الدرس 1

تكامل اقترانات خاصة

Integration of Special Functions

ما هي أنواع الإقترانات التي سوف تتعلم إيجاد تكاملها في هذا الدرس؟

الاقترانات الأسية

$e^x, e^{ax+b}, k^x, k^{ax+b}$

$k > 0, k \neq 1$

الاقترانات المثلثية

$\sin x, \cos x, \tan x$

$\sec x, \csc x, \cot x$

اقترانات تنتج اقترانات لوغريتمية الطبيعية

$\frac{a}{x}$

الاقترانات المتشعبة

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, x < 2 \\ cx^3, x \geq 2 \end{cases}$$

مقدمة عامة

أنواع التكامل

1

التكامل غير المحدود

متغير التكامل

اقتران أصلي للإقتران $f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

الاقتران المكامل

ثابت التكامل

يكون ناتج التكامل اقتران وليس ثابت

2

التكامل المحدود

الحد العلوي لتكامل

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

رمز التعويض بعد الإنتهاء من عملية التكامل

الحد السفلي للتكامل

$$= F(b) - F(a)$$

قيمة الإقتران الأصلي عند الحد العلوي

قيمة الإقتران الأصلي عند الحد السفلي

مثال 1

أجد ثلاثة اقترانات أصلية للاقتران $\boldsymbol{f(x) = 2x}$

$F(x) = x^2 + c \quad , c -$ ثابت $\quad , \quad F(x) = x^2 + \sqrt{7} \quad , \quad F(x) = x^2 + 5$

تكامل الاقترانات الأسية

أساسها العدد النيبيري e

أساسها أي عدد آخر k

مفهوم أساسي

صيغ تكاملات اقترانات أسّية

إذا كانت k, b, a أعدادًا حقيقيّةً، و $a \neq 0$، و $k > 0$، و $k \neq 1$، و e العدد النيبيري، فإنَّ:

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C \qquad \int e^{x}\,dx = e^{x} + C$$

$$\int k^{ax+b}\,dx = \frac{k^{ax+b}}{a\ln k} + C \qquad \int k^{x}\,dx = \frac{k^{x}}{\ln k} + C$$

ما الفرق بين اشتقاق الاقترانات الأسية وتكاملها ؟

تكامل

$$\int 5e^{x}\,dx = 5e^{x} + c$$

$$\int e^{5x}\,dx = \frac{e^{5x}}{5} + c$$

$$\int 12e^{3x}\,dx = \frac{12}{3}e^{3x} + c$$

$$= 4e^{3x} + c$$

$$\int k^{x}\,dx = \frac{k^{x}}{lnk} + c$$

$$\int 7^{x}\,dx = \frac{7^{x}}{ln7} + c$$

$$\int \left(3^{(2x+1)}\right)dx = \frac{3^{(2x+1)}}{ln3 \times 2} + c$$

إشتقاق

$$\frac{d}{dx}(5e^{x}) = 5e^{x}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{5x}) = 5e^{5x}$$

$$\frac{d}{dx}(12e^{3x}) = (3)(12)e^{3x}$$

$$= 36e^{3x}$$

$$\frac{d}{dx}(k^{x}) = k^{x} \times lnk$$

$$\frac{d}{dx}(7^{x}) = 7^{x} \times ln7$$

$$\frac{d}{dx}\left(3^{(2x+1)}\right) = 3^{(2x+1)} \times ln3 \times 2$$

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (5x^2 - 3e^{7x})\, dx$

b) $\int_0^{\ln 3} 8e^{4x}\, dx$

c) $\int \sqrt{e^{1-x}}\, dx$

d) $\int (3^x + 2\sqrt{x})\, dx$

a) $\int (5\,x^2 - 3e^{7x})\, dx$

$$= \frac{5x^3}{3} - \frac{3e^{7x}}{7} + c$$ تكامل اقتران القوة والاقتران الأسي الطبيعي

b) $\int_0^{ln3} 8e^{4x}\ dx =$

$$= \frac{8}{4} e^{4x} \Big|_0^{\ln 3} = 2e^{4\ln 3} - 2\,e^{4(0)}$$

$$= 2e^{(\ln(3)^4)} - 2 = 162 - 2 = 160$$

c) $\int \sqrt{e^{1-x}\, dx} =$

$$= \int \sqrt{e^{1-x}\, dx} = \int ((e^{1-x}))^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \int e^{\frac{1-x}{2}}\ dx = -2e^{\frac{1-x}{2}} + c$$

تحويل الجذر التربيعي إلى قوة نسبية قبل التكامل

d) $\int (3^x + 2\sqrt{x})\, dx =$

$$\int (3^x + 2x^{\frac{1}{2}})\, dx =$$

$$\frac{3^x}{ln3} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$\frac{3^x}{ln3} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

تكامل الاقترانات المثلثية

الفرق بين اشتقاق الاقترانات المثلثية وتكاملها

التكامل	الاشتقاق
$\int cosx\, dx = sinx + C$	$\frac{d}{dx}(sin\, x) = cosx$
$\int sinx\, dx = -cosx + C$	$\frac{d}{dx}(cos\, x) = -sinx$
$\int sec^2x\, dx = tanx + C$	$\frac{d}{dx}(tan\, x) = sec^2x$
$\int secx\, tanx\, dx = secx + C$	$\frac{d}{dx}(sec\, x) = secx\, tanx$
$\int csc^2x\, dx = -cotx + C$	$\frac{d}{dx}(cot\, x) = -csc^2x$
$\int cscx\, cotx\, dx = -cscx + C$	$\frac{d}{dx}(cscx) = -cscx\, cotx$

عندما تكون الزاوية اقتران خطي $ax + b\ , a \neq 0$ فعند الاشتقاق نضرب النسبة المثلثية بمعامل x بعد الاشتقاق

وعند التكامل نقسم النسبة المثلثية على معامل x بعد التكامل .

مثال توضيحي

$$\int \sin(5x + 4)\, dx = \frac{-\cos(5x + 4)}{5} + C$$

$$\int 3csc^2(7x + 5)\, dx = \frac{-3\cot(7x + 5)}{7} + C$$

مثال :

أجد كلا من التكاملات الأتية :

$$1)\ \int (\boldsymbol{sin2x - cos2x})\boldsymbol{dx}$$

$$= -\frac{1}{2}cos2x - \frac{1}{2}sin2x + C$$

$$2)\ \int_{\pi/6}^{\pi/3} \boldsymbol{csc^2x\ dx}$$

$$= -cotx \Big|_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$= -cot(\pi/3) + \cot(\pi/6)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

تذكر

تحويل العدد من الصورة الجذرية إلى الصورة الأسية قبل إجراء التكامل .

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$$

$$3)\ \int \left(\boldsymbol{3cos(2x+3)} + \sqrt[3]{\boldsymbol{x}}\right)\ \boldsymbol{dx}$$

$$= \int \left(3\cos(2x+3) + x^{\frac{1}{3}}\right)dx$$ تجهيز

$$= \frac{3\sin(2x+3)}{2} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3\sin(2x+3)}{2} + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C$$

$$= \frac{3\sin(2x+3)}{2} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$$

المتطابقات المثلثية والتكامل

أحياناً لا نستطيع إيجاد تكامل اقترانات مثلثية بشكلها الصريح لذلك نستخدم المتطابقات المثلثية لتغيير شكل الاقتران بحيث يمكن حساب التكامل له

ما هي الحالات التي يجب فيها استخدام المتطابقات ؟

أولاً: الاقترانات المثلثية التي تحوي جيب أوجيب تمام أو ظل أو ظل تمام مرفوعة لقوة مثل
$sin^2, cos^4, tan^2, cot^2,$

ثانياً: الاقترانات المثلثية التي تكون في صورة حاصل ضرب اقتراني جيب أو اقتراني جيب تمام أو اقتران جيب مضروب في اقتران جيب تمام وغيرها من الاقترانات التي سوف نتعرف عليها بهذا الدرس .

مثال

1) $\int \boldsymbol{cos^2 2x\, dx}$

نستخدم متطابقات تخفيض القوة

$$= \int \frac{1 + cos4x}{2}\, dx$$

$$\boldsymbol{cos^2 x = \frac{1 + cos2x}{2}}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{sin4x}{8} + C$$

$$\boldsymbol{sin^2 x = \frac{1 - cos2x}{2}}$$

---

2) $\int \boldsymbol{tan^2 2x\, dx}$

نستخدم متطابقات فيثاغورس

$$\boldsymbol{tan^2 x = sec^2 x - 1}$$

$$\boldsymbol{cot^2 x = csc^2 x - 1}$$

$$\int (sec^2 2x - 1) dx$$

$$\frac{1}{2} tan2x - x + C$$

3)

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

نستخدم متطابقات تخفيض القوة

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2(\pi)\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\sin 2(0)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\pi$$

---

4) $$\int \sin 4x \cos 5x \, dx$$

$$\int \sin 4x \cos 5x \, dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin(4x-5x) + \sin(4x+5x)\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(-\sin(x) + \sin(9x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(x) - \frac{1}{9}\cos(9x)\right) + C$$

نستخدم متطابقات تحويل الضرب إلى جمع

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x - y) + \sin(x + y)\right)$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x - y) - \cos(x + y)\right)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x - y) + \cos(x + y)\right)$$

5) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \left(\frac{1}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right) dx$$

$$= \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x}\right) dx$$

$$= \int (\csc^2 x + \csc x \cot x)\, dx$$

$$= -\cot x - \csc x + C$$

بضرب كلاً من البسط و المقام بمرافق المقام

$$1 + \cos x$$

أتذكَّر

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن إعادة كتابة المقادير

المثلثية بصورة لا تحوي كسرًا إذا كان مقامها في صورة

$$1 \mp u$$

وذلك من خلال الضرب بالمرافق وتكمن أهمية هذا الإجراءفي أنه لا يوجد قاعدة لإيجاد تكامل القسمة مباشرة

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos^4 x\, dx$ b) $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \sin x\, dx$ c) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

a) $\int \boldsymbol{cos^4x\ dx}$

$$\int \boldsymbol{cos^4x\ dx} = \int (cos^2x)^2\, dx$$

$$\int \left(\frac{1+cos2x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+2cos2x+cos^2 2x}{4}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{4}(1+2cos2x+\left(\frac{1+cos4x}{2}\right))dx$$

$$= \frac{1}{4}(x+\frac{2sin2x}{2}+\frac{x+\frac{sin4x}{4}}{2}+\ C$$

$$= \frac{1}{4}\left(x+sin2x+\frac{x}{2}+\frac{sin4x}{8}\right)+C$$

$$= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}sin2x+\frac{1}{32}sin4x+C$$

b) $\int_0^{\pi/6} \boldsymbol{sin3x\ sinx\ dx}$

$$= \int_0^{\pi/6} sin\ 3x\ sin\ x\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (cos(3x\ -\ x)-cos(3x\ +\ x)\,)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (cos2x-cos4x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{sin2x}{2}-\frac{sin4x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/6} = \frac{sin2x}{4}-\frac{sin4x}{8}\Bigg|_0^{\pi/6}$$

$$\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{8}sin\frac{2\pi}{3}-(0-0) = \frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$c) \int \frac{dx}{1+cosx} dx$, $(1 - cosx)$ نضرب بمرافق المقام

$= \int \frac{dx}{1+cosx} \times \frac{1-cosx}{1-cosx} = \int \frac{1-cosx}{1-cosx^2} dx$ $(sin^2 + cos^2 = 1)$ نستخدم متطابقة فيثاغورس

$= \int \frac{1-cosx}{sin^2x} dx = \int \frac{1}{sin^2x} - \frac{cosx}{sin^2x} dx$ توزيع االبسط على المقام

$= \int (csc^2x - cotx\ cscx)dx$ $, \frac{1}{sin^2x} = csc^2x , \frac{cosx}{sinx} = cotx, \frac{1}{sinx} = cscx$

$= -cotx + cscx + C$

تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ: $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$، وهذا يعني أنَّ: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.

وبما أنَّ $\ln x$ مُعرَّف فقط عندما يكون $x > 0$، فإنَّ:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad , \quad x > 0 \quad ......(1)$$

ولكنَّ $\ln(-x)$ مُعرَّف عندما يكون $x < 0$.

وباستعمال قاعدة السلسلة، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{1}{-x} \times -1 = \frac{1}{x}$$

وهذا يعني أنَّ:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C \quad , \quad x < 0 \quad ......(2)$$

وبدمج النتيجتين (1) و (2)، فإنَّه يُمكِن التوصُّل إلى القاعدة الآتية:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad , \quad x \neq 0$$

يُمكِن استعمال هذه القاعدة لإيجاد تكاملات مجموعة أوسع من الاقترانات، مثل الاقترانات التي تُكتَب في صورة: $\frac{1}{ax+b}$، أو صورة: $k\frac{f'(x)}{f(x)}$؛ أيِ الاقترانات التي يُمكِن كتابتها في صورة يكون فيها البسط أحد مضاعفات مشتقة المقام، وذلك بملاحظة أنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\ln|f(x)|) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مفهوم أساسي

تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي

إذا كان a, b عددين حقيقيين، و$a \neq 0$، وكان $f(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad , x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \quad , x \neq -\frac{b}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C, f(x) \neq 0$$

إذا كان البسط مشتقة المقام فإن ناتج تكامل الإقتران يكون الاقتران اللوغريتمي الطبيعي للقيمة المطلقة للمقام مثلاً :

1) $\int \frac{1}{x}\,dx$

$= ln|x| + C$ تكامل $\frac{1}{x}$

2) $\int \frac{7}{x}\,dx$

$= 7\int \frac{1}{x}\,dx = 7ln|x| + C$ تكامل $\frac{1}{x}$ مضروب بثابت

3) $\int \frac{1}{2x+3}\,dx$

$= \frac{1}{2}ln|2x+3| + C$ تكامل $\frac{1}{ax+b}$

4) $\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx$

$= ln|x^2+3| + C$

5) $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right)dx$

$\int (2e^x + \frac{3}{x})\,dx = 2e^x + 3\ln|x| + C$

6) $\int \frac{1}{4x-1}\,dx$

$\int \frac{1}{4x-1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|4x-1| + C$

7) $\int \frac{6x}{x^2+9}\,dx$

$\int \frac{6x}{x^2+9}\,dx = 3\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx$

$= 3\ln|x^2+9| + C$

$= 3\ln(x^2+9) + C$

8)

$$\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}\,dx$$

$$\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\times\cos x}{3+2\sin x}\,dx$$ بالضرب في 2، والقسمة على 2

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{3+2\sin x}\,dx$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}\ln|3+2\sin x| + C$$ تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= \frac{1}{2}\ln(3+2\sin x) + C$$ $|3+2\sin x| = 3+2\sin x$

9)

$$\int \tan x\,dx$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$ المتطابقات النسبية

$$= \frac{1}{-1}\int \frac{-1\times\sin x}{\cos x}\,dx$$ بالضرب في -1، والقسمة على -1

$$= -\ln|\cos x| + C$$ تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

10)

$$\int \sec x\,dx$$

$$\int \sec x\,dx = \int \sec x \times \frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$$ بالضرب في $\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}$

$$= \int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$= \ln|\sec x+\tan x| + C$$ تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

✎ أتحقَّق من فهمي أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx$ b) $\int \frac{5}{3x+2} dx$ c) $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2} dx$

d) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx$ e) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} dx$ f) $\int \cot x \, dx$

g) $\int \frac{e^x}{e^x+7} dx$ h) $\int \csc x \, dx$

a) $\int (\boldsymbol{sinx} - \frac{5}{x})\, dx$

$= -cosx - 5ln|x| + C$ تكامل $\boldsymbol{sinx}$, تكامل $\frac{1}{x}$

b) $\int \frac{5}{3x+2}\, dx$

$= \frac{5}{3} ln|3x+2| + C$ تكامل $\frac{1}{ax+b}$ مضروب بثابت

c) $\int \frac{x^2-7x+2}{x^2}\, dx$ توزيع البسط على المقام

$= \int (1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2})\, dx$

$= x - 7ln|x| - \frac{2}{x} + C$

d) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\, dx$

$= ln|x^2+3x| + C$ تكامل $\frac{f(x)'}{f(x)}$

e) $\int \frac{\boldsymbol{sin2x}}{\boldsymbol{1+cos2x}}\,\boldsymbol{dx} =$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2sin2x}{1+cos2x}\,dx \qquad = -\frac{1}{2}ln|1+cos2x| + C$ $\frac{f(x)'}{f(x)}$ تكامل

f) $\int \boldsymbol{cotx\,dx}$

$= \int \frac{cosx}{sinx}\,dx$ $\frac{f(x)'}{f(x)}$ تكامل

$= ln|sinx| + C$

g) $\int \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{e^x+7}}\,\boldsymbol{dx}$

$= ln|e^x + 7| + C$ $\frac{f(x)'}{f(x)}$ تكامل

h) $\int \boldsymbol{cscx\,dx}$

$= \int cscx \times \frac{cscx + cotx}{cscx + cotx}dx$

$= \int \frac{cscx^2 + cscx\,cotx}{cscx + cotx}\,dx$

$= -\int \frac{-cscx^2 + cscx\,cotx}{cscx + cotx}\,dx$

$= ln|cscx + cotx| + C$ $\frac{f(x)'}{f(x)}$ تكامل