Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

طريق التفوق

في

الرياضيات

الوحدة الثالثة

الأعداد المركبة

2006

إعداد

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

Dr. Khaled jalal

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad
Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

0799948198

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الفهرس

رقم الدرس	أسم الدرس	رقم الصفحة
الأول	الأعداد المركبة (كتاب الطالب)	4
الأول	الأعداد المركبة (كتاب التمارين)	9
الثاني	العمليات على الأعداد المركبة (كتاب الطالب)	11
الثاني	العمليات على الأعداد المركبة (كتاب التمارين)	16
الثالث	المحل الهندسي في المستوى المركب (كتاب الطالب)	18
الثالث	المحل الهندسي في المستوى المركب (كتاب التمارين)	23
	أختبار نهاية الوحدة	25

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الأعداد المركبة

كتاب الطالب

الدرس الاول

مثال 1 :

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i :

1) $\sqrt{-16}$ 2) $\sqrt{-72}$

أتحقق من فهمي صفحة (137) :

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i :

a) $\sqrt{-75}$ b) $\sqrt{-49}$

مثال 2 :

أجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة مفترضا $\sqrt{-1} = i$:

1) $\sqrt{-8} \times \sqrt{-18}$ 2) $5\,i \times \sqrt{-4}$ 3) i^{15}

أتحقق من فهمي صفحة (138) :

أجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة مفترضا $\sqrt{-1} = i$:

a) $\sqrt{-27} \times \sqrt{-48}$ b) $\sqrt{-50} \times -4\,i$ c) i^{2021}

مثال 3 :

أجد قيمة x ، و قيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة : $2x - 6 + (3y + 2)\,i = 4x + 8i$ صحيحة .

أتحقق من فهمي صفحة (140) :

أجد قيمة x ، و قيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة : $x + 5 + (4y - 9)\,i = 12 - 5\,i$ صحيحة .

مثال 4 :

أمثل العدد المركب و مرافقه بيانيا في المستوى المركب في كل مما يأتي :

1) $z = -3 + 5\,i$ 2) $z = 6 - 4\,i$ 3) $z = 2\,i$

أتحقق من فهمي صفحة (141):

أمثل العدد المركب و مرافقه بيانيا في المستوى المركب في كل مما يأتي :

a) $z = 2 + 7\,i$ b) $z = -3 - 2\,i$ c) $z = -3\,i$

مثال 5 :

أجد مقياس كل عدد مركب مما يأتي :

1) $z = 3 - 4\,i$ 2) $z = 12\,i$

أتحقق من فهمي صفحة (142):

أجد مقياس كل عدد مركب مما يأتي :

a) $z = -3 - 6\,i\sqrt{2}$ b) $z = -2\,i$ c) $z = 4 + \sqrt{-20}$

مثال 6 :

أجد سعة كل من الأعداد المركبة الأتية ، مقربا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين :

1) $z = 4 + 3\,i$ 2) $z = -3 + 8\,i$ 3) $z = -1 - 6\,i$ 4) $z = 8 - 4\,i$

أتحقق من فهمي صفحة (146):

أجد سعة كل من الأعداد المركبة الأتية ، مقربا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين :

a) $z = 8 + 2\,i$ b) $z = -5 + 12\,i$ c) $z = -2 - 3\,i$ d) $z = 8 - 8\,i\sqrt{3}$

مثال 7 :

أكتب العدد المركب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

1) $|z| = 4\ ,\ Arg(z) = \frac{\pi}{6}$ 2) $z = -2 - 5\,i$

أتحقق من فهمي صفحة (148):

أكتب العدد المركب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

a) $|z| = 4\sqrt{2}\ ,\ Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$ b) $z = -4 - 4\,i$ c) $z = 2\,i$

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

أتدرب و أحل المسائل صفحة (148) ، (149) ، (150) :

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i :

1) $\sqrt{-19}$ 2) $\sqrt{-\frac{12}{25}}$ 3) $\sqrt{-\frac{9}{32}}$ 4) $\sqrt{-53}$

أجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة مفترضا $\sqrt{-1} = i$:

5) i^{26} 6) i^{39} 7) $(i)(2i)(-7i)$

8) $\sqrt{-6} \times \sqrt{-6}$ 9) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-8}$ 10) $2i \times \sqrt{-9}$

أكتب في كل مما يأتي العدد المركب z بالصورة القياسية :

11) $\frac{2+\sqrt{-4}}{2}$ 12) $\frac{8+\sqrt{-16}}{2}$ 13) $\frac{10-\sqrt{-50}}{5}$

أحدد الجزء الحقيقي ، الجزء التخيلي لكل من الأعداد المركبة الاتية ، ثم أمثلها جميعا في المستوى المركب نفسه :

14) $z = 2 + 15\,i$ 15) $z = 10\,i$ 16) $z = -16 - 2\,i$

أمثل العدد المركب و مرافقه بيانيا في المستوى المركب في كل مما يأتي :

17) $z = -15 + 3\,i$ 18) $z = 8 - 7\,i$ 19) $z = 12 + 17\,i$

20) $z = -3 - 25\,i$ 21) $z = 3\,i$ 22) $z = 15$

أجد $|z|$ و $|\overline{z}|$ لكل مما يأتي :

23) $z = -5 + 5\,i$ 24) $z = 3 + 3\,i\sqrt{3}$ 25) $z = 6 - 8\,i$

أجد قيم كل من x و y الحقيقية التي تجعل كلا من المعادلات الاتية صحيحة:

26) $x^2 - 1 + i(2y - 5) = 8 + 9i$ 27) $2x + 3y + i(x - 2y) = 8 - 3i$

28) $y - 3 + i(3x + 2) = 9 + i(y - 4)$ 29) $i(2x - 5y) + 3x + 5y = 7 + 3i$

أجد سعة كل من الأعداد المركبة الأتية ، مقربا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين :

30) 1 31) $3\,i$ 32) $-5-5\,i$

33) $1-i\sqrt{3}$ 34) $6\sqrt{3}+6\,i$ 35) $3-4\,i$

36) $-12+5\,i$ 37) $-58-93\,i$ 38) $2\,i-4$

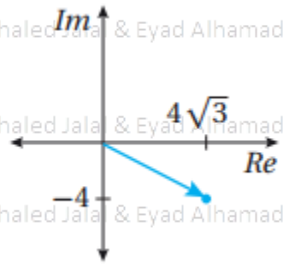
أكتب في كل مما يأتي العدد المركب z بالصورة المثلثية :

39) $|z|=2\ ,\ Arg(z)=\frac{\pi}{2}$ 40) $|z|=3\ ,\ Arg(z)=\frac{\pi}{3}$

41) $|z|=7\ ,\ Arg(z)=\frac{5\pi}{6}$ 42) $|z|=1\ ,\ Arg(z)=\frac{\pi}{4}$

43) $z=6$ 44) $z=1+i$

45) يبين الشكل المجاور : التمثيل البياني للعدد المركب z_1 في المستوى المركب .



أجد العدد المركب z_2 الذي يحقق ما يأتي :

$|z_2|=40\quad ,\quad Arg z_2=Arg\bar{z_1}$

بافتراض أن : $z=a+ib$ ، حيث $|z|=10\sqrt{2}$ ، وأن : $Arg(z)=\frac{3\pi}{4}$:

46) أكتب العدد المركب بالصورة القياسية 47) أجد قياس الزاوية المحصورة بين z و $\bar{z}$.

إذا كان : $z=-8+8\,i$ ، فأجد كلا مما يأتي :

48) $|z|$ 49) $Arg(z)$ 50) $|\bar{z}|$ 51) $Arg(\bar{z})$

مهارات التفكير العليا صفحة (150)

إذا كان : $Arg(5+2i)=\alpha$ ، فأجد سعة كل مما يأتي بدلالة α ، مبررا إجابتي :

52) $-5-2\,i$ 53) $5-2\,i$ 54) $-5+2\,i$ 55) $2+5\,i$ 56) $-2+5\,i$

57) إذا كان : $z = 5 + i\,m$ ، حيث : $|z| = 6$ ، $0 < Arg(z) < \frac{\pi}{2}$ ، فأجد قيمة العدد الحقيقي m .

58) إذا كان : $z = 5 + 3\,ik$ ، حيث : $|z| = 13$ ، فأجد جميع قيم k الحقيقية الممكنة ، مبررا إجابتي.

بافتراض أن : z_1 عدد مركب ، مقياسه $4\sqrt{5}$ ، و سعته : $\theta = tan^{-1}(2)$:

59) أكتب z_1 بالصورة القياسية .

60) إذا كان : $z_3 = -5 + i$ ، $z_2 = 7 - 3\,i$ ، فأجد مساحة المثلث الذي رؤوسه : z_1 , z_2 , z_3 في المستوى المركب .

مسألة اليوم

افترض عالم الرياضيات الإيطالي جيرولامو كاردانو أن القيمة $\sqrt{-1}$ تمثل حلا للمعادلة : $x^2 + 1 = 0$.

هل يبدو ذلك منطقيا ؟

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الاول

الأعداد المركبة

كتاب التمارين

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i :

(1) $\sqrt{-128}$ (2) $\sqrt{-14}$ (3) $\sqrt{-81}$

(4) $\sqrt{-125}$ (5) $3\sqrt{-32}$ (6) $\sqrt{-\frac{28}{9}}$

أجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة مفترضا $\sqrt{-1} = i$:

(7) i^7 (8) i^{12} (9) i^{89} (10) i^{121}

(11) أملأ الفراغ بما هو مناسب في الجدول الأتي .

z	$Re(z)$	$Im(z)$
$-4+6i$		
-3		
$8i$		
	-8	3

أمثل كلا من الأعداد المركبة الأتية في المستوى المركب :

(12) 5 (13) -4 (14) $4\,i$

(15) $-3\,i$ (16) $4-2\,i$ (17) $-3+5\,i$

(18) $-3-5\,i$ (19) i (20) $7-4\,i$

(21) $-5+4\,i$ (22) $-7-2\,i$ (23) $5+5\,i$

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

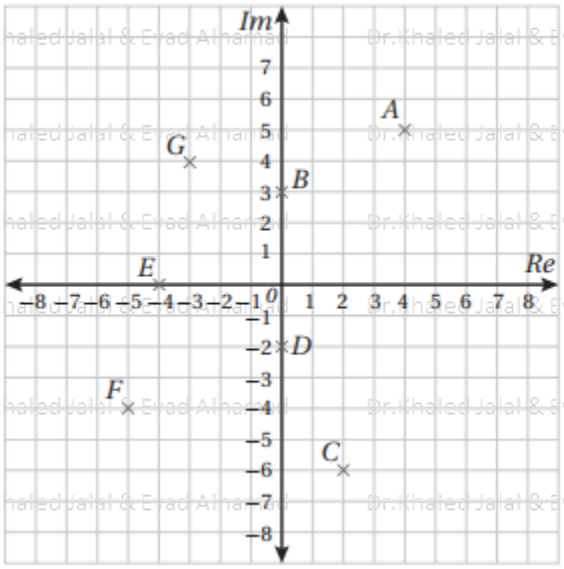
(24) أكتب كلا من :

الأعداد المركبة الممثلة

بيانيا في المستوى المركب

المجاور بالصورة القياسية ،

ثم أجد مقياسه و سعته .



أجد قيم كل من x و y الحقيقية التي تجعل كلا من المعادلات الاتية صحيحة :

(25) $(2x+1)+4\,i = 7-i\,(y-3)$ (26) $i\,(2x-4y)+x+3y = 26+32\,i$

أكتب كلا من الأعداد المركبة الاتية بالصورة المثلثية :

(27) 6 (28) $-5\,i$ (29) $-2\sqrt{3}-2\,i$

(30) $-1+\,i$ (31) $4-2\,i$ (32) $2+8\,i$

أكتب كلا من الأعداد المركبة الاتية بالصورة القياسية :

(33) $6\,(cos\,\frac{\pi}{6}+i\,sin\,\frac{\pi}{6})$ (34) $12\,(cos\,\pi\,+i\,sin\,\pi)$

(35) $8\,(cos\,\frac{2\,\pi}{3}+i\,sin\,\frac{2\,\pi}{3})$ (36) $3\,(cos\,\frac{-\pi}{4}+i\,sin\,\frac{-\pi}{4}\,)$

أجد مرافق كلا من الأعداد المركبة الاتية ، ثم أمثلها جميعا في المستوى المركب نفسه :

(37) $-1-i\,\sqrt{5}$ (38) $9-\,i$ (39) $2-8\,i$

(40) $-9\,i$ (41) 12 (42) $i-8$

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الثاني

العمليات على الأعداد المركبة

كتاب الطالب

مثال ❶ :

أجد ناتج كل مما يأتي :

1) $(5+7\,i)+(-9-4\,i)$ 2) $(8-5\,i)-(2-11\,i)$

أتحقق من فهمي صفحة (152):

أجد ناتج كل مما يأتي :

a) $(7+8\,i)+(-9+14\,i)$ b) $(11+9\,i)-(4-6\,i)$

مثال ❷ :

أجد ناتج كل مما يأتي ، ثم أكتبه بالصورة القياسية :

1) $5\,i\,(3-7\,i)$ 2) $(6+2\,i)(7-3\,i)$ 3) $(5+4\,i)(5-4\,i)$

أتحقق من فهمي صفحة (153):

أجد ناتج كل مما يأتي ، ثم أكتبه بالصورة القياسية :

a) $-3\,i\,(4-5\,i)$ b) $(5+4\,i)(7-4\,i)$ c) $(3+6\,i)^2$

مثال ❸ :

أجد ناتج كل مما يأتي ، ثم أكتبه بالصورة القياسية :

1) $\dfrac{8-5\,i}{3-2\,i}$ 2) $\dfrac{3+5\,i}{2\,i}$

أتحقق من فهمي صفحة (154):

أجد ناتج كل مما يأتي ، ثم أكتبه بالصورة القياسية :

a) $\dfrac{-4+3\,i}{1+\,i}$ b) $\dfrac{2-6\,i}{-3\,i}$ c) $\dfrac{7\,i}{4-4\,i}$

مثال 4 :

إذا كان : $z_1 = 10(cos(-\frac{2\pi}{7}) + i\, sin(-\frac{2\pi}{7}))$ ، و كان : $z_2 = 2(cos\frac{6\pi}{7} + i\, sin\frac{6\pi}{7})$ ، فأجد

ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

1) $z_1\, z_2$ 2) $\frac{z_1}{z_2}$

أتحقق من فهمي صفحة (156):

أجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

a) $6(cos\ \frac{\pi}{3} + i\, sin\ \frac{\pi}{3}) \times 2(cos\ \frac{\pi}{6} + i\, sin\ \frac{\pi}{6})$

b) $6(cos(-\frac{\pi}{3}) + i\, sin(-\frac{\pi}{3})) \div 2(cos\frac{5\pi}{6} + i\, sin\frac{5\pi}{6})$

مثال 5 :

أجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = 21 - 20\, i$

أتحقق من فهمي صفحة (157):

أجد الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركبة الأتية :

a) $-5 - 12\, i$ b) $-9\, i$ c) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$

مثال 6 :

أجد جميع الجذور الحقيقية و الجذور المركبة للمعادلة : $z^3 + 4\, z^2 + z = 26$.

أتحقق من فهمي صفحة (161):

أجد جميع الجذور الحقيقية و الجذور المركبة للمعادلة : $z^3 - z^2 - 7z + 15 = 0$.

مثال 7 :

إذا كان : $3 + 9\, i$ أحد جذور المعادلة : $x^2 + a\, x + b = 0$ ، فأجد قيمة كل من a ، b .

أتحقق من فهمي صفحة (161):

إذا كان : $2 - i$ أحد جذور المعادلة : $x^2 + a\, x + b = 0$ ، فأجد قيمة كل من a ، b .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

أتدرب و أحل المسائل صفحة (161) ، (162) ، (163)

أجد ناتج كل مما يأتي ، ثم أكتبه بالصورة القياسية :

1) $(7+2\,i)+(3-11\,i)$ 2) $(5-9\,i)-(-4+7\,i)$ 3) $(4-3\,i)(1+3\,i)$

4) $(4-6\,i)(1-2\,i)(2-3\,i)$ 5) $(9-2\,i)^2$ 6) $\dfrac{10}{3-i}$

أجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

7) $6\,(\cos\pi+i\sin\pi)\times 2\,(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$

8) $(\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10})\div(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})$

9) $12\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\div 4\,(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

10) $11\,(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))\times 2(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$

أجد القيم الحقيقية للثابتين a و b في كل مما يأتي :

11) $(a+6\,i)+(7-i\,b)=-2+5\,i$ 12) $(11-i\,a)-(b-9\,i)=7-6\,i$

13) $(a+i\,b)(2-i)=5+5\,i$ 14) $\dfrac{a-6\,i}{1-2\,i}=b+4\,i$

15) أضرب العدد المركب $8(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ في مرافقه .

أجد الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركبة الأتية :

16) $3-4i$ 17) $-15+8\,i$ 18) $5-12\,i$ 19) $-7-24\,i$

إذا كان : $w=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ ، $z=2(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$ ، فأجد كلا مما يأتي بالصورة المثلثية :

20) $z\,w$ 21) $\dfrac{z}{w}$ 22) $\dfrac{w}{z}$

23) $\dfrac{1}{z}$ 24) w^2 25) $5\,i\,z$

أجد جميع الجذور الحقيقية و الجذور المركبة لكل من المعادلات الاتية :

26) $z^2 + 104 = 20z$

27) $z^2 + 18z + 202 = 0$

28) $9z^2 + 68 = 0$

29) $3z^3 - 2z^2 + 2z + 1 = 0$

30) $z^3 + 4z + 10 = 5z^2$

31) $2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

أجد معادلة تربيعية لها الجذران المركبان المعطيان في كل مما يأتي :

32) $2 \pm 5i$

33) $7 \pm 4i$

34) $-8 \pm 20i$

35) $-3 \pm 2i$

إذا كان : $z_3 = 2 - 2\,i$ ، $z_2 = \sqrt{5} - i\sqrt{15}$ ، $z_1 = \sqrt{12} - 2\,i$ ، فأجد المقياس و السعة لكل مما يأتي :

36) $\frac{z_2}{z_1}$

37) $\frac{1}{z_3}$

38) $\frac{z_3}{z_2}$

إذا كان : $z = 8(cos\,\frac{2\pi}{3} - i\,sin\,\frac{2\pi}{3})$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

39) أمثل العدد z بيانيا في المستوى المركب .

40) أجد الجذرين التربيعيين للعدد z .

41) إذا كان : $(a - 3\,i)$ ، و $(b + i\,c)$ هما الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $55 - 48\,i$ ، فأجد قيمة كل من الثوابت الحقيقية : a ، و b ، و c .

أحل المعادلة المعطى أحد جذورها في كل مما يأتي :

42) $x^3 + x^2 + 15x = 255$, 5

43) $x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = 0$, -9

44) $3x(x^2 + 45) = 2(19x^2 + 37)$, $6 - i$

45) $x^3 + 10x^2 + 29x + 30 = 0$, $-2 + i$

إذا كان : $(4 + 11\,i)$ هو أحد جذري المعادلة : $z^2 - 8z + k = 0$ ، حيث k عدد حقيقي ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

46) أجد الجذر الاخر للمعادلة

47) أجد قيمة الثابت k .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

مهارات التفكير العليا صفحة (163)

أجيب عن الاسئلة الثلاثة الاتية تباعا ، مبررا إجابتي :

48) أجد ناتج $(p + i\,q)^2$ ، حيث p و q عددان حقيقيان .

49) إذا كان : $(p + i\,q)^2 = 45 + i\,m$ ، حيث p و q عددان صحيحان موجبان ، $p > q$ ، فأجد ثلاث قيم ممكنة للعدد الحقيقي m .

50) أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $45 - 108\,i$

51) أثبت أن : $z\,\overline{z} = |z|^2$ لأي عدد مركب z .

52) إذا كان : z عددا مركبا ، حيث $Arg(z) = tan^{-1}(\frac{1}{2})$ ، $|z| = 5\sqrt{5}$ ، وكان : $\frac{z}{3 + 4\,i} = p + i\,q$ ، فأثبت أن : $p + q = 1$

53) العدد المركب : $z = (10 - i) - (2 - 7i)$ هو أحد جذور المعادلة $z^3 - 20\,z^2 + 164\,z - 400 = 0$. أجد بقية جذور هذه المعادلة ، ثم أحل المعادلة الاتية :

$x^6 + 164\,x^2 = 20(x^4 + 20)$.

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الثاني

العمليات على الأعداد المركبة

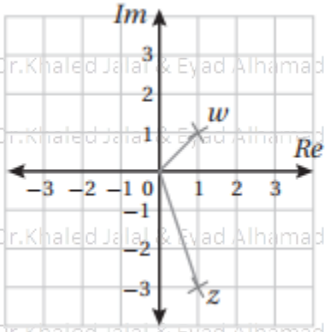
كتاب التمارين

أجد ناتج كل مما يأتي ، ثم أكتبه بالصورة القياسية :

(1) $(6+8\,i)+(3-5\,i)$ (2) $(-6-3\,i)-(-8+2\,i)$ (3) $4\,i\,(7-3\,i)$

(4) $(8-6\,i)(8+6\,i)$ (5) $(-2+2\,i\sqrt{3})^3$ (6) $\dfrac{(2+i)(1-i)}{4-3\,i}$

معتمدا المستوى المركب المجاور الذي يبين العددين المركبين z و w ، أجيب عن الأسئلة الثلاثة الاتية تباعا :



(7) أكتب كلا من العددين z و w بالصورة القياسية .

(8) أجدالسعة و المقياس لكل من العددين المركبين $w\,z$ و $\dfrac{w}{z}$

(9) أمثل العددين $w\,z$ و $\dfrac{w}{z}$ في المستوى المركب .

إذا كان : $z=-3+3\,i\sqrt{3}$ ، وكان : $Arg(w)=-\dfrac{\pi}{6}$ ، $|w|=18$ ، فأجد ناتج كل مما يأتي :

(10) $Arg(z)$ (11) $|z|$ (12) $Arg(z\,w)$ (13) $|z\,w|$

أجد الجذرين التربيعيين لكل عدد مركب مما يأتي :

(14) $-15+8\,i$ (15) $-7-2\,i$ (16) $105+88\,i$

(17) إذا كان : $w=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$ ، فأكتبه بالصورة المثلثية ، مبينا أن $w^3=-1$.

إذا كان : $z_1=3(cos\,\dfrac{\pi}{5}+i\,sin\,\dfrac{\pi}{5})$ ، وكان : $z_2=2(cos\,\dfrac{\pi}{3}+i\,sin\,\dfrac{\pi}{3})$ ، فأجد كلا مما يأتي بالصورة المثلثية :

(18) $z_1\,z_2$ (19) $z_1\,(\overline{z_1})$ (20) ${z_2}^3$ (21) $\dfrac{z_2}{z_1}$

(22) إذا كان : $\left|\dfrac{u-9\,i}{3+i}\right|=5$ ، فما قيمة u ، علما بأنها سالبة ؟

(23) إذا كان : $(1+4\,i)$ جذرا للمعادلة $x^3+5x^2+ax+b=0$ ، فاجد قيمة كل من العددين الحقيقيين a ، و b ، و الجذرين الاخرين لهذه المعادلة .

(24) أجد قيمتي الجذر التربيعي : $\sqrt{\dfrac{362-153\,i}{2-3\,i}}$.

(25) أثبت أن أحد الجذرين التربيعيين للعدد : $(7+24\,i)$ هو $(4+3\,i)$ ، ثم أجد الجذر التربيعي الاخر .

(26) أثبت أن سعة $(7+24\,i)$ تساوي ضعف سعة $(4+3\,i)$.

(27) أثبت أن مقياس $(7+24\,i)$ يساوي مربع مقياس $(4+3\,i)$.

(28) إذا كان : $\dfrac{a}{3+i}+\dfrac{b}{1+2\,i}=1-i$ ، فأجد قيمة كل من العددين الحقيقيين a ، و b .

أحل كل معادلة مما يأتي :

(29) $2z^3=8z^2+13z-87$ (30) $z^3+4z^2-10z+12=0$

(31) إذا كان : $(-2+i)$ هو أحد جذور المعادلة : $z^4+az^3+bz^2+10z+25=0$ ، فأجد قيمة a ، و قيمة b ، ثم أجد جميع الجذور الحقيقية و الجذور المركبة للمعادلة .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الثالث

المحل الهندسي في المستوى المركب

كتاب الطالب

مثال 1 :

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة : $|z-2+8\,i|=3$ ، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية .

أتحقق من فهمي صفحة (165):

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة : $|z+5-4\,i|=7$ ، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية .

مثال 2 :

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة : $|z-3|=|z-2\,i|$ ، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية .

أتحقق من فهمي صفحة (167):

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة : $|z+1|=|z-5\,i|$ ، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية .

مثال 3 :

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ، ثم أرسمه في المستوى المركب :

1) $Arg(z-4\,i)=0$ 2) $Arg(z+1+2\,i)=\frac{3\pi}{4}$

أتحقق من فهمي صفحة (169):

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ، ثم أرسمه في المستوى المركب :

a) $Arg(z)=\frac{\pi}{3}$ b) $Arg(z-5)=-\frac{2\pi}{3}$

مثال 4 :

أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق كل متباينة مما يأتي :

1) $|z-3|>5$ 2) $|z-7|\leq|z+3\,i|$ 3) $\frac{\pi}{6}\leq Arg(z)\leq\frac{\pi}{2}$

أتحقق من فهمي صفحة (172):

أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق كل متباينة مما يأتي :

a) $|z+3+i|\leq 6$ b) $|z+3+i|<|z-4|$ c) $\frac{\pi}{4}<Arg(z+5)\leq\frac{\pi}{2}$

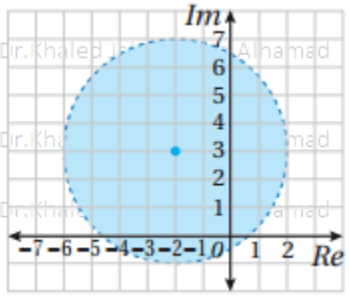
مثال 5 :

أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة : $|z-1-2\,i| \leq 5$ ، و المتباينة $\frac{\pi}{4} < Arg(z-1-2\,i) < \frac{2\pi}{3}$.

أتحقق من فهمي صفحة (173):

أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة : $|z+3-2\,i| \geq 4$ ، و المتباينة $-\frac{\pi}{2} < Arg(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$.

مسألة اليوم



أكتب متباينة بدلالة z ، تحققها جميع الأعداد المركبة التي تقع في المنطقة المظللة المبينة في المستوى المركب في الشكل المجاور :

أتدرب و أحل المسائل صفحة (173) ، (174) ، (175)

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ، ثم أمثله في المستوى المركب ، ثم أجد معادلته الديكارتية :

1) $|z| = 5$ 2) $|z-9| = 4$ 3) $|z+2\,i| = 8$

4) $|z-5+6\,i| = 2$ 5) $|z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}| = 2$ 6) $|z+6-i| = 7$

7) $|z-5| = |z-3\,i|$ 8) $|z+3\,i| = |z-7\,i|$ 9) $|z+5+2\,i| = |z-7|$

10) $|z-3| = |z-2-i|$ 11) $\frac{|z+6-i|}{|z-10-5\,i|} = 1$ 12) $|z+7+2\,i| = |z-4-3\,i|$

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ، ثم أمثله في المستوى المركب :

13) $Arg(z+2-5\,i) = \frac{\pi}{4}$ 14) $Arg(z-1-i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$

15) $Arg(z-4\,i) = -\frac{3\pi}{4}$

أمثل في المستوى المركب المنطقة التي تحددها كل متباينة مما يأتي :

16) $|z-2|<|z+2|$ 17) $|z-4-2i|\leq 2$ 18) $|z-4|>|z-6|$

19) $0<Arg(z-2-2i)<\frac{\pi}{4}$ 20) $-\frac{\pi}{4}<Arg(z-3+4i)<\frac{\pi}{4}$

21) $2\leq|z-3-4i|\leq 4$

22) أمثل في المستوى المركب نفسه المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلة $|z-3+2i|=\sqrt{10}$ و المعادلة $|z-6i|=|z-7+i|$ ، ثم أجد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معا .

23) أجد العدد المركب الذي يحقق كلا من المحل الهندسي : $|z-3|=|z+2i|$ ، و المحل الهندسي : $|z+3-i|=|z-1+5i|$.

24) أمثل في المستوى المركب نفسه المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلات الاتية :

$|z+2-5i|=\sqrt{29}$ ، $Arg(z+2-5i)=-\frac{\pi}{2}$ ، $Arg(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}$

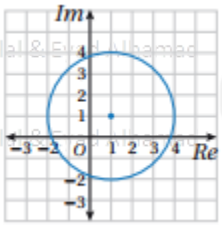
25) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة : $|z-3|>|z+2i|$ و المتباينة : $|z+3-i|<|z-1+5i|$.

26) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة : $|z+2-5i|>\sqrt{29}$ و المتباينة : $-\frac{\pi}{2}<Arg(z+2-5i)<\frac{\pi}{4}$.

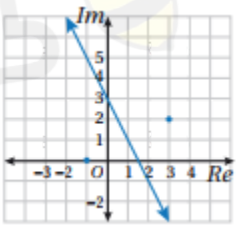
27) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة : $2<|z-3+i|\leq 5$ و المتباينة : $-\frac{\pi}{4}\leq Arg(z-2i)\leq\frac{\pi}{3}$.

أكتب (بدلالة z) معادلة المحل الهندسي الممثل بيانيا في كل مما يأتي :

28)



29)

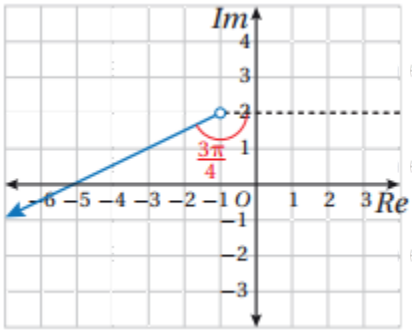


30) أكتب معادلة في صورة :

$Arg(z-a)=\theta$

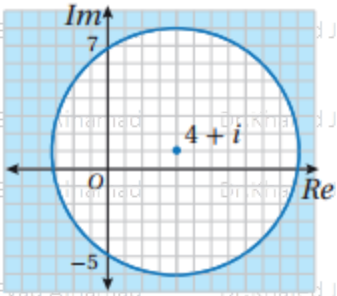
حيث a عدد مركب ،

و $-\pi < \theta \leq \pi$ تمثل المحل الهندسي المبين في الشكل المجاور .

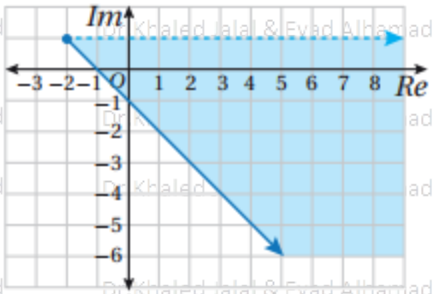


أكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظللة في كل مما يأتي :

31)

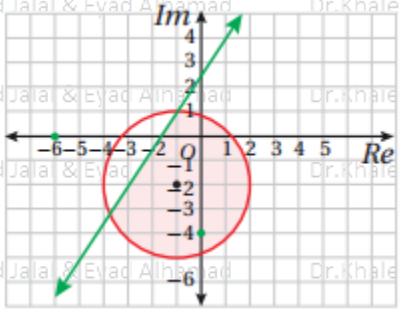


32)



33) أكتب (بدلالة z)

نظام متباينات يمثل المحل الهندسي المبين في الشكل المجاور .



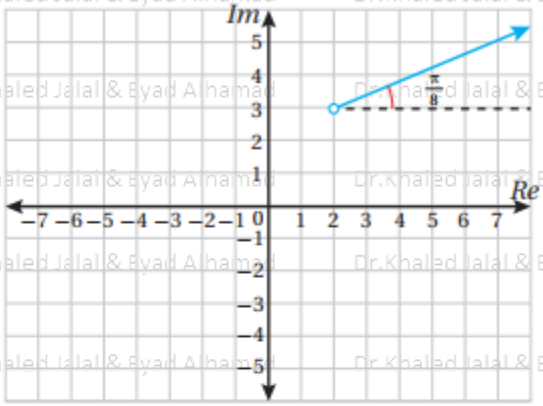
مهارات التفكير العليا صفحة (175)

34) إذا كان العدد المركب z يحقق المعادلة : $|z-3+4i|=2$ ، فأجد أكبر قيمة لـ $|z|$ ، و أقل قيمة له ، مبررا إجابتي .

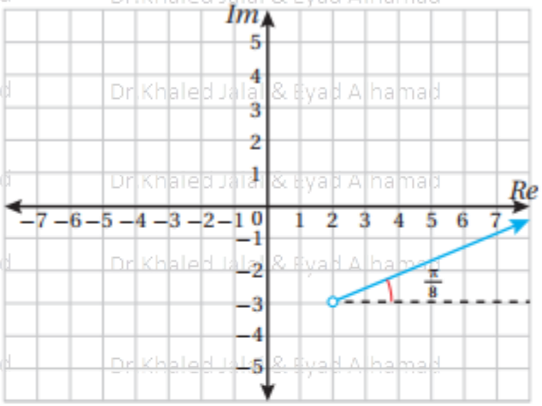
35) أثبت أن المعادلة : $|z-6|=2|z+6-9i|$ تمثل دائرة ، ثم أجد مركزها ، و طول نصف قطرها .

(36) أي الاتية هو المحل الهندسي الذي معادلته : $Arg(z-2+3i)=\frac{\pi}{8}$ ، مبررا إجابتي ؟

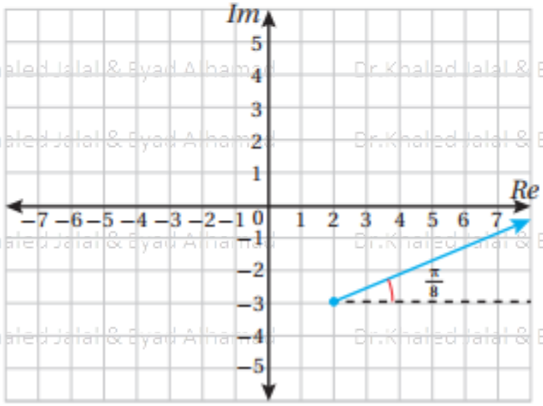
a)



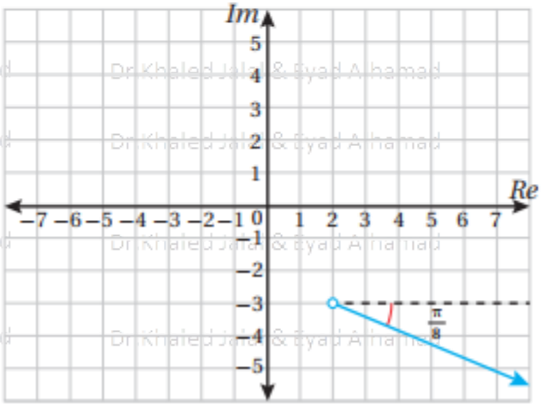
b)



c)



d)



Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الثالث

المحل الهندسي في المستوى المركب

كتاب التمارين

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ، ثم أمثله في المستوى المركب ، و أجد معادلته الديكارتية :

(1) $|z+5i|-3=1$ (2) $|z-2+8i|=13$ (3) $|z+4-3i|=7$

(4) $|z+3+5i|=|z-i|$ (5) $\dfrac{|z+3i|}{|z-6i|}=1$ (6) $|6-2i-z|=|z+4i|$

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلات الاتية ، ثم أمثله في المستوى المركب .

(7) $Arg(z+3)=\dfrac{\pi}{4}$ (8) $Arg(z+3-2i)=\dfrac{2\pi}{3}$ (9) $Arg(z+2+2i)=-\dfrac{\pi}{4}$

أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي الذي تمثله كل متباينة مما يأتي :

(10) $0 \le Arg(z-3i) \le \dfrac{3\pi}{4}$ (11) $|z-2i|>2$ (12) $|z| \le 8$

(13) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة : $|z-1+i| \le 1$

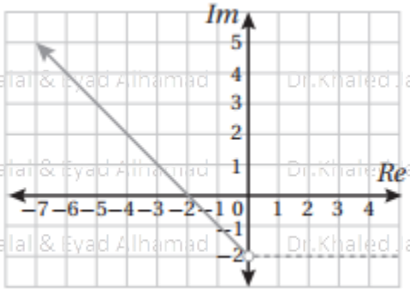
و المتباينة : $-\dfrac{\pi}{3} \le Arg(z) \le 0$

(14) أكتب (بدلالة z) متباينة

المحل الهندسي لمجموعة

النقاط الممثلة في المستوى

المركب المجاور .



إذا كانت : $u=-7+7i$ ، و كانت $v=7+7i$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

(15) أثبت أن قياس الزاوية الصغرى المحصورة بين u و v هو $\dfrac{\pi}{2}$.

(16) أجد بصيغة r معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل ، و النقطتين اللتين تمثلان العددين المركبين u ، و v .

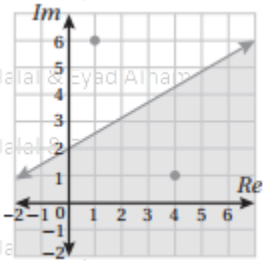
(17) إذا كانت : $u = -1 - i$ ، فأجد u^2 ، ثم أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة $|z| < 2$ ، و المتباينة $|z - u^2| < |z - u|$.

(18) أمثل في المستوى المركب المعادلة $|z - 3i| = 13$ ، و المعادلة $Arg(z - 4) = \frac{\pi}{4}$ ، ثم أجد العدد المركب الذي يحققهما معا .

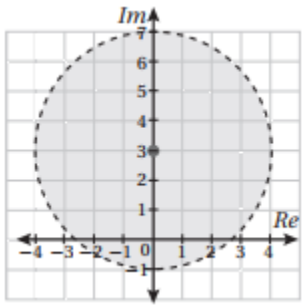
(19) أمثل في المستوى المركب المعادلة $|z - 3 - 2i| = 5$ ، و المعادلة $|z - 6i| = |z - 7 + i|$ ثم أجد العددين المركبين اللذين يحققان المعادلتين معا .

أكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظللة في كل مما يأتي :

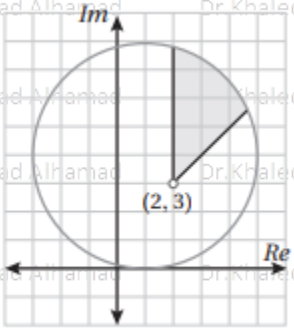
(20)



(21)



(22) أكتب (بدلالة z) نظام متباينات يمثل المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظللة في الشكل المجاور :



Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

اختبار نهاية وحدة
الأعداد المركبة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

(1) إذا كان : $\sqrt{-1} = i$ ، فإن i^{343} تساوي :

a) -1 b) 1 c) $-i$ d) i

---

(2) ناتج $(1-i)^3$ هو :

a) $-2+2i$ b) $-2-2i$ c) $2-2i$ d) $2+2i$

---

(3) إذا كان : $2i$ هو أحد جذور المعادلة $az^3+5z^2+8z+20=0$ ، فإن قيمة a هي :

a) -8 b) -2 c) -2 d) 8

---

(4) الصورة المثلثية للعدد المركب : $z=-1+i\sqrt{3}$ هي :

a) $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ b) $2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

c) $2(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$ d) $2(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3})$

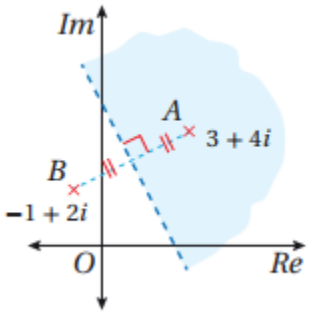
---

(5) الصورة القياسية لناتج : $8(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}) \div 2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ هي :

a) $4i$ b) -4 c) $-4+4i$ d) $4-4i$

---

(6) إحدى الاتية تصف المنطقة المظللة في الشكل المجاور :



a) $|z-1+2i| < |z+3+4i|$ b) $|z-1+2i| > |z+3+4i|$

c) $|z+1-2i| < |z-3-4i|$ d) $|z+1-2i| > |z-3-4i|$

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

(7) أجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 45 - 28\,i$.

(8) أجد مقياس العدد المركب : $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i$ ، و سعته مقربا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين .

(9) إذا كان : $z = -8 + 8\,i$ ، وكان : $w = a + 2\,i$ ، حيث $a < 0$ ، فأجد قيمة a ، علما بأن : $|z + w| = 26$.

إذا كان : $w = \frac{14 - 31i}{3 - 2\,i}$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

(10) أكتب العدد w في صورة $x + i\,y$.

(11) إذا كان العدد w هو أحد جذور المعادلة : $z^2 + c\,z + d = 0$ ، فأجد قيمة كل من العددين الحقيقيين c ، و d .

أمثل في المستوى المركب المنطقة التي تحددها كل متباينة مما يأتي :

(13) $\frac{\pi}{4} \le Arg(z - 3\,i) \le \frac{2\pi}{3}$

(12) $|z - 6| \le 3$

(14) $|z + 1 + i| > |z - 3 - 3\,i|$

إذا مثلت النقطة M العدد : $z_1 = 1 - 8\,i$ ، و مثلت النقطة N العدد : $z_2 = 4 + 7\,i$ ، و كانت O هي نقطة الأصل ، فأجيب عن الأسئلة الاتية تباعا :

(15) أبين أن المثلث OMN متطابق الضلعين .

(16) أبين أن جيب تمام الزاوية MON يساوي $-\frac{4}{5}$.

(17) أجد مساحة المثلث OMN .

(18) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة : $|z - 8| > |z + 2\,i|$ ، و المتباينة : $-\frac{\pi}{4} < Arg(z + 3 - 6\,i) < \frac{\pi}{4}$.

إذا كانت : $z = 5 + 2\,i$ ، فاجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

(19) أبين أن : $\frac{z}{\overline{z}} = \frac{1}{29}\,(21 + 20\,i)$.

(20) من خلال البحث في سعة كل من الأعداد المركبة : z ، و $\overline{z}$ ، و $\frac{z}{\overline{z}}$ ، أبين أن :

$$2\,tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$$

تمثل النقاط : A ، و B ، و C ، و D جذور المعدلة : $z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 = 0$:

(21) إذا كان العدد : $(-2 + 4\,i)$ هو أحد هذه الجذور ، فأجد الجذور الثلاثة الاخرى لهذه المعادلة

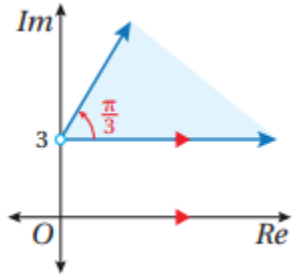
(22) أمثل الجذور الأربعة في المستوى المركب ، ثم أجد مساحة الشكل الرباعي $ABCD$.

---

(23) أكتب (بدلالة z) متباينة

تمثل المحل الهندسي

المعطى في الشكل الاتي :



إذا كان : $z^2 + 2z + 10 = 0$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

(24) أبين أن لجذري المعادلة المقياس نفسه .

(25) أجد سعة كل جذر من جذري المعادلة .

---

(26) يحقق العددان المركبان u ، و v المعادلة : $u + 2\,v = 2\,i$ ، و المعادلة : $i\,u + v = 3$.

أحل المعادلتين لإيجاد العدد u ، و العدد v .

---

(27) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة : $\frac{\pi}{2} \le Arg(z) \le \frac{2\pi}{3}$

، و المتباينة : $|z - 2\,i| \le 2$