طريقة الحل

1) رسم المسألة وتحديد المتغيرات

2) ترجمة المعطيات والمعدلات وتحديد المتزايد (المبتعد) (+) ، والمتناقص (المقترب) (-)

3) تبديل أي متغيّر معدله مجهول بمتغيّر معدله معلوم

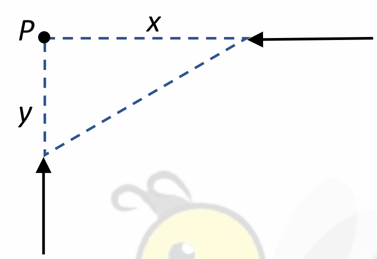
- فيثاغورس
- التشابه
- $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$
- الطول = السرعة × الزمن $x = \frac{dx}{dt}\cdot t$

4) الاشتقاق بالنسبة للزمن والتعويض

أهم الأفكار

1) أي نقطة على منحنى f ← (x, f)

2) الاقتراب من نقطة من مكانين متعامدين (شمال، غرب)



$$\frac{dx}{dt} = -(\quad)$$

$$\frac{dy}{dt} = -(\quad)$$

3) إذا كانت أطوال معلومة وزادت أو نقصت

$$X = x_0 \mp \Delta = x_0 \mp \frac{dx}{dt}\cdot t$$

4) إذا طلب السؤال معدل تغيّر زاوية (معدل ارتفاع الزاوية أو الانخفاض) نستخدم $\sin\theta , \cos\theta , \tan\theta$ بشرط وجود مثلث قائم.

5) إذا أعطى السؤال عدد (n) دورات نقطة (جسم) كاملة خلال زمن

(السرعة الزاوية) $\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{2n\pi}{\text{الزمن}}$

وأحياناً تحسب من الطبيعة

- دوران الأرض حول محورها $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{24h}$
- دوران عقرب الثوان دورة كاملة $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{60s}$
- دوران عقرب الدقائق $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{60m}$
- دوران عقرب الساعة $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{12h}$

6) مسائل الدوران وقياس البعد عن نقطة خارجية ← هنالك احتمالين (اقتراب ، ابتعاد)

7) نستخدم قانون جيب التمام إذا أردنا المسافة بين نقطتين والمثلث ليس قائم

مثال 1 ملئ بالون كروي بالهيليوم بمعدل $8cm^3 / s$ ، جد معدل تغيّر نصف قطر البالون في الحالات :

a) عندما $r = 12cm$

b) عندما يكون حجمه $36\pi\ cm^3$

c) إذا مُلِئ مدة $8\ s$

الحل:

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad , \quad \frac{dv}{dt} = 8$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \to 8 = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

(a $\quad 8 = 4\pi(12)^2 \frac{dr}{dt}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{72\pi} cm/s$$

b) في اللحظة التي يكون $V = 36\pi$

$$36\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \to r^3 = 27 \to r = 3$$

$$\therefore\ 8 = 4\pi(3)^2\frac{dr}{dt} \to \frac{dr}{dt} = \frac{2}{9\pi}$$

c) $v = \frac{dv}{dt}\cdot t = 8\times 8 = 64$

$$64 = \frac{4}{3}\pi r^3 \to r^3 = \frac{48}{\pi} \to r \approx 2.4$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{8}{4\pi(2.4)^2} \approx 0.083$$

مثال 2 في لحظة ما كان طول مستطيل $(10)cm$ ، عرضه $(5)cm$. أخذ طوله بالتناقص بمعدل $(1)cm/s$ والعرض بالتزايد بمعدل $(2)cm/s$ جد معدل التغيّر في مساحة المستطيل بعد مرور 3 ثوان.

الحل:

الطول $= x$ ، العرض $= y$

$$A = xy \to \frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$x = 10 - 1\times 3 = 7$$

$$y = 5 + 2\times 3 = 11$$

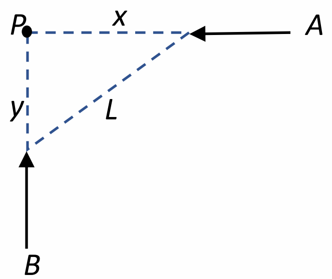
$$\frac{dA}{dt} = 7\times 2 + 11\times -1 = 3cm^2/s$$

مثال 3 مكعب طول ضلعه $(5)cm$ بدأ المكعب بالتمدد فزاد طول ضلعه بمعدل $3cm/s$ محافظاً على شكله، جد معدل التغيّر في حجم المكعب بعد مرور $(4)s$.

a) 153 b) 867 c) 2601 d) 7803

مثال 4 تسير سيارة A في اتجاه الغرب بسرعة $80\ km/h$ مقتربة من النقطة P ، وفي نفس الوقت تسير سيارة B شمالاً بسرعة $60\ km/h$ مقتربة من النقطة P . جد معدل اقتراب السيارتين من بعضهما عندما تكون الأولى A على بُعد $1\ km$ من P ، والثانية B على بُعد $3\ km$ من P .

الحل:



$$\frac{dx}{dt} = -(80)$$

$$\frac{dy}{dt} = -(60)$$

المطلوب $\left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=1,\ y=3}$

$$L = \sqrt{x^2 + y^2}$$

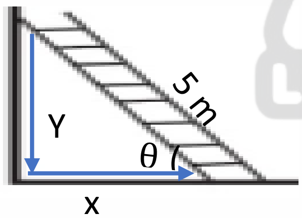
نعوض: $\frac{dL}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{-80-180}{\sqrt{10}} = -\frac{260}{\sqrt{10}} \approx -82\cdot 2$$

مثال 5 يرتكز سلم طوله $(5)m$ على حائط بطرفه العلوي على حائط عمودي وبطرفه السفلي على أرض أفقية. تحرّك الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل $(0\cdot 5)m/s$ جد معدل هبوط الطرف العلوي للسلم عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض $\frac{\pi}{3}$.

الحل: $\frac{dx}{dt} = 0\cdot 5$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = ??$$



$$25 = x^2 + y^2$$

$$y = \sqrt{25 - x^2} \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-2x\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{25 - x^2}}$$

لـكن : $\cos\theta = \frac{x}{5}$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{x}{5} \quad \rightarrow \quad x = 2.5$$

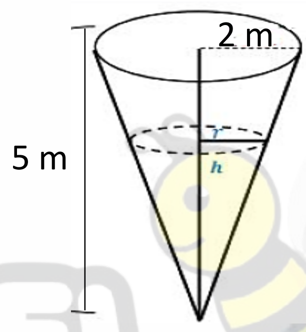
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-(2.5)(0\cdot 5)}{\sqrt{25 - 6.25}} = \frac{-1.25}{\sqrt{18.75}} \approx -0.289$$

مثال 6 خزان على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه $(5)m$ ونصف قطر قاعدته $(2)m$ ورأسه للأسفل، تسرّب منه الماء بمعدل $\left(\frac{1}{12}\right) m^3 / min$

a) احسب معدل التغيّر في ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاعه $(4)m$.

b) معدل التغيّر في مساحة سطح الماء أيضاً عندما يصبح ارتفاعه $(4)m$.

الحل:



$$\frac{dv}{dt} = \frac{-1}{12}$$

a) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

نتخلص من r من التشابه

$$\frac{2}{r} = \frac{5}{h} \quad \rightarrow \quad r = \frac{2h}{5}$$

$$v = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{5}\right)^2 h = \frac{4\pi}{75}h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi}{25}h^2\frac{dh}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{-1}{12} = \frac{4\pi}{25}(16)\frac{dh}{dt}$$

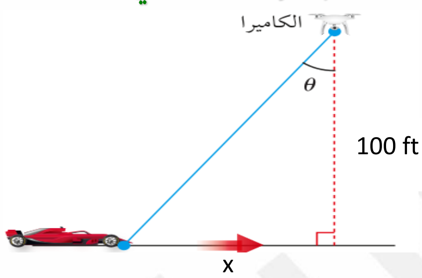
$$\frac{dh}{dt} = \frac{-1}{12} \times \frac{25}{64\pi} \approx -0.01$$

b) $A = \pi r^2 \quad , \quad r = \frac{2h}{5}$

$$A = \pi\left(\frac{2h}{5}\right)^2 = \frac{4\pi}{25}h^2$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{8\pi}{25}h\frac{dh}{dt} = \frac{8\pi}{25} \times 4 \times \frac{-1}{12} \times \frac{25}{64\pi} = \frac{-1}{24}$$

مثال 7 ترتفع كاميرا عن الأرض مسافة $100\ ft$ وترصد سيارة تتحرك على مضمار سباق، وتبلغ سرعتها $200ft\ /\ s$ كما في الشكل التالي:



a) جد سرعة تغيّر الزاوية θ عندما تكون السيار أسفل الكاميرا تماماً.

b) جد سرعة تغيّر الزاوية θ بعد $(1)s$ من مرور السيار أسفل الكاميرا.

الحل:

a) أول حالة اقتراب السيارة من مسقط الكاميرا

$$\frac{dx}{dt} = -200$$

$$\tan\theta = \frac{x}{100} \quad \rightarrow \quad \sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt}}{100}$$

$$(1+\tan^2\theta)\frac{d\theta}{dt}=\frac{-200}{100}$$

$$\left(1+\frac{0}{100}\right)\frac{d\theta}{dt}=-2\rightarrow\frac{d\theta}{dt}=-2\,rad/s$$

b) ثاني حالة السيارة في حالة بعد عن مسقط الكاميرا

$$\frac{dx}{dt}=200$$

$$\tan\theta=\frac{x}{100}$$

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}=\frac{\frac{dx}{dt}}{100}$$

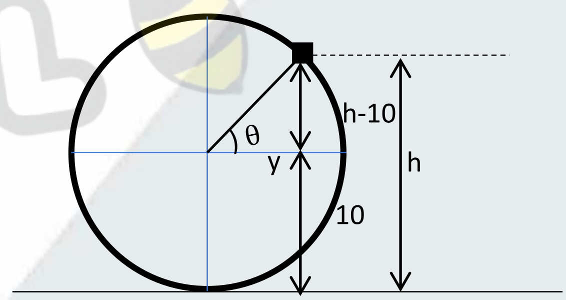
$$(1+\tan^2\theta)\frac{d\theta}{dt}=\frac{200}{100}=2$$

لكن: $x=\frac{dx}{dt}\cdot t=200\times 1=200$

$$\left(1+\left(\frac{200}{100}\right)^2\right)\frac{d\theta}{dt}=2$$

$$5\frac{d\theta}{dt}=2\rightarrow\frac{d\theta}{dt}=\frac{2}{5}rad/s$$

مثال 8 عجلة دوّارة في مدينة الألعاب طول نصف قطرها $(10)m$ وهي تدور بمعدل دورة واحدة كل دقيقتين. جد سرعة تغيّر ارتفاع راكب فيها عندما يكون على ارتفاع $(16)m$ فوق سطح الأرض



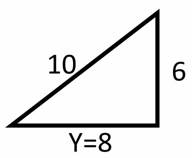
$$r=10\ ,\ \frac{d\theta}{dt}=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

هنالك احتمالين للارتفاع ← صعود / هبوط

a) حالة الصعود

$$\sin\theta=\frac{h-10}{10}\rightarrow\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{\frac{dh}{dt}}{10}$$

$$\frac{dh}{dt}=10\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$



$$h=16\ \rightarrow\ h-10=6$$

$$y=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8$$

$$\frac{dh}{dt}=10\times\frac{8}{10}\times\pi=8\pi\ \ m/min$$

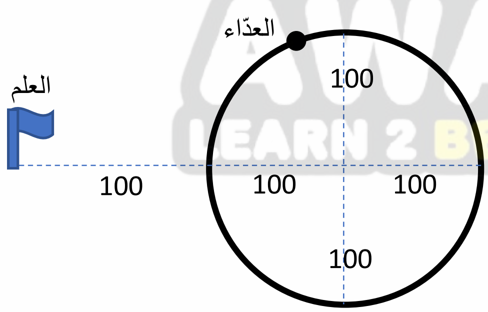
b) في حالة الهبوط

$\cos 0=-$ ← **ستكون منفرجة** θ

$$\frac{dh}{dt}=-8\pi\ \frac{m}{min}$$

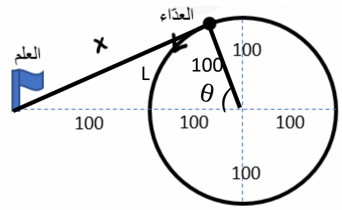
مثال 9 يركض عدّاء في مضمار دائري طول نصف قطره $(100)m$ بسرعة ثابتة مقدارها $(10)m/s$ وهنالك عَلَم كنقطة مرجعية يبعد $(200)m$ عن مركز المضمار. جد معدل تغيّر المسافة بين العدّاء والعَلَم عندما تكون المسافة بينهما $(200)m$.

الحل:



هنالك احتمالين (ابتعاد ، اقتراب)

a) في حالة الاقتراب



$L = r\theta = 100\,\theta$ (طول قوس)

$$\frac{dL}{dt} = 100\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-10}{100} = \frac{-1}{10}$$

قانون جيب التمام

$$x^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta$$

عندما $x = 200$

$$(200)^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta$$

$$(100)^2 = 2(200)(100)\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{4}$$

$$2x\frac{dx}{dt} = 2(20000)\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \quad \dots *$$

لكن: $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

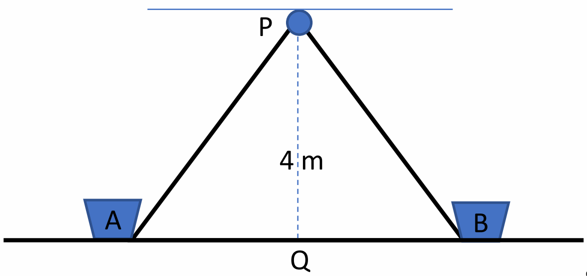
من * ← $200\frac{dx}{dt} = 20000\frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{-1}{10}$

$$\frac{dx}{dt} = -2.5\sqrt{15}\ m/s$$

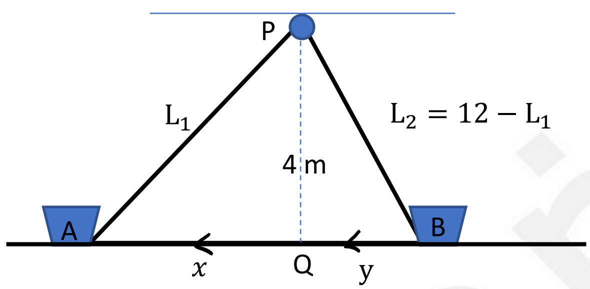
b) في حالة الابتعاد

$$\frac{dx}{dt} = 2\cdot5\sqrt{15}\,m/s$$

مثال 10 رُبطت عربتان A , B بحبل طوله $(12)m$ ويمر الحبل ببكرة P كما في الشكل التالي. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربيتين أسفل P مباشرة وتبعد عنها مسافة $(4)m$ وكانت العربة A تتحرك بعيداً عن Q بسرعة $(0.5)m/s$ ، فجد سرعة اقتراب العربة B من Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بعد $(3)m$ من Q .



الحل:



$$L_1 = \sqrt{16 + x^2} \to \frac{dL_1}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{16 + x^2}}$$

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{3 \times 0\cdot5}{5} = \frac{1.5}{5} = \frac{3}{10}$$

$$L_1 = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$L_2^2 = 16 + y^2 \to y = \sqrt{L_2^2 - 16}$$

$$y = \sqrt{(12 - L_1)^2 - 16}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2(12 - L_1)\frac{dL_1}{dt}}{2\sqrt{(12 - L_1)^2 - 16}} = \frac{-7 \times 0.3}{\sqrt{33}} = \frac{-2.1}{\sqrt{33}}$$

مراجعة أسئلة الكتاب التالية:

- ✓ ص89 الأسئلة 11 ، 12 ، 13
- ✓ ص90 الأسئلة 17 ، 18
- ✓ ص91 سؤال 20
- ✓ ص92 سؤال 30

2 القيم القصوى والتقعر

1) النقط الحرجة

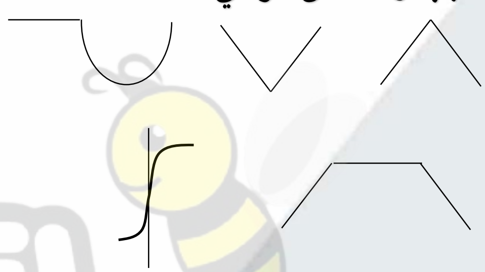
هي النقط التي تكون بالمجال وليست أطراف وتكون عندها ، غير موجودة و $f'(x)=0$

a) من الاقترانات:

بعد تحديد المجال نشتق ونجد أصفار البسط والمقام وباستثناء الأطراف.

b) من رسم منحنى f

1- القمة والقاع
2- عدم الاتصال داخل المجال
3- المدبب والمماس الرأسي



4- الثابت (يكون فترة) وشكله خط أفقي مستقيم

✓ ملاحظة: قيمة الحرجة أي العدد x = التي تشكل حرجة

2) التزايد والتناقص

للاقتران f

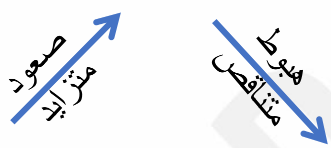
f متزايد ↗ ↘ f متناقص

a) من الاقتران f

1- نحدد المجال
2- نجد الحرجات
3- نرتب الحرجات على خط أعداد f' تصاعدي ونختبر إشارة f'

+ : f متزايد
- : f متناقص

b) من رسم f



c) من رسم f'

المنحنى

فوق x : $f'>0 \rightarrow f$ متزايد

تحت x : $f'<0 \rightarrow f$ متناقص

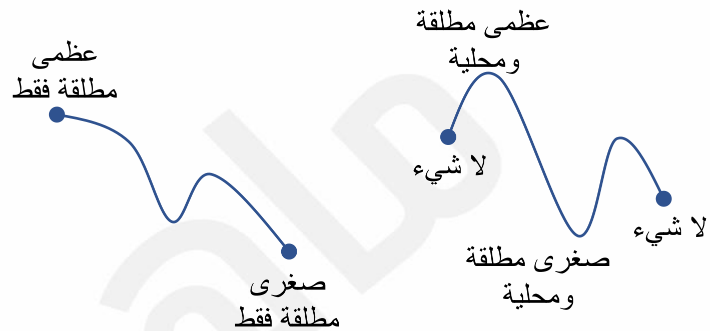
3) القيم القصوى

- صغرى
  - محلية
  - مطلقة
- عظمى
  - محلية
  - مطلقة

❖ **تـذكـــر :**

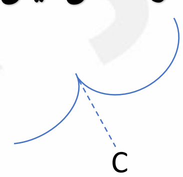
1- الأطراف لاتكون محلية أبداً إما مطلقة أو لا شيء

2- كل مطلقة هي محلية باستثناء الأطراف إذا كانت مطلقة لاتكون محلية

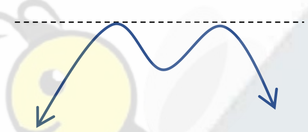


3- القصوى المحلية هي حرجات والعكس ليس صحيح ، مثلاً:

النقطة (C) حرجة لكنها ليست محلية ولا مطلقة



4- قد يكون هنالك أكثر من مطلقة للمسألة



5- قد لا يكون هناك مطلقة أبداً

6- $f(c)$ تسمى قيمة عظمى ، صغرى مطلقة أو محلية (قيمة = صورة)

7- إذا طلب السؤال النقط العظمى ، الصغرى $\left(C, f(C)\right)$

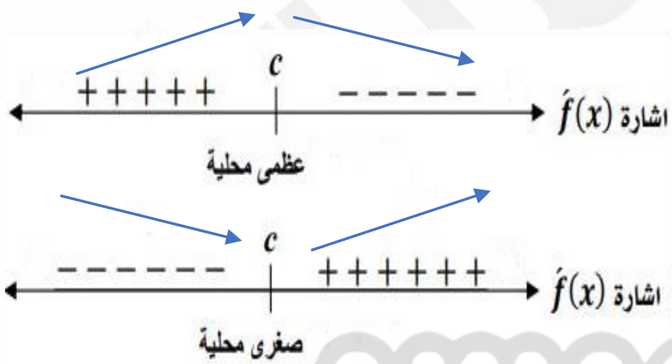
4) ايـجاد القصوى الـمحلية

1- نحدد المجال إن لم يكن مُحدد

2- نجد f' ← نجد الحرجات

3- نرتب الحرجات على خط الأعداد لـ f' ونختبر إشارة f'

4- الانتقال من + إلى -



5) ايجاد القصوى المطلقة

يوجد طريقتين:

a) الجداول

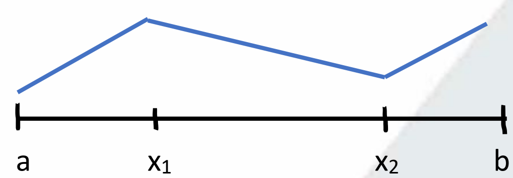
1- نحدد المجال
2- نجد الحرجات
3- نجد صور الحرجات والأطراف

b	x_1	x_2	a
صورة 4	صورة 3	صورة 2	صورة 1

أعلى صورة هي عظمة مطلقة، وأدنى صورة هي صغرى مطلقة

b) طريقة خط أعداد f'

كما في خطوات المحلية

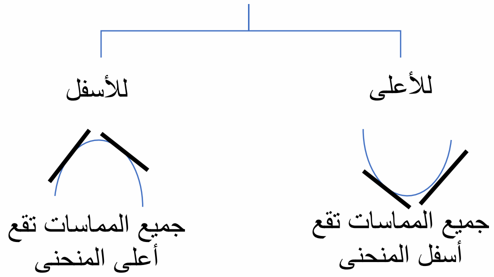


ثمّ نشكل مقارنة بين صورتي $f(x_1)$ و $f(b)$ والأعلى هي مطلقة.

وكذلك $f(x_2)$ و $f(a)$ ، والأدنى هي صغرى مطلقة.

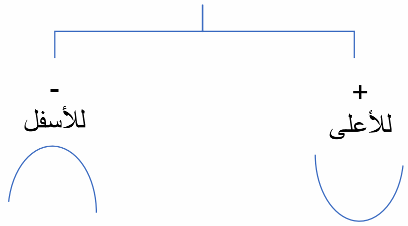
وقد يكونوا متساويين ← مطلقة مكررة.

6) التقعر



طريقة الحل:

1- نحدد المجال
2- نجد f'' ← نجد أصفار البسط والمقام
3- نختبر إشارة f''



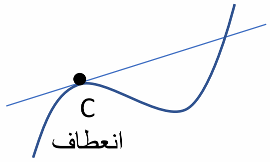
7) نقط الانعطاف

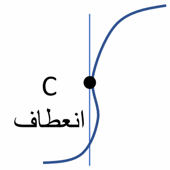
$(c, f(c))$ نقطة انعطاف إذا

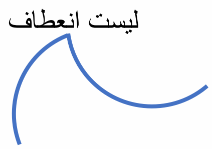
1- تنتمي للمجال وليست أطراف
2- f متصل عند C
3- f يُغيّر تقعرة عند C
4- له مماس وحيد عند C

رأسي   مائل

ليس مدبب







8) اختبار المشتقة الثانية

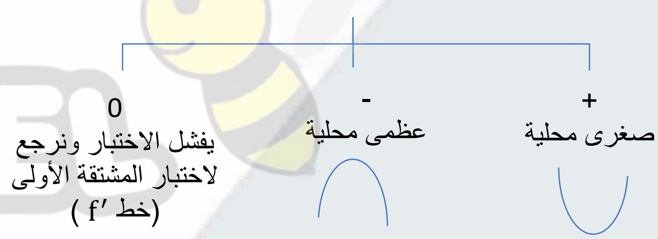
هو اختبار لتحديد فقط القصوى المحلية

a) حالات استخدامه

1- رسمة $f''(x)$
2- دوائر معطياتها f''
3- إجبار السؤال على استخدام المشتقة الثانية

b) طريقة الحل

1- نجد الحرجات الناتجة فقط من $f'(c) = 0$ (أصفار البسط)
2- نعوض c في f''



مُـلـخـصـات

المصطلح	التعريف (هندسي ، جبري)	النظريـة
التزايد	**هندسياً:** جميع مماساته في فترة تصنع زوايا حادة بالاتجاه الموجب مع محور x **جبرياً:** $x_2 > x_1, f(x_2) > f(x_1)$	$f' > 0$ على (a,b) ← f متزايد على (a,b)
التناقص	**هندسياً:** جميع مماسات f تصنع زوايا منفرجة بالاتجاه الموجب مع محور x **جبرياً:** $x_2 > x_1, f(x_1) > f(x_2)$	$f' < 0$ على (a,b) ← f متناقص على (a,b)
التقعر للأعلى	جميع مماسات f تقع أسفل المنحنى	$f'' > 0$ +++++++
التقعر للأسفل	جميع مماسات f تقع أعلى المنحنى	$f'' < 0$ -------
الانعطاف	هي النقطة التي يتغيّر عندها f تقعره بشروط: 1) الاتصال 2) لها مماس وحيد	$f''(c) = 0$ أو غير موجودة بنفس الشروط

تلخيص استنتاج الخصائص من رسم f ، f' ، f''

المطلوب	رسمة f	رسمة f'	رسمة f''
حرجات f على $[a,b]$	1- القمة والقاع 2- المدبب 3- المماس الرأسي 4 - عدم الاتصال 5- الثابت (فترة)	1- التقاطع مع محور x 2- عدم الاتصال	لايمكن معرفتها
التزايد والتناقص	f متزايد f متناقص	1- المنحنى فوق محور x ← f متزايد 2- المنحنى تحت محور x ← f متناقص	<u>فكرته قوية:</u> (وزاري مرتين) يعطي السؤال الحرجات ← من اختبار المشتقة الثانية نحدد العظمى والصغرى المحلية ← نحدد الفترات. + + + + + c − − − − − عظمى − − − − − − c + + + + + + صغرى
القصوى	تحدد من الرسم مباشرة، وأيضا وصفها من الرسم عظمى مطلقة فقط، صغرى مطلقة فقط عظمى مطلقة ومحلية، لا شيء، صغرى مطلقة ومحلية، لا شيء	1- نجد الحرجات 2- دراسة الإشارة $f' > 0$ فوق المحور $f' < 0$ تحت المحور 3- تحديد العظمى والصغرى	من اختبار المشتقة الثانية نحدد الصغرى المحلية والعظمى المحلية.
الانعطاف	من الرسم مباشرة c انعطاف ليست انعطاف	1- القمة والقاع 2- عدم الاتصال الذي يغيّر تزايده	1- التقاطع مع محور x يغيّر الإشارة 2- عدم الاتصال يغير الإشارة
التقعر	من الرسم مباشرة للأسفل للأعلى	f' متزايد f مقعر للأعلى f' متناقص f مقعر للأسفل	فوق محور x ← $f'' > 0$ ← f للأعلى تحت محور x ← $f'' < 0$ ← f للأسفل

مثال 1 في الأسئلة ($1 - 15$) اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:

1) إذا علمت أن $x_2 - x_1 > 0 \;\; , \; f(x_1) - f(x_2) > 0$

فإن f على مجاله:

a) متناقص　　b) متزايد

c) مقعر للأعلى　　d) مقعر للأسفل

2) إذا علمت أن $x_2 - x_1 > 0 \;\; , \; f'(x_1) - f'(x_2) > 0$

لجميع نقاط مجاله فإن f:

a) متناقص　　b) متزايد

c) مقعر للأعلى　　d) مقعر للأسفل

3) إن قيم x الحرجة (مقدار الحرجة) للاقتران

$f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ هي:

a) $\{0,4\}$　　b) $\{2\}$

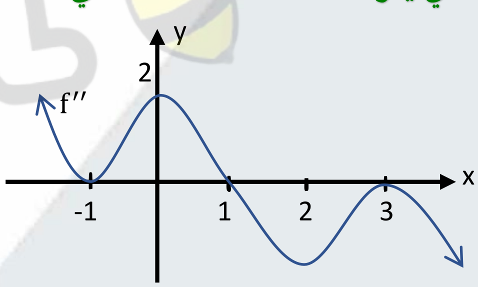
c) $\{0,2,4\}$　　d) $\{0,2\}$

4) إذا كان $f(x)$ كثير حدود وكان $f'(2) = 0$ ، $f''(3) > 0$ وكان $f''(3)f''(2) < 0$ فإن النقطة $\big(2, f(2)\big)$ هي :

a) عظمى محلية　　b) عظمى مطلقة

c) صغرى محلية　　d) صغرى مطلقة

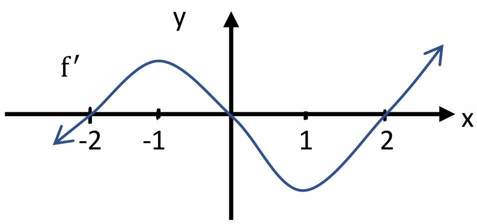
5) معتمداً على الشكل التالي لمنحنى f'' المعرّف على R فإن مجموعة x التي يكون عندها نقط الانعطاف هي:



a) $\{-1 , 1 , 3\}$　　b) $\{1\}$

c) $\{-1 , 1 , 2 , 3\}$　　d) $\{-1 , 1 , 2\}$

6) معتمداً على الشكل التالي لمنحنى f' المعرّف على R فإن مجموعة x التي يكون عندها نقط انعطاف هي:



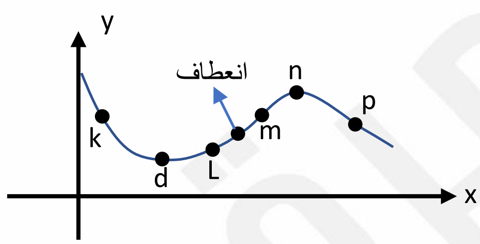
a) $\{-2 , 0 , 2\}$　　b) $\{0\}$

c) $\{-1 , 1\}$　　d) $\{-1 , 0 , 1\}$

7) إذا كانت الفترة $[1 , 25]$ هي مجال الاقتران المتصل f الذي مداه $[3 , 30]$ ، وكان $f'(x) < 0$ لجميع قيم x بين 1 و 25 فإن $f(25)$ تساوي:

a) 1　　b) 3　　c) 25　　d) 30

معتمداً على الشكل التالي أجب عن الفروع (8 – 10)



8) تكون $f'' > 0 \; , f' > 0$ في نفس الوقت عند :

a) k　　b) L　　c) m　　d) p

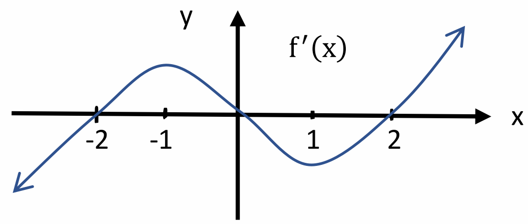
9) تكون $f'' < 0 \; , f' < 0$ بنفس الوقت عند :

a) k　　b) L　　c) m　　d) p

10) تكون $f' \times f'' < 0$ عند :

a) k فقط　　b) m فقط　　c) k , m　　d) m , p

من الشكل التالي لمنحنى $f'(x)$ أجب عن الفروع (11 – 14)



11) للاقتران حرجات عند x تساوي

a) $\{-1,1\}$ b) $\{-2,2\}$

c) $\{-1,0,1\}$ d) $\{-2,0,2\}$

12) للاقتران انعطاف عند x تساوي

a) $\{-1,1\}$ b) $\{-2,2\}$

c) $\{-1,0,1\}$ d) $\{-2,0,2\}$

13) f مقعر للأسفل على الفترة

a) $(-\infty,-1)$ b) $(-1,1)$

c) $(0,2)$ d) $(-2,0)$

14) f متزايد على الفترات

a) $(-\infty,-1),(1,\infty)$ b) $(-2,0),(2,\infty)$

c) $(-\infty,-2),(0,2)$ d) $(-1,1)$

15) إذا علمت أن $f(x)=(ax+b)^{\frac{1}{3}}+5b$ له قصوى عند $x=2$ مقدارها 6 فإن قيم a,b تساوي:

a) $a=\frac{3}{5}, b=\frac{6}{5}$ b) $a=\frac{-3}{5}$, $b=\frac{6}{5}$

c) $a=\frac{3}{5}$, $b=\frac{-6}{5}$ d) $a=\frac{-3}{5}$, $b=\frac{-6}{5}$

مثال 2 إذا كان للإقتران

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ قيمة عظمى محلية عند $x=-1$ ، صغرى محلية عند $(1,-5)$ جد كلاً من الثوابت a,b,c .

الحل: نحتاج لثلاثة معادلات

$$f(1)=-5 \Rightarrow 1+a+b+c=-5$$

$$a+b+c=-6 \quad ...(1)$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f'(-1)=0 \Rightarrow 3-2a+b=0$$

$$3=2a-b \quad ...(2)$$

$$f'(1)=3+2a+b=0$$

$$3=-2a-b \quad ...(3)$$

$$(2)+(3) \quad \Rightarrow 6=-2b$$

$$b=-3 \quad \Rightarrow \quad a=0$$

$$(1) \Rightarrow 0-3+c=6 \Rightarrow c=-3$$

مثال 3 إذا علمت أن

$$f(x)=2\cos x+\sin 2x \quad ,\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

a) حدّد النقط الحرجة

b) فترات التزايد والتناقص

c) القيم القصوى وحدد نوعها

الحل: $f(x)$ متصل على مجاله

$$f'(x)=-2\sin x+2\cos 2x=0$$

$$-\sin x+1-2\sin^2 x=0 \quad *-1$$

$$2\sin^2 x+\sin x-1=0$$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

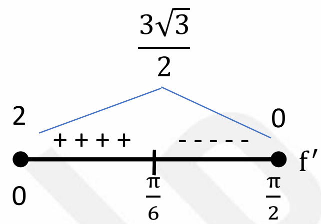
$$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$ خارج المجال

a) الحرجات $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ نقطة

b)



f متزايد على $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ ، متناقص $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$

c) النقطة $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ عظمى مطلقة ومحلية

النقطة $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ صغرى مطلقة فقط

مثال 4 جد القيمة العظمى والصغرى المطلقة إن وجدت للاقتران $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

الحل:

السؤال طلب فقط المطلقة نلجأ للجدول

$$f'(x) = \frac{x^2 . \frac{1}{x} - 2x \ln x}{x^4}$$

أصفار المقام 0 خارج الفترة مرفوضة

أصفار البسط $x[1 - 2\ln x] = 0$

$x = 0$ مرفوضة , $\ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$

x	$\frac{1}{2}$	$e^{\frac{1}{2}}$	4
$f(x)$	-2.8	0.184	0.087

عظمى مطلقة عند $x = e^{\frac{1}{2}}$

صغرى مطلقة عند $x = \frac{1}{2}$

مثال 5 جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى وحدد نوعها للاقتران $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-3)$

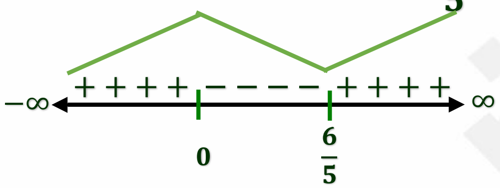
الحل:

المجال R

$$f'(x) = x^{\frac{2}{3}} + (x-3) * \frac{2}{3} x^{\frac{-1}{3}} = 0$$

$$\frac{2(x-3)}{3x^{\frac{1}{3}}} = -x^{\frac{2}{3}} \quad , \quad x = 0$$

$$-3x = 2x - 6 \Rightarrow -5x = -6 \rightarrow x = \frac{6}{5}$$



f متزايد $(-\infty, 0), \left(\frac{6}{5}, \infty\right)$

f متناقص $\left(0, \frac{6}{5}\right)$

عند $x = 0$ عظمى محلية مقدارها 0

عند $x = \frac{6}{5}$ صغرى محلية مقدارها -2.03

مثال 6 إذا علمت أن $f(x) = x(4-x)^3$ حيث $x \in [-1, 5]$ فجد:

a) فترات تزايد وتناقص f.

b) القيم القصوى المطلقة والمحلية إن وجدت.

c) فترات التقعر.

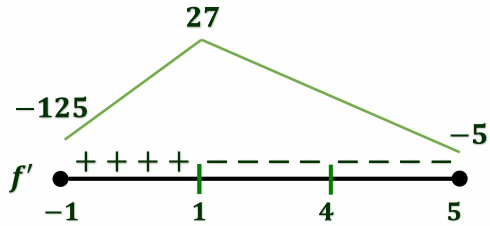
d) نقط الانعطاف.

الحل: f اقتران متصل على مجاله

$$f'(x) = 3(x)(4-x)^2(-1) + (4-x)^3 = 0$$

$$(4-x)^2(-3x+4-x) = 0 \rightarrow x = 4, x = 1$$

(a



f متزايد على $(-1,1)$

f متناقص $(1,5)$

b) النقطة $(1,27)$ عظمى مطلقة ومحلية.

النقطة $(-1,-125)$ صغرى مطلقة فقط.

(c

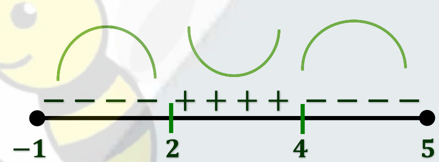
$$f'(x) = (4-x)^2(4-4x)$$

$$f''(x) = (4-x)^2(-4) + (4-x)^2(4-x)$$

$$f''(x) = (4-x)(-16+4x-8+8x)$$

$$f''(x) = (4-x)(-24+12x)$$

$$x = 4 \quad , \quad x = 2$$



f مقعر للأسفل $(-1,2), (4,5)$

f مقعر للأعلى $(2,4)$

d) نقطة الانعطاف $(2,16), (4,0)$

مثال 7 مستخدمًا اختبار المشتقة الثانية إن أمكن جد القصوى المحلية للاقتران $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$؟

الحل:

المجال $R - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(2x) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

أصفار البسط $\Leftarrow$ $x = 0 , x = 2$

$$f''(x) = \frac{(x-1)^2(2x-2) - (x^2-2x) + 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

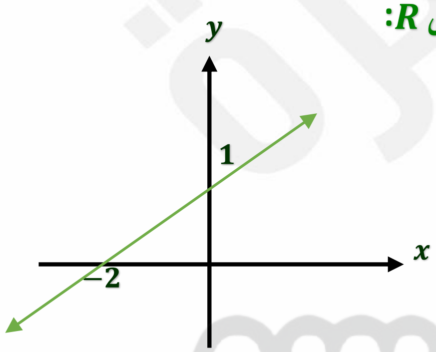
$$f''(0) = \frac{-2-0}{1} = -2$$

عند $x = 0$ عظمى محلية مقدارها 0

$$f''(2) = \frac{-2-0}{1} = 2$$

عند $x = 2$ صغرى محلية مقدارها 4

مثال 8 من الشكل التالي لمنحنى $f''(x)$ حيث f متصل على R:



جد:

a) قيم x الانعطاف.

b) فترات التقعر لـــ f

c) إذا علمت أن $x = -3, 0$ حرجات f

جد فترات التزايد والتناقص.

الحل:

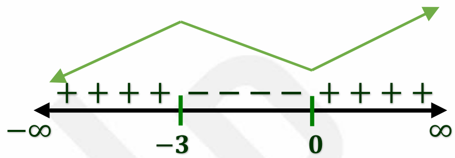
a) x الانعطاف $\{-2\}$

b) f مقعر للأسفل $(-\infty,-2)$

f مقعر للأعلى $(-2,\infty)$

c) صغرى محلية $f''(0)>0 \to x=0$

عظمى محلية $f''(-3)<0 \to x=-3$



f متزايد على $(-\infty,-3),(0,\infty)$

f متناقص $(-3,0)$

مثال 9 يمثل الاقتران

$$S(t)=-t^3+3t^2+1 \quad ,t\geq 0$$

موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم:

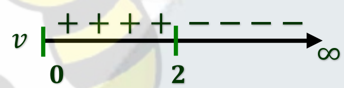
1) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

2) ما الفترات الزمنية التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة وتتناقص؟

الحل:

1) $v(t)=-3t^2+6t=0$

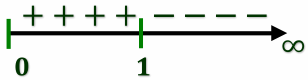
$-3t(t-2)=0 \to t=0,2$



يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب على الفترة $(0,2)$

يتحرك الجسم بالاتجاه السالب على الفترة $(2,\infty)$

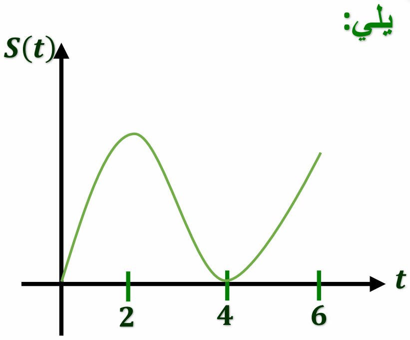
2) $a(t)=-6t+6=0 \to t=1$



السرعة المتجهة متزايدة على $(0,1)$

السرعة المتجهة متناقصة على $(1,\infty)$

مثال 10 من الشكل التالي لمنحنى $S(t)$ أجب عما يلي:



a) قيم t التي يكون عندها الجسم بحالة سكون.

b) ما الفترات التي يتحرك بها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب.

c) إذا كان تسارع الجسم صفرًا عندما $t=3$ حدد الفترات التي يكون فيها السرعة المتجهة متزايدة ومتناقصة.

الحل:

a) $t=2,4$

b) الاتجاه الموجب $(0,2),(4,6)$

الاتجاه السالب $(2,4)$

c) $(0,3)$ السرعة المتجهة متناقصة

$(3,6)$ السرعة المتجهة متزايدة

3 تطبيقات القيم القصوى

هي مسائل إيجاد أكبر وأصغر (أبعد، أقرب) قيمة لهذه المسألة.

1) نرسم المسألة ونترجم المتغيرات عليها.

2) نكتب القانون المطلوب المقرون بأكبر أو أصغر قيمة.

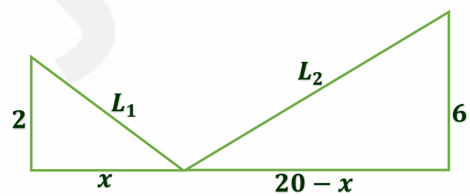
3) نجعل القانون بدلالة متغير واحد (من معادلة مساعدة).

4) نجد الحرجات وقيم الحرجات وكذلك قيم (صور) الأطراف.

5) نحدد المطلقة لهذه المسألة.

❖ أهم أفكار الدرس:

1 مسائل الوترين:



$w = L_1 + L_2$

وتحل $\sin\alpha = \sin\beta$

2

المسائل الاقتصادية:

.1

- التكلفة $C(x)$
- الربح $P(x)$
- الايراد $R(x)$

.2 **الربح** = الإيراد − التكلفة

$P(x) = R(x) - C(x)$

.3 **الإيراد الكلي** = عدد القطع * السعر

❖ الأسئلة الاقتصادية على نوعين:

قوانين جاهزة	معلومات (خصم، إضافة) ونحن نكون القوانين

وعند تكوين القانون نبدأ بفرض للمتغير الذي يؤثر على المسألة، مثلًا كلما خصمنا (10) دنانير يزادا لبيع (20) قطعة نفرض x عدد قطع (10) دنانير المخصومة.

السعر = السعر القديم − $(x)(10)$

الكمية= الكمية القديمة + $(x)(20)$

3 زاوية النظر

نقسم المسألة إلى مثلثين قائمين ثم θ المطلوبة

$\theta = \alpha - \beta$ $\qquad$ $\theta = \alpha + \beta$

نستخدم متطابقة

$$\tan(\alpha \mp \beta) = \frac{\tan\alpha \mp \tan\beta}{1 \pm \tan\alpha\tan\beta}$$

وعادة تكون الزاوية للتأكد (فقط)

$x = \sqrt{d(h+d)}$

x = بعد الشخص عن الصورة.

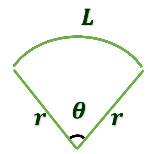
d =المقابل للمثلث الصغير.

$h+d$ =مجموع المقابلين (الصغير والكبير).

4 أقرب نقطة على اقتران من نقطة ثابتة

النقطة $(x,y) = \left(x, f(x)\right)$ ثم المسافة بين نقطتين.

مثال 1 لدى مزارع (100) مترًا طوليًا من سياج، يرغب باستعماله كاملًا لتسييج حقل رعي على شكل قطاع دائري، زاويته θ بالراد r: نصف قطر القطاع، جد نصف قطر القطاع الذي تكون عنده مساحة الحقل أكبر ما يمكن:



الحل:

محيط القطاع $= 2r + L$

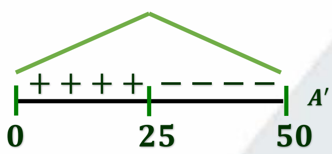
$$100 = 2r + \theta \rightarrow \theta = \frac{100 - 2r}{r}$$

$$\theta = \frac{100}{r} - 2$$

مساحة القطاع $A = \frac{1}{2} r^2\, \theta = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{100}{r} - 2\right)$

$$A = 50r - r^2 \Rightarrow A' = 50 - 2r = 0$$

$$r = 25$$



مثال 2 تنتج مزرعة (50) صندوقًا من الحمضيات من الشجرة الواحدة تقريبًا عند زراعة (15) شجرة في دونم أرض زراعية. ويقل انتاج الشجرة الواحدة صندوقين عند زراعة شجرة إضافية في كل دونم من الحمضيات بسبب قرب الأشجار. ما عدد الأشجار التي يجب زراعتها في كل دونم لتحقيق أكبر انتاج ممكن؟

الحل:

نفرض أن عدد الشجر الزيادة $= x$

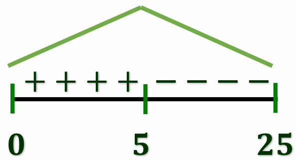
عدد الشجر الكلي $= 15 + x$

الانتاج للشجرة $= 50 - 2x$

الانتاج الكلي $A = (15 + x)(50 - 2x)$

$$A' = (15 + x)(-2) + (50 - 2x)(1) = 0$$

$$-4x + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 5$$



عدد الشجر في الدونم $5 + 15 = 20$

مثال 3 لاحظت احدى الشركات السياحية المسؤولة عن تنظيم رحلات داخلية أن معدل بيعها للبطاقات (700) بطاقة وبسعر (25) دينار. وأنه كلما خفضت الشركة دينار من سعر البطاقة زاد عدد المشاركين (50) مشترك وأن كل مشترك ينفق بالرحلة لمطاعم الشركة (5) دنانير حدد سعر التذكرة الذي يحقق للشركة أكبر إيراد؟

الحل:

نفرض أن الشركة خفضت x دينار من سعر التذكرة

السعر الحالي $= 25 - x$

عدد المشاركين $= 700 + 50x$

إيراد التذاكر $= (25 - x) + (700 + 50x)$

إيراد المصاريف الأخرى $= 5(700 + 50x)$

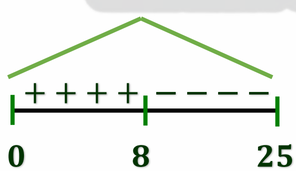
الايراد الكلي $R = (700 + 50x)(25 - x) + 5(700 + 50x)$

$$R = (700 + 50x)(25 - x) + 5(700 + 50x)$$

$$R' = (700 + 50x)(-1) + (25 - x)(50) + 250 = 0$$

$$100x = -700 + 1250 + 250$$

$$100x = 800 \quad \rightarrow \quad x = 8$$



السعر $= 25 - 8 = (17)$

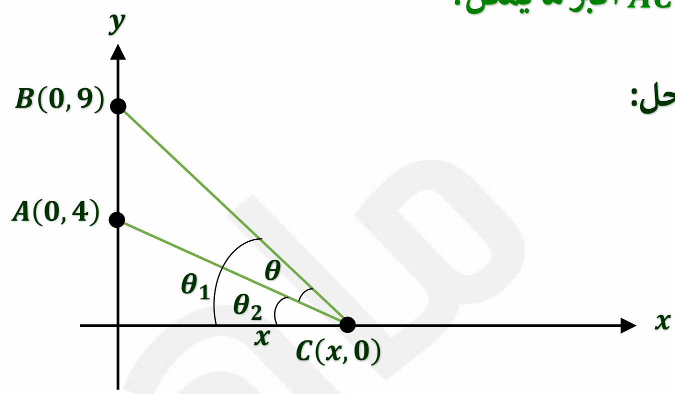
17 دينار

مثال 4 $A(0,4)$, $B(0,9)$ نقطتان ثابتتان

C نقطة تتحرك على محور x الموجب،

جد الاحداثي x للنقطة C الذي يجعل قياس الزاوية ACB أكبر ما يمكن؟

الحل:



$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

$$\tan\theta_1 = \frac{9}{x} \quad , \quad \tan\theta_2 = \frac{4}{x}$$

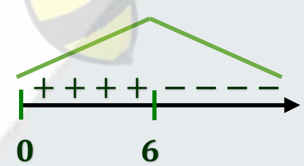
$$\tan\theta = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{\frac{5}{x}}{1 + \frac{36}{x^2}}$$

$$\tan\theta = \frac{5}{x^2 + 36}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2+36)(5) - 5x(2x)}{(x^2+36)^2}$$

البسط = صفر $\Leftarrow$ $5(x^2 + 36 - 2x^2) = 0$

$x = 6 \,, \quad -6$

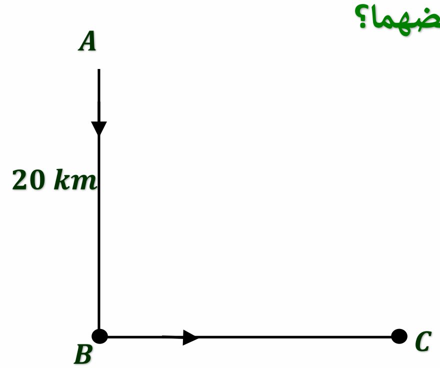


وللتأكد $x = \sqrt{4(4+5)}$

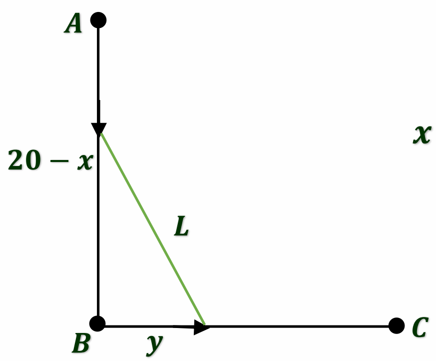
$= 2 * 3 = 6$

مثال 5 من الشكل التالي تحرّك شخص من A باتجاه B بسرعة $4\ km/h$ الساعة 8 صباحاً.

وفي الوقت نفسه تحرّك شخص آخر من B إلى C بسرعة $3\ km/h$. في أي ساعة يكون الشخصين أقرب ما يمكن لبعضهما؟



الحل:



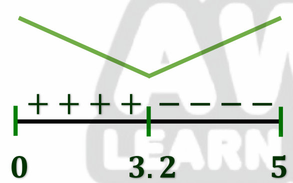
$$x = 4t \quad , \quad y = 3t$$

$$L = \sqrt{(20-x)^2 + y^2} = \sqrt{(20-4t)^2 + 9t^2}$$

$$L' = \frac{2(20-4t)(-4) + 18t}{2\sqrt{(20-4t)^2 + 9t^2}} = 0$$

$$2(-80 + 16t + 9t) = 0$$

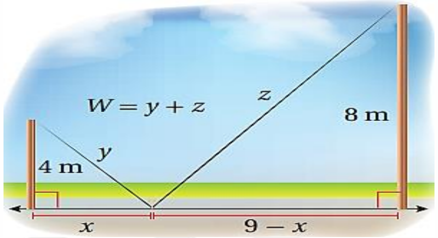
$$t = \frac{80}{25} = 3.2$$



(من الساعة) $0.2 \to 12\ min$

أقرب ما يمكن من بعضها الساعة $11:12$

مثال 6 عمودان طول أحدهما 8m ، وطول الآخر 4m ، والمسافة بينهما 9m ، وهما مثبتان بسلكين يصلان قمة كل عمود بوتد عند سطح الأرض كما في الشكل التالي. جد الموقع المناسب لتثبيت الوتد بين العمودين بحيث يكون طول السلك المستعمل أقل ما يمكن.



طول السلك $w = y + z$

$$w(x) = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{(9 - x)^2 + 64}$$

$, \; 0 \le x \le 9$

$$w'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{16 + x^2}} + \frac{-2(9 - x)}{2\sqrt{(9 - x)^2 + 64}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{16 + x^2}} = \frac{9 - x}{\sqrt{(9 - x)^2 + 64}}$$

نربع الطرفين:

$$\frac{x^2}{16 + x^2} = \frac{(9 - x)^2}{(9 - x)^2 + 64}$$

$$(16 + x^2)(9 - x)^2 = x^2(9 - x)^2 + 64x^2$$

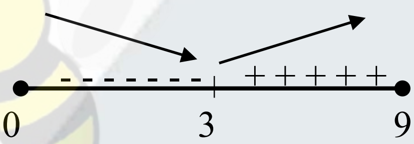
$$(9 - x)^2(16) = 64x^2$$

نُجذر ←

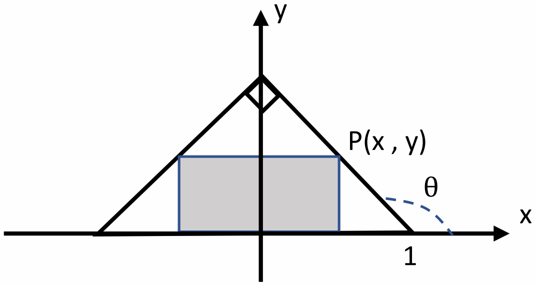
$$(9 - x)(4) = 8x$$

$$36 - 4x = 8x \;\; \rightarrow \;\; 12x = 36 \rightarrow x = 3$$

عندها $w = 15\ m$



مثال 7 من الشكل التالي مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين، طول قاعدته (2) وحدة، جد أبعاد المستطيل لتكون مساحته اكبر مايمكن .



الحل: $A = 2xy$

لكتابة y بدلالة x إما من التشابه أو معادلة المستقيم

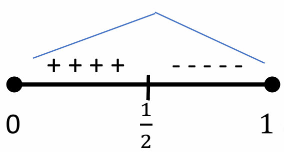
$$\theta = 135° = \frac{3\pi}{4}$$

$$\tan\frac{3\pi}{4} = -1 \qquad \text{(الميل)}$$

يمر $(1,0)$ ← $y - 0 = -1(x - 1)$

$$y = -x + 1$$

$$A = 2x(1 - x) = 2x - 2x^2$$



الطول = 1 ، العرض = $\frac{1}{2}$

$$A = \frac{1}{2}$$

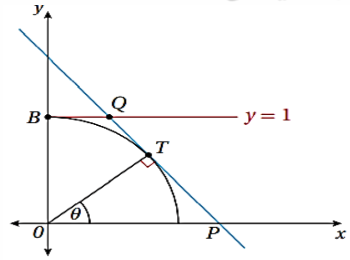
مثال 8 تقع النقطة T على دائرة الوحدة التي معادلتها: $x^2 + y^2 = 1$ ، عند الزاوية θ من المحور X الموجب، حيث: $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ كما في الشكل المجاور:

a) أثبت أن معادلة المستقيم PT هي:

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1$$

b) أثبت أن مساحة شبه المنحرف OBQP تعطى بالاقتران التالي: $A = \frac{2-\sin\theta}{2\cos\theta}$

c) أجد قياس الزاوية θ الذي تكون عنده مساحة شبه المنحرف أقل ما يمكن.



الحل:

a) $T(\cos\theta, \sin\theta)$

$m_{OT} = \tan\theta$ (لأنه عمودي)

$$m_{PT} = \frac{-1}{\tan\theta} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$$

المعادلة: $y - \sin\theta = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}(x - \cos\theta)$

$$y\sin\theta - \sin^2\theta = -\cos x + \cos^2\theta$$

$$y\sin\theta + x\cos\theta = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1$$

b) $A = \frac{1}{2}$(مجموع القاعدتين) × (الارتفاع)

P تكون عندما $y = 0$

$$x = \frac{1}{\cos\theta} \rightarrow P\left(\frac{1}{\cos\theta}, 0\right)$$

Q تكون عندما $y = 1$ ← $x = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

$$Q\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}, 1\right)$$

$A = \frac{1}{2}$(مجموع القاعدتين) × (الارتفاع)

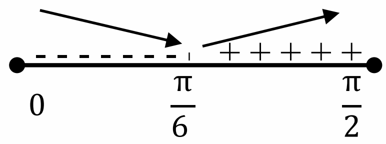
$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta} \quad \dots(1)$$

c) $A'(\theta) = 0$

$$A' = \frac{(2\cos\theta)(-\cos\theta) - (2-\sin\theta)(-2\sin\theta)}{4\cos^2\theta} = 0$$

$$A' = \frac{2\sin\theta - 1}{2\cos^2\theta} = 0$$

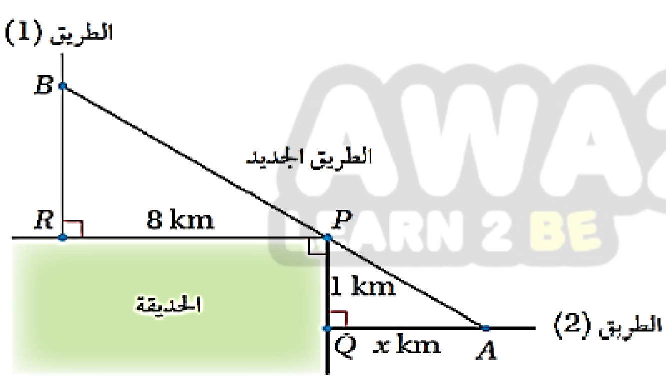
$$\sin\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$



← مساحة شبه المنحرف أصغر ما يمكن عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$

مراجعة بيتية

مثال 9 يبيّن الشكل التالي مدخلين لحديقة عامة عند النقطة R والنقطة Q ، ويمكن الوصول إلى هذين المدخلين من طريقين عموديين على ضلعي الحديقة. أرادت البلدية إنشاء طريق جديد يصل بين الطريقين القديمين، ويمر بالنقطة P التي تمثل زاوية الحديقة، فاختارت النقطة A والنقطة B على الطريقين ليكون طول الدريق الجديد أقصر ما يمكن، علماً بأن النقطة A تقع على بُعد x km من النقطة Q . جد قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن.



أولاً: نجد BR بدلالة x وذلك عن طريق تشابه المثلثين PQA ، BRP

$$\frac{BR}{1}=\frac{8}{x}\rightarrow BR=\frac{8}{x}$$

$$L=BA=BP+PA$$

$$L=\sqrt{(8)^2+\left(\frac{8}{x}\right)^2}+\sqrt{1+x^2}$$

$$L=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{\frac{64x^2+64}{x^2}}$$

$$L=\sqrt{1+x^2}+\frac{8}{x}\sqrt{1+x^2}$$

بإخراج عامل مشترك:

$$L=\sqrt{1+x^2}\left(1+\frac{8}{x}\right)\quad , \quad x>0 \text{ حيث}$$

$$\frac{dL}{dx}=\left(\sqrt{1+x^2}\right)\left(\frac{-8}{x^2}\right)+\left(1+\frac{8}{x}\right)\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=0$$

$$\frac{x\left(1+\frac{8}{x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{8\sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

$$8(1+x^2)=x^3\left(1+\frac{8}{x}\right)$$

$$8+8x^2=x^3+8x^2\rightarrow x=2$$

- - - - - - - | + + + + +

0 2

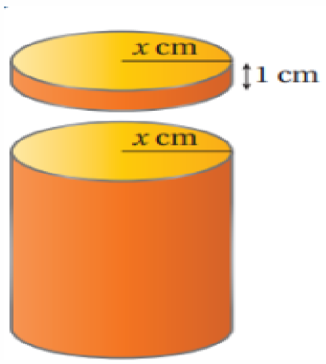
القيمة التي تجعل الطريق الجديد أقصر ما يمكن هي: $x=2\ km$

مثال 10 **علبة بسكويت أسطوانية الشكل، لها غطاء محكم يتداخل مع العلبة بمقدار 1 cm ، كما في الشكل التالي. إذا كان نصف قطر العلبة والغطاء x cm وصنعت العلبة من صفيحة رقيقة ملائمة للأغذية، مساحتها $80\pi\ cm^2$ من دون أي هدر في المواد في أثناء عملية التصنيع، جد:**

a) قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يمكن.

b) أكبر حجم ممكن للعلبة.

c) النسبة المئوية للجزء الذي استعمل من الصفيحة لصنع الغطاء عندما كان الحجم أكبر ما يمكن.



الحل:

a) $$A_{\text{الكلية}}=A_{\text{الجانبية}}+A_{\text{القاعدتين}}+A_{\text{الجانبية للغطاء}}$$

$$A=80\pi=2\pi xh+2\pi x^2+2\pi x \quad ....(1)$$

$$h=\frac{80}{2x}-\frac{2x^2}{2x}-\frac{2x}{2x}\quad\rightarrow\quad h=\frac{40}{x}-x-1$$

$$V=\pi x^2h=\pi x^2\left(\frac{40}{x}-x-1\right)$$

$$=\pi(40x-x^3-x^2)$$

$$\frac{dV}{dx}=\pi(40-3x^2-2x)=0 \quad (\text{نضرب بـ}-1)$$

$$3x^2+2x-40=0\quad\rightarrow\quad(3x-10)(x+4)$$

$$=0\quad\rightarrow\quad x=\frac{10}{3}$$

+ + + + + + | - - - - - - - -

0 $\frac{10}{3}$

b) $$V\left(\frac{10}{3}\right)=\pi\left(40\left(\frac{10}{3}\right)-\left(\frac{10}{3}\right)^3-\left(\frac{10}{3}\right)^2\right)$$

$$=\frac{2300}{27}\pi\ cm^3$$

c) A_c = مساحة الغطاء الكلي

$$A_C = \pi x^2 + 2\pi x(1) = \pi x(x+2)$$

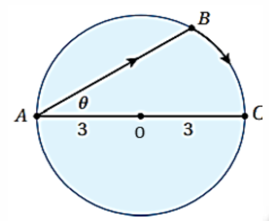
$$A_C\left(\frac{10}{3}\right) = \pi\left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{10}{3}+2\right) = \frac{160\pi}{9}$$

∴ النسبة المئوية للجزء المستعمل لصنع الغطاء من مساحة الصفيحة تساوي:

$$\frac{Ac}{A_T} \times 100\% = \frac{\frac{160\pi}{9}}{80\pi} \times 100\%$$

$= 22.2\ \%$, A_T = المساحة الكلية

مثال 11 **يقف رجل عند النقطة A على شاطئ بحيرة دائرية نصف قطرها 3 km ، وهو يريد الوصول للنقطة C المقابلة تماماً للنقطة A ، على الجانب الآخر من البحيرة، في أقصر وقت ممكن كما في الشكل التالي. يمكن للرجل أن يجذف بزورق من النقطة A إلى النقطة B بسرعة 3 km/h ، ثمّ يركض حول حافة البحيرة بسرعة 6 km/h . أحدد موقع النقطة B ليصل الرجل من النقطة A إلى النقطة C في أقل وقت ممكن؟ أبرر إجابتي.**



الحل:

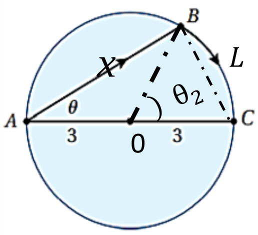
t_1 : الزمن اللازم للانتقال من A إلى B

$$t_1 = \frac{x}{\frac{dx}{dt}} \quad , \quad A \to B = x$$

t_2 : الزمن اللازم للانتقال من B إلى C

$$t_1 = \frac{L}{\frac{dL}{dt}} \quad , \quad B \to C = L$$

$$T = t_1 + t_2 = \frac{x}{3} + \frac{L}{6}$$



الزاوية B قائمة محيطية على القطر

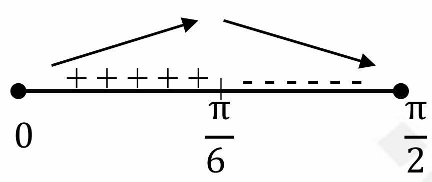
$$\cos\theta = \frac{x}{6} \Rightarrow x = \boxed{6\cos\theta}$$

طول القوس $L = r(2\theta) = 6\theta$

$$T = \frac{6\cos\theta}{3} + \frac{6\theta}{6} = 2\cos\theta + \theta$$

$$T' = -2\sin\theta + 1 = 0$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$



أقل قيمة عند $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftarrow 2\theta = 180°$

∴ **تنطبق B على A .**

إجابة سؤال الدوائر ص28

رقم الدائرة	1	2	3	4	5	6	7	8
الإجابة	a	d	b	a	b	c	b	b

رقم الدائرة	9	10	11	12	13	14	15
الإجابة	d	c	d	a	b	b	b