leftarrow \text{جتا}2\text{هـ} = 0$

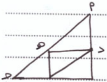
$\Leftarrow 2\text{هـ} = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\pi}{4}$

- - - - | + + +

$\frac{\pi}{4}$

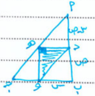
أصغر مساحة عندما $\text{هـ} = \frac{\pi}{4}$

٢٠١٨ شتوي قديم



يمثل الشكل المجاور المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب فيه أب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم وبداخله المثلث د هـ و قائم الزاوية في هـ وتقع رؤوسه على أضلاع المثلث أ ب جـ علماً بأن د هـ // ب جـ جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث د هـ و.

الحل:



ب و = س ، ب د = ص

$\text{م}_{\text{دهـو}} = \frac{1}{2} \times \text{هـو} \times \text{دهـ}$

$= \frac{1}{2} \times \left(3 - \frac{3\text{س}}{4}\right) \times \text{س}$

$\text{م} = \frac{3}{2}\text{س} - \frac{3}{8}\text{س}^2$

تشابه

$\frac{3-\text{ص}}{\text{س}} = \frac{3}{4}$

$3\text{س} = 12 - 4\text{ص}$

$3\text{س} - 12 = -4\text{ص}$

$3 - \frac{3\text{س}}{4} = \text{ص}$

$\text{م}' = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\text{س}$

$0 = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\text{س}$

$\frac{3}{4}\text{س} = \frac{3}{2} \leftarrow \text{س} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$

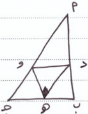
+ + + | - - -

2

$\text{م}(2) = \frac{3}{2} \times 2 - \frac{3}{8} \times 4$

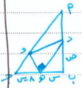
$= 3 - \frac{3}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$

٢٠١٨ شتوي جديد



يمثل الشكل المجاور المثلث ا ب جـ قائم في ب فيه ا ب = ٦ سم ب جـ = ٤ سم وبداخله المثلث د هـ و قائم الزاوية في هـ وتقع رؤوسه على اضلاع المثلث ا ب جـ علماً بأن د و // ا جـ جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث د هـ و.

الحل :



$\text{م} = \frac{١}{٢}(\text{هو})(\text{دهـ})$

$\text{م} = \frac{١}{٢}$

$\text{ا جـ} = ١٠$ فيثاغورس

$\text{دهـ} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}$

تشابه

$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٦}{٨}$

$\text{ص} = \frac{٦\text{س}}{٨} = \frac{٣\text{س}}{٤}$

$\text{دهـ} = \sqrt{\text{س}^٢ + \frac{٩}{١٦}\text{س}^٢}$

$\text{دهـ} = \sqrt{\frac{٢٥\text{س}^٢}{١٦}}$

$\text{دهـ} = \frac{٥\text{س}}{٤}$

$\text{جا جـ} = \frac{٦}{١٠} = \frac{\text{هو}}{٨-\text{س}}$

$\text{هو} = \frac{٦(٨-\text{س})}{١٠}$

$= \frac{٣(٨-\text{س})}{٥}$

$\text{م} = \frac{١}{٢}\left(\frac{٣}{\cancel{٥}}(٨-\text{س})\right)\left(\frac{\cancel{٥}}{٤}\text{س}\right)$

$\text{م} = \frac{٣}{٨}(٨-\text{س})(\text{س})$

$\text{م} = \frac{٣}{٨}(٨\text{س} - \text{س}^٢)$

$\text{م}' = \frac{٣}{٨}(٨ - ٢\text{س})$

$٠ = \frac{٣}{٨}(٨ - ٢\text{س})$

$٨ - ٢\text{س} = ٠$

$٢\text{س} = ٨$

$\text{س} = ٤$

$\text{م}(٤) = \frac{٣}{٨}(٨ \times ٤ - (٤)^٢)$

$= \frac{٣}{٨}(٣٢ - ١٦)$

$= \frac{٣}{٨} \times ١٦$

$= ٣ \times ٢ = \boxed{٦}$