الجوكر في الرياضيات

الوحدة الرابعة

التكامل

الفرع العلمي والصناعي

ا.محمد السواعير

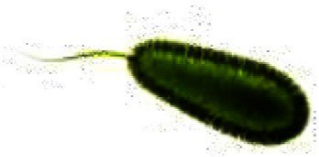
المنهاج الجديد

0787468840

الدرس 1

تكامل اقترانات خاصة
Integration of Special Functions

مسألة اليوم



يُمثِّل الاقتران $P(t)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يومًا من بَدْء دراستها في مجتمع بكتيري. إذا كان عدد هذه الخلايا عند بَدْء الدراسة هو 200000 خلية، فأجد عددها في المجتمع البكتيري بعد 12 يومًا من بَدْء الدراسة، علمًا بأنَّها تتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = 200e^{0.1t} + 150e^{-0.03t}$.

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 2e^{4x+3}\,dx$

2) $\int_0^2 (6e^{-3x} + x^3)\,dx$

3) $\int \sqrt{e^{x+1}}\,dx$

4) $\int (5^x + 7)\,dx$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (5x^2 - 3e^{7x})\,dx$

b) $\int_0^{\ln 3} 8e^{4x}\,dx$

c) $\int \sqrt{e^{1-x}}\,dx$

d) $\int (3^x + 2\sqrt{x})\,dx$

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 2\sin(4x+3)\,dx$

2) $\int (3\cos x + \sqrt[3]{x})\,dx$

3) $\int_0^{\pi/12} \sec^2 3x\,dx$

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos(3x-\pi)dx$ b) $\int (\csc^2(5x)+e^{2x})\,dx$ c) $\int_0^{\pi/3} (\sin 2x-\cos 4x)\,dx$

مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \tan^2 2x\,dx$ 2) $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$ 3) $\int \sin 4x\cos 5x\,dx$ 4) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos^4 x\,dx$ b) $\int_0^{\pi/6} \sin 3x\sin x\,dx$ c) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

مثال 4

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(2e^x+\frac{3}{x}\right)dx$ 2) $\int \frac{1}{4x-1}dx$ 3) $\int \frac{2x^5-4}{x}dx$ 4) $\int \frac{2x}{x^2-1}dx$

5) $\int \frac{6x}{x^2+9}dx$ 6) $\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}dx$ 7) $\int \tan x\,dx$ 8) $\int \sec x\,dx$

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \left(\sin x-\frac{5}{x}\right)dx$ b) $\int \frac{5}{3x+2}dx$ c) $\int \frac{x^2-7x+2}{x^2}dx$

d) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}dx$ e) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}dx$ f) $\int \cot x\,dx$

g) $\int \frac{e^x}{e^x+7}dx$ h) $\int \csc x\,dx$

مثال 5

أجد: $\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

أتحقَّق من فهمي

أجد: $\int \frac{x^2+x+1}{x+1}\,dx$.

مثال 6

1) إذا كان: $f(x)=\begin{cases}12 & ,x<2\\ 3x^2 & ,x\geq 2\end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_1^4 f(x)\,dx$.

2) إذا كان: $f(x)=|x|$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{6} f(x)dx$.

3) إذا كان: $f(x)=|4-x^2|$، فأجد قيمة: $\int_0^3 f(x)dx$.

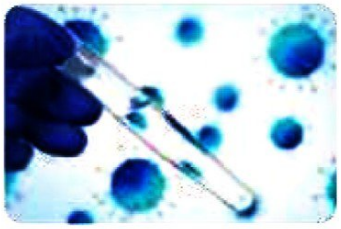
أتحقَّق من فهمي

a) إذا كان: $f(x)=\begin{cases}1+x & ,x<1\\ 2x & ,x\geq 1\end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

b) إذا كان: $f(x)=|1-x|$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

c) إذا كان: $f(x)=|x^2-1|$، فأجد قيمة: $\int_{-4}^{0} f(x)dx$.

مثال 7 : من الحياة



تلوُّث: يُعالَج التلوُّث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا. إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارَّة في البحيرة يتغيَّر بمُعدَّل: $N'(t)=-\frac{2000t}{1+t^2}$، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل مِلّيلتر من الماء، بعد t يومًا من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل مِلّيلتر.

أتحقَّق من فهمي

تلوُّث: تسـرَّب نفط من ناقلـة بحرية، مُكوِّنًا بقعة دائرية الشـكل على سـطح الماء، نصف قُطْرهـا $R(t)$ قدمًا بعـد t دقيقة من بَدْء التسـرُّب. إذا كان نصف قُطْر الدائـرة يزداد بمُعدَّل: $R'(t) = \frac{21}{0.07t + 5}$، فأجد $R(t)$، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

مثال 8

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سـرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \sin t$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

1. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بَدْء الحركة.
2. أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, 3\pi]$.
3. أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 3\pi]$.

أتحقَّق من فهمي

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 3 \cos t$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

a) إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{6}$ ثانية من بَدْء الحركة.

b) أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, 2\pi]$.

c) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 2\pi]$.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int (e^{2x-3} - \sqrt{x})\, dx$
2. $\int \left(e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}}\right) dx$
3. $\int (4 \sin 5x - 5 \cos 4x)\, dx$
4. $\int \left(3 \sec x \tan x - \frac{2}{5x}\right) dx$
5. $\int \left(\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}}\right)^2 dx$
6. $\int (\sin (5 - 3x) + 2 + 4x^2)\, dx$

7 $\int (e^x + 1)^2 \, dx$

8 $\int (e^{4-x} + \sin(4-x) + \cos(4-x)) dx$

9 $\int \frac{x^4 - 6}{2x} dx$

10 $\int \left(3\csc^2(3x+2) + \frac{5}{x}\right) dx$

11 $\int \frac{e^x + 1}{e^x} dx$

12 $\int \frac{e^x}{e^x + 4} dx$

13 $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x + 4} dx$

14 $\int \frac{dx}{5 - \frac{x}{3}}$

15 $\int \frac{1}{1 - \sin x} dx$

16 $\int \sec^2 x \, (1 + e^x \cos^2 x) dx$

17 $\int \left(\frac{2}{x} - 2^x\right) dx$

18 $\int \sin 3x \cos 2x \, dx$

19 $\int \frac{2x + 3}{3x^2 + 9x - 1} dx$

20 $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx$

21 $\int \left(\frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} + (\sin^2 x \csc x)\right) dx$

22 $\int (\sec x + \tan x)^2 \, dx$

23 $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

24 $\int \frac{x^2}{x^3 - 3} dx$

25 $\int (9\cos^2 x - \sin^2 x - 6 \sin x \cos x) \, dx$

26 $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

27 $\int_0^{\pi} 2 \cos \frac{1}{2} x \, dx$

28 $\int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx$

29 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} 3 \tan^2 x \, dx$

30 $\int_1^e \frac{8x}{x^2 + 1} dx$

31 $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos x \, dx$

32 $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} dx$

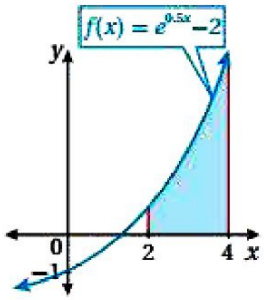
33 $\int_0^3 (x - 5^x) \, dx$

34 $\int_0^4 |x^2 - 4x + 3| \, dx$

35 $\int_1^4 (3 - |x - 3|) \, dx$

36 إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & , x < 0 \\ 4 - x & , x \geq 0 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{1} f(x) \, dx$.

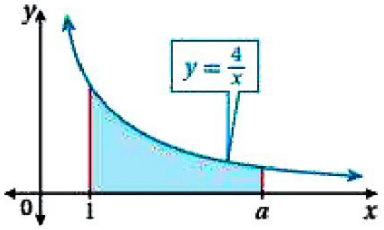
37 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة بين المحور x ومنحنى الاقتران: $f(x) = e^{0.5x} - 2$ المُمثَّل في الشكل المجاور.



38 إذا كان: $\int_a^{3a} \frac{2x+1}{x}\,dx = \ln 12$، فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a > 0$.

39 أُثبِت أنَّ: $\int_0^a \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \ln\sqrt{2}$، حيث: $a \neq 0$.

40 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{4}{x}$. إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و$x = a$، هي 10 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت a.



41 إذا كان: $f(x) = \int \cos\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)\,dx$، وكان: $f(\pi) = 3$، فأجد $f(0)$.

42 إذا كان: $y = \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\,dx$، وكان: $y = 1$ عندما $x = \frac{\pi}{4}$، فأُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة y في صورة: $y = \frac{1 + \sin 2x}{2}$.

43 يُمثِّل الاقتران: $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - 2e^{-x}$ ميل المماس لمنحنى الاقتران y. أجد قاعدة الاقتران y إذا علمْتُ أنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(0, 1)$.

44 إذا كان: $\int_{\pi/9}^{\pi} (9 + \sin 3x)\,dx = a\pi + b$، فأجد قيمة الثابتين النسبيين: a، وb.

45 يُمثِّل الاقتران: $f'(x) = \cos^2 x$ ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$. أجد قاعدة الاقتران f إذا علمْتُ أنَّ منحناه يمرُّ بنقطة الأصل.

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 3 m، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

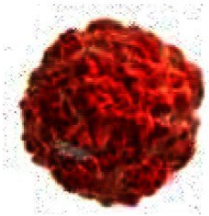
46 موقع الجُسَيْم بعد t ثانية.

47 موقع الجُسَيْم بعد 100 ثانية.

بيئة: في دراسة تناولت أحد أنواع الحيوانات المُهدَّدة بالانقراض في غابة، تَبيَّن أنَّ عدد حيوانات هذا النوع $P(t)$ يتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$، حيث t الزمن بالسنوات بعد بَدْء الدراسة:

48 أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ عدد حيوانات هذا النوع عند بَدْء الدراسة هو 500 حيوان.

49 أجد عدد الحيوانات بعد 10 سنوات من بَدْء الدراسة، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.



طب: في تجربة لدواء جديد أُعطِي لمريض لديه ورم حميد، حجمه $30\ \text{cm}^3$، تَبيَّن أنَّ حجم الورم بعد t يومًا من بَدْء التجربة يتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = 0.15 - 0.9e^{0.006t}$ مَقيسًا بوحدة (cm^3/day):

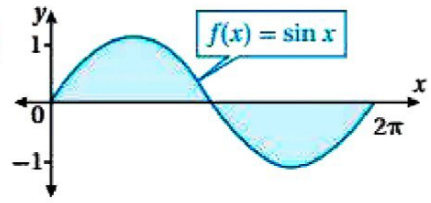
50 أجد قاعدة حجم الورم بعد t يومًا من بَدْء التجربة.

51 أجد حجم الورم بعد 10 أيام من بَدْء التجربة.

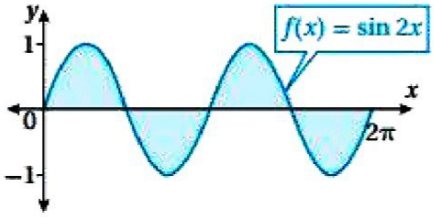
مهارات التفكير العليا

تبرير: أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين، مُبرِّرًا إجابتي:

52



53



تحدَّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

54 $\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x}\, dx$ 55 $\int \frac{\cot x}{2 + \sin x}\, dx$ 56 $\int \frac{1}{x \ln x^3}\, dx$

57 تبرير: إذا كان: $\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3}\right) dx = 0.5 \ln 5$، فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a > 0$.

58 تبرير: أُثبِت بطريقتين مختلفتين أنَّ: $\int_0^{\pi/4} \cos x \cos 3x\, dx - \int_0^{\pi/4} \sin x \sin 3x\, dx = 0$.

59 تبرير: إذا كان: $\int_{\pi/4k}^{\pi/3k} (1 - \pi \sin kx)\, dx = \pi(7 - 6\sqrt{2})$، فأجد قيمة الثابت k، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدَّ: يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

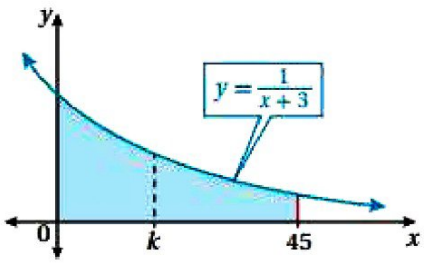
$$v(t) = \begin{cases} 2t + 4 & , 0 \le t \le 6 \\ 20 - (t-8)^2 & , 6 < t \le 10 \end{cases}$$

حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

60 موقع الجُسَيْم بعد 5 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

61 موقع الجُسَيْم بعد 9 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

62 تحدَّ: يُبيِّن الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $y = \frac{1}{x+3}$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$، و$x = 45$. أجد قيمة k التي تقسم المنطقة المُظلَّلة إلى منطقتين متساويتين في المساحة.



كتاب التمارين

الدرس 1

تكامل اقترانات خاصة
Integration of Special Functions

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int 4e^{-5x}\,dx$
2. $\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx$
3. $\int \cos^2 2x\,dx$
4. $\int \frac{e^x + 4}{e^{2x}}\,dx$
5. $\int \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2e^x\right)dx$
6. $\int (3\cos 3x - \tan^2 x)\,dx$
7. $\int \cos x\,(1 + \csc^2 x)\,dx$
8. $\int \frac{x^2 + x - 4}{x + 2}\,dx$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$
10. $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$
11. $\int \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2}\,dx$
12. $\int \ln e^{\cos x}\,dx$
13. $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$
14. $\int \frac{3}{2x - 1}\,dx$
15. $\int \frac{3 - 2\cos \frac{1}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 4}\,dx$
17. $\int_1^2 \frac{dx}{3x - 2}$
18. $\int_0^{\pi/3} \sin x\,\cos x\,dx$
19. $\int_{-1}^{1} |3x - 2|\,dx$
20. $\int_0^{\pi/4} (\cos x + 3\sin x)^2\,dx$
21. $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$
22. $\int_0^{\pi/16} (\cos^2 2x - 4\sin^2 x\cos^2 x)\,dx$
23. $\int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x}\,dx$
24. $\int_0^1 \frac{6x}{3x + 2}\,dx$
25. إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , x \le 3 \\ 10 - x & , x > 3 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_1^5 f(x)\,dx$.
26. إذا كان: $\int_1^k \frac{4}{2x - 1}\,dx = 1$، فأجد قيمة الثابت k، حيث: $k > \frac{1}{2}$.
27. إذا كان: $\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x})\,dx = \frac{48}{7}$، فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a > 0$.

الدرس 2

التكامل بالتعويض
Integration by Substitution

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران $G(t)$ الكتلة الحيوية لمجتمع أسماك في بحيرة بعد t سنة من بَدْء دراستها، حيث G مَقيسة بالكيلوغرام. إذا كان مُعدَّل تغيُّر الكتلة الحيوية للأسماك هو $G'(t) = \frac{60000e^{-0.6t}}{(1+5e^{-0.6t})^2}$ مَقيسًا بوحدة (kg/year)، وكانت الكتلة الحيوية للأسماك عند بَدْء الدراسة هي 25000 kg، فأجد الكتلة الحيوية المُتوقَّعة للأسماك بعد 20 سنة من بَدْء الدراسة.

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int 6x^2(2x^3-3)^4\,dx$
2. $\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx$
3. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$
4. $\int x^3\cos(x^4-5)\,dx$
5. $\int \sin^3 2x\cos 2x\,dx$
6. $\int \frac{5^{1/x}}{x^2}\,dx$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 4x^2\sqrt{x^3-5}\,dx$

b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$

c) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

d) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

e) $\int \cos^4 5x\sin 5x\,dx$

f) $\int x\,2^{x^2}\,dx$

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int x\sqrt{2x+5}\,dx$ 2) $\int x^5\left(1+x^2\right)^3\,dx$ 3) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$ b) $\int x^7\left(x^4-8\right)^3\,dx$ c) $\int \frac{e^{3x}}{(1-e^x)^2}\,dx$

مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ 2) $\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\,dx$

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$ b) $\int x\sqrt[3]{(1-x)^2}\,dx$

مثال 4 : من الحياة

زراعة: يُمثِّل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية بالدينار بعد t سنة من الآن. إذا كان: $V'(t)=\frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4+8000}}$ هو مُعدَّل تغيُّر سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$، علمًا بأنَّ سعر دونم الأرض الآن هو JD 5000.

أتحقّق من فهمي

أسعار: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر قطعة (بالدينار) تُستعمَل في أجهزة الحاسوب، حيث x عدد القطع المَبيعة منها بالمئات. إذا كان: $p'(x) = \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو مُعدَّل تغيُّر سعر هذه القطعة، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر القطعة الواحدة هو 30 JD عندما يكون عدد القطع المَبيعة منها 400 قطعة.

مثال 5

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1) $\int \cos^3 x\, dx$

2) $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx$

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \sin^3 x\, dx$

b) $\int \cos^5 x \sin^2 x\, dx$

مثال 6

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \tan^3 x\, dx$

2) $\int \cot^4 x\, dx$

3) $\int \sec^4 x \tan^3 x\, dx$

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \tan^4 x\, dx$

b) $\int \cot^5 x\, dx$

c) $\int \sec^4 x \tan^6 x\, dx$

مثال 7

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

1) $\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{1+\sin x}\, dx$

2) $\int_1^{25} \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx$

أتحقّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

a) $\int_0^2 x(x+1)^3\,dx$

b) $\int_0^{\pi/3} \sec x \tan x \sqrt{\sec x + 2}\,dx$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int x^2 (2x^3+5)^4\,dx$
2. $\int x^2 \sqrt{x+3}\,dx$
3. $\int x(x+2)^3\,dx$
4. $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx$
5. $\int \sin x \cos 2x\,dx$
6. $\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}\,dx$
7. $\int \sec^4 x\,dx$
8. $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$
9. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$
10. $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$
11. $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}\,dx$
12. $\int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}}\,dx$
13. $\int x \sqrt[3]{x+10}\,dx$
14. $\int \left(\sec^2 \frac{x}{2} \tan^7 \frac{x}{2}\right) dx$
15. $\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\,dx$
16. $\int (1+\sqrt[3]{\sin x}) \cos^3 x\,dx$
17. $\int \sin x \sec^5 x\,dx$
18. $\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

19. $\int_0^{\pi/4} \sin x \sqrt{1-\cos^2 2x}\,dx$
20. $\int_0^{\pi/2} x \sin x^2\,dx$
21. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
22. $\int_0^{\pi/3} \sec^2 x \tan^5 x\,dx$
23. $\int_0^2 (x-1)e^{(x-1)^2}\,dx$
24. $\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

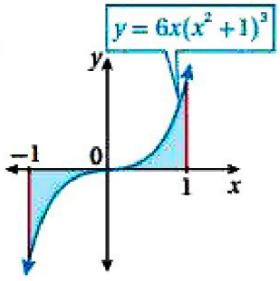
25 $\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2}\,dx$

26 $\int_0^{\pi/6} 2^{\cos x}\sin x\,dx$

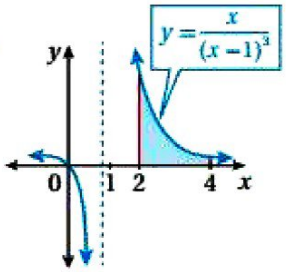
27 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x\cot^5 x\,dx$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

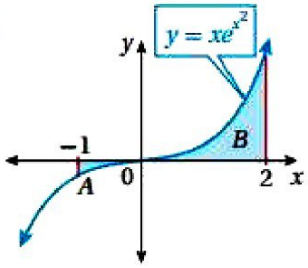
28



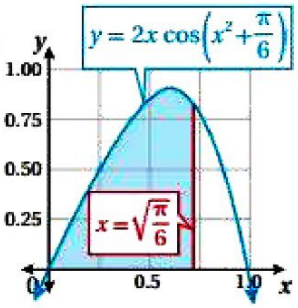
29



30



31

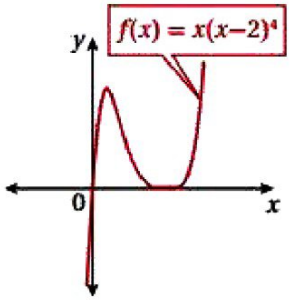


في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

32 $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2\,;\,(2, 10)$

33 $f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3}\,;\,(0, \frac{3}{2})$

يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = x(x-2)^4$



34 أجد إحداثيي نقطة تماس الاقتران مع المحور x.

35 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x.

36 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \sin \omega t \cos^2 \omega t$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، وω ثابت. إذا انطلق الجُسَيْم من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

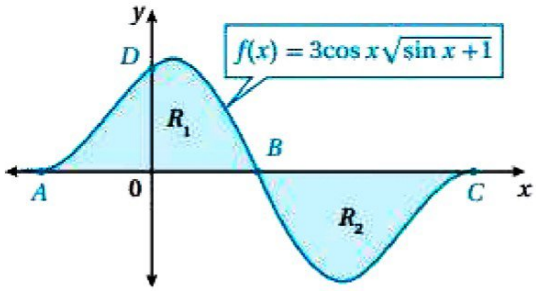
37 طب: يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t دقيقة من حقنه في جسم مريض، حيث C مَقيسة بالمِلّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب (mg/cm^3). إذا كان تركيز الدواء لحظة حقنه في جسم المريض $0.5\ mg/cm^3$، وأخذ يتغيَّر بمُعدَّل $C'(t) = \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1+e^{-0.01t})^2}$، فأجد $C(t)$.

38 أجد قيمة: $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^x - 2}\,dx$، ثم أكتب الإجابة بالصيغة الآتية: $\frac{a}{b} + c \ln d$، حيث: a، وb، وc، وd ثوابت صحيحة.

39 إذا كان: $f'(x) = \tan x$، وكان: $f(3) = 5$، فأُثبِت أنَّ: $f(x) = \ln\left|\frac{\cos 3}{\cos x}\right| + 5$.

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = 3\cos x\sqrt{\sin x + 1}$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:



40 أجد إحداثي كلٍّ من النقاط: A، وB، وC، وD.

41 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

42 أُبيِّن أنَّ للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

43 تحدٍّ: أجد قيمة: $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

44 تبرير: إذا كان f اقترانًا متصلًا، فأُثبِت أنَّ: $\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx$.

45 تبرير: إذا كان a وb عددين حقيقيين موجبين، فأُثبِت أنَّ: $\int_0^1 x^a (1-x)^b\,dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a\,dx$.

تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

46 $\int \frac{dx}{x \ln x (\ln(\ln x))}$

47 $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$

48 $\int \sin 2x\,(1+\sin x)^3\,dx$

كتاب التمارين

الدرس 2

التكامل بالتعويض
Integration by Substitution

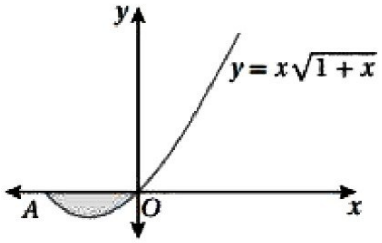
أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$
2. $\int \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2 \sin\frac{x}{2}\,dx$
3. $\int \csc^5 x \cos^3 x\,dx$
4. $\int x \sin x^2\,dx$
5. $\int x^3 (x+2)^7\,dx$
6. $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$
7. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
8. $\int \frac{\sin\left(\ln 4x^2\right)}{x}\,dx$
9. $\int \sec^2 x \cos^3(\tan x)\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

10. $\int_6^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}}\,dx$
11. $\int_2^5 \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\,dx$
12. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}\,dx$
13. $\int_1^4 \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}\,dx$
14. $\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$
15. $\int_0^{\pi/3} \cos^2 x \sin^3 x\,dx$

16. يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = x\sqrt{x+1}$.
أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في هذا الشكل.



في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

17. $f'(x) = 16 \sin x \cos^3 x; \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$
18. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}; (2, 1)$

19 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^{3/2}}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 4 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية.

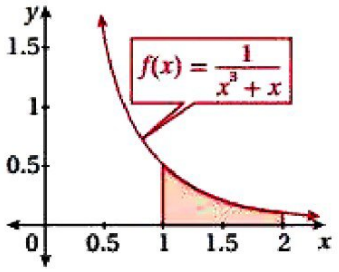
الدرس 3

التكامل بالكسور الجزئية
Integration by Partial Fractions

مسألة اليوم

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$.

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة منه.



مثال 1

أجد: $\int \frac{x-5}{x^2-x-2}\,dx$.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{x-7}{x^2-x-6}\,dx$

b) $\int \frac{3x-1}{x^2-1}\,dx$

مثال 2

أجد: $\int \frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+x}\,dx$.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2}\,dx$

b) $\int \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

مثال 3

أجد: $\int \frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)}\,dx$.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)}\,dx$

b) $\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1}\,dx$

مثال 4

أجد: $\int \frac{3x^4-1}{x^2-1}\,dx$.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{4x^3-5}{2x^2-x-1}\,dx$

b) $\int \frac{x^2+x-1}{x^2-x}\,dx$

مثال 5

أجد قيمة: $\int_0^2 \frac{x-2}{x^2+5x+4}\,dx$.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int_3^4 \frac{2x^3+x^2-2x-4}{x^2-4}\,dx$

b) $\int_5^6 \frac{3x-10}{x^2-7x+12}\,dx$

مثال 6

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x}\,dx$

2) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-16}\,dx$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x-1}\,dx$

b) $\int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}\,dx$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

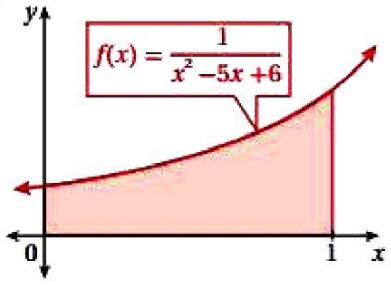
1. $\int \frac{x-10}{x(x+5)}\,dx$
2. $\int \frac{2}{1-x^2}\,dx$
3. $\int \frac{4}{(x-2)(x-4)}\,dx$
4. $\int \frac{3x+4}{x^2+x}\,dx$
5. $\int \frac{x^2}{x^2-4}\,dx$
6. $\int \frac{3x-6}{x^2+x-2}\,dx$
7. $\int \frac{4x+10}{4x^2-4x-3}\,dx$
8. $\int \frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6}\,dx$
9. $\int \frac{4x}{x^2-2x-3}\,dx$
10. $\int \frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$
11. $\int \frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4}\,dx$
12. $\int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x}\,dx$
13. $\int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2}\,dx$
14. $\int \frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)}\,dx$
15. $\int \frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2}\,dx$
16. $\int \frac{3-x}{2-5x-12x^2}\,dx$
17. $\int \frac{3x^3-x^2+12x-6}{x^4+6x^2}\,dx$
18. $\int \frac{5x-2}{(x-2)^2}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

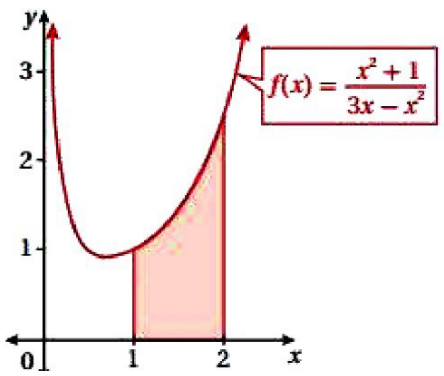
19. $\int_2^4 \frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2}\,dx$
20. $\int_{-1/3}^{1/3} \frac{9x^2+4}{9x^2-4}\,dx$
21. $\int_0^1 \frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2}\,dx$
22. $\int_1^4 \frac{4}{16x^2+8x-3}\,dx$
23. $\int_3^4 \frac{5x+5}{x^2+x-6}\,dx$
24. $\int_3^4 \frac{4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

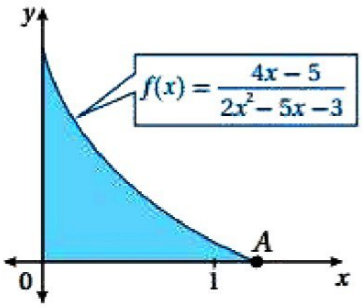
25.



26.



يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x)=\frac{4x-5}{2x^2-5x-3}$



27 أجد إحداثي النقطة A.

28 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

29 $\int \frac{\sin x}{\cos x+\cos^2 x}\,dx$

30 $\int \frac{1}{x^2+x\sqrt{x}}\,dx$

31 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

32 $\int \frac{\cos x}{\sin x(\sin^2 x-4)}\,dx$

مهارات التفكير العليا

تبرير: أحُلُّ السؤالين الآتيين تباعًا:

33 أجد: $\int \frac{dx}{1+e^x}$ بطريقتين مختلفتين، إحداهما الكسور الجزئية، مُبرِّرًا إجابتي.

34 أجد: $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

35 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_4^9 \frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2}\,dx=\ln\left(\frac{32}{3}\right)-\frac{5}{24}$.

36 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_9^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x-4}\,dx=4\left(1+\ln\left(\frac{5}{3}\right)\right)$.

37 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_0^1 \frac{4x^2+9x+4}{2x^2+5x+3}\,dx=2+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{12}$.

تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

38 $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

39 $\int \frac{x}{16x^4-1}\,dx$

40 $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$

إرشاد للسؤال 40: ما المضاعف المشترك الأصغر لدليلي الجذرين؟

كتاب التمارين

الدرس 3

التكامل بالكسور الجزئية
Integration by Partial Fractions

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

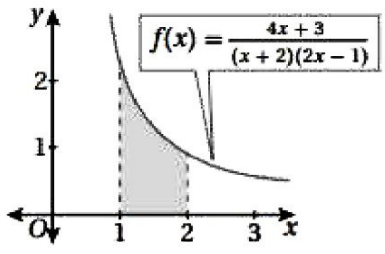
1. $\int \frac{4}{x^2+4x}\,dx$
2. $\int \frac{6}{x^2-9}\,dx$
3. $\int \frac{x^2-3x+8}{x^3-3x-2}\,dx$
4. $\int \frac{x-10}{x^2-2x-8}\,dx$
5. $\int \frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1}\,dx$
6. $\int \frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)}\,dx$
7. $\int \frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}\,dx$
8. $\int \frac{8x}{x^3+x^2-x-1}\,dx$
9. $\int \frac{4}{x^3-2x^2}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

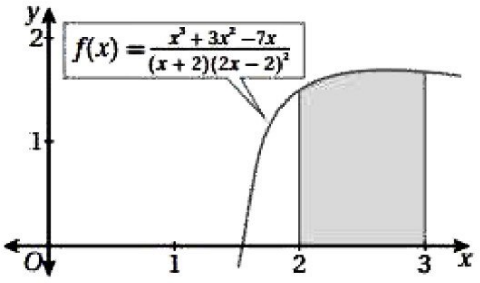
10. $\int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx$
11. $\int_7^{12} \frac{4-x}{(x-2)^2}\,dx$
12. $\int_1^2 \frac{4}{x^2+8x+15}\,dx$
13. $\int_1^2 \frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x}\,dx$
14. $\int_2^5 \frac{25}{(x+1)(2x-3)^2}\,dx$
15. $\int_0^2 \frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6}\,dx$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

16.



17.



أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

18. $\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}\,dx$
19. $\int \frac{5\cos x}{\sin^2 x+3\sin x-4}\,dx$
20. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x+5\tan x+6}\,dx$

21 أُثبِت أنَّ: $\int_0^1 \frac{4x}{x^2-2x-3}\,dx = \ln\left(\frac{16}{27}\right)$.

22 أُثبِت أنَّ: $\int_1^p \frac{1}{2x^2+x-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln\frac{4p-2}{p+1}$، حيث: $p > 1$.

الدرس 4

التكامل بالأجزاء
Integration by Parts

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران: $S'(t) = 350 \ln(t+1)$ مُعدَّل تغيُّر المبيعات الشهرية لكرة قدم جديدة، حيث t عدد الأشهر منذ طرح الكرة في الأسواق، و $S(t)$ عدد الكرات المَبيعة شهريًّا. أجد $S(t)$، علمًا بأنَّ $S(0) = 0$.

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int x \cos x \, dx$ 2) $\int \ln x \, dx$ 3) $\int x(2x+7)^5 \, dx$ 4) $\int x e^{3-x} \, dx$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int x \sin x \, dx$ b) $\int x^2 \ln x \, dx$ c) $\int 2x\sqrt{7-3x} \, dx$ d) $\int 3x e^{4x} \, dx$

مثال 2

أجد: $\int x^2 e^{2x} \, dx$.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int x^2 \sin x \, dx$ b) $\int x^3 e^{4x} \, dx$

مثال 3

أجد: $\int e^x \cos x \, dx$.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{\sin x}{e^x} dx$

b) $\int \sec^3 x \, dx$

مثال 4

أجد: $\int x^3 \sin x \, dx$.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int x^4 \cos 4x \, dx$

b) $\int x^5 e^x \, dx$

مثال 5 : من الحياة

الربح الحدِّي: يُمثِّل الاقتران: $P'(x) = 1000x^2 e^{-0.2x}$ الربح الحـدِّي (بالدينار) لـكل مُكيِّـف تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد المُكيِّفات المَبيعة، و $P(x)$ مقدار الربح بالدينار عند بيع x مُكيِّفًا. أجد اقتران الربح $P(x)$، علمًا بأنَّ $P(0) = -2000$.

أتحقَّق من فهمي

التكلفـة الحدِّية: يُمثِّل الاقتـران: $C'(x) = (0.1x + 1)e^{0.03x}$ التكلفـة الحدِّية لكل قطعة (بالدينار) تُنتَج في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ $C(10) = 200$.

مثال 6

أجد قيمة: $\int_1^2 x^3 \ln x \, dx$.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

b) $\int_0^1 xe^{-2x}\,dx$

مثال 7

أجد الاقتران: $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int (x^3 + x^5)\sin x^2\,dx$

b) $\int x^5 e^{x^2}\,dx$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int (x+1)\cos x\,dx$
2. $\int xe^{x/2}\,dx$
3. $\int (2x^2-1)\,e^{-x}\,dx$
4. $\int \ln\sqrt{x}\,dx$
5. $\int x\sin x\,\cos x\,dx$
6. $\int x\,\sec x\,\tan x\,dx$
7. $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$
8. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$
9. $\int 2x^2\sec^2 x\,\tan x\,dx$
10. $\int (x-2)\sqrt{8-x}\,dx$
11. $\int x^3\cos 2x\,dx$
12. $\int \frac{x}{6^x}\,dx$
13. $\int e^{-x}\sin 2x\,dx$
14. $\int \cos x\ln\sin x\,dx$
15. $\int e^x \ln(1+e^x)\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16. $\int_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx$
17. $\int_1^e \ln x^2\,dx$
18. $\int_1^2 \ln(xe^x)\,dx$

19 $\int_{\pi/12}^{\pi/9} x \sec^2 3x \, dx$

20 $\int_{1}^{e} x^4 \ln x \, dx$

21 $\int_{0}^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx$

22 $\int_{0}^{1} x(e^{-2x} + e^{-x}) \, dx$

23 $\int_{0}^{1} \frac{xe^x}{(1+x)^2} \, dx$

24 $\int_{0}^{1} x\, 3^x \, dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

25 $\int x^3 e^{x^2} \, dx$

26 $\int \cos(\ln x) \, dx$

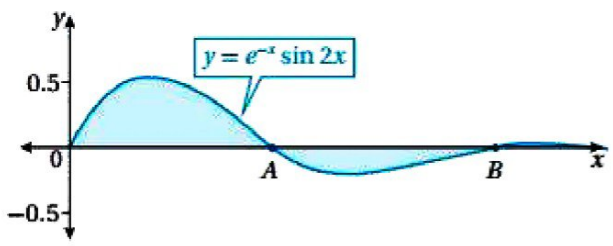
27 $\int x^3 \sin x^2 \, dx$

28 $\int e^{\cos x} \sin 2x \, dx$

29 $\int \sin\sqrt{x} \, dx$

30 $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} \, dx$

إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = e^{-x} \sin 2x$، حيث: $x \geq 0$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:



31 أجد إحداثي كلٍّ من النقطة A، والنقطة B.

32 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

33 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = t\,e^{-t/2}$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

34 $f'(x) = (x+2)\sin x\,;\,(0,2)$

35 $f'(x) = 2xe^{-x}\,;\,(0,3)$

36 دورة تدريبية: تقدَّمت دعاء لدورة تدريبية مُتقدِّمة في الطباعة. إذا كان عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة يزداد بمُعدَّل: $N'(t) = (t+6)e^{-0.25t}$، حيث $N(t)$ عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة بعد t أسبوعًا من التحاقها بالدورة، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ دعاء كانت تطبع 40 كلمة في الدقيقة عند بَدْء الدورة.

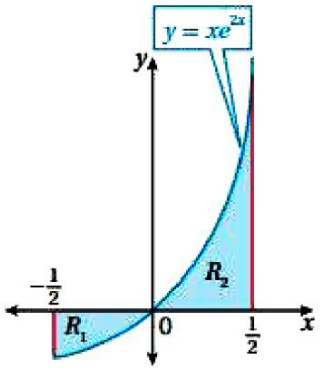
مهارات التفكير العليا

37 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_{1/2}^{3} x^2 \ln 2x \ dx = 9 \ln 6 - \frac{215}{72}$.

38 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_{0}^{\pi/4} x \sin 5x \sin 3x \ dx = \frac{\pi - 2}{16}$.

39 تبرير: إذا كان: $\int_{0}^{a} xe^{x/2} \ dx = 6$، فأُثبِت أنَّ a يُحقِّق المعادلة: $x = 2 + e^{-x/2}$.

40 تبرير: أجد: $\int (\ln x)^2 \ dx$ بطريقتين مختلفتين، مُبرِّرًا إجابتي.



تبرير: إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $y = xe^{2x}$، حيث: $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

41 أجد مساحة كلٍّ من المنطقة R_1، والمنطقة R_2.

42 أُثبِت أنَّ مساحة المنطقة R_1 إلى مساحة المنطقة R_2 تساوي e: $(e - 2)$.

تحدٍّ: أستعمل التكامل بالأجزاء لإثبات كلٍّ ممّا يأتي، حيث: n عدد صحيح موجب، و $a \neq 0$:

43 $\int x^n \ln x \ dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}(-1 + (n+1)\ln x) + C$

44 $\int x^n e^{ax} \ dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax} \ dx$

كتاب التمارين

الدرس 4

التكامل بالأجزاء
Integration by Parts

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int x \cos 4x \ dx$

2 $\int x\sqrt{x+1} \ dx$

3 $\int xe^{-x} \ dx$

4 $\int (x^2+1)\ln x\,dx$

5 $\int \ln x^3\,dx$

6 $\int e^{2x}\sin x\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

7 $\int_1^e \ln x\,dx$

8 $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

9 $\int_0^{\pi} x\cos\frac{1}{4}x\,dx$

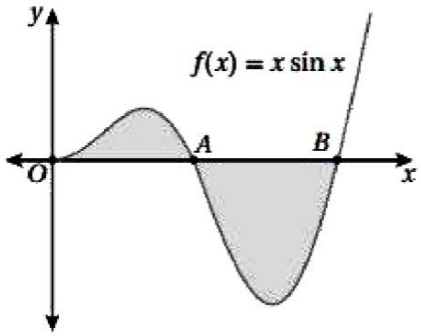
10 $\int_0^{\pi/4} e^{3x}\cos 2x\,dx$

11 $\int_1^e \ln(x+1)\,dx$

12 $\int_0^1 x^2 e^x\,dx$

13 أُثبِت أنَّ: $\int_2^4 \ln x\,dx = 6\ln 2 - 2$.

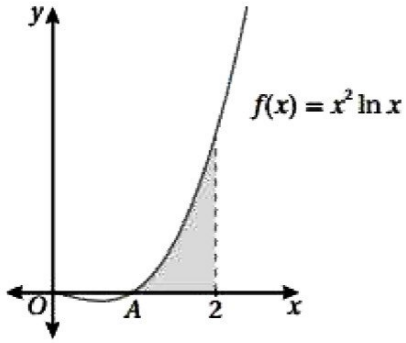
إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = x\sin x$، حيث: $x \geq 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



14 أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A، والنقطة B.

15 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = x^2\ln x$، حيث: $x \geq 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



16 أجد إحداثيي النقطة A.

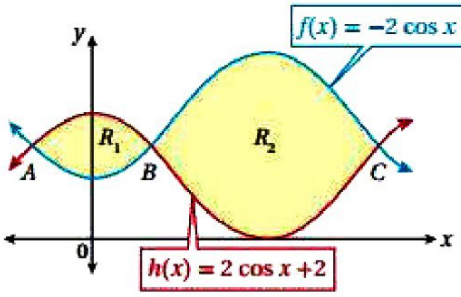
17 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

الدرس 5

المساحات والحجوم
Areas and Volumes

مسألة اليوم

مُعتمِدًا الشكل المجاور الذي يُبيِّن منحني الاقترانين: $f(x) = -2\cos x + 4$، و $h(x) = 2\cos x + 2$:



1. أجد إحداثي كلٍّ من النقاط: A، وB، وC.
2. أجد مساحة كلٍّ من المنطقة R_1، والمنطقة R_2.

مثال 1

1. أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = e^x$، و $g(x) = x$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = 2$.
2. أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \cos x$، و $g(x) = \sin x$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = \frac{\pi}{2}$.

أتحقَّق من فهمي

a) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$، و $g(x) = x^2 + 1$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = 3$.

b) أجد المساحة المحصورة بين منحني الاقترانين: $f(x) = \sin x$، و $g(x) = 2 - \sin x$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = \pi$.

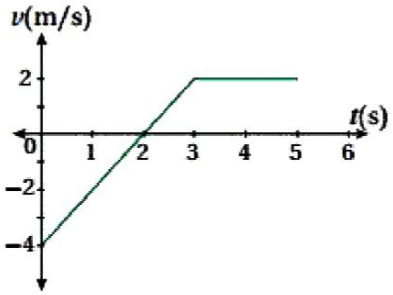
مثال 2

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^3$، و $g(x) = 4x - x^2$، في الربع الأوَّل من المستوى الإحداثي.

أتحقَّق من فهمي

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الاقترانين: $f(x) = x^2$، و $g(x) = x + 2$.

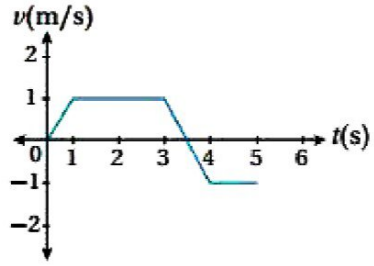
مثال 3



يُبيِّن الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 5]$. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x = 2$ عندما $t = 0$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1. إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.
2. المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.
3. الموقع النهائي للجُسَيْم.

أتحقَّق من فهمي



يُبيِّن الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 5]$. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x = 3$ عندما $t = 0$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

b) المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

c) الموقع النهائي للجُسَيْم.

مثال 4

أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = e^x$، والمحور x، من $x = -1$ إلى $x = 2$ حول المحور x.

أتحقَّق من فهمي

أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x}$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و$x = 4$ حول المحور x.

مثال 5

أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = x$، و$g(x) = x^3$، في الربع الأوَّل من المستوى الإحداثي حول المحور x.

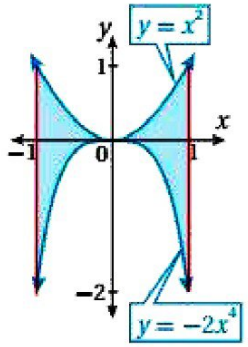
أتحقّق من فهمي

أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$، و $g(x) = x^2$ حول المحور x.

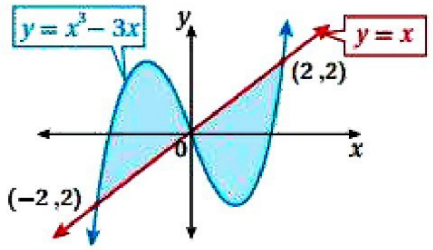
أتدرّب وأحلُّ المسائل

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

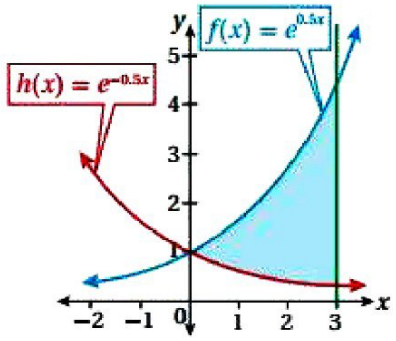
1



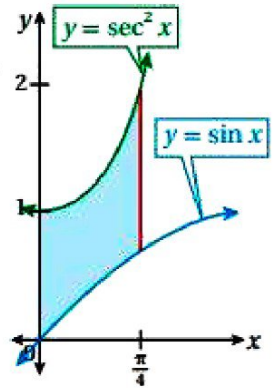
2



3



4



5 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6$، و $g(x) = 2x^2$.

6 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = 4^x$، و $g(x) = 3^x$، والمستقيم $x = 1$ في الربع الأوَّل.

7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = e^x$، و $g(x) = \cos x$، والمستقيم $x = \frac{\pi}{2}$، في الربع الأوَّل.

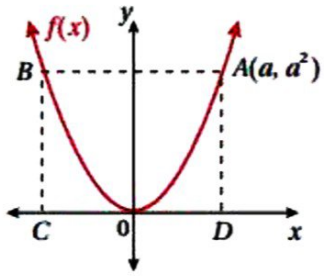
8 أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = |x|$، و $g(x) = x^4$.

9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$، و $g(x) = -x^2 + 2x$.

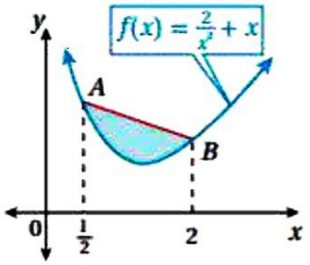
10 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = e^x$، و $g(x) = x^2$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = 1$.

11 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$، و $h(x) = 4\sqrt{x}$.

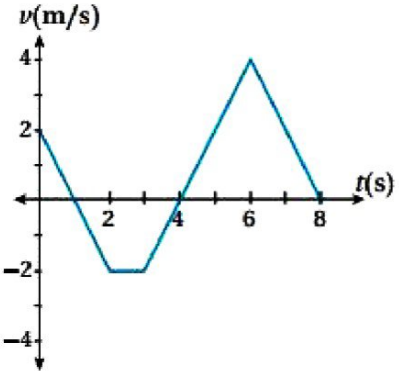
12 يُبيِّن الشكل التالي منحنى الاقتران: $f(x) = x^2$. إذا كان إحداثيا النقطة A هما $A(a, a^2)$، فأُثبِت أنَّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ تساوي ثلثي مساحة المستطيل $ABCD$.



13 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{2}{x^2} + x$. إذا كان الإحداثي x لكلٍّ من النقطة A والنقطة B هو $\frac{1}{2}$ و 2 على الترتيب، فأجد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم AB ومنحنى الاقتران $f(x)$.



يُبيِّن الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 8]$. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x = 5$ عندما $t = 0$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

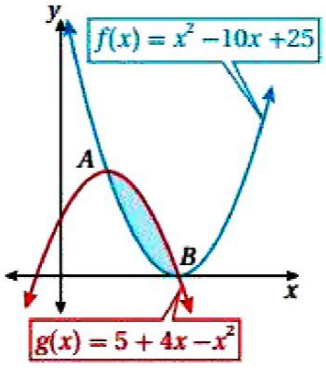


14 إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

15 المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

16 الموقع النهائي للجُسَيْم.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2 - 10x + 25$، و $g(x) = 5 + 4x - x^2$. مُعتمِدًا هذا الشكل، أُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



17 أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A، والنقطة B.

18 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المُظلَّلة حول المحور x.

19 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{\sin x}$ في الفترة $[0, \pi]$، والمحور x، حول المحور x.

20 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$، و $g(x) = x^3$ حول المحور x.

21 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 1 + \sec x$، في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ والمستقيم $y = 3$ حول المحور x.

مهارات التفكير العليا

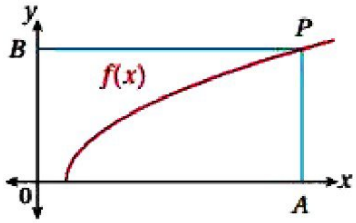
تبرير: أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

22 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $y = x^2$، و $y = x^{1/2}$.

23 أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $y = x^3$، و $y = x^{1/3}$.

24 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $y = x^n$، و $y = x^{1/n}$، حيث n عدد صحيح أكبر من أو يساوي 2، مُبرِّرًا إجابتي.

تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{2x - 2}$، حيث: $x \geq 1$.

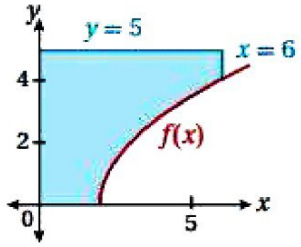


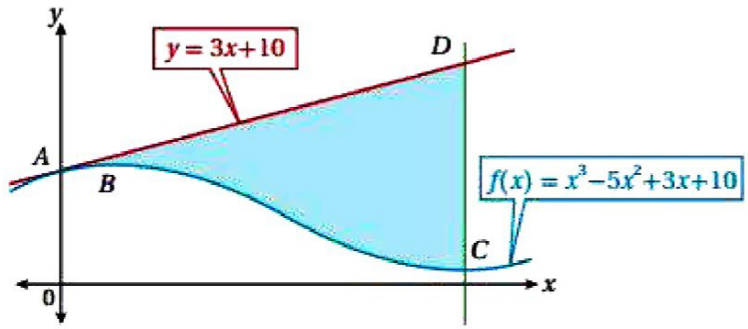
إذا كانت النقطة $P(9, 4)$ تقع على منحنى الاقتران $f(x)$، حيث $\overline{PA}$ يوازي المحور y، و $\overline{PB}$ يوازي المحور x، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

25 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمستقيم $y = 4$، والمحورين الإحداثيين.

26 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمستقيم $x = 9$، والمحور x.

27 تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين المحورين الإحداثيين في الربع الأوَّل، ومنحنى الاقتران: $f(x) = 2\sqrt{x-2}$، والمستقيمين: $x = 6$، و $y = 5$. أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة حول المحور x، مُبرِّرًا إجابتي.



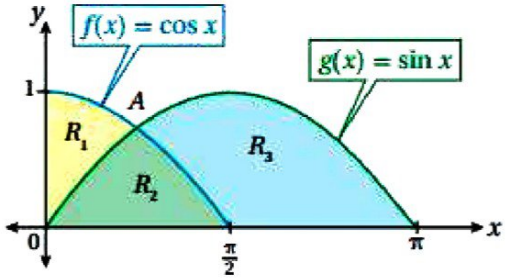


تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى كلٍّ من الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 10$، والمستقيم: $y = 3x + 10$. إذا مَرَّ المستقيم ومنحنى الاقتران بالنقطة A الواقعة على المحور y، وكان للاقتران $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند النقطة B، وقيمة صغرى محلية عند النقطة C، وقطع الخطُّ الموازي للمحور y والمارُّ بالنقطة C المستقيمَ: $y = 3x + 10$ في النقطة D؛ فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

28 أجد إحداثيات كلٍّ من النقطة B، والنقطة C.

29 أُثبِت أنَّ $\overline{AD}$ مماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة A، مُبرِّرًا إجابتي.

30 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة، مُبرِّرًا إجابتي.

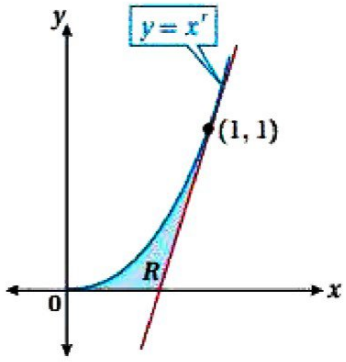


تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x) = \cos x$، و $h(x) = \sin x$. مُعتمِدًا هذا الشكل، أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

31 أجد إحداثيي النقطة A.

32 أجد مساحة كلٍّ من المناطق: R_1, R_2, R_3.

33 أُثبِت أنَّ مساحة المنطقة R_1 إلى مساحة المنطقة R_2 تساوي: $\sqrt{2} : 2$.



تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور المنطقة R المحصورة بين منحنى الاقتران: $y = x^r$، حيث: $r > 1$، والمحور x، ومماس منحنى الاقتران عند النقطة $(1, 1)$:

34 أُثبِت أنَّ مماس منحنى الاقتران يقطع المحور x عند النقطة $\left(\frac{r-1}{r}, 0\right)$.

35 أستعمل النتيجة من الفرع السابق لإثبات أنَّ مساحة المنطقة R هي $\frac{r-1}{2r(r+1)}$ وحدة مربعة.

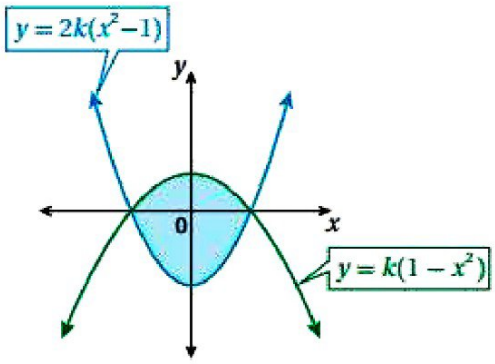
36 أجد قيمة الثابت r التي تجعل مساحة المنطقة R أكبر ما يُمكِن.

تحـــدٍّ: إذا كان العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4x + 6$ عند النقطة $(1, 3)$ يقطع منحنى الاقتران مَرَّة أُخرى عند النقطة P، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

37 إحداثيات النقطة P.

38 مســـاحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والعمودي على المماس، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية.

39 تبريـــر: المنطقة المُظلَّلة في الشـــكل المجـــاور محصورة بين قطعين مكافئين، يقطع كلٌّ منهمـــا المحور x عندما $x = -1$، و $x = 1$. إذا كانـــت معادلتا القطعين هما: $y = 2k(x^2 - 1)$، و $y = k(1 - x^2)$، وكانـــت مســـاحة المنطقـــة المُظلَّلة هي 8 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت k.

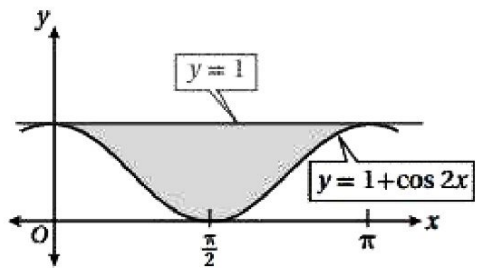


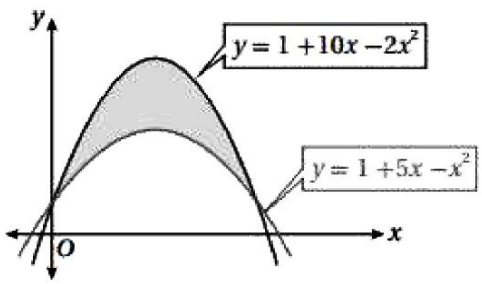
كتاب التمارين

الدرس 5

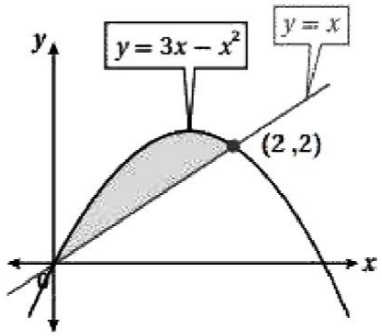
المساحات والحجوم
Areas and Volumes

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

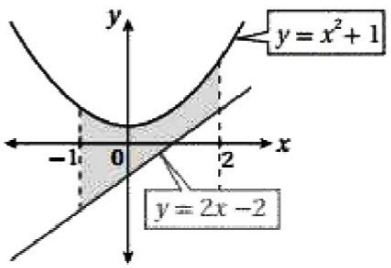
1


2


3



4

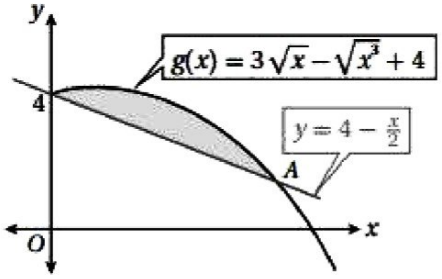


5 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2$، و $g(x) = 2 - x$.

6 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{x}$، و $g(x) = \frac{1}{x^2}$، والمستقيم $x = 2$.

7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \cos x$، و $g(x) = 1 - \cos x$، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = \pi$.

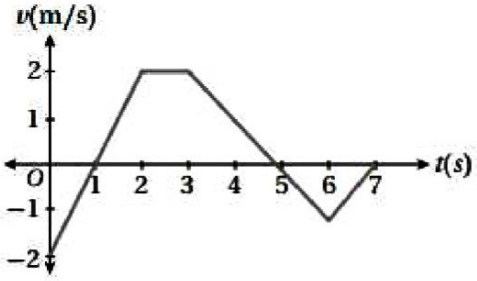
يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $g(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + 4$، والمستقيم $y = 4 - \frac{x}{2}$. مُعتمِدًا هذا الشكل، أُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



8 أجد إحداثيي النقطة A.

9 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

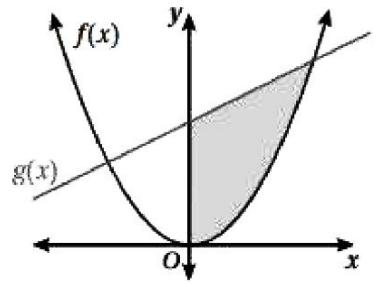
يُبيِّن الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 7]$. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x = 2$ عندما $t = 0$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



10 إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

11 المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

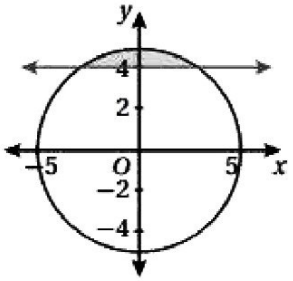
12 الموقع النهائي للجُسَيْم.



13 يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)=\frac{1}{2}x^2$، و $g(x)=\frac{1}{2}x+3$.
أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المُظلَّلة حول المحور x.

14 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=\sqrt{\ln x}$، والمحور x، والمستقيمين: $x=e$، و $x=e^3$ حول المحور x.

15 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x)=\sqrt{2x}$، و $g(x)=x^2$ حول المحور x.



16 **تبرير:** يُبيِّن الشكل المجاور دائرة معادلتها: $x^2+y^2=25$. إذا دار الجزء المُظلَّل المحصور بين الدائرة والمستقيم $y=4$ حول المحور x لتشكيل مُجسَّم، فأجد حجم المُجسَّم الناتج، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس 6

المعادلات التفاضلية
Differential Equations

مسألة اليوم

تتغيَّر درجة حرارة سائل كيميائي بارد، بعد وضعه في غرفة دافئة، بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dA}{dt} = 2(20 - A)$، حيث A درجة حرارة السائل بمقياس سيلسيوس، و t الزمن بالساعات:

1) أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد درجة حرارة السائل بعد t ساعة، علمًا بأنَّ درجة حرارته عند وضعه في الغرفة هي $5°C$.

2) بعد كم ساعةً تصبح درجة حرارة السائل $18°C$؟

مثال 1

أُحدِّد إذا كان الاقتران المعطى حلًّا للمعادلة التفاضلية: $y' + y = 0$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $y = e^{-x}$ 2) $y = 2\cos x$

أتحقَّق من فهمي

أُحدِّد إذا كان الاقتران المعطى حلًّا للمعادلة التفاضلية: $y'' - 4y' + 3y = 0$ في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $y = 4e^{x} + 5e^{3x}$ b) $y = \sin x$

مثال 2

أجد الحلَّ العام للمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = e^{x} - 6x^{2}$، ثم أجد الحلَّ الخاص لها الذي يُحقِّق النقطة $(1, 0)$.

أتحقَّق من فهمي

أجد الحلَّ العام للمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = 5\sec^2 x - \frac{3}{2}\sqrt{x}$، ثم أجد الحلَّ الخاص لها الذي يُحقِّق النقطة $(0, 7)$.

مثال 3

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

1) $\frac{dy}{dx} = -xy^2$

2) $\frac{dy}{dx} = x + xy$

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{8x^3}{4y - \sin y}$

4) $(1 + x^3)\frac{dy}{dx} = x^2 \tan y$

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^4}$

b) $\frac{dy}{dx} = 2x - xe^y$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x \sin x}{y}$

d) $\sin^2 x \frac{dy}{dx} = y^2 \cos^2 x$

مثال 4

أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممّا يأتي:

1) $\frac{dy}{dx} = \sin x \sec y,\ y(0) = 0$

2) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y},\ y(0) = 2$

أتحقَّق من فهمي

أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممّا يأتي:

a) $\frac{dy}{dx} = xy^2 e^{2x},\ y(0) = 1$

b) $\frac{dy}{dx} = y \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

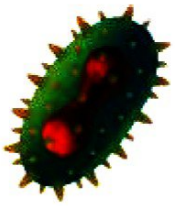
مثال 5

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = -s^2 \ln(t + 1)$، حيث t الزمن بالثواني، و s موقع الجُسَيْم بالأمتار. أجد موقع الجُسَيْم بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة، علمًا بأنَّ $s(0) = 0.5$.

أتحقّق من فهمي

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = st\sqrt{t+1}$، حيث t الزمن بالثواني، وs موقع الجُسَيْم بالأمتار. أجد موقع الجُسَيْم بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة، علمًا بأنَّ $s(0) = 1$.

مثال 6 : من الحياة



أمراض: انتشر مرض الحصبة في إحدى المدارس بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = \frac{s(1050-s)}{5000}$، حيث s عدد الطلبة المصابين بعد t يومًا من اكتشاف المرض:

1. أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الطلبة المصابين بعد t يومًا، علمًا بأنَّ عدد الطلبة المصابين عند اكتشاف المرض هو 50 طالبًا.
2. بعد كم يومًا يصبح عدد الطلبة المصابين 350 طالبًا؟

أتحقّق من فهمي

غزلان: يُمكِن نمذجة مُعدَّل تغيُّر عدد الغزلان في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dP}{dt} = \frac{1}{20000}P(1000-P)$، حيث P عدد الغزلان في الغابة بعد t سنة من بَدْء دراسة عليها:

a) أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الغزلان في الغابة بعد t سنة من بَدْء الدراسة، علمًا بأنَّ عددها عند بَدْء الدراسة هو 2500 غزال.

b) بعد كم سنةً يصبح عدد الغزلان في الغابة 1800 غزال؟

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُحدِّد إذا كان الاقتران المعطى حلًّا للمعادلة التفاضلية في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $y = \sqrt{x}; xy' - y = 0$
2. $y = x\ln x - 5x + 7; y'' - \frac{1}{x} = 0$
3. $y = \tan x; y' + y^2 = 1$
4. $y = e^x + 3xe^x; y'' - 2y' + y = 0$

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

5 $\frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y}$

6 $\frac{dy}{dx} + \frac{3x}{y^2} = 0$

7 $\frac{dy}{dx} = \cos x \sin y$

8 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(x^2+1)^2}$

9 $\frac{dy}{dx} = xe^{x+y}$

10 $e^{-1/x}\frac{dy}{dx} = x^{-2}y^2$

11 $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x-3}$

12 $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 \sin^2 y}{x^3+2}$

13 $\frac{dy}{dx} = y^3 \ln x$

14 $\frac{dy}{dx} = 2x^3(y^2-1)$

15 $y\frac{dy}{dx} = \sin^3 x \cos^2 x$

16 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

17 $\frac{dy}{dx} = y\ln\sqrt{x}$

18 $(2x+1)(x+2)\frac{dy}{dx} = -3(y-2)$

أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكلٍّ من المعادلات التفاضلية الآتية:

19 $\frac{dy}{dx} = y^2\sqrt{4-x}\,; y(1) = 2$

20 $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin^2 x}{y}\,; y(0) = 1$

21 $\frac{dy}{dx} = 2\cos^2 x \cos^2 y\,; y(0) = \frac{\pi}{4}$

22 $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x\, e^{\sin x}}{e^y}\,; y(\pi) = 0$

23 $\frac{dy}{dx} = \frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}\,; y(3) = 8$

24 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}\,; y(e) = 1$

25 تتحرَّك سيّارة في مسار مستقيم، ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dv}{dt} = 10 - 0.5v$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعتها المتجهة بالمتر لكل ثانية. أجد السرعة المتجهة للسيّارة بعد t ثانية من بَدْء حركتها، علمًا بأنَّ السيّارة تحرَّكت من وضع السكون.

26 ذئاب: يُمكِن نمذجة مُعدَّل تغيُّر عدد الذئاب في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dN}{dt} = 260 - 0.4N$، حيث N عدد الذئاب في الغابة بعد t سنة من بَدْء دراسة عليها. أجد عدد الذئاب في الغابة بعد 3 سنوات من بَدْء الدراسة، علمًا بأنَّ عددها عند بَدْء الدراسة هو 300 ذئب.

كرة: تنكمش كرة، ويتغيَّر نصف قُطْرها بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dr}{dt} = -0.0075r^2$، حيث r طول نصف قُطْر الكرة بالسنتيمتر، وt الزمن بالثواني بعد بَدْء انكماش الكرة:

27 أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد طول نصف قُطْر الكرة بعد t ثانية، علمًا بأنَّ طول نصف الكرة الابتدائي هو 20 cm.

28 بعد كم ثانيةً يصبح طول نصف قُطْر الكرة 10 cm؟

حشرات: يتغيَّر عدد الحشرات في مجتمع للحشرات بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dn}{dt} = 0.2n(0.2 - \cos t)$ ، حيث n عدد الحشرات، و t الزمن بالأسابيع بعد بَدْء ملاحظة الحشرات:

29 أحُلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد t أسبوعًا، علمًا بأنَّ عددها الابتدائي هو 400 حشرة.

30 أجد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد 3 أسابيع.

31 تُمثِّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = y\cos x$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمْتُ أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 1)$.

32 تُمثِّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = y(x + 1)$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمْتُ أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(1, 3)$.

مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

33 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2} - xy - \frac{1}{y^2} + y$

34 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y-1} - \frac{2x}{3y-2}$

35 $\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 x \tan^2 y$

تبرير: يُمكِن نمذجة مُعدَّل تحلُّل مادة مُشِعَّة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dx}{dt} = -\lambda x$ ، حيث x الكتلة المتبقية من المادة المُشِعَّة بالمِلّيغرام بعد t يومًا، و $\lambda > 0$:

36 أُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة الحلِّ العام للمعادلة التفاضلية في صورة: $x = ae^{-\lambda t}$، حيث a ثابت، مُبرِّرًا إجابتي.

37 إذا كان عمر النصف للمادة المُشِعَّة هو الوقت اللازم لتحلُّل نصف هذه المادة، و a كتلة المادة الابتدائية، فأُثبِت أنَّ عمر النصف للمادة المُشِعَّة هو $\frac{\ln 2}{\lambda}$، مُبرِّرًا إجابتي.

تبرير: تُمثِّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y}$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما:

38 أجـد قيمة n التي تجعل العلاقة: $x^2 + ny^2 = a$ حـلًّا للمعادلة التفاضلية المعطاة، حيث a ثابت اختياري، مُبرِّرًا إجابتي.

39 أجد إحداثيي نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x إذا علمْتُ أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(5, 4)$، مُبرِّرًا إجابتي.

كتاب التمارين

الدرس 6

المعادلات التفاضلية
Differential Equations

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

1 $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y$

2 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4}{x}$

3 $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

4 $\frac{dy}{dx} = \frac{x \sec y}{y e^{x^2}}$

5 $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 3}{y}$

6 $\frac{dy}{dx} = \frac{x \ln x}{y^2}$

أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممّا يأتي:

7 $\frac{dy}{dx} = -30 \cos 4x \sin 4x ; y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$

8 $\frac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y} ; y(0) = 2$

9 $\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{x}}{\cos y} ; y(0) = 0$

10 $\frac{dy}{dx} = x e^{y - x^2} ; y(1) = 0$

11 $\frac{dy}{dx} = xe^{-y}, y(4) = \ln 2$

12 $\frac{dy}{dx} = (3x^2 + 4)y^2 ; y(2) = -0.1$

بكتيريـــا: يتغيَّر عدد الخلايا البكتيرية في مجتمع بكتيري بمُعـــدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\, y^{0.8}$، حيث y عدد الخلايا، و t الزمن بالأيام:

13 أُحُـــلُّ المعادلـــة التفاضلية لإيجاد عدد الخلايـــا البكتيرية في هذا المجتمـــع بعد t يومًا، علمًا بـــأنَّ عددها الابتدائي هو 100000 خلية.

14 أجد عدد الخلايا البكتيرية في هذا المجتمع بعد أسبوع.

15 تتحرَّك سيّارة في مسار مستقيم، ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{100}\,,\ t \geq 0$، حيث t الزمن بالثواني، و v ســـرعتها المتجهة بالمتر لكل ثانية. أجد السرعة المتجهة للســـيّارة بعد t ثانية من بَدْء حركتها، علمًا بأنَّ سرعتها المتجهة الابتدائية هي $20\ \text{m/s}$.

16 تُمثِّـــل المعادلة التفاضليـــة: $e^{y}\frac{dy}{dx} = 10 + 2\sec^2 x$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمْتُ أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $\left(\frac{\pi}{4}\,,\,0\right)$.

17 تُمثِّـــل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجـــد قاعدة هذه العلاقة إذا علمْتُ أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(6, 4)$.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 قيمة: $\int_0^2 e^{2x}\,dx$ هي:

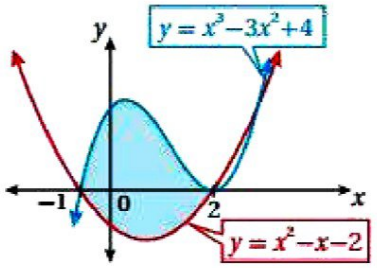
a) e^4-1 b) e^4-2

c) $2e^4-2$ d) $\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}$

2 قيمة: $\int_{-4}^{4}(4-|x|)\,dx$ هي:

a) 0 b) 4 c) 16 d) 8

3 يُبيِّن الشكل الآتي المنطقة المحصورة بين منحني الاقترانين: $y=x^3-3x^2+4$، و$y=x^2-x-2$، في الفترة $[-1,2]$.



التكامل المحدود الذي يُمكِن عن طريقه إيجاد مساحة المنطقة المُظلَّلة هو:

a) $\int_{-1}^{2}(x^3-4x^2+x+6)\,dx$

b) $\int_{-1}^{2}(-x^3+4x^2-x-6)\,dx$

c) $\int_{-1}^{2}(x^3-4x^2-x+2)\,dx$

d) $\int_{-1}^{2}(x^3-2x^2-x+2)\,dx$

4 حلُّ المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx}=2xy$ الذي تُحقِّقه النقطة $(0,1)$ هو:

a) $y=e^{x^2}$ b) $y=x^2y$

c) $y=x^2y+1$ d) $y=\frac{x^2y^2}{2+1}$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

5 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$

6 $\int \left(\tan 2x+e^{3x}-\frac{1}{x}\right)\,dx$

7 $\int \csc^2 x\,(1+\tan^2 x)\,dx$

8 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5}\,dx$

9 $\int \frac{2x^2+7x-3}{x-2}\,dx$

10 $\int \sec^2(2x-1)\,dx$

11 $\int \cot(5x+1)\,dx$

12 $\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x\,dx$

13 $\int_0^{\pi}\cos^2 0.5x\,dx$

14 $\int_0^2 |x^3-1|\,dx$

15 $\int_0^{\pi/4}(\sec^2 x+\cos 4x)\,dx$

16 $\int_0^{\pi/3}\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1+\cos 2x\right)\,dx$

17 $\int_0^{\pi/8}\sin 2x\cos 2x\,dx$

18 $\int \frac{4}{x^2-4}\,dx$

19 $\int \frac{x+7}{x^2-x-6}\,dx$

20 $\int \frac{x-1}{x^2-2x-8}\,dx$

21 $\int \frac{x^2+3}{x^3+x}\,dx$

22 $\int \frac{1}{x^2(1-x)}\,dx$

23 $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x-3\cos x}\,dx$

24 $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,dx$

25 $\int \sec^2 x \tan x \sqrt{1+\tan x}\, dx$

26 $\int \frac{x}{\sqrt[3]{4-3x}}\, dx$

27 $\int \frac{(\ln x)^6}{x}\, dx$

28 $\int (x+1)^2 \sqrt{x-2}\, dx$

29 $\int x \csc^2 x\, dx$

30 $\int (x^2-5x)\, e^x\, dx$

31 $\int x \sin 2x\, dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

32 $\int_0^1 t 3^{t^2}\, dt$

33 $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot^3 x\, dx$

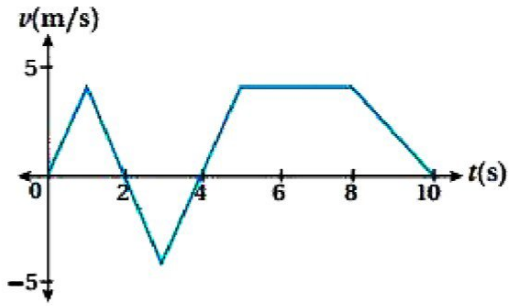
34 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{4+3\sin x}}\, dx$

35 $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-x}{x^2+x-2}\, dx$

36 $\int_1^2 \frac{32x^2+4}{16x^2-1}\, dx$

37 $\int_{1/2}^{e/2} x \ln 2x\, dx$

يُبيِّن الشكل الآتي منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجُسَيْم يتحرَّك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 10]$. إذا بدأ الجُسَيْم الحركة من $x = 0$ عندما $t = 0$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة التالية تباعًا:



38 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

39 أجد المسافة التي قطعها الجُسَيْم في الفترة الزمنية المعطاة.

40 أجد الموقع النهائي للجُسَيْم.

41 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$، و $g(x) = x^2$.

42 أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^3$، و $g(x) = x$.

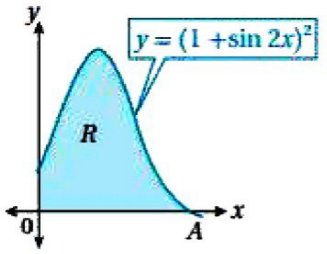
43 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = -x$، و $g(x) = x^2 + 2$، والمستقيمين: $x = -2$، و $x = 2$.

44 أُثبِت أنَّ: $\int_2^5 \frac{x^2}{x^2-1}\, dx = 3 + \frac{1}{2}\ln 2$.

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{t}{9} - \frac{1}{\sqrt{t+6}}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

45 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[1, 10]$.

46 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[1, 10]$.

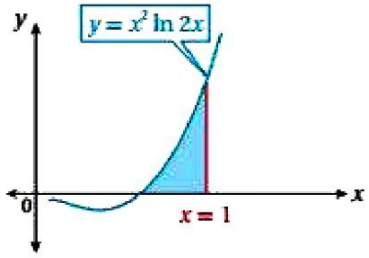


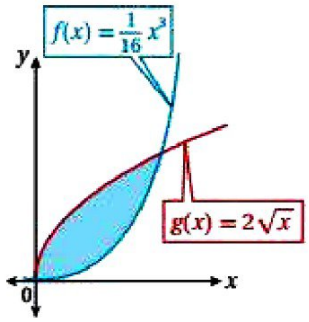
يُمثِّل الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = (1 + \sin 2x)^2$، حيث: $0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$:

47 أجد إحداثيي النقطة A.

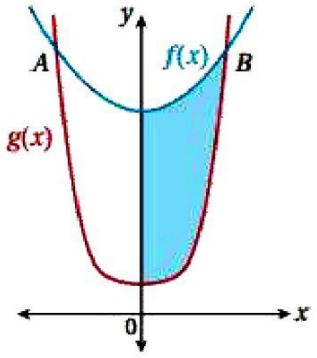
48 أجد مساحة المنطقة R.

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

49


50


يُبيِّن الشكل الآتي منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2 + 14$، و $g(x) = x^4 + 2$:



51 إذا كان منحنيا الاقترانين يتقاطعان في النقطة A والنقطة B، فأجد إحداثيي نقطتي التقاطع.

52 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المُظلَّلة حول المحور x.

53 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x\,e^{-x}}$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 2$ حول المحور x.

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات التفاضلية الآتية:

54 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{x}$

55 $\frac{dy}{dx} = xe^x \sec y$

56 $3y^2 \frac{dy}{dx} = 8x$

57 $x\frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y} + 4\sqrt{y}$

أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممّا يأتي:

58 $\frac{dy}{dx} + 4y = 8\,;\, y(0) = 3$

59 $\frac{dy}{dx} = \frac{5e^y}{(2x+1)(x-2)}\,;\, y(-3) = 0$

أسماك: يتغيَّر عدد الأسماك في إحدى البحيرات بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dx}{dt} = 0.2x$، حيث x عدد الأسماك، و t الزمن بالسنوات منذ هذه السنة:

60 أحلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة، علمًا بأنَّ عددها هذه السنة هو 300 سمكة.

61 أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد 5 سنوات.

62 تجارة: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من مُنتَج مُعيَّن، حيث x عدد القطع المَبيعة من المُنتَج بالمئات. إذا كان: $p'(x) = \frac{-300\,x}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر القطعة الواحدة من المُنتَج، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر القطعة الواحدة هو 75 JD عندما يكون عدد القطع المَبيعة من المُنتَج 400 قطعة.