المراجعة المكثفة

لمادة الرياضيات

الفرع العلمي

التكامل وتطبيقات

الفرع العلمي

الأستاذ القدير

أحمد غزال

المثال الثالث :

١- إذا كان $م(س)$ متصلاً على مجاله
وكان $\int_{-1}^{1} (م(س)+د^{س}).د س = \ln 2 + \int_{-1}^{1} \frac{1}{4-س^2} د س$
فإن $م(0)=$

٢- إذا كان
$\int \frac{(م(س)+1)}{م^{س}+جا^{2}س} د س = \int \frac{جاس}{م^{س}+1+جا^{2}س} د س$
وكان $م(0)=5$ فإن قيمة $م=$

٣- إذا كان كل من $م(س)، هـ(س)$ محكبين
للاشتقاق للقران $م(س)$ وكان $ل(س)=٤م(س)-هـ(س)$
وكان $م(2)=5$ فإن $ل'(2)=$

٤- إذا كان $م(س)، هـ(س)$ محكبين للاشتقاق
للقران $م(س)$ وكان $\int_{1}^{2} (م(س)-هـ(س)).د س = ٤$
فإن $\int_{1}^{2} ٢س م'(س) د س + \int_{1}^{2} ٢س هـ'(س).د س =$

٥- إذا كان $م(س)$ محكوس الاشتقاق للقران
$م(س)$ وكان $م(س)=هـ^{م س}-جاس+1$
وكان $م(0)=5$ فإن قيم $م=$

٦- إذا كان $م(س)$ محكوس الاشتقاق للقران
$م(س)$ وكان $م(س)=٣س^{2}+٤$
فإن $م(س)=$

٧- إذا كان
$م(س)=\int (هـ^{س}+س+لو_{5} س^{3}+م^{2}) د س$
عكوس الاشتقاق للقران $م(س)$
فجد قيمة (1) ؟

٨- إذا كان $\int (جا^{2}س+جتا^{2}س) م(س).د س = لو_{5} |ظاس|+1$
فإن $م(\frac{\pi}{4})=$

٩- إذا كان: $ق(س)=جا^{2}س$ بحرف ما
لكل $ه \in [0, \frac{\pi}{4}]$ فإن $م(\frac{\pi}{4})-م(0)=$

١٠- إذا كان $\int_{م^{2}+م}^{22+9} م(س).د س = هـ$ فإن قيم $م=$

١١- إذا كان $\int_{2}^{ه} (1-٤س) د س = 5$
فإن قيم $ه=$

١٢- إذا كان $\int_{1}^{ه} (٣س^{2}+٢س) د س = صفر$
فإن قيمة $ه=$

١٣- إذا كان
$هـ^{س^{2}} م(س) = \int (س+1) م(س).د س = \int (جا^{2}\frac{\pi}{4}) ق(س).د س$
وكان $م(0)=3$ فجد $ق(0)$

١٤- أقل قيمة ممكنة للمقدار $\int_{-4}^{-1} (س^{2}+1).د س$ هي

١٥- إذا كان ق ك ا .....

وكان $\int_{1}^{ق} \frac{2}{س} \, د س = ٨$ فإن قيمة ق =

١٦- إذا كان هـ ، ر قابلان للتكامل في الفترة [-٢، ٢] وكان هـ(س) ≤ ر(س)

فإن أكبر قيمة ممكنة للمقدار $\int_{-٢}^{٢} (١ - ٢هـ(س)) \, د س$ هي

وكان $-٣ \leq هـ(س) \leq ٢$

١٧- إذا كان هـ ، ر قابلان للتكامل في الفترة [-٣، ٣]

فإن قيمة الثابت م ، ن التي تجعل $م \leq \int_{-٣}^{٣} \frac{٢}{(هـ(س)+١٦)} \, د س \leq ن$

١٨- إذا كان ٣ ، ن ثابتين ، م ≤ هـ(س) ≤ ن

فإن قيمة ٣ ن على الترتيب التي تجعل $٢ \leq \int_{-١}^{١} (هـ(س)-١) \, د س \leq ٨$

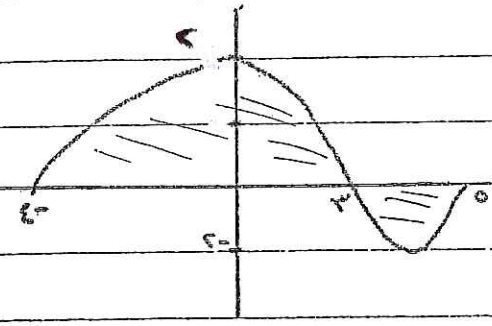
١٩- إذا كانت م ، ن عددين

$م \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{١}{٣ + ٢جتا^{٤} س} \, د س \leq ن$

٢٠- إذا كانت م ، ن عددين

$م \leq \int_{١}^{٤} \frac{س}{س^{٢}+١} \, د س \leq ن$

٢١- من خلال الرسم المجاور



الذي يمثل ما قيمته هـ(س) مع محور السينات في الفترة [-٤، ٥] إذا علمت

أن $\int_{-٤}^{٣} هـ(س) \, د س = ٨$ ، $\int_{٣}^{٥} |هـ(س)| \, د س = ٢$

أجب عما يلي

١- قيمة م ، ن التي تجعل $٣ \leq \int_{-٤}^{٥} (هـ(س)+١) \, د س \leq ن$

٢- $\int_{-٤}^{٥} ل(هـ(س)) \, د س = ٣٠$ فإن قيمة ل =

٣- $\int_{٣}^{٥} (٣هـ(س) + ٤س) \, د س =$

٤- إذا كانت $\int_{٣}^{٥} هـ(س) \, د س$

٥- $\int_{-٤}^{٧} ٢هـ(س-٤) \, د س$

٢٢- إذا كان $\int_{١}^{٢} ٣هـ(س) \, د س = ٦$ ، $\int_{٢}^{٥} هـ(س) \, د س = ٤$

فإن $\int_{١}^{٥} (٣هـ(س) + \frac{١}{٢}) \, د س =$

٢٣- إن قيمة $\int_{٣}^{٧} \, د س =$

٢٤) إذا كان $ص = ٥$ ... فإن $\frac{د ص}{د س} =$.

٢٥) إذا كان $ص = هـ^{جا س - ١} + \frac{١}{هـ} لو_{هـ} جا س + ٥$

فإن $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = \frac{\pi}{٢}$ ؟

٢٦) إذا كان $ص(س) = \sqrt[٣]{٣س - ٦} + لو_{هـ} \frac{(٢-س)^{٢}}{س - ٣}$

فما $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = ٢$ ؟

٢٧) إن قيمة $\int_{١}^{٣} \sqrt{س^{٢} - ٣س + ٢}\ د س =$

٢٨) إن قيمة $\int \frac{جا ٣س}{جتا ٣س + ١} + \frac{٢}{جتا^{٢} س}\ د س =$

٢٩) إن قيمة $\int \frac{٣س - ٤جا^{٢} س}{س^{٢} - ١}\ د س$

٣٠) $\int_{١}^{٤} |٢ - س|\ د س =$

٣١) $\int هـ^{س} - ٢هـ^{-س} + ٥\ د س$

٣٢) $\int ٤جا^{٢} س\ د س$

٣٣) $\int ٢جا^{٢} \frac{س}{٢}\ د س$

أ) $ص = جا س - جتا س + ج$ ب) $ص = جا س + جتا س + ج$

ج) $ص = جا س - جتا س + ج$ د) $ص = جتا س - جتا س + ج$

٣٤) $\int (جا س - جتا س)^{٢}\ د س$

أ) $س + \frac{١}{٢} جتا ٢س + ج$ ب) $س - \frac{١}{٢} جا ٢س + ج$

ج) $س + \frac{١}{٢} جتا ٢س + ج$ د) $س - جتا ٢س + ج$

٣٥) إذا كان $\int_{١}^{ك} (٢س - ١)\ د س = ٣$ فإن قاعدة الاقتران $ص = ا س^{٢} + ب س + ج$ هي:

علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(٣، ١)$.

أ) $ص = س^{٢} - س + ٢$

ب) $ص = س^{٢} - س$

ج) $ص = س^{٢} - ١$

٣٦) تتحرك جسم بحيث تمثل الأعمال ومن السكون حسب العلاقة $ف(ن) = ن^{٢} - ٢ن$ م، أ، ث فإن معادلة الحركة هي

أ) $ف(ن) = ن^{٢}$ م ب) $ف(ن) = ن^{٢} + ن$ م

ج) $ف(ن) = ن^{٢} - ٢ن$ م د) $ف(ن) = ٢ن$ م

جواب السؤال الأول :

١- $\int_{-1}^{2} (س^3 + ه^س) د س = \left[\frac{1}{4}س^4 + ه^س\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{4}(16-1) + (ه^2 - ه^{-1})$

نشتق الطرفين:

$م(س) + ه^س = \frac{-2}{س-3} + ضس$

$م(0) + 1 = \frac{-2}{-3} + ض$

$م(0) + 1 = \frac{2}{3} \Leftarrow م(0) = \frac{-1}{3}$

٢- $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (م(س) + 1) د س = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (ه^{2س} + جا 2س) د س$

$م(س) + 1 = 2ه^{2س} + 2جا 2س - ضس$

$م(0) + 1 = 2 + 2جتا(0)$

$0 = 2 + 2 + ض \Leftarrow ض = -4$

٣- $ل(س) = 4م(س) - هـ(س)$

$ل'(س) = 4م'(س) - هـ'(س)$

$ل'(س) = 4م(س) - م(س)$

$ل'(س) = 3م(س)$

$ل'(2) = 3م(2) = 15$

٤- $م(س) - هـ(س) = ض$

$\int_{1}^{2} (م(س) - هـ(س)) د س = 4$

$\int_{1}^{2} ض د س = 4$

$ض س]_{1}^{2} = 4 \Leftarrow 2ض - ض = 4 \Leftarrow ض = 4$

$\Leftarrow م(س) - هـ(س) = 4$

$\int_{1}^{2} م(س) د س + \int_{1}^{2} هـ(س) د س = 4$

$\int_{1}^{2} م(س) د س - \int_{1}^{2} هـ(س) د س = 4$

$\int_{1}^{2} (م(س) - هـ(س)) د س = 4$

$= \int_{1}^{2} 4 د س = 4س]_{1}^{2} = 8 - 4 = 4$

٧- $\int_{1}^{2} (هـ(س) + س) د س = \int_{1}^{2} م(س) د س$

$م(س) = ل'(س) = هـ(س) + س - \int_{1}^{2} م(س) د س$

$هـ(س) = هـ(1) + \frac{1}{2}س^2 - \int_{1}^{2} م(س) د س$

$هـ(س) = هـ + 1 + \frac{1}{2}س^2$

$هـ(س) = هـ + \frac{1}{س}$

$هـ(1) = ط + \frac{1}{2} = هـ + 1$

٨- $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (جا س + جتا س) م(س) د س = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} م(س) د س + 1$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} م(س) د س = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} م(س) د س + 1$

$م(س) = \frac{جتا س}{جا س}$

$م(\frac{\pi}{4}) = \frac{جتا \frac{\pi}{4}}{جا \frac{\pi}{4}} = 1$

٩- $م(\frac{\pi}{4}) - م(0) = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} هـ(س) د س$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} جا س د س = -جتا س]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$= -\frac{1}{2}(0 - 1) = \frac{1}{2}$

١٠- $م^2 + م = 2م + 6$

$م^2 - م - 6 = 0$

$(م - 2)(م + 2) = 0$

$م = 2$ $م = -2$

١١- $\int_{0}^{ص} (1 - 3س) د س = 10 \Leftarrow ص$

$س - \frac{3}{2}س^2]_{0}^{ص} = 5ص$

$ص - \frac{3}{2}ص^2 = 5ص$

$ص - \frac{3}{2}ص^2 - 4ص = 0$

$-\frac{3}{2}ص^2 - 3ص = 0$

$ص^2 + 2ص = 0$

$ص(ص + 2) = 0$

$ص = 0$ $ص = -2$

19- $\because 0 \le س \le \pi$

$\therefore -1 \le جا س \le 1$

$\therefore 0 \le جا^2 س \le 1$

$\therefore 0 \le 2 جا^2 س \le 2$

$3 \le 2 جا^2 س + 3 \le 5$

$\int_0^{\pi} \frac{1}{5} \le \int_0^{\pi} \frac{1}{2 جا^2 س + 3} \le \int_0^{\pi} \frac{1}{3}$

$\frac{\pi}{5} \le \int_0^{\pi} \frac{1}{2 جا^2 س + 3} \le \frac{\pi}{3}$

20- $د(س) = \frac{س}{س^2+1}$

$د'(س) = \frac{(1)(س^2+1) - س(2س)}{(س^2+1)^2}$

$= \frac{س^2 + 1 - 2س^2}{(س^2+1)^2}$

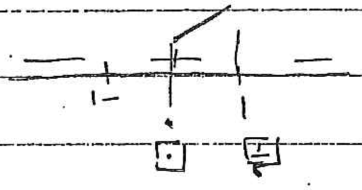
$= \frac{1 - س^2}{(س^2+1)^2}$

البسط = 0 ، المقام ≠ 0

$1 - س^2 = 0$ ، $س^2 + 1 \ne 0$

$س^2 = 1$

$س = \pm 1$



$\therefore 0 \le \frac{س}{س^2+1} \le \frac{1}{2}$

$\therefore \int_0^1 0 \le \int_0^1 \frac{س}{س^2+1} دس \le \int_0^1 \frac{1}{2} دس$

$صفر \le \int_0^1 \frac{س}{س^2+1} دس \le \frac{1}{2}$

م = صفر ، ن = $\frac{1}{2}$

21- ① $-2 \le د(س) \le 2$

$\therefore 0 \le د^2(س) \le 4$

$1 \le د^2(س) + 1 \le 5$

$\int_{-4}^{5} 1 \, دس \le \int_{-4}^{5} (د^2(س) + 1) دس \le \int_{-4}^{5} 5 \, دس$

$9 \le \int_{-4}^{5} (د^2(س) + 1) دس \le 45$

م = 9 ، ن = 45

② $\int_{-4}^{5} ل \, د(س) دس = 20$

$ل \int_{-4}^{5} د(س) دس = 20$

$ل \left(\int_{-4}^{3} د(س) دس + \int_{3}^{5} د(س) دس \right) = 20$

$ل(8 + -2) = 20$

$6ل = 20 \Leftarrow ل = \frac{20}{6} \Leftarrow ل = \frac{10}{3}$

③ $\int_{3}^{5} (2س + 3د(س)) دس$

$س^2 \Big|_3^5 + 3\int_3^5 د(س) دس$

$(25 - 9) + 3(-2)$

$16 - 6 = 10$

④ $\int_3^5 د(س) دس = -2$ سابقاً

⑤ $\int_1^7 2 د(س - 4) دس$ ، $ص = س - 4$ ، $دص = دس$

$= 2 \int_{-3}^{3} د(ص) دص$ ، $س = 1 \Leftarrow ص = -3$ ، $س = 7 \Leftarrow ص = 3$

$= 2(8)$

$= 16$

التمرين الثاني :

جد دالة كل من الدوال الأصلية :

1- $\int (x^2-1)e^x\,dx$

$u = x^2-1 \quad dv = e^x dx$

$du = 2x \quad v = e^x$

$du = 2 \quad v = e^x$

$\int (x^2-1)e^x\,dx = (x^2-1)e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

2- $\int (x^3-1)\sin x\,dx$

$u = x^3-1 \quad dv = \sin x\,dx$

$du = 3x^2 \quad v = -\cos x$

$du = 6x \quad v = -\sin x$

$du = 6 \quad v = \cos x$

$\int (x^2-1)\sin x\,dx$

$= (x^2-1)(-\cos x) - (2x^2)(-\sin x)$

$+ 6x\cos x - 6\sin x + c$

3- $\int \ln x^2 - 1\,dx$

$u = \ln x^2 - 1 \quad dv = dx$

$du = \frac{2x}{x^2-1} \quad v = x$

$\int \ln(x^2-1)\,dx = x\ln(x^2-1) - \int \frac{2x^2}{x^2-1}\,dx$

$\frac{2x^2}{x^2-1} \Big| \begin{matrix} x^2-1 \\ 2 \end{matrix}$

$\frac{-2x^2+2}{2}$

$\int \ln(x^2-1)\,dx = x\ln(x^2-1) - \int 2 + \frac{2}{x^2-1}\,dx$

$= x\ln(x^2-1) - \int 2 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}\,dx$

$2 = a(x+1) + b(x-1)$

نضع $x = 1 \Rightarrow a = 1$

نضع $x = -1 \Rightarrow b = -1$

$= x\ln(x^2-1) - \int 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\,dx$

$= x\ln(x^2-1) - 2x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + c$

4- $\int (x^2-1)\ln x\,dx$

$u = \ln x \quad dv = x^2-1$

$du = \frac{1}{x} \quad v = \frac{x^3}{3} - x$

$\int (x^2-1)\ln x\,dx = (\frac{x^3}{3} - x)\ln x - \int \frac{x^3}{9} - 1\,dx$

$= (\frac{x^3}{3} - x)\ln x - \frac{x^4}{9} + x + c$

5- $\int \frac{\ln x^2}{(x-2)^2}\,dx$

$= \int 2\ln x\,(x-2)^{-2}\,dx$

$u = 2\ln x \quad dv = (x-2)^{-2}$

$du = \frac{2}{x} \quad v = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x-2}$

$\int 2\ln x(x-2)^{-2}\,dx$

$= \frac{-2\ln x}{x-2} + \int \frac{2}{x(x-2)}\,dx$

$= \frac{-2\ln x}{x-2} + \int \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2}\,dx$

$2 = a(x-2) + bx$

نضع $x = 0 \Rightarrow a = -1$

نضع $x = 2 \Rightarrow b = 1$

$= \frac{-2\ln x}{x-2} + \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-2}\,dx$

$= \frac{-2\ln x}{x-2} - \ln|x| + \ln|x-2| + c$

تفوق ..... إبداع ..... تميز

٦) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} (2\cos^2 x \cos 2x - \cos 2x)\,dx$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(2\left(\frac{1}{2}(\cos(2x-2x)+\cos(2x+2x))\right) - \cos 2x\right)\,dx$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} (\cos 0 + \cos 4x - \cos 2x)\,dx$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos 0\,dx$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} 1\,dx$

$= x\Big]_{\pi/4}^{\pi/3}$

$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\pi}{12}$

٧) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x \cdot dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x\,dx + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 0\,dx$

$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x \cdot dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x\,dx + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 0\,dx$

$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x \cdot dx = \frac{1}{49}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x\,dx + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 0\,dx$

$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x \cdot dx = \frac{1}{50}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x\,dx + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 0\,dx$

٨) $\int (x^5 - 6x^3 + 9x)^3 \cdot dx$

$= \int x^3(x^4 - 6x^2 + 9)^3 \cdot dx$

$= \int x^3((x^2-3)^2)^3 \cdot dx$

$= \int x^3(x^2-3)^6 \cdot dx$

$u = x^2 - 3 \Rightarrow x^2 = u + 3$

$du = 2x\,dx$

$dx = \frac{du}{2x}$

$\int x^3 u^6 \frac{du}{2x}$

$\int \frac{1}{2}(u+3)u^6\,du$

$\int \frac{1}{2}u^7 + \frac{3}{2}u^6\,du$

$\frac{1}{16}u^8 + \frac{3}{14}u^7 + c$

$\frac{(x^2-3)^8}{16} + \frac{3(x^2-3)^7}{14} + c$

٩) $\int \frac{1}{x^8 + x}\,dx$

$\int \frac{1}{x^8(1+x^{-7})}\,dx$

$u = 1 + x^{-7}$

$dx = \frac{du}{-7x^{-8}} = -\frac{1}{7}x^8\,du$

$\int \frac{1}{x^8 u} \cdot -\frac{1}{7}x^8\,du$

$-\frac{1}{7}\int \frac{1}{u}\,du$

$-\frac{1}{7}\ln|u| + c$

$-\frac{1}{7}\ln|1+x^{-7}| + c$

١٠) $\int (x-1)^3 \ln(x^2-2x)\,dx$

$u = x^2 - 2x$

$dx = \frac{du}{2x-2} = \frac{du}{2(x-1)}$

$\int (x-1)^3 \ln u \frac{du}{2(x-1)}$

$\frac{1}{2}\int (x^2-2x+1)\ln u\,du$

$\int (x-1)^3 \ln u \frac{du}{2(x-1)}$

١١) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}\,dx$

$u = \sin x - \cos x$

$dx = \frac{du}{\cos x + \sin x}$

$\int \frac{\cos x + \sin x}{u} \cdot \frac{du}{\cos x + \sin x}$

$\int \frac{1}{u}\,du$

$\ln|u| + c$

$\ln|\sin x - \cos x| + c$

١٢) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x}\,dx$

$u = \cos x$

$dx = \frac{du}{-\sin x}$

$\int \frac{\sin x}{u^2 + u} \cdot \frac{du}{-\sin x}$

$-\int \frac{1}{u^2+u}\,du$

$-\ln|\cos x| + \ln|\cos x + 1| + c$

١٣) $\int \frac{1}{\cos x + \sin x}\,dx$

$\int \frac{\cos x}{\cos^2 x + \cos x}\,dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x}\,dx$

$u = \sin x$

$dx = \frac{du}{\cos x}$

$\int \frac{\cos x}{u^2 + 1 - u^2 + u} \cdot \frac{du}{\cos x}$

$\int \frac{1}{u+1}\,du$

$\ln|u+1| + c$

$\ln|\sin x + 1| + c$

١٤) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x}\,dx$

$u = \sin x$

$dx = \frac{du}{\cos x}$

$\int \frac{\cos x}{u^2 + u} \cdot \frac{du}{\cos x}$

$\int \frac{1}{u^2+u}\,du$

$\ln|u| - \ln|u+1| + c$

$\ln|\sin x| - \ln|\sin x + 1| + c$

١٥) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - \cos x}\,dx$

$u = \cos x$

$dx = \frac{du}{-\sin x}$

$\int \frac{\sin x}{u^2 - u} \cdot \frac{du}{-\sin x}$

$-\int \frac{1}{u^2-u}\,du$

$-\ln|\cos x| + \ln|\cos x - 1| + c$

١٦) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - \sin x}\,dx$

$u = \sin x$

$dx = \frac{du}{\cos x}$

$\int \frac{\cos x}{u^2 - u} \cdot \frac{du}{\cos x}$

$\int \frac{1}{u^2-u}\,du$

$\ln|u| - \ln|u-1| + c$

$\ln|\sin x| - \ln|\sin x - 1| + c$

١٧) $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$

$\frac{1}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + c$

١٨) $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$

$\frac{1}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + c$

١٩) $\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\,dx$

$\int \frac{\cos x}{\cos^2 x + \cos x}\,dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x}\,dx$

$u = \sin x$

$dx = \frac{du}{\cos x}$

$\int \frac{\cos x}{u^2 + 1 - u^2 + u} \cdot \frac{du}{\cos x}$

$\int \frac{1}{u+1}\,du$

$\ln|u+1| + c$

$\ln|\sin x + 1| + c$

٢٠) $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos^2 x}\,dx + \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos^2 x}\,dx$

$u = \cos x$

$dx = \frac{du}{-\sin x}$

$\int \frac{\cos x}{u + 1 - u^2} \cdot \frac{du}{-\sin x}$

$-\int \frac{1}{u+1-u^2}\,du$

$-\ln|\cos x| + \ln|\cos x - 1| + c$

$= \frac{1}{2} \int (ع+1) \; لو_{هـ} ع \; . دع$

$ص = لو_{هـ} ع \qquad دهـ = ع + 1$

$دص = \frac{1}{ع} \qquad هـ = \frac{ع^2}{2} + ع$

$= \frac{1}{2} \left((\frac{ع^2}{2} + ع) \; لو_{هـ} ع - \int \frac{ع}{2} + 1 \; . دع \right)$

$= \frac{1}{2} \left((\frac{ع^2}{2} + ع) \; لو_{هـ} ع - \frac{ع^2}{4} - ع \right) + ث$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{(جا^2 س)^2}{2} + (1 - جتا 2س) \right) لو_{هـ} ... - \frac{(جا^2 س)^2}{4} - (1 - جتا 2س) + ث$

11) $\int \frac{س}{س + 1 - \sqrt[3]{(س+1)^2}} \; . دس$

$ع = \sqrt[3]{س+1}$

$ع^3 = س + 1 \Leftarrow س = ع^3 - 1$

$3ع^2 \; دع = دس$

$\int \frac{ع^3 - 1}{ع^3 - ع^2} \times 3ع^2 \; دع$

$\int \frac{(ع-1)(ع^2+ع+1)}{ع^2 (ع-1)} \times 3ع^2 \; دع$

$\int 3ع^2 + 3ع + 3 \; دع$

$ع^3 + \frac{3}{2} ع^2 + 3ع + ث$

$(\sqrt[3]{س+1})^3 + \frac{3}{2} (\sqrt[3]{س+1})^2 + 3\sqrt[3]{س+1} + ث$

12- $\int \frac{2 جا 3س \; جتا س}{جتا 2س} \; . دس$

$\int \frac{2 \times \frac{1}{2} \left(جا(3س - س) + جا(3س + س) \right)}{جتا 2س} \; . دس$

$\int \frac{جا 2س + جا 4س}{جتا 2س} \; . دس$

$= \int \frac{جا 2س}{جتا 2س} + \frac{2 جا 2س \; جتا 2س}{جتا 2س} \; . دس$

$\int ظا 2س + 2 جا 2س \; . دس$

$= -\frac{1}{2} لو_{هـ} |جتا 2س| - جتا 2س + ث$

13- $\int \frac{س \; قا^2 س - ظا س}{س^2} \; . دس$

$= \int \frac{س \; قا^2 س}{س^2} \; . دس - \int \frac{ظا س}{س^2} \; . دس$

$= \int \frac{1}{س} قا^2 س \; . دس - \int \frac{ظا س}{س^2} \; . دس$

$ص = \frac{1}{س} \qquad دهـ = قا^2 س$

$دص = \frac{-1}{س^2} \qquad هـ = ظا س$

$= \frac{1}{س} ظا س + \int \frac{1}{س^2} ظا س \; . دس - \int \frac{ظا س}{س^2} \; . دس$

$= \frac{1}{س} ظا س + ث$

14- $\int س \; لو_{هـ} \frac{1}{\sqrt{س}} \; . دس$

$\int س \left(لو_{هـ} 1 - لو_{هـ} \sqrt{س} \right) . دس$

$= \int - س \; لو_{هـ} \sqrt{س} \; . دس$

$= \int -\frac{1}{2} س \; لو_{هـ} س \; . دس$

$ص = لو_{هـ} س \qquad دهـ = -\frac{1}{2} س$

$دص = \frac{1}{س} \qquad هـ = -\frac{1}{4} س^2$

$= -\frac{1}{4} س^2 \; لو_{هـ} س + \int \frac{1}{4} س \; . دس$

$= -\frac{1}{4} س^2 \; لو_{هـ} س + \frac{1}{8} س^2 + ث$

١٥) $\int \frac{(س^{٣}+١)^{٤}}{س^{١٦}}\,د س$

$= \int \frac{س^{١٢}(١+\frac{١}{س^{٣}})^{٤}}{س^{١٦}}\,د س$

$= \int \frac{١}{س^{٤}}(١+\frac{١}{س^{٣}})^{٤}\,د س$

$ص = ١+\frac{١}{س^{٣}} = ١+س^{-٣}$

$د ص = \frac{-٣س^{-٤}}{-٣س^{-٣}} = \frac{١}{٣}$

$= \int \frac{١}{٧}\,ص^{٤} \times \frac{١}{٣}\,د ص$

$= \frac{١}{٢١}\int ص^{٥}\,د ص = \frac{١}{١٥}ص^{٥}+ج$

$= \frac{١}{١٥}(١+\frac{١}{س^{٣}})^{٥}+ج$

١٦) $\int \frac{١}{(س^{٢}+١)^{٣}}\,د س \quad س>٠$

$\int \frac{١}{(١+\frac{١}{س^{٢}})^{٣}}\,د س$

$\int \frac{١}{س^{٣}(١+\frac{١}{س^{٢}})^{٣}}\,د س$

$\int \frac{١}{س^{\frac{٣}{٢}}}(١+\frac{١}{س^{٢}})^{-\frac{٣}{٢}}\,د س$

$ص = ١+\frac{١}{س^{٢}}$

$د ص = \frac{-٢}{-١س^{٣}} د س = \frac{١}{س^{٣}}$

$= \int ص^{-\frac{٣}{٢}}\,د ص$

$= -٢ص^{-\frac{١}{٢}}+ج = -\frac{٢}{\sqrt{ص}}+ج$

$= -\frac{٢}{\sqrt{١+\frac{١}{س^{٢}}}}+ج$

$= -\frac{٢}{\sqrt{\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}}}}+ج$

$= -\frac{٢س}{\sqrt{س^{٢}+١}}+ج$

١٧) $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتا س - جتا^{٣}س}{جا^{٣}س}\,د س$

$\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتا س(١-جتا^{٢}س)}{جا^{٣}س}\,د س$

$\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتا س \cdot جا^{٢}س}{جا^{٣}س}\,د س$

$\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جا س \cdot جتا س}{جا^{٣}س}\,د س$

$\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتا س}{جا^{٢}س}\,د س$

$ص = جا س \quad س=٠ \Leftarrow ص=١$

$د س = \frac{د ص}{-جا س} \quad س=\frac{\pi}{٢} \Leftarrow ص=٠$

$\int_{١}^{٠} \frac{-١}{ص^{٢}}\,د ص$

$\int_{٠}^{١} ص^{-٢}\,د ص = [-ص^{-١}]_{٠}^{١} = [-\frac{١}{ص}]_{٠}^{١}$

$= -١(١-٠) = -(\frac{١}{٢})$

١٨) $\int جا^{٤}س\,جتا^{٣}س\,د س$

$\int جا^{٤}س\,جتا^{٢}س\,جتا س\,د س$

$\int جا^{٤}س(١-جا^{٢}س)\,جتا س\,د س$

$\int (جا^{٤}س - جا^{٦}س)\,جتا س\,د س$

$\frac{١}{٥}جا^{٥}س - \frac{١}{٧}جا^{٧}س + ج$

$\frac{١}{٥}جا^{٥}س(١-\frac{٥}{٧}جا^{٢}س)+ج$

$\frac{١}{٥}جا^{٥}س(\frac{٢}{٧}+\frac{٥}{٧}جتا^{٢}س)+ج$

$\frac{١}{٣٥}جا^{٥}س(٢+٥جتا^{٢}س)+ج$

$\text{ص} = \text{جا}٢\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\,\text{جتا}٢\text{س}}$

$\int ٤\text{ص}^{٢}\,\text{جتا}^{٥}٢\text{س}\,\frac{\text{ءص}}{٢\,\text{جتا}٢\text{س}}$

$\int ٢\text{ص}^{٢}\,\text{جتا}^{٤}٢\text{س}\,\text{ءص}$

$\int ٢\text{ص}^{٢}\,(١-\text{جا}^{٢}٢\text{س})^{٢}\,\text{ءص}$

$\int ٢\text{ص}^{٢}\,(١-\text{ص}^{٢})^{٢}\,\text{ءص}$

$\int ٢\text{ص}^{٢}\,(١-٢\text{ص}^{٢}+\text{ص}^{٤})\,\text{ءص}$

$\int ٢\text{ص}^{٢}-٤\text{ص}^{٤}+٢\text{ص}^{٦}\,\text{ءص}$

$= \frac{٢\text{ص}^{٣}}{٣} - \frac{٤\text{ص}^{٥}}{٥} + \frac{٢\text{ص}^{٧}}{٧} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٣}\text{جا}^{٣}٢\text{س} - \frac{٤}{٥}\text{جا}^{٥}٢\text{س} + \frac{٢}{٧}\text{جا}^{٧}٢\text{س} + \text{ث}$

١٩) $\int \text{جتا}٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ظا س}+\text{ظتا س})\,.\,\text{ءس}$

$\text{ظا س} + \text{ظتا س}$

$\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} + \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

$\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}+\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جا س جتا س}} = \frac{١}{\frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س}}$

$\int \text{جتا}٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{١}{\frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س}}\,.\,\text{ءس}$

$\int \text{جتا}٢\text{س}\,(\text{لو}_{\text{هـ}}١ - \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س})\,.\,\text{ءس}$

$\int -\text{جتا}٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س}\,.\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتا}٢\text{س}}$

$\int -\text{جتا}٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{جتا}٢\text{س}}$

$\int -\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\,\text{ءص}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \qquad \text{ءهـ} = -\text{ءص}$

$\text{ءع} = \frac{١}{\text{ص}} \qquad \text{هـ} = -\text{ص}$

$= -\text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} + \int \text{ءص}$

$= -\text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} + \text{ص} + \text{ث}$

$= -\frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س} + \frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س} + \text{ث}$

٤)

$\int ٤\text{س}\,\text{ظتا}^{٥}\text{س}^{٢}\,\text{قتا}^{٤}\text{س}^{٢}\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{ظتا س}^{٢}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-٢\text{س}\,\text{قتا}^{٢}\text{س}^{٢}}$

$\int ٤\text{س}\,\text{قتا}^{٤}\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٥}\,\frac{\text{ءص}}{-٢\text{س}\,\text{قتا}^{٢}\text{س}^{٢}}$

$\int -\text{قتا}^{٢}\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٥}\,\text{ءص}$

$\int -(\text{ظتا}^{٢}\text{س}^{٢}+١)\,\text{ص}^{٥}\,\text{ءص}$

$\int (-\text{ص}^{٢}-١)\,\text{ص}^{٥}\,\text{ءص}$

$\int -\text{ص}^{٧}-\text{ص}^{٥}\,\text{ءص}$

$= -\frac{\text{ص}^{٨}}{٨} - \frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \text{ث}$

$= -\frac{١}{٨}\text{ظتا}^{٨}\text{س}^{٢} - \frac{١}{٦}\text{ظتا}^{٦}\text{س}^{٢} + \text{ث}$

١٨) $\int \frac{\text{قا س ظا س}}{٨-\text{ظا}^{٢}\text{س}}\,.\,\text{ءس}$

$\int \frac{\text{قا س}\,.\,\text{ظا س}}{٨-(\text{قا}^{٢}\text{س}-١)}\,.\,\text{ءس}$

$\int \frac{\text{قا س ظا س}}{٩-\text{قا}^{٢}\text{س}}\,.\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{قا س} \ ، \ \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا س ظا س}}$

$\int \frac{\text{قا س ظا س}}{٩-\text{ص}^{٢}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{قا س ظا س}}$

$\int \frac{١}{٩-\text{ص}^{٢}}\,\text{ءص}$

$\int \frac{\text{أ}}{٣-\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{٣+\text{ص}}\,\text{ءص}$

$\text{أ}(٣+\text{ص}) + \text{ب}(٣-\text{ص}) = ١$

نضع ص = ٣ ← ٦أ = ١ ← $\text{أ} = \frac{١}{٦}$

نضع ص = −٣ ← $\text{ب} = \frac{١}{٦}$

$\int \frac{\frac{١}{٦}}{٣-\text{ص}} + \frac{\frac{١}{٦}}{٣+\text{ص}}\,\text{ءص}$

$= -\frac{١}{٦}\text{لو}_{\text{هـ}}|٣-\text{ص}| + \frac{١}{٦}\text{لو}_{\text{هـ}}|٣+\text{ص}| + \text{ث}$

$= -\frac{١}{٦}\text{لو}_{\text{هـ}}|٣-\text{قا س}| + \frac{١}{٦}\text{لو}_{\text{هـ}}|٣+\text{قا س}| + \text{ث}$

$\int \frac{جا^4 س}{جتا^4 س} \, دس$

$\int \frac{جا^4 س}{جتا^4 س} \times \frac{1}{جتا^4 س} \, دس$

$\int ظا^4 س \, قا^4 س \, دس$

$ه = ظا س \Rightarrow دس = \frac{دهـ}{قا^2 س}$

$\int ه^4 \times \frac{دهـ}{قا^2 س}$

$\int ه^4 (ظا^2 س + 1) \, دهـ$

$\int ه^4 (ه^2 + 1) \, دهـ$

$\int ه^6 + ه^4 \, دهـ$

$\frac{1}{7} ظا^7 س + \frac{1}{5} ظا^5 س + ج$

$\int \frac{ه^{-س}}{1 - ه^{-س}} \, دس$

$ه = ه^{-س} \Rightarrow دس = \frac{دهـ}{-ه^{-س}} = -\frac{دهـ}{ه}$

$\int \frac{ه}{1 - \frac{1}{ه}} \times \frac{دهـ}{ه}$

$\int \frac{ه}{ه - 1} \, دهـ$

$\int \frac{ه}{ه - 1} \, دهـ$

$\int 1 + \frac{1}{ه - 1} \, دهـ$

$ه + لو|ه - 1| + ج$

$ه^{-س} + لو|ه^{-س} - 1| + ج$

$\int جا^4 س \, جتا^4 س \, دس$

$\int جا^4 س \, جتا^4 س \, جتا س \, دس$

$\int جا^4 س (1 - جا^2 س)^2 \, جتا س \, دس$

$جـ = جا س \Rightarrow دجـ = جتا س \, دس$

$\int جـ^4 (1 - جـ^2)^2 \, دجـ$

$\int جـ^4 (1 - 2جـ^2 + جـ^4) \, دجـ$

$\int جـ^4 - 2جـ^6 + جـ^8 \, دجـ$

$\frac{1}{5} جـ^5 - \frac{2}{7} جـ^7 + \frac{1}{9} جـ^9 + ج$

$\frac{1}{5} جا^5 س - \frac{2}{7} جا^7 س + \frac{1}{9} جا^9 س + ج$

$\int جا^4 س \, جتا^4 س \, دس$

$\int جا^4 س \, جتا^4 س \, دس$

$\int جا^4 س \, جتا^2 س \, جتا^2 س \, دس$

$\int جا^4 س (1 - جا^2 س) \, جتا^2 س \, دس$

$\int جا^4 س \, جتا^2 س - جا^6 س \, جتا^2 س \, دس$

$\int جا^4 س (ظا^2 س + 1) \, دس + \int جا^6 س (1 - جتا^2 س) \, دس$

$جـ = ظا س \quad دس = \frac{دجـ}{جـ^2 + 1}$

$ه = جتا س \quad دس = \frac{دهـ}{-جا س}$

$\int \frac{جـ^4}{جـ^2 + 1} \, دجـ + \int \frac{جا^6 س}{-جا س} \, دهـ$

$\int \frac{جـ^4}{جـ^2 + 1} \, دجـ - \int جا^5 س \, دهـ$

$\int \frac{جـ^4}{جـ^2 + 1} \, دجـ - \int (1 - جتا^2 س)^2 \, دهـ$

$\int \frac{جـ^4}{جـ^2 + 1} \, دجـ - \int 1 - 2جتا^2 س + جتا^4 س \, دهـ$

$\int \frac{جـ^4}{جـ^2 + 1} \, دجـ - ه + 2\int جتا^2 س \, دهـ - \int جتا^4 س \, دهـ$

$\int \frac{جـ^4}{جـ^2 + 1} \, دجـ - ه + \int 1 + جتا 2س \, دهـ - \int جتا^4 س \, دهـ$

$\int \frac{جـ^4}{جـ^2 + 1} \, دجـ - ه + س + \frac{1}{2} جا 2س - \int جتا^4 س \, دهـ$

$\int \frac{جـ^4}{جـ^2 + 1} \, دجـ - ه + س + \frac{1}{2} جا 2س - \int جتا^2 س \, جتا^2 س \, دهـ$

$\int \frac{جـ^4}{جـ^2 + 1} \, دجـ - ه + س + \frac{1}{2} جا 2س - \int \frac{1 + جتا 2س}{2} \times \frac{1 + جتا 2س}{2} \, دهـ$

$\int \frac{جـ^4}{جـ^2 + 1} \, دجـ - ه + س + \frac{1}{2} جا 2س - \frac{1}{4} \int 1 + 2جتا 2س + جتا^2 2س \, دهـ$

$\int \frac{جـ^4}{جـ^2 + 1} \, دجـ - ه + س + \frac{1}{2} جا 2س - \frac{1}{4} \int 1 + 2جتا 2س + \frac{1 + جتا 4س}{2} \, دهـ$

$\int \frac{جـ^4}{جـ^2 + 1} \, دجـ - ه + س + \frac{1}{2} جا 2س - \frac{1}{4} \int \frac{3}{2} + 2جتا 2س + \frac{1}{2} جتا 4س \, دهـ$

$\int \frac{جـ^4}{جـ^2 + 1} \, دجـ - ه + س + \frac{1}{2} جا 2س - \frac{3}{8} س - \frac{1}{4} جا 2س - \frac{1}{8} جا 4س + ج$

$\int \frac{جـ^4}{جـ^2 + 1} \, دجـ - ه + \frac{5}{8} س + \frac{1}{4} جا 2س - \frac{1}{8} جا 4س + ج$

$\int \frac{ه^{2س}}{ه^{2س} + 1} \, دس$

$ه = ه^{2س} \Rightarrow دس = \frac{دهـ}{2ه^{2س}} = \frac{دهـ}{2ه}$

$\int \frac{ه}{ه + 1} \times \frac{دهـ}{2ه}$

$\int \frac{1}{2(ه + 1)} \, دهـ$

$\frac{1}{2} لو|ه + 1| + ج$

$\frac{1}{2} لو(ه^{2س} + 1) + ج$

$\int \frac{ه^{2س}}{ه^{2س} + 1} \, دس$

$ه = ه^{2س} + 1 \Rightarrow دس = \frac{دهـ}{2ه^{2س}} = \frac{دهـ}{2(ه - 1)}$

$\int \frac{ه - 1 + 1}{ه(ه - 1)} \, دهـ$

$\int \frac{1}{ه} + \frac{1}{ه(ه - 1)} \, دهـ$

$\int \frac{1}{ه} + \frac{1}{ه - 1} - \frac{1}{ه} \, دهـ$

$\int \frac{1}{ه - 1} \, دهـ$

$لو|ه - 1| + ج$

$لو|ه^{2س} - 1| + ج$

$\int \frac{ه^{3س}}{ه^{2س} + 1} \, دس$

$ه = ه^{2س} + 1 \Rightarrow دس = \frac{دهـ}{2ه^{2س}} = \frac{دهـ}{2(ه - 1)}$

$\int \frac{(ه - 1)^3}{ه(ه - 1)} \, دهـ$

$\int \frac{ه^3 - 3ه^2 + 3ه - 1}{ه(ه - 1)} \, دهـ$

$\int \frac{ه^3 - 3ه^2 + 3ه}{ه(ه - 1)} - \frac{1}{ه(ه - 1)} \, دهـ$

$\int \frac{ه^2 - 3ه + 3}{ه - 1} - \frac{1}{ه(ه - 1)} \, دهـ$

$\int ه - 2 + \frac{2}{ه - 1} - \frac{1}{ه(ه - 1)} \, دهـ$

$\int ه - 2 + \frac{2}{ه - 1} - \left[\frac{1}{ه - 1} - \frac{1}{ه}\right] \, دهـ$

$\int ه - 2 + \frac{1}{ه - 1} \, دهـ$

$\frac{1}{2} ه^2 - 2ه + لو|ه - 1| + ج$

$\frac{1}{2} ه^{2س} - 2ه^{س} + لو|ه^{س} - 1| + ج$

$\int \frac{ه^{2س}}{ه^{2س} + ه^{س} + 1} \, دس$

$ه = ه^{س} \Rightarrow دس = \frac{دهـ}{ه^{س}} = \frac{دهـ}{ه}$

$\int \frac{ه^2}{ه^2 + ه + 1} \times \frac{دهـ}{ه}$

$\int \frac{ه}{ه^2 + ه + 1} \, دهـ$

$\int \frac{ه}{ه^2 + ه + 1} \, دهـ$

$= هـ \int \frac{ه - 1}{ه^2 + ه + 1} + \frac{ب}{ه^2 + ه + 1} \, دهـ$

$\Rightarrow ه = ه(ه - 1) + ب(ه + 1)$

$ه = 1 \Rightarrow 1 = ب(2) \Rightarrow ب = \frac{1}{2}$

$ه = -1 \Rightarrow -1 = -2هـ \Rightarrow هـ = \frac{1}{2}$

$= هـ \int \frac{\frac{1}{2}(2ه + 1)}{ه^2 + ه + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{ه^2 + ه + 1} \, دهـ$

$= هـ \left(\frac{1}{2} لو|ه^2 + ه + 1| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(ه + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \, دهـ\right) + ج$

$= هـ \left(\frac{1}{2} لو|ه^{2س} + ه^{س} + 1| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(ه^{س} + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \, دهـ\right) + ج$

٣٠) $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2 - x}$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}dx \Rightarrow x\,du = dx$

$\int \frac{x\,du}{x(u^2-1)}$

$\frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} \quad du$

$A(u+1) + B(u-1) = 1$

$u=1 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$u=-1 \Rightarrow -2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u+1| + c$

$\frac{1}{2}\ln|\ln x - 1| - \frac{1}{2}\ln|\ln x + 1| + c$

٣١) $\int \frac{\sin x}{9 - (\ln \cos x)^2}\,dx$

$u = \ln \cos x$

$du = \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\tan x\,dx$

$\int \frac{-du}{9 - u^2}$

$\frac{A}{3-u} + \frac{B}{3+u} \quad du$

$A(3+u) + B(3-u) = 1$

$u=3 \Rightarrow 6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}$

$u=-3 \Rightarrow 6B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}\ln|3-u| + \frac{1}{6}\ln|3+u| + c$

$\frac{1}{6}\ln|3-\ln\cos x| + \frac{1}{6}\ln|3+\ln\cos x| + c$

٣٢) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

$= \ln|\ln x|\Big]_e^{e^2} = \ln \ln e^2 - \ln \ln e$

$= \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

٣٣) $\int_0^1 e^x(1+e^x)^2\,dx$

$= \int_0^1 e^x(1 + 2e^x + e^{2x})\,dx$

$= \int_0^1 e^x + 2e^{2x} + e^{3x}\,dx$

$= e^x\Big|_0^1 + e^{2x}\Big|_0^1 + \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1$

$= (e-1) + (e^2-1) + \frac{1}{3}(e^3-1)$

$= e - 1 + e^2 - 1 + \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3}e^3 + e^2 + e - \frac{8}{3}$

٣٤) $\int_1^2 \frac{1}{x(2+3x)}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+3x}\right|_1^2$

$= \frac{1}{2}(\ln\frac{2}{8} - \ln\frac{1}{5})$

$= \frac{1}{2}(\ln\frac{1}{4} - \ln\frac{1}{5})$

$= \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 4) = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$

٣٥) $\int \frac{(x-2)^3}{x^2}\,dx$

$= \int \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2}\,dx$

$= \int x - 6 + \frac{12}{x} - \frac{8}{x^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2 - 6x + 12\ln|x| + 8x^{-1} + c$

$= \frac{1}{2}(x^2 - 12x + 24\ln|x| + 16x^{-1}) + c$

$\frac{A}{2-x} + \frac{B}{2+x} \quad dx$

$A(2+x) + B(2-x) = 1$

$x=2 \Rightarrow 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

$x=-2 \Rightarrow 4B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}\ln|2-x| + \frac{1}{4}\ln|2+x| + c$

$\frac{1}{4}\ln|4-x^2| + c$

٣٦) $\int \frac{1}{\sqrt{1+3x}}\,dx$

$= \int (1+3x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\times 3} + c$

$= \frac{2}{3}\sqrt{1+3x} + c$

$= \frac{2}{3}\sqrt{1+3(-2)} = \frac{2}{3}\sqrt{-5}$

$= \frac{2}{3}\sqrt{5}\,i$

٣٧) $\int \tan^2 x\,dx$

$\int \tan^2 x \times \tan^0 x\,dx$

$\int (\tan^2 x - 1)\tan^0 x\,dx$

$\int \tan^2 x \tan^0 x - \int \tan^0 x\,dx$

$\int \tan^2 x \tan^0 x - \int \tan^0 x\,dx$

$u = \tan x \qquad \frac{du}{dx} = 1 + \tan^2 x$

$\frac{u^3}{3} - \tan x + x + c$

$\frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c$

٣٩) $\int \frac{8}{\ln 2}\,dx = \frac{8^x}{\ln 8} + c$

$\frac{8^x}{\ln 2^3} + c$

٤٠) $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2}\,dx$

$= \int x e^x (1+x)^{-2}\,dx$

$u = x e^x \qquad dv = (1+x)^{-2}\,dx$

$du = e^x + x e^x \qquad v = \frac{(1+x)^{-1}}{-1}$

$= \frac{-x e^x}{1+x} + \int \frac{e^x + x e^x}{1+x}\,dx$

$= \frac{-x e^x}{1+x} + \int e^x\,dx$

$= \frac{-x e^x}{1+x} + e^x + c$

$= \frac{-x e^x + e^x + e^x c}{1+x}$

٤١) إذا كان $\frac{dy}{dx} = (x-1)^3$ فجد y ؟

الحل: $y = (x-1)^3$

$\ln y = \ln (x-1)^3$

$\ln y = x \ln (x-1)$

$\frac{y'}{y} = \left(x \times \frac{1}{x-1} + \ln(x-1)\right) \times y$

$y' = \left(\frac{x}{x-1} + \ln(x-1)\right)(x-1)^3$

٤٢) إذا كان $\int_1^3 f(x)\,dx = 3^3$

أثبت أن $\int_1^3 f(x)\,dx = \ln 3^3 \times 3^3$

الحل: $\int_1^3 f(x)\,dx = 3^3$

$\ln \int_1^3 f(x)\,dx = \ln 3^3$

$\ln f(3) - \ln f(2) = \ln 3^3$

$\frac{f(3)}{f(2)} = \ln 3^3$

$\therefore f(3) = \ln 2 \times f(3) \times 3^3$

$f(3) \cdot \ln 3 \times 3^3$

٤٣) إذا كان $y = x^3 + x^2$ أثبت أن

$y'' - 3y' + 2y = 0$

الحل: $y' = 3x^2 + 2x$

$y'' = 6x + 2$

$= 6x + 2 - 3(3x^2 + 2x) + 2(x^3 + x^2)$

$= 6x + 2 - 9x^2 - 6x + 2x^3 + 2x^2$

$= 0$ ∎

مثال إذا كان $ص = \frac{هـ^{س}}{جا س}$

أثبت أن $ص'' - ٢ص' + ٢ص = ٠$

الحل: $ص = هـ^{س} جا س$

$ص' = هـ^{س} جتا س + هـ^{س} جا س$

$= هـ^{س} جتا س + ص$

$ص'' = -هـ^{س} جا س + هـ^{س} جتا س + ص'$

الآن $ص'' - ٢ص' + ٢ص$

$= -هـ^{س} جا س + هـ^{س} جتا س + ص' - ٢ص' + ٢ص$

$= ص - ص' + هـ^{س} جتا س$

$= هـ^{س} جا س - هـ^{س} جتا س - ص + هـ^{س} جتا س$

$= ٠$

مثال إذا كان $ص = \ln(س + \sqrt{س^{٢}+١})$

أثبت أن $(س^{٢}+١) ص'' + س ص' = ٠$

الحل: $ص' = \frac{١}{\sqrt{س^{٢}+١}}$

$ص'' = \frac{\frac{-س}{\sqrt{س^{٢}+١}}}{س^{٢}+١} + ١$

$= \frac{-س + \sqrt{س^{٢}+١}}{(س^{٢}+١)^{\frac{٣}{٢}}}$

$= \frac{١}{(س^{٢}+١)^{\frac{١}{٢}}}$

مثال ١ : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ص = س^2 - 2$ ، $ص = 0$ ، $س = 0$

الحل :

$س$	$ص = س^2 - 2$	$ص = 0$
0	-2	
		$س^2 - 2 = 0$
		$س^2 = 2$
		$س = \pm\sqrt{2}$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{0} (س^2 - 2)\,د س$$

$$= \left[\frac{س^3}{3} - 2س\right]_{-\sqrt{2}}^{0}$$

$$= 0 - \left(\frac{-2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$$ وحدة مربعة

مثال ٢ : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $ص = س^2 - 4س + 5$ ، $ص = س + 1$

الحل :

$س$	$ص = س^2 - 4س + 5$	$ص = س + 1$
0	5	1
1	2	2
2	1	3
3	2	4
4	5	5

$$= \int_{1}^{4} (س + 1) - (س^2 - 4س + 5)\,د س$$

$$= \int_{1}^{4} -س^2 + 5س - 4\,د س$$

$$= \left[-\frac{س^3}{3} + \frac{5س^2}{2} - 4س\right]_{1}^{4}$$

$$= \left(-\frac{64}{3} + 40 - 16\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right)$$

$$= \frac{9}{2}$$ وحدة مربعة

مثال ٣ : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ص = س^3 - س$ ، $ص = 0$ ، $س = 2$

الحل :

$س$	$ص = س^3 - س$	$ص = 0$
0	0	
		$س^3 - س = 0$
		$س(س^2 - 1) = 0$
		$س = 0, \pm 1$
2	6	

$$= \int_{0}^{2} س^3 - س\,د س$$

$$= \left[\frac{س^4}{4} - \frac{س^2}{2}\right]_{0}^{2}$$

$$= (4 - 2) - 0$$

$$= 2$$ وحدة مربعة

مثال ٤ : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ص = س^3 - 3س^2 + 5$ ، المستقيم $ص = 1 - س$

الحل :

$س$	$ص = س^3 - 3س^2 + 5$	$ص = 1 - س$
0	5	1
1	3	0
2	1	-1
3	5	-2

$$= \int_{0}^{2} (1 - س) - (س^3 - 3س^2 + 5)\,د س + \int_{2}^{3} (س^3 - 3س^2 + 5) - (1 - س)\,د س$$

$$= \frac{11}{6}$$ وحدة مربعة

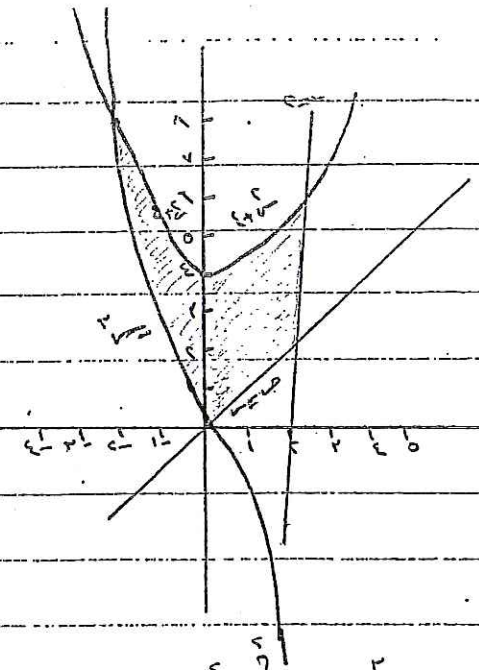
مثال ٥ : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ص = س^3 - 3س^2 + 4$ ، المستقيم $ص = س$

الحل :

$س$	$ص = س^3 - 3س^2 + 4$	$ص = س$
-1	0	-1
1	2	1
2	0	2
3	4	3

$$= \int_{-1}^{2} س - (س^3 - 3س^2 + 4)\,د س + \int_{2}^{3} (س^3 - 3س^2 + 4) - س\,د س$$

$$= \frac{37}{4}$$ وحدة مربعة



$$= \int_{-1}^{2} -x^2 + 4 - 3x \, dx + \int_{2}^{4} x^2 - 4 - 3x \, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x - \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^{2} + \left[\frac{x^3}{3} - 4x - \frac{3x^2}{2} \right]_{2}^{4}$$

$$= \frac{8}{3} + 8 - 6 + \frac{1}{3} + 4 - \frac{3}{2} + \frac{64}{3} - 16 - 24 - \frac{8}{3} + 8 + 6$$

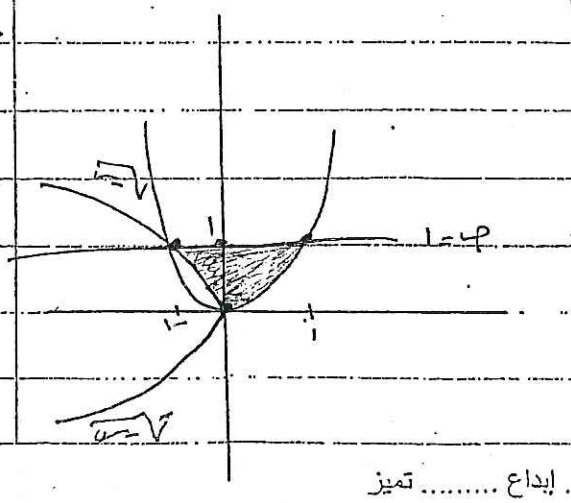
$$= \frac{8}{3} - 4 + 8 + \frac{1}{3} + 4 - \frac{3}{2} + \frac{64}{3} - 16 - 24 - \frac{8}{3} + 8 + 6$$

$$= 10 + \frac{12}{2} = \frac{46}{3}$$ وحدة مربعة

هـ حيث مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $ص^2 = -س$ ، $ص = 1$ ،

الحل:

$ص^2 = -س$	$ص = 1$	$ص^2 = 1$
$ص = \sqrt{-س}$	$س = 1$	$س = -1$
$ص = -\sqrt{-س}$	$س = -1$	$س = 1$
$ص = س^2$	$(-1, 1)$	$(1, 1)$
$ص = 1$		



$$= \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \, dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$ وحدة مربعة

$$\int_{-1}^{1} (ص) \, dص$$

$$= \left[\frac{ص^3}{3} \right]_{-1}^{1} + \left[ص \right]_{-1}^{1} = \frac{ص^2}{2} \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + (1 - (-1)) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 1 + \frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{6 - 2}{3} = \frac{4}{3}$$ وحدة مربعة

ب حيث مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ص = جا س$ ، $ص = جا 2س$ والواقعة في الربع الأول.

الحل:

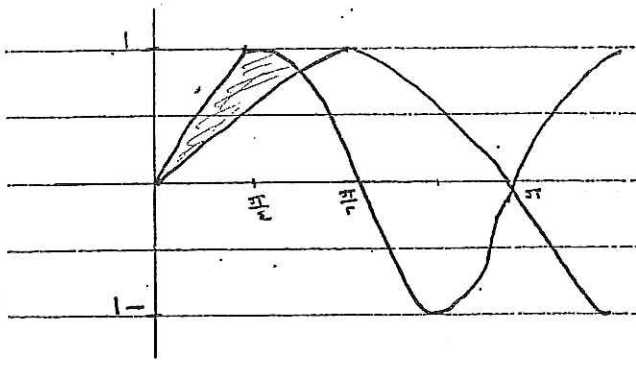
$ص = جا 2س$	$ص = جا س$
$ص = 2 جا س جتا س$	$جا س = جا 2س$
$جا س = 2 جا س جتا س$	
$جا س (1 - 2 جتا س) = 0$	

$جا س = 0 \Rightarrow س = 0, \pi, 2\pi, \ldots$

$1 - 2 جتا س = 0 \Rightarrow جتا س = \frac{1}{2}$

$س = \frac{\pi}{3} + 2\pi ن$

يوجد حلول أخرى



$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} جا 2س - جا س \, dس = \frac{1}{4}$$ وحدة مربعة

السؤال الرابع :

١) جد حل المعادلة التفاضلية
$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y^2}$ ، $x=0$ ، $y=k$.

٢) جد حل المعادلة التفاضلية
$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^3}$

٣) جد حل المعادلة التفاضلية
$\frac{dy}{dx} = ae^{y}\cdot e^{x}$

٤) جد حل المعادلة التفاضلية
$\frac{dy}{dx} = (x-3)(y-2)$

٥) جد حل المعادلة
$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = (x^2-1)x + e^{x}\cdot y$

٦) إذا كان $f(x) = \sin x$ ، $f(\pi) = -1$
$g(\pi) = 0$ جد قاعدة الاقتران $g(x)$ ؟

٧) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة (x,y)
يساوي $\sin x - x^2$ جد قاعدة الاقتران
علماً بأن النقطة $(\frac{\pi}{2}, 1)$ تقع على منحناه

٨) إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (x,y)
يساوي $\frac{x^3}{y^2}(x^2-1)$ جد قاعدة الاقتران
لهذه العلاقة علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(1,-1)$ ؟

٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة f عند النقطة $(x,f(x))$
هي $x^2 - f(x)$ جد قاعدة العلاقة
علماً بأن النقطة $(\frac{\pi}{2}, 1)$ تقع على منحناه ؟

١٠) إذا كان تسارع جسم يحل بالعلاقة
$a(t) = 24t^2$ م/ث^2 ، وكانت سرعته الابتدائية ١٠ م/ث
جد المسافة التي قطعها الجسم بعد مرور ٣ ثواني من
بدء الحركة علماً بأنه قطع مسافة (١٣٠) م بعد ثانية من بدء الحركة

١١) تتحرك جسم حسب العلاقة $v = \frac{1}{2}t^4$ ، $x_0 = 0$
إذا كانت سرعة الجسم ٨ م/ث بعد ٤ ثواني من بدء الحركة
وأنه قطع مسافة $(\frac{32}{3})$ م بعد ٦ ثواني من بدء الحركة
جد معادلة الحركة ؟

١٢) خلية بكتيرية تحتوي على ٥٠٠ خلية
وتزداد عدد البكتيريا بمعدل $\frac{dN}{dt} = \frac{700}{1+2t}$
حيث N عدد البكتيريا بعد t ساعة جد عدد البكتيريا
بعد مرور ٤ ساعة ؟

١٣) تحرك جسم من تعب الأهل ومن السكون
حسب العلاقة $v = \frac{dx}{dt}$ ، $x_0 = 4$
جد معادلة الحركة لهذا الجسم ؟

١٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند (x,y)
يساوي $\frac{x^3 y^2}{(3+5x)^{\frac{1}{3}}}$ جد قاعدة هذه العلاقة علماً
بأن منحناه يمر بالنقطة $(0,1)$ ؟

11 $\frac{dh}{ds} = \frac{h}{s}$ ... $\int \frac{dh}{h} = \int \frac{ds}{s}$

$\ln|h| = \ln|s| + c$

$h = e^{\ln|s|+c} \Rightarrow h = e^{c} \cdot s$

$h = ks$; $k = e^{c}$

12 $\frac{dh}{ds} = \frac{h^{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}}$

$\int h^{-\frac{1}{2}} dh = \int s^{-\frac{1}{2}} ds$

$2h^{\frac{1}{2}} = 2s^{\frac{1}{2}} + c$

$h^{\frac{1}{2}} = s^{\frac{1}{2}} + c$

$h = (s^{\frac{1}{2}} + c)^2$

13 $\frac{dh}{ds} = \frac{h^2}{s^2}$

$\int h^{-2} dh = \int s^{-2} ds$

$\frac{h^{-1}}{-1} = \frac{s^{-1}}{-1} + c$

$-\frac{1}{h} = -\frac{1}{s} + c$

14 $\frac{dh}{ds} = \sin s \cos s$

$\int dh = \int \sin s \cos s \, ds$

$h = \frac{1}{2}\sin^2 s + c$

15 $\frac{dh}{ds} = \frac{h}{s}$

$\int \frac{dh}{h} = \int \frac{ds}{s}$

$\ln|h| = \ln|s| + c$

$h = e^{\ln|s|+c} \Rightarrow h = e^{c} \cdot s$

$h = ks$; $k = e^{c}$

16 $\frac{dh}{ds} = (s-3)(s-3)$

$\frac{dh}{ds} = (s-3)^2$

$\int \frac{dh}{h} = \int (s^2 - 6s + 9) ds$

$\ln|h| = \frac{1}{3}s^3 - 3s^2 + 9s + c$

$h = e^{\frac{1}{3}s^3 - 3s^2 + 9s + c}$

$h = e^{\frac{1}{3}s^3 - 3s^2 + 9s} \cdot e^{c}$

$h = k e^{\frac{1}{3}s^3 - 3s^2 + 9s}$

$h(1) = 1 \Rightarrow 1 = k e^{\frac{1}{3} - 3 + 9} \Rightarrow 1 = k e^{\frac{7}{3}}$

$k = e^{-\frac{7}{3}}$

$h = e^{\frac{1}{3}s^3 - 3s^2 + 9s - \frac{7}{3}}$

17 $\frac{dh}{ds} = \frac{h}{s} - \frac{h^2}{s}$

$\int \frac{dh}{h - h^2} = \int \frac{ds}{s}$

$\int \frac{dh}{h(1-h)} = \ln|s| + c$

$\int \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{1-h}\right) dh = \ln|s| + c$

$\ln|h| - \ln|1-h| = \ln|s| + c$

$\ln\left|\frac{h}{1-h}\right| = \ln|s| + c$

$\frac{h}{1-h} = ks$; $k = e^{c}$

$h = ks - hks$

$h + hks = ks$

$h(1 + ks) = ks$

$h = \frac{ks}{1+ks}$

$h(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{k}{1+k} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2k = 1 + k \Rightarrow k = 1$

$h = \frac{s}{1+s}$

$\frac{dh}{ds} = \frac{h}{s} - \frac{h^2}{s}$

$\frac{dh}{ds} = \frac{h - h^2}{s}$

$\int \frac{dh}{h - h^2} = \int \frac{ds}{s}$

$\int \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{1-h}\right) dh = \ln|s| + c$

$\ln|h| - \ln|1-h| = \ln|s| + c$

$\ln\left|\frac{h}{1-h}\right| = \ln|s| + c$

$\frac{h}{1-h} = ks$; $k = e^{c}$

$h = ks - hks$

$h + hks = ks$

$h(1 + ks) = ks$

$h = \frac{ks}{1+ks}$

$h(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{k}{1+k} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2k = 1 + k \Rightarrow k = 1$

$h = \frac{s}{1+s}$

$\frac{dh}{ds} = h - h^2$

$\int \frac{dh}{h - h^2} = \int ds$

$\int \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{1-h}\right) dh = s + c$

$\ln|h| - \ln|1-h| = s + c$

$\ln\left|\frac{h}{1-h}\right| = s + c$

$\frac{h}{1-h} = ke^{s}$; $k = e^{c}$

$h = ke^{s} - hke^{s}$

$h + hke^{s} = ke^{s}$

$h(1 + ke^{s}) = ke^{s}$

$h = \frac{ke^{s}}{1+ke^{s}}$

$h(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{k}{1+k} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3k = 1 + k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

$h = \frac{\frac{1}{2}e^{s}}{1 + \frac{1}{2}e^{s}}$

$h = \frac{e^{s}}{2 + e^{s}}$

$\frac{dh}{ds} = h - h^2$

$\int \frac{dh}{h - h^2} = \int ds$

$\int \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{1-h}\right) dh = s + c$

$\ln|h| - \ln|1-h| = s + c$

$\ln\left|\frac{h}{1-h}\right| = s + c$

$\frac{h}{1-h} = ke^{s}$; $k = e^{c}$

$h = ke^{s} - hke^{s}$

$h + hke^{s} = ke^{s}$

$h(1 + ke^{s}) = ke^{s}$

$h = \frac{ke^{s}}{1+ke^{s}}$

$h(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{k}{1+k} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4k = 1 + k \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

$h = \frac{\frac{1}{3}e^{s}}{1 + \frac{1}{3}e^{s}}$

$h = \frac{e^{s}}{3 + e^{s}}$

$\frac{dh}{ds} = h - h^2$

$\int \frac{dh}{h - h^2} = \int ds$

$\int \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{1-h}\right) dh = s + c$

$\ln|h| - \ln|1-h| = s + c$

$\ln\left|\frac{h}{1-h}\right| = s + c$

$\frac{h}{1-h} = ke^{s}$; $k = e^{c}$

$h = ke^{s} - hke^{s}$

$h + hke^{s} = ke^{s}$

$h(1 + ke^{s}) = ke^{s}$

$h = \frac{ke^{s}}{1+ke^{s}}$

$h(0) = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{k}{1+k} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5k = 1 + k \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

$h = \frac{\frac{1}{4}e^{s}}{1 + \frac{1}{4}e^{s}}$

$h = \frac{e^{s}}{4 + e^{s}}$

١٨ $\frac{dp}{ds} = \frac{-p(1-s^2)}{s^2}$ ..... $\Rightarrow$ ف(ن+١) = ٤ن٢ + ١٠ن + ٨

$\frac{dp}{p} = \frac{1-s^2}{s^2}\,ds$

$\int \frac{dp}{p} = \int \left(\frac{1}{s^2} - 1\right) ds$

$\ln|p| = -s^{-1} - s + c$

$\ln|p| = \frac{-1}{s} - s + c$

عند $s = -1$ ، $p = 1$ $\Rightarrow 0 = 1 + 1 + c \Rightarrow c = -2$

$\Rightarrow \ln|p| = \frac{-1}{s} - s - 2$

$\ln p = \frac{-1}{s} - s - 2$

$p = e^{\frac{-1}{s} - s - 2}$

١٩ $\frac{dp}{ds} \cdot s = p^2 + 3p$

$\frac{dp}{p^2+3p} = \frac{ds}{s}$

$\int \frac{dp}{p(p+3)} = \int \frac{ds}{s}$

$\frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+3}\right) dp = \ln|s| + c$

$\frac{1}{3}\ln|p| - \frac{1}{3}\ln|p+3| = \ln|s| + c$

عند $(s=1, p=1) \Rightarrow \frac{1}{3}\ln 1 - \frac{1}{3}\ln 4 = \ln 1 + c \Rightarrow c = -\frac{1}{3}\ln 4$

$\therefore \ln|p| - \ln|p+3| = 3\ln|s| - \ln 4$

$\ln\left|\frac{p}{p+3}\right| = \ln|s^3| - \ln 4$

$\frac{p}{p+3} = \frac{s^3}{4}$

$4p = s^3(p+3)$

$4p = s^3 p + 3s^3$

$p(4 - s^3) = 3s^3$

$p = \frac{3s^3}{4 - s^3}$

١٠

$\frac{dن}{dt} = ت(t) \cdot ن$

$\frac{dع}{dt} = \frac{dت}{dt} \cdot ن$

$ع(t) = ٤ت ن + c$ عند $t = ٠$ ، $ع(٠) = ١٠٠$

$ع(t) = ٤ت ن + ١٠$

$ف(t) = \int ع(t) \cdot dt$

$ف(t) = ٢ت ن^2 + ١٠ن + c$ ..... (١)

عند $t = ٠$ ، $ف(٠) = ٣٠$

$\Rightarrow c = ٣٠ \Rightarrow c = ٨$

١١ $ت = \frac{1}{2}t$ ، $ع(t) = هـ^{\frac{1}{2}t}$ ، $ف(٦) =$

$\frac{dع}{dt} = \frac{1}{2}ع$

$\frac{dع}{ع} = \frac{1}{2}dt$

$\int \frac{dع}{ع} = \int \frac{1}{2}dt$

$\ln|ع| = \frac{1}{2}t + c$

عند $t = ٠$ ، $ع = هـ^{\frac{1}{2}(٠)} + c$

$c = ١ \Leftarrow$

$\ln|ع| = \frac{1}{2}t$

$ع = هـ^{\frac{1}{2}t}$

$\frac{dف}{dt} = هـ^{\frac{1}{2}t} \Rightarrow dف = هـ^{\frac{1}{2}t}\,dt$

$\int dف = \int هـ^{\frac{1}{2}t}\,dt$

$ف = ٢هـ^{\frac{1}{2}t} + c$

عند $ف(٦) = ٤هـ^3 \Rightarrow ٤هـ^3 = ٢هـ^3 + c$

$c = ٢هـ^3$

$\Rightarrow ف(t) = ٢هـ^{\frac{1}{2}t} + ٢هـ^3$

١٢ خليه بكتيريه تحوي على ٥٠٠ خليه

وتزداد عدد البكتيريا بمعدل $\frac{dت}{dt} = \frac{١٠٠٠}{1+ت^{\frac{1}{2}}}$

حيث ت عدد البكتيريا بعد t ساعه ، ما عدد البكتيريا

بعد مرور ٢ ساعه ؟

$ت(٠) = ٥٠٠$ $\frac{dت}{dt} = \frac{١٠٠٠}{1+ت^{\frac{1}{2}}}$

$dت = \frac{١٠٠٠}{1+ت^{\frac{1}{2}}}\,dt$

$ت = ١٠٠٠ \ln|1+ت^{\frac{1}{2}}| + c$

$ت = ٢٠٠٠ \ln|1+ت^{\frac{1}{2}}| + c$

نجد ج: ت(٠) = ٥٠٠٠

٥٠٠٠ = صفر + ج ⟸ ج = ٥٠٠٠

ت(ن) = ٢٠٠٠ $لو_{هـ}$ |$\frac{١}{٢}$ن + ١| + ٥٠٠٠

ت(٢) = ٢٠٠٠ $لو_{هـ}$ ٢ + ٥٠٠٠

١٣) ت = $هـ^{-ع}$ ، ع(٠) = ٠ ، ف(٠) = ٠

$\frac{دع}{دن} = هـ^{-ع}$

$\frac{دع}{هـ^{-ع}} = دن$

∫ $هـ^{ع}$ دع = ∫ دن

$هـ^{ع}$ = ن + ج

نجد ج: ع(٠) = ٠ ⟸ $هـ^{٠}$ = ٠ + ج ⟸ ج = ١

$هـ^{ع}$ = ن + ١

$لو_{هـ} هـ^{ع}$ = $لو_{هـ}$ ن + ١

ع = $لو_{هـ}$(ن + ١)

$\frac{دف}{دن}$ = $لو_{هـ}$(ن + ١)

دف = $لو_{هـ}$(ن + ١) دن

∫ دف = ∫ $لو_{هـ}$(ن + ١) . دن   ص = $لو_{هـ}$ ن + ١   دهـ = دن

ف = ص × هـ − ∫ هـ × دص   دص = $\frac{١}{ن+١}$ هـ = ن

ف = ن $لو_{هـ}$(ن + ١) − ∫ $\frac{ن}{ن+١}$. دن

ف = ن $لو_{هـ}$(ن + ١) − ∫ ١ + $\frac{-١}{ن+١}$. دن

ف = ن $لو_{هـ}$(ن + ١) − ن + $لو_{هـ}$|ن + ١| + ج

نجد ج ف(٠) = ٠:

٠ = صفر − صفر + صفر + ج ⟸ ج = ٠

⟸ ف(ن) = ن $لو_{هـ}$(ن + ١) − ن + $لو_{هـ}$|ن + ١| + ج

١٤) $\frac{دص}{دس} = \frac{٢ص^{٣}}{(٣س+٥)^{\frac{٢}{٣}}}$

$\frac{دص}{ص^{٣}} = \frac{٢ دس}{(٣س+٥)^{\frac{٢}{٣}}}$

∫ $ص^{-٣}$ دص = ∫ ٢$(٣س+٥)^{-\frac{٢}{٣}}$. دس

$\frac{ص^{-٢}}{-٢} = \frac{٢(٣س+٥)^{\frac{١}{٣}}}{\frac{١}{٣} × ٣}$ + ج

$\frac{-١}{٢ص^{٢}}$ = ٢ $\sqrt[٣]{٣س+٥}$ + ج

نجد ج (١، ٥)

$\frac{-١}{٥٠}$ = ٤ + ج ⟸ ج = −٤ − $\frac{١}{٥٠}$

ج = $\frac{-٢٠١}{٥٠}$

⟸ $\frac{-١}{٢ص^{٢}}$ = ٢ $\sqrt[٣]{٣س+٥}$ − $\frac{٢٠١}{٥٠}$