الإبداع في الرياضيات

الصف الثاني عشر الفرع العلمي

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الرابعة

التكامل

"تلخيص"

إعداد

أ.زكي غنيم
0788557325

أ.ابراهيم العقرباوي
0790082328

أولا قواعد التكامل

1) تكامل الاقترانات الأساسية

إذا كانت k, b, a أعداداً حقيقية وكانت $n \neq -1$, فإنَّ :

رقم	القاعدة	لتبسيط وتجهيز المسائل
1	$\int (ax+b)^n . dx = \frac{(ax+b)^{n-1}}{a(n+1)} + c$	1) $\sqrt[n]{(f(x))^m} = (f(x))^{\frac{m}{n}}$
2	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	2) $\frac{1}{(f(x))^m} = (f(x))^{-m}$
3	$\int k \, dx = kx + c$	3) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 4) فك الأقواس ، توزيع المقام على البسط. 5) تحليل البسط أو المقام ثم إختصار.
4	$\int \frac{f(x)}{g(x)} . dx = \int q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \, dx$ $f(x), g(x)$ كثيرات حدود	6) قسمة طويلة : درجة البسط ≤ درجة المقام الإقتران النسبي = الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

2) تكامل الاقترانات الأسِّيَّة:

إذا كانت k, b, a أعداداً حقيقية وكانت $k \neq 1$, $k > 0$, $a \neq 0$, e عدد نيبيري ، فإنَّ :

رقم	القاعدة	لتبسيط وتجهيز المسائل
1	$\int e^{(ax \pm b)} . dx = \frac{e^{(ax \pm b)}}{a} + c$	1) $ln(1) = 0$, $ln(e) = 1$
2	$\int e^x \, dx = e^x + c$	2) $ln(e^x) = x$, $e^{ln(x)} = x$ 3) $ln(x^n) = n \, ln(x)$ 4) $ln(x * y) = ln(x) + ln(y)$
3	$\int k^{ax \pm b} \, dx = \frac{k^{ax \pm b}}{a \, ln(k)} + c$	5) $ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y)$
4	$\int k^x \, dx = \frac{k^x}{ln(k)} + c$	

3) تكامل الاقترانات المثلثيّة:

رقم	القاعدة
1	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$
2	$\int \cos(ax+b)\ dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$
3	$\int \sec^2(ax+b)\ dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$
4	$\int \csc^2(ax+b)\ dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$
5	$\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sec(ax+b)+c$
6	$\int \csc(ax+b)\ \cot(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\csc(ax+b)+c$

لتبسيط وتجهيز المسائل

1) استخدام المتطابقات الأساسية:

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$
$$\sin(2x)=2\sin(x)*\cos(x)$$
$$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x) = 2\cos^2(x)-1 = 1-2\sin^2(x)$$
$$\sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}\ ,\ \csc(x)=\frac{1}{\sin(x)}$$

2) إذا كان داخل التكامل $\tan^2(x)$ or $\cot^2(x)$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \quad ,$$
$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

3) إذا كان داخل التكامل $\sin^n(x)$ or $\cos^n(x)$ ، حيث n زوجي:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

4) إذا كان داخل التكامل حاصل ضرب النسبتين $(\sin(x), \cos(x))$:

1) $\sin(x)*\sin(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$

2) $\sin(x)*\cos(y)=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$

3) $\cos(x)*\cos(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$

4) $\cos(x)*\sin(y) = -\frac{1}{2}(\sin(x-y)-\sin(x+y))$

4) تكامل اقترانات مثلثيّة ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي:

إذا كانت b, a أعداداً حقيقية وكانت $a \neq 0$, $f(x)$ اقتران قابل للاشتقاق، فإنّ :

رقم	القاعدة
1	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\|f(x)\|+c\ ,f(x)\neq 0$
2	$\int \frac{k}{ax+b}dx\ ,\ k\in R = \frac{k}{a}\ln\|ax+b\|+c\ ,x\neq -\frac{b}{a}$
3	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\|+c$

استنتاجات مهمّة

1) $\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)|+c$

2) $\int \cot(x)dx = \ln|\sin(x)|+c$

3) $\int \sec(x)\,dx = \ln|(\sec(x)+\tan(x))|+c$

4) $\int \csc(x)\,dx = -\ln|(\csc(x)+\cot(x))|+c$

إمتحان درس تكاملات خاصة

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (12):

1) ناتج : $\int \frac{e^x+e^2}{\sqrt{e^x}}\,dx$ يساوي:

$a)\ 2\sqrt{e^x}-2\sqrt{e^{4-x}}+c$ $\quad b)\ \sqrt{e^x}-\sqrt{e^{4-x}}+c$

$c)\ 2\sqrt{e^x}-2\sqrt{e^{2-x}}+c$ $\quad d)\ \frac{2}{\sqrt{e^x}}-\frac{2}{\sqrt{e^{4-x}}}+c$

2) ناتج: $\int \frac{e^{-2x}-2e^{-4x}}{e^{-4x}-e^{-2x}}\,dx$ يساوي:

$a)\ \frac{1}{2}\ln|e^{-2x}-e^{-4x}|+c$ $\quad b)\ \frac{1}{4}\ln|e^{-2x}-e^{-4x}|+c$

$c)\ -\frac{1}{2}\ln|e^{-4x}-e^{-2x}|+c$ $\quad d)\ \frac{1}{2}\ln|e^{-4x}-e^{-2x}|+c$

3) ناتج : $\int \frac{1}{\cos(x)-1}\,dx$ يساوي:

$a)\ -\csc(x)+\cot(x)+c$ $\quad b)\ \csc(x)+\cot(x)+c$

$c)\ \csc(x)-\cot(x)+c$ $\quad d)\ -\csc(x)-\cot(x)+c$

4) $\int \cos(4x)\cos(x)-\cos(3x)dx$

$a)\ -\frac{1}{6}\sin(3x)+\frac{1}{10}\sin(5x)+c$ $\quad b)\ -\frac{1}{6}\sin(3x)+c$

$c)\ -\frac{1}{2}\sin(3x)+\frac{1}{2}\sin(5x)+c$ $\quad d)\ \frac{1}{10}\sin(5x)+c$

5) $\int \frac{\cos^4(x)-\sin^4(x)}{\sin^2(x)-\sin^4(x)}\,dx$

$a)\ \cot(2x)+c$ $\quad b)\ 2\cot(2x)+c$

$c)\ -2\csc(2x)+c$ $\quad d)\ -\frac{1}{2}\csc(2x)+c$

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

6) $\int \frac{tan(x) + cos(x)}{cos(x)} \, dx$

a) $tan(x) + x + c$ b) $tan(x)sec(x) + c$

c) $sec(x) + c$ d) $sec(x) + x + c$

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

7) $\int \frac{1 - sin^2(x)}{1 - cos(2x)} \, dx$

a) $\frac{1}{2} cot^2(x) + c$ b) $\frac{1}{2} cot(x) + c$

c) $\frac{1}{2} csc^2(x) - \frac{1}{2} + c$ d) $-\frac{1}{2} cot(x) - \frac{1}{2}x + c$

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

8) $\int \frac{1 + sin(2x)}{sin(x) + cos(x)} \, dx$

a) $-cos(x) + sin(x) + c$ b) $sin(x) + cos(x) + c$

c) $x + c$ d) $cos(x) - sin(x) + c$

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

9) $\int_0^2 \frac{2}{3^x} \, dx$

a) $\frac{1}{9ln(3)}$ b) $\frac{16}{9ln(3)}$ c) $\frac{-2}{9ln(3)}$ d) $\frac{2}{ln(3)}$

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

10) $\int_{-2}^{0} \left| \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} \right| dx$

a) $ln(2)$ b) $ln(4)$ c) $ln(2) + 1$ c) 0

11) قيمة الثابت a حيث : $\int_1^a \frac{x}{x^2-2} \, dx = ln\sqrt{7}$ ، حيث $a > 0$ ، هو :

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

a) $\sqrt{3}$ b) 3 c) 9 d) 2

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

12) $\int_0^{\pi/6} 3sin(x)cos(2x)dx + \int_0^{\pi/6} 3\, sin(2x)cos(x) \, dx$

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

إجابات أسئلة الإمتحان

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6
فرع الإجابة الصحيح	*a*	*d*	*b*	*a*	*c*	*d*

رقم السؤال	7	8	9	10	11	12
فرع الإجابة الصحيح	*d*	*a*	*b*	*b*	*b*	*a*

ثانيا طرق التكامل المتقدمة

إذا وُجِدت عمليتي الضرب والقسمة ويصعب التخلص منهما عندها نلجأ إلى إحدى طرق التكامل المتقدِّمة :

1) التكامل بالتعويض:

خطوات إيجاد التكامل بالتعويض $\int f(g(x)) * g'(x)dx$:

1) نفرض $y = g(x)$.
2) نشتق الفرض : $\frac{du}{dx} \leftarrow dx = \frac{du}{\text{المشتقة}}$
3) نحذف متغيِّر التكامل الأصلي ومشتقته.
4) نكتب التكامل الجديد بأبسط صورة.
5) إيجاد التكامل الجديد.
6) كتابة الإقتران الأصلي باستعمال المتغيِّر الأصلي.

2) التكامل بالأجزاء:

خطوات إيجاد التكامل بالأجزاء:

1) اختار الإقترانين: $u . v$ مراعياً عند اختيار u أن تكون du أبسط من u ، وأن يكون سهلاً إيجاد تكامل dv.
2) تنظيم خطوات إيجاد $v . du$ كما يأتي : $\int f(x)\, dx = \int u * dv = u * v - \int v * du$
3) إكمال التكامل لإيجاد $(\int v * du)$.

3) التكامل بالكسور الجزئية:

خطوات إيجاد التكامل بالكسور الجزئية:

1) تحليل المقام تحليلاً كاملاً.
2) تجزئة الكسر " حسب نوع تحليل المقام "
3) توحيد المقامات " بضرب طرفي المعادلة بالمضاعف المشترك الأصغر لمقامي الكسر.
4) إيجاد قيم الثوابت " بتعويض أصفار المقام أو قيم أخرى لـ x ".
5) إعادة كتابة التكامل.
6) إجراء التكامل.

تلخيص حالات التكامل

ملاحظات	الإجراء	التكامل	no
إذا كان $g(x)$ غير خطي : نستخدم الفرض	$y = g(x)$	$\int e^{g(x)} * g'(x)dx$	1
$\int f(x) * ln(x)dx$			2
تكامل بالتعويض: إذا كان $f(x) = \frac{1}{x}$	$y = ln(x)$	$\int \frac{ln(x)}{x} dx$	
تكامل بالأجزاء: إذا كان $f(x)$ أي إقتران آخر شرط أن نفرض: $u = ln(x)$, $dv = f(x)$ ملاحظة: في بعض التكاملات نحتاج أن نستخدم قوانين اللوغاريتمات	$u = ln(x)$ $dv = x$	$\int x\, ln(x)dx$ $\int \frac{ln(x)}{(x-1)^2} dx$	
تكامل الجذور			3
غير جاهز للفرض	تبسيط الجذر: إخراج عامل مشترك توحيد مقامات متطابقات ضرب بالمرافق	$\int \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} dx$ $\int x^2 \sqrt{\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}}\, dx$	
جاهز للفرض : نفرض الجذر كامل ثم تربيع أو تكعيب الطرفين أو نفرض ما بداخل الجذر	$y = \cot(x)$ أو $y = \sqrt{cot(x)}$	$\int csc^2(x) e^{\sqrt{cot(x)}}\, dx$	
$\int cos^n(x)dx$. $\int cos^n(x)dx$. $n \in$ عدد صحيح موجب			2
$sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - cos(2x))$ $cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + cos(2x))$	n زوجي: نستخدم المتطابقات	$\int sin^2(x)dx$	
$cos^3(x) = cos(x)cos^2(x)$ $= cos(x)\left(1 - sin^2(x)\right)$	n فردي : $y = sin(x)$	$\int cos^3(x)dx$	
$\int sin^n(x) \times cos^m(x)dx$			3
إحدى القوى زوجية والأخرى فردية : نفرض الزوجية " بدون القوّة "	$y = cos(x)$	$\int cos^5(x)\, sin^2(x)\, dx$	
كلتا القوّتان فرديّتان: نفرض أيًا منهما ويفضّل الكبرى " بدون القوّة ".	$y = cos(x)$	$\int cos^5(x)\, sin^3(x)\, dx$	
إحدى القوى = 1 : نفرض الأخرى " بدون القوّة "	$y = sin(x)$	$\int cos(x)\, sin^2(x)\, dx$	
كلتا القوّتان زوجيّتان: نستخدم المتطابقات		$\int cos^2(x)\, sin^2(x)\, dx$	

no	التكامل	الإجراء	ملاحظات
4	$\int csc^m(x) \times cot^n(x)dx$. $\int sec^m(x) \times tan^n(x)dx$		
	$\int sec^4(x)\,tan^6(x)\,dx$	$y = tan(x)$	m زوجي: نفرض $u = tan(x)$ or $cot(x)$ ، " بدون القوَّة "
	$\int csc^3(x)\,cot^3(x)\,dx$	$y = csc(x)$	$m\,.n$ فرديتان: نفرض $u = sec(x)$ or $csc(x)$ ، " بدون القوَّة "
5	$\int cot^n(x)\,dx$. $\int tan^n(x)\,d\,x$		
	$\int tan(x)\,dx$ $\int cot(x)\,dx$	$= -ln(cos\,x)$ $= ln(sin\,x)$	$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$. $cot(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$
	$\int tan^2(x)\,d\,x$	$n = 2$ نستخدم المتطابقات	$tan^2(x) = sec^2(x) - 1$ $cot^2(x) = csc^2(x) - 1$
	$\int cot^5(x)\,d\,x$	n أي عدد صحيح	$cot^5(x) = cot^3(x)\,cot^2(x)$ $= cot^3(x)(csc^2(x) - 1)$
6	$\int csc^n(x)\,dx$. $\int sec^n(x)\,d\,x$		
	$\int sec\,(x)\,dx$	$ln\|sec\,x + tan\,x\|$	$\int sec\,(x) \times \frac{sec(x) + tan(x)}{sec(x) + tan(x)}\,dx$
	$\int csc\,(x)\,dx$	$-ln\|csc\,x + cot\,x\|$	$\int csc\,(x) \times \frac{-(csc(x) + cot(x))}{-(csc(x) + cot(x))}\,dx$
	$\int sec^2(x)\,d\,x$	$tan(x) + c$	تكامل مباشر حسب القواعد
	$\int csc^2(x)\,d\,x$	$-cot(x) + c$	تكامل مباشر حسب القواعد
	$\int sec^3(x)\,d\,x$	$u = csc(x)$ $dv = csc^2(x)$	n فردي: تكامل بالأجزاء " دوري " $csc^3(x) = csc(x)csc^2(x)$
	$\int sec^4(x)\,d\,x$	$y = tan(x)$	n زوجي: تكامل بالتعويض $csc^3(x) = csc^2(x)csc^2(x)$ $= csc^2(x)(tan^2(x) + 1)$
7	$\int \frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}\,dx$		
	$\int \frac{x - 7}{x^2 - x - 6}\,dx$	خطوات التكامل بالكسور الجزئية	عوامل المقام خطية مختلفة: $\frac{A}{ax + b} + \frac{B}{cx + d} + \cdots$
	$\int \frac{x^3 - 4x^2 - 2}{x^3 + x^2}\,dx$		عوامل المقام خطية أحدهم مكرَّر: $\frac{A}{ax + b} + \frac{B}{(ax + b)^2} + \frac{c}{(ax + b)^3} + \cdots$
	$\int \frac{7x^2 - x + 1}{x^3 + 1}\,dx$		أحد عوامل المقام تربيعي لا يمكن تحليله: $\frac{A}{ax + b} + \frac{Bx + C}{ax^2 + bx + c}$
	$\int \frac{4x^3 - 5}{2x^2 - x - 1}\,dx$	* قسمة طويلة	درجة البسط $\leq$ درجة المقام

امتحان طرق التكامل المتقدمة

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (19):

1) ناتج : $\int x^3\sqrt[3]{x^9-x^6}\,dx$ يساوي:

$a)\frac{1}{7}\sqrt[3]{(x^3-1)^7}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^3-1)^4}+c$ $\quad b)\frac{1}{6}\sqrt[3]{(x^3-1)^6}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^3-1)^4}+c$

$c)\sqrt[3]{(x^3-1)^6}+\sqrt[3]{(x^3-1)^4}+c$ $\quad d)\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^3-1)^4}+c$

2) $\int (2x+1)^3\sqrt{4x^2+4x+9}\,dx=$

$a)\frac{1}{2}\sqrt{(4x^2+4x+9)^4}-4\sqrt{(4x^2+4x+9)^2}+c$

$b)\ \frac{1}{10}\sqrt{(4x^2+4x+9)^5}-\frac{4}{3}\sqrt{(4x^2+4x+9)^3}+c$

$c)\frac{3}{2}\sqrt{(4x^2+4x+9)^4}-8\sqrt{4x^2+4x+9}+c$

$d)\sqrt{(4x^2+4x+9)^5}+c$

3) $\int_0^{\pi/2} sin^3(x)\,dx=$

$a)\frac{2}{3}$ $\quad b)-\frac{2}{3}$ $\quad c)\ 0$ $\quad d)-1$

4) $\int_0^{\pi/3} tan^3(x)\,dx=$

$a)\ ln\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad b)-\frac{3}{2}$ $\quad c)\frac{3}{2}-ln(2)$ $\quad d)\ ln(2)-\frac{3}{2}$

5) $\int_{\pi/2}^{\pi} e^{cos^2(x)-ln|csc(2x)|}\,dx$

$a)-1$ $\quad b)e$ $\quad c)1-e$ $\quad d)1+e$

6) إذا كان: $\int_0^a 3x\sqrt{x^2+1}\,dx=7$ ، جد قيمة الثابت a، حيث $a>0$ ؟

$a)\sqrt{3}$ $\quad b)2$ $\quad c)8$ $\quad d)3$

7) $\int_{e}^{e^2} \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx =$

a) 3 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{e^4-e}{4}$

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

8) $\int_{0}^{-\pi/2} \frac{e^{\sin(x)}}{\sec(x)}\,dx =$

a) $\frac{1-e}{e}$ b) $\frac{e-1}{e}$ c) $e^{-\frac{\pi}{2}}-1$ d) $e-1$

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

9) $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x)\sqrt{1-\cos^2(2x)}\,dx =$

a) 1 b) -1 c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

10) $\int_{0}^{1} \frac{10\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt{x^3}\right)^2}\,dx =$

a) $-\frac{20}{3}$ b) $\frac{20}{3}$ c) $\frac{10}{3}$ d) $-\frac{10}{3}$

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

11) إذا كان: $\int_{1}^{e} 6x^3 f(x) + 3\ dx = 3e$ ، فإنَّ: $\int_{2}^{0} e^{2x} f\left(\sqrt{e^x}\right) dx =$

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) -1 d) 1

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

12) $\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)-\cos(x)}\,dx =$

a) $\ln\left|\frac{\cos(x)-1}{\cos(x)}\right|+c$ b) $\ln\left|\frac{\cos(x)}{\cos(x)-1}\right|+c$

c) $\ln|\cos(x)-1|+c$ d) $\ln|\cos^2(x)-\cos(x)|+c$

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

13) $\int_{1}^{4} \frac{4}{8x(2x+1)-3}\,dx =$

a) $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{35}{19}\right)$ b) $\ln\left(\frac{35}{19}\right)$ c) $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{19}{35}\right)$ d) $\ln\left(\frac{19}{35}\right)$

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

14) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\ dx$

a) $x + 2ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$

b) $ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$

c) $ln|x-1| + ln|x+1| + c$

d) $x + ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$

15) $\int \frac{1}{x^3 - x^2}\ dx =$

a) $ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{1}{x} + c$

b) $ln|x^2 - x| + \frac{1}{x} + c$

c) $ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c$

d) $ln|x^2 - x| + c$

16) $\int_0^{-1} 2\,x^5\, e^{x^2}\ dx =$

a) $e - 2$ b) $5e^4$ c) $5e^4 - 2$ d) $e^4 - 2$

17) واحد من التكاملات التالية ليس تكاملا دوريّاً:

a) $\int \frac{cos(ln(x))}{x}\ dx$

b) $\int \frac{e^{2x}}{sec(x)}\ dx$

c) $\int sec^3(x)\ dx$

c) $\int \frac{2}{csc(ln(x))} dx$

18) $\int_1^e ln(x^2)\ dx =$

a) -2 b) 2 c) $2e + 2$ d) $2e - 2$

19) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\ cos(x)}{csc(3x)}\ dx$

a) $\frac{\pi}{8}$ b) $-\frac{\pi}{8}$ c) $-\frac{\pi}{32}$ d) $\frac{\pi+4}{32}$

إجابات أسئلة الإمتحان

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
فرع الإجابة الصحيح	a	b	a	c	c	a	c	a	d	c

رقم السؤال	11	12	13	14	15	16	17	18	19
فرع الإجابة الصحيح	c	b	a	d	a	a	a	b	d

ثالثاً المعادلات التفاضليّة

1) الشرط الأولي:

لإيجاد قاعدة اقتران عُلِمت مشتقته علينا إيجاد قيمة الثابت C ، وذلك من خلال نقطة تُحقّق الإقتران الأصلي .

2) معادلات الحركة:

1) موقع الجسم : $s(t)$ ، السرعة المتَّجهة : $v(t) = s'(t)$ ، التسارع : $a(t) = v'(t) = s''(t)$

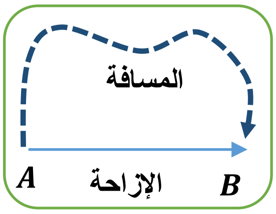
2) المسافة هو الإقتران الأصلي لاقتران السرعة : $s(t) = \int v(t)\, dt$

3) السرعة هي الإقتران الأصلي لإقتران التسارع : $v(t) = \int a(t)\, dt$

إذا تحرّك جسم في مسار مستقيم وفقا لإقتران الموقع $s(t)$ ، و سرعته المتَّجهة هي: $v(t) = s'(t)$ ، فإنَّ:

1) إزاحته في الفترة الزمنية $[t_1 . t_2]$:

هي تغيير موقع الجسم وقد تكون موجبة أو سالبة أو صفراً تبعاً لإتجاه حركة الجسم.



$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$$

$s(t_1)$: الموقع الإبتدائي ، $s(t_2)$: الموقع النهائي

2) المسافة الكلية في الفترة الزمنية $[t_1 . t_2]$:

هي طول المسار الذي يقطعه الجسم بصرف النظر عن الاتجاه ، وقيمتها ≥ 0.

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt$$

3) المعادلة التفاضليّة:

هي معادلة جبرية تحوي مشتقة أو أكثر لإقتران ما وقد تحوي الإقتران نفسه ومن أمثلتها:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 7y = \frac{1}{x} \quad . \quad \frac{dp}{dt} = kp \quad . \quad \frac{dy}{dx} = 2x^3 + 5$$

ويعدُّ الإقتران $y = f(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية إذا تحققت المعادلة عند تعويض $f(x)$ ومشتقاته فيها.

حل المعادلة التفاضلية بفصل المتغيرات:

إذا كانت المعادلة على شكل $\frac{dy}{dx} = g(x)$ ، تحل بشكل مباشر.

أمَّا إذا كانت المعادلة على شكل $\frac{dy}{dx} = f(x) * g(y)$ فإنَّها تسمَّى " المعادلة القابلة للفصل " وتحل كما يلي:

خطوات الحل:

الخطوة الأولى : فصل dy عن dx : كتابة dx في أحد طرفي المعادلة وكتابة dy في الطرف الآخر.

الخطوة الثانية : نقل جميع الحدود التي تحوي المتغيِّر x إلى الطرف الذي يحوي dx . ونقل جميع الحدود التي تحوي المتغيِّر y إلى الطرف الذي يحوي dy.

الخطوة الثالثة : إيجاد التكامل لكلٍّ من طرفي المعادلة

امتحان درس المعادلات التفاضليّة

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (13):

1) إذا كان ميل المماس للإقتران $f(x)$ هو : $\frac{cos(x)}{sec(x)}$ ، جد قاعدة الإقتران $f(x)$ علماً بأنَّ المنحنى يمر بالنقطة $(0,3)$؟

$a)\ f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}sin(2x)+3$ $\qquad b)\ f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}sin(2x)+3$

$c)\ f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}sin(2x)+\frac{5}{2}$ $\qquad b)\ f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}sin(2x)+2$

2) في دراسة تشير إلى كتلة مادة كيميائية تبيَّن أنَّ كتلتها تتغيَّر بمعدَّل : $P'(t)=0.5\,e^{0.2t}$ ، حيث t الزمن بالسنوات ، $P(t)$ الكتلة ،
جد كتلة المادة بعد (5) سنوات تقريباً علماً أنَّ كتلتها عند بدء الدراسة هو (200) سمكة ؟

$a)\ 188.9$ $\qquad b)\ 197$ $\qquad c)\ 200.1$ $\qquad d)\ 204.2$

يتحرَّك جسيم في مسار مستقيم ، وتعطى سرعته المتجهة بالإقتران : $v(t)=3cos(t)$ ، حيث t الزمن بالثواني ، v سرعته المتَّجهة بالإقتران ، أجب عن الأسئلة ($2,3,4$) :

3) إذا بدأ الجسيم بالحركة من نقطة الأصل فإنَّ الموقع بعد $\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ ثانية من بدء الحركة هو:

$a)\ 3m$ $\qquad b)\ -3m$ $\qquad c)\ 1.5\,m$ $\qquad d)\ -1.5m$

4) إزاحة الجسيم في الفترة $[0,2\pi]$ هو:

$a)\ 0m$ $\qquad b)\ 6m$ $\qquad c)\ 12m$ $\qquad d)\ 8m$

5) جد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0,2\pi]$ ؟

$a)\ 0m$ $\qquad b)\ 6m$ $\qquad c)\ 12m$ $\qquad d)\ 8m$

6) يمثِّل الإقتران سرعة الجسيم في مسار مستقيم :

$$v(t)=\begin{cases}2t+1\ , & 0\le t\le 2\\ 9-t^2\ , & 2<t\le 10\end{cases}$$

إذا انطلق الجسيم من نقطة الأصل ، جد موقعه بعد 3 ثواني؟

$a)\ 18$ $\qquad b)\ -\frac{28}{3}$ $\qquad c)\ \frac{26}{3}$ $\qquad d)\ \frac{28}{3}$

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

7) واحد من التالي حل للمعادلة التفاضلية : $y''+y=0$ ؟

$a)\ sec(x)$ $\quad b)\ y=sin(x)$
$c)\ y=cos(2x)$ $\quad d)\ y=sin(2x)$

8) الحل الخاص للمعادلة التفاضليَّة: $\frac{dy}{dx}-3(xy)^2=4y^2$ حيث $y(2)=-0.1$ ، هو ؟

$a)\ y=\dfrac{-1}{x^3+4x-10}$ $\quad b)\ y=-x^3-4x+10$
$c)\ y=\dfrac{-1}{x^3+4x}-10$ $\quad d)\ y=x^3+4x-10$

9) إذا كانت المعادلة التفاضليَّة: $\frac{dy}{dx}=2x\,e^{-y}-1-e^{y}+2x$، حيث:
$y(0)=ln(2)$ ، فإنَّ قاعدة الإقتران y هي؟

$a)\ y=e^{x^2-x+ln(3)}-1$ $\quad b)\ y=e^{x^2-x+ln(3)}$
$c)\ y=ln\left|e^{x^2-x+ln(3)}\right|$ $\quad d)\ y=ln\left|e^{x^2-x+ln(3)}-1\right|$

10) يتغيَّر عدد بكتيريا في مجتمع بكتيري بمعدَّل يمكن نمذجته بالمعادلة التفاضليَّة :
$\frac{dy}{dt}=y^{0.75}$ ، حيث t الزَّمن بالأيَّام ، y عدد الخلايا، وعددها الإبتدائي (16) خليَّة
فإنَّ عدد الخلايا بعد (4) أيَّام يساوي؟

$a)\ 243$ $\quad b)\ 27$ $\quad c)\ 81$ $\quad d)\ 32$

11) تتحرَّك سيَّارة في مسار مستقيم ويُعطى تسارعها بالمعادلة التفاضليَّة :
$\frac{dv}{dt}=e^3-\frac{1}{4}v$ ، حيث t الزَّمن بالثواني ، v سرعتها المتَّجهة بالمتر لكل ثانية،
جد السرعة المتَّجهة بعد (8) ثواني ، علماً أنَّ السيارة تحرَّكت من وضع السكون؟

$a)\ 4e^3-4e$ $\quad b)\ e^3-e$ $\quad c)\ 12e$ $\quad d)\ 4e^3$

12) يتحرَّك جسم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتَّجهة بالإقتران : $v(t)=\dfrac{-4t}{\sqrt{(3+t^2)^3}}$
وكان موقع الجسم بعد ثانية واحدة هو $2m$ جد الموقع بعد (t) ثانية؟

$a)\ s(t)=\dfrac{4}{\sqrt{3+t^2}}$ $\quad b)\ s(t)=\dfrac{2}{3\sqrt{3+t^2}}+\dfrac{5}{3}$
$a)\ s(t)=\dfrac{4\sqrt{3+t^2}}{3}$ $\quad b)\ s(t)=\dfrac{2\sqrt{3+t^2}}{3}+\dfrac{2}{3}$

13) يمثِّل إقتران المشتقة الأولى : $f'(x)=\dfrac{sin(x)+tan(x)}{cos^3(x)}$ ،
ويمر بالنقطة : $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ ، فإنَّ قيمة $f(\pi)$ تساوي:

$a)\ -\dfrac{5}{3}$ $\quad b)\ \dfrac{25}{6}$ $\quad c)\ \dfrac{19}{6}$ $\quad d)\ \dfrac{7}{2}$

إجابات أسئلة الإمتحان

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7
فرع الإجابة الصحيح	*a*	*d*	*d*	*a*	*c*	*c*	*b*

رقم السؤال	8	9	10	11	12	13
فرع الإجابة الصحيح	*a*	*d*	*c*	*a*	*a*	*a*

رابعاً المساحات والحجوم الدورانيَّة

3) المساحة:

1) المساحة المحصورة بين منحنى $f(x)$ ومحور x والمستقيمين $x = a . x = b$

حالة (1): إيجاد المساحة فوق المحور x :

$$A = \int_a^b f(x)\ dx$$

حالة (2) : إيجاد المساحة تحت المحور x :

$$A = -\int_a^b f(x)\ dx$$

حالة (3): إيجاد المساحة جزء من المنطقة فوق المحور x وجزء آخر أسفل المحور x:

$$A = -\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

ملاحظة: لإيجاد حدود التكامل : $f(x) = 0$

2) المساحة المحصورة بين منحنى $f(x)$ ومنحنى $g(x)$:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

ملاحظة: لإيجاد حدود التكامل : $f(x) = g(x)$

4) الحجوم الدورانية:

1) حجم المجسَّم الناتج من دوران المنطقة التي تنحصر بين منحنى $y = f(x)$ والمحور x :

$$V = \int_a^b \pi\, y^2\ dx \quad or \quad V = \int_a^b \pi\, \left(f(x)\right)^2\ dx$$

ملاحظة: لإيجاد حدود التكامل : $f(x) = 0$

2) حجم المجسَّم الناتج من دوران المنطقة التي تنحصر بين منحنى $f(x)$ ومنحنى $g(x)$ حول المحور x:

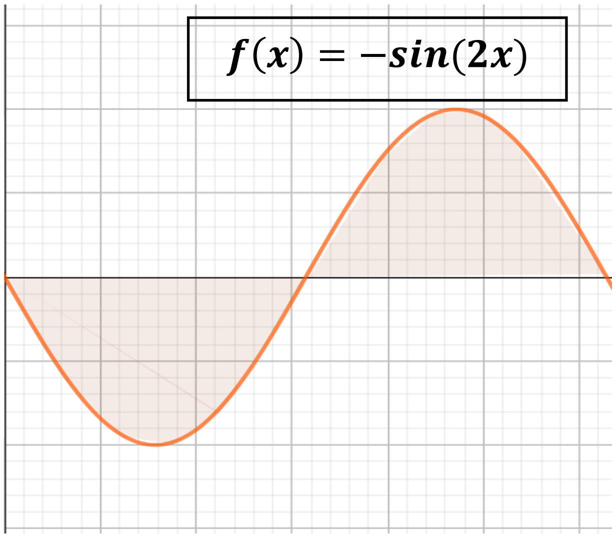
$$V = \int_a^b \pi\, \left(\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right)\ dx$$

ملاحظة: لإيجاد حدود التكامل : $f(x) = g(x)$

امتحان درس المساحات والحجوم

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (20):

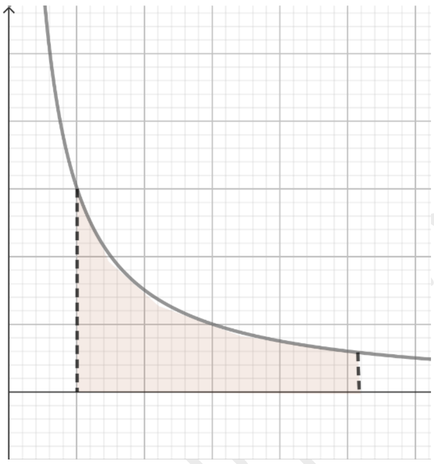
1) جد مساحة المنطقة المظلّلة :



$a)\ 4$ $\quad$ $b)\ 2$

$c)\ 1$ $\quad$ $d)\ \frac{1}{2}$

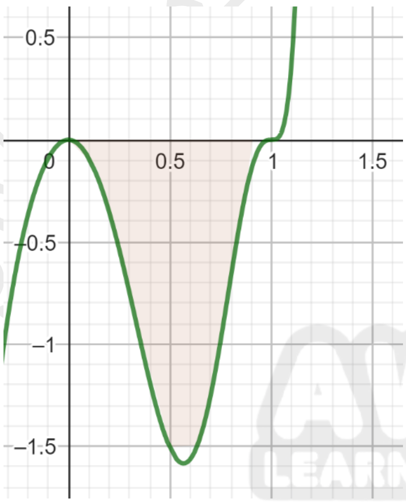
2) من خلال الشكل المجاور للإقتران $f(x) = \frac{3}{x}$،
إذا كانت المساحة المحصورة بين $f(x)$ والمحور x ، والمستقيم $x = 1$ و المستقيم $x = a$ ، هي 12 وحدة مربَّعة ، جد قيمة الثابت a ؟



$a)\ 4$ $\quad$ $b) 12$

$c)\ e^4$ $\quad$ $d) e^{12}$

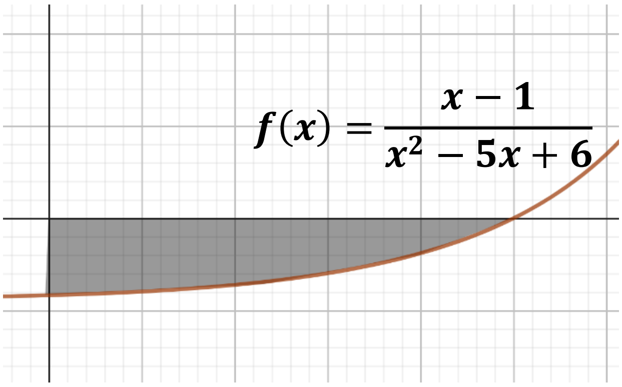
3) من خلال الشكل المجاور الذي يمثّل جزءاً من الإقتران :
$f(x) = 9x^2\ (x^3 - 1)^3$ ،
فإنّ المساحة بين $f(x)$ والمحور x تساوي:



$a)\ \frac{3}{4}$ $\quad$ $b)\ -\frac{3}{4}$

$c)\ 12$ $\quad$ $d) 3$

4) من خلال الشكل المجاور جد مساحة المنطقة المظلّلة؟



$a)\ ln\left(\dfrac{2}{9}\right)$

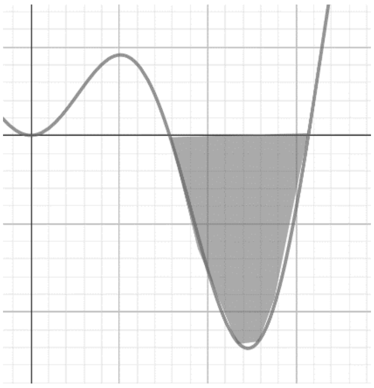
$b)\ ln\left(\dfrac{9}{2}\right)$

$c)\ ln\left(\dfrac{8}{9}\right)$

$d)\ ln\left(\dfrac{9}{8}\right)$

5) مساحة المنطقة المظلّلة لمنحنى الإقتران :

$f(x) = x\ sin(x)$ هي؟

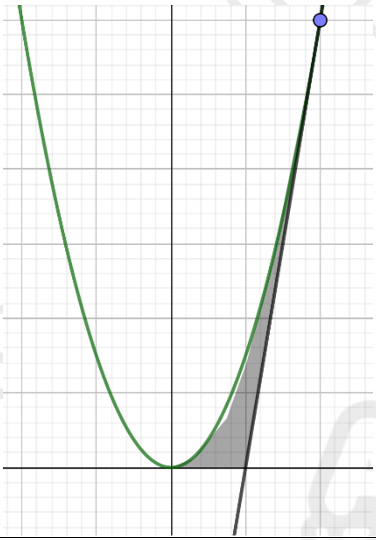


$a)\ \pi$ $\quad b)\ -\pi$ $\quad c)\ -3\pi$ $\quad d)\ 3\pi$

6) المساحة المحصورة بين : $f(x) = 1 - x^2$ و $g(x) = (x-1)^2$ ، هي؟

$a)\ \dfrac{2}{3}$ $\quad b)\ \dfrac{1}{3}$ $\quad c)\ 3$ $\quad d)\ \dfrac{3}{2}$

7) المساحة المحصورة بين : $f(x) = 3x^2$ ومماس المنحنى $f(x)$ عند النقطة $(1,3)$ هي ؟



$a)\ \dfrac{1}{8}$ $\quad b)\ \dfrac{7}{8}$ $\quad c)\ \dfrac{1}{4}$ $\quad d)\ 1$

8) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين :

$f(x) = cos(x)\ ,\ \ g(x) = 1 - cos(x)$

والمستقيمين : $x = \pi\ \ ,\ \ x = 0$ هي؟

$a)\ 2\sqrt{3}$ $\quad b)\ 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$ $\quad c)\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$ $\quad d)\ )\ 2 + \frac{\pi}{3}$

9) حجم المجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الإقتران:

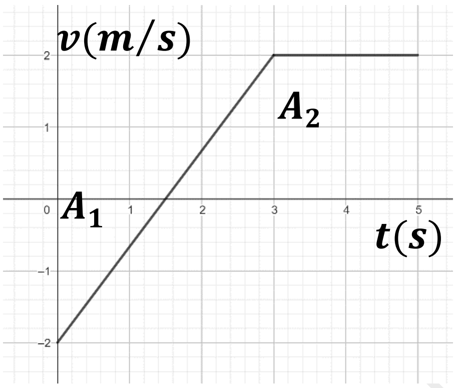
$f(x) = \frac{1}{x}$ والمحور x والمستقيمين: $x = 4\ \ ,\ \ x = 1$ حول المحور x هو؟

$a)\ ln(\pi)$ $\quad b)\ ln(\pi) - 1$ $\quad c)\frac{\pi}{4}$ $\quad d)\frac{3\pi}{4}$

10) جد حجم المجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الإقترانين:

$g(x) = x\ \ ,\ \ f(x) = \sqrt{x}$ ، حول المحور x ؟

$a)\frac{\pi}{6}$ $\quad b)\ \frac{5\pi}{6}$ $\quad c)\ \pi$ $\quad d)\ 5\pi$



من خلال الشكل المجاور ، الذي يمثّل السرعة المتّجهة – الزمن لجسم يتحرّك على المحور x في الفترة $[0, 5]$، إذا بدأ الجسم الحركة من $x = 2$ عندما $t = 0$ ، أجب عن الأسئلة $(11 + 12 + 13)$:

11) إزاحة الجسم على الفترة الزمنيَّة المعطاة؟

$a)\ 6$ $\quad b)\ 7$ $\quad c)\ 3$ $\quad d)4$

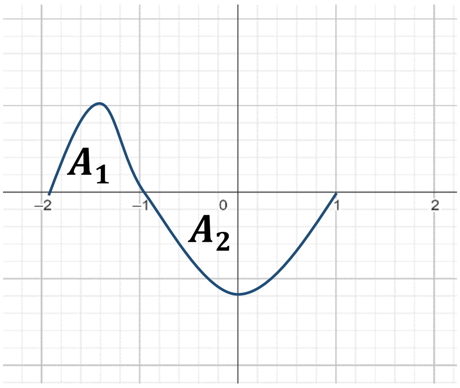
12) المسافة التي قطعها الجسم في الفترة الزمنية المعطاة؟

$a)\ 6$ $\quad b)\ 7$ $\quad c)\ 3$ $\quad d)4$

13) الموقع النهائي للجسم ؟

$a)\ 6$ $\quad b)\ 7$ $\quad c)\ 3$ $\quad d)4$

14) من خلال الشكل المجاور الذي يمثّل منحنى الإقتران $f(x)$ والمساحة المحصورة مع المحور x ، إذا كانت $A_1 = 2 \ , \ A_2 = 6$ تساوي $\int_{-2}^{1} x\, f(x^2 - 3)\, dx$ ؟



$a) -2$ $\quad$ $b)\ 2$ $\quad$ $c)\ 4$ $\quad$ $d) -4$

15) إذا كانت المساحة المحصورة بين : $f(x) = x^2$ والمستقيم $y = c$ الواقعة بالربع الأوّل تساوي $\left(\frac{16}{3}\right)$ وحدة مربّعة ، فإنّ قيمة الثابت c تساوي ؟

$a)\ 16$ $\quad$ $b)\ 4\sqrt[3]{2}$ $\quad$ $c)\ 4$ $\quad$ $d)\ \sqrt[3]{4}$

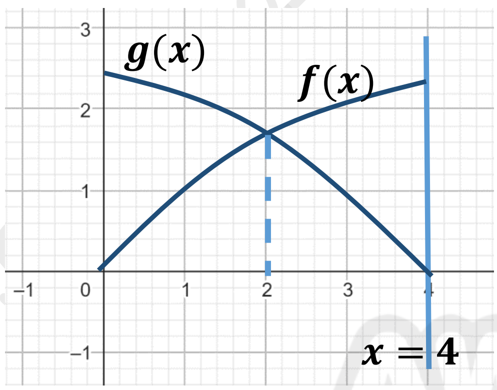
16) إذا كانت المساحة المحصورة بين : $f(x) = \frac{1}{x}$ و $y = x$ و $x = a$ حيث $a > 1$ والمحور x الواقعة في الربع الأول تساوي $\left(\frac{3}{2}\right)$، فإنّ قيمة الثابت (a) تساوي ؟

$a)\ e$ $\quad$ $b)\ e^2$ $\quad$ $c)\ 2e$ $\quad$ $d)\ \frac{3}{e}$

17) إذا كان المستقيم $y = a$ يقسم المساحة المحصورة بين $f(x) = \sqrt{x}$ و $y = 2$ المحور y إلى قسمين متساويين ، جد قيمة الثابت a ؟

$a)\ 4$ $\quad$ $b)\ \frac{4}{3}$ $\quad$ $c)\ \sqrt[3]{4}$ $\quad$ $d)\ 2$

18) من خلال الشكل المجاور، فإنّ التكامل الذي يعبِّر عن المساحة المحصورة بين $f(x)$ و $g(x)$ والمستقيم $x = 4$ ، هو ؟



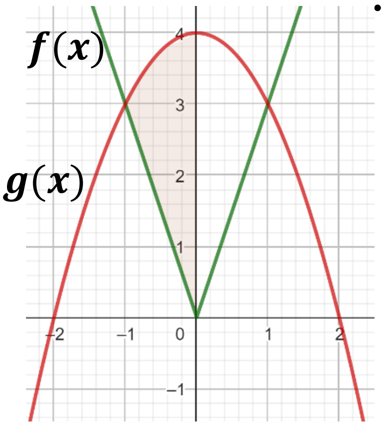
$a)\ \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))dx$

$b)\ \int_{2}^{4} (f(x) - g(x))dx$

$c)\ \int_{2}^{4} (g(x) - f(x))\ dx$

$d)\ \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))dx + \int_{2}^{4} (f(x) - g(x))dx$

19) من خلال الشكل المجاور ، فإنَّ التكامل المعبِّر عن المساحة المظلّلة بين : $f(x) = |3x|$ ، $g(x) = 4 - x^2$ هو؟

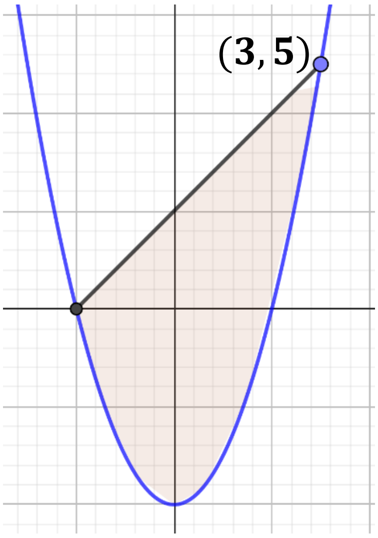


$a)\ \int_{-1}^{1} (4 - x^2 + 3x)dx$ $\quad$ $b)\ \int_{-1}^{0} (4 - x^2 + 3x)\,dx$

$c)\ \int_{-1}^{0} (4 - x^2 - 3x)dx$ $\quad$ $d)\ \int_{0}^{1} (3x + x^2 - 4)dx$

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

20) من خلال الشكل المجاور، فإنَّ المساحة المحصورة بين القطعة المستقيمة والمنحنى $f(x) = x^2 - 4$ تساوي؟



$a)\ \dfrac{125}{6}$ $\quad$ $b)\ \dfrac{9}{2}$ $\quad$ $c)\ \dfrac{27}{2}$ $\quad$ $d)\ 19$

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

إجابات أسئلة الإمتحان

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
فرع الإجابة الصحيح	*b*	*c*	*a*	*d*	*d*	*b*	*c*	*b*	*d*	*a*

رقم السؤال	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
فرع الإجابة الصحيح	*d*	*b*	*a*	*b*	*c*	*a*	*c*	*b*	*b*	*a*

إمتحان وحدة التكامل

الاسم :	الصف : 12 علمي	
اليوم :	التاريخ: / /	60
الزمن : ساعة		

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (3) علماً بأن عدد صفحات الاختبار (2)

السؤال الأول : (18 علامة)

جد ناتج مايلي :

1) $\int_{2}^{10} \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\, dx$

2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} sin(x)\sqrt{1-cos^2(2x)}\, dx$

3) $\int_{0}^{ln(2)} \frac{e^{2x}}{e^x+2e^{-x}+3}\, dx$

السؤال الثاني : (12 علامة)

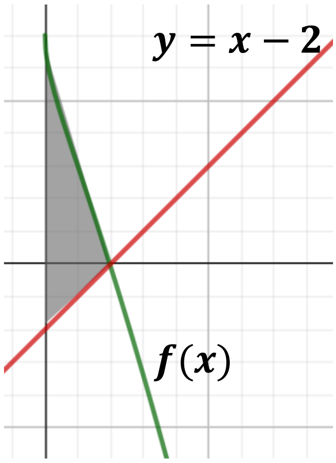
1) تتحرَّك سيَّارة في مسار مستقيم ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضليَّة : $t \geq 0$, $\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{100}$ ،
حيث t الزمن بالثواني ، v سرعتها المتَّجهة بالأمتار لكل ثانية ، جد السرعة المتَّجهة للسيارة بعد t ثانية من بدء حركتها ، علماً بأنَّ سرعتها المتَّجهة الإبتدائيَّة $(20\ m/s)$ ؟
(6 علامات)

2) تمثِّل المعادلة التفاضليَّة : $y\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x} = 0$ ، ميل المماس لمنحنى علاقة ما،
جد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أنَّ منحناها يمر بالنقطة $(6, 4)$ ؟
(6 علامات)

السؤال الثالث : (30 علامة)

1) يبيّن الشكل المجاور منحنى الإقتران : $f(x) = 7 - \sqrt{x^3} - 3\sqrt{x}$ ، والمستقيم : $y = x - 2$

جد مساحة الشكل المظلّل ؟ (10 علامات)



أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

2) جد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الإقترانين : (10 علامات)

$f(x) = x^2$ ، $g(x) = \sqrt{8x}$ ، حول المحور x ؟

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

3) يبيّن الشكل المجاور منحنى السرعة المتّجهة – الزمن لجسم يتحرّك على المحور x في الفترة الزمنيّة $[0, 7]$، إذا بدأ الجسم الحركة من $x = 2$ عندما $t = 0$، جد كلاً ممّا يلي: (10 علامات)

a) إزاحة الجسم في الفترة الزمنية المعطاة؟

b) المسافة التي يقطعها الجسم في الفترة الزمنية المعطاة؟

c) الموقع النهائي للجسم؟