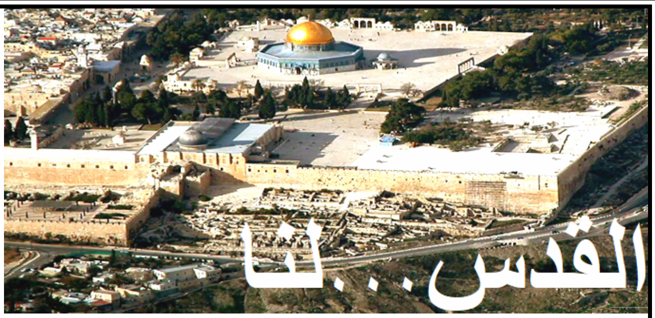
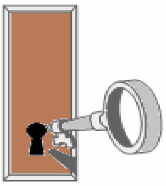
Abdulkadir Hasanat

مدرسة البقعة الثانوية للبنين

Hasanat



الرياضيات 2023



الصف الثاني الثانوي

الأدبي (2006)

الأدبي

الوحدة 1

الاقترانات الأُسِّية واللوغاريتمية

Logarithmic and Exponential Functions

الأستاذ : عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

عبدالقادر الحسنات

2 ∞ & >

I ❤ Maths $\sqrt[3]{64}$ Ever

I LOVE MATH
SAID NO ONE EVER!

الدرس 1 الاقترانات الأُسِّية

Exponential Functions

1) **الاقتـران الأسي** هو اقتران يكتب على الصورة : $f(x) = b^x$ بشرط أن تكون (b) موجبة ولا تساوي (1)

هناك عدة قواعد خاصة بالقوى (الموجبة ، السالبة والكسرية) يجب الإلمام بها قبل البدء

منها:

1) $(2)^3 = 2\times2\times2 = 8$, $\boxed{(2)^3 \neq 2\times3 = 6 \ \text{(انتبـــه)}}$

2) $(3)^{-2} = \dfrac{1}{(3)^{+2}} = \dfrac{1}{9}$, $\boxed{(3)^{-2} \neq -9 \ \text{(انتبـــه)}}$

3) $(\dfrac{2}{5})^{-3} = (\dfrac{5}{2})^{+3} = \dfrac{(5)^3}{(2)^3} = \dfrac{125}{8}$, $\boxed{(\dfrac{3}{4})^a = \dfrac{(3)^a}{(4)^a}}$

4) $(8)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(8)^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32$, $\boxed{(5)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}}$

5) $(4)^0 = 1$, $\boxed{a \neq 0 \Rightarrow a^0 = 1}$

تمارين

1) $4^2 =$

2) $2^{-3} =$

3) $(\dfrac{3}{4})^{-2} =$

4) $(\dfrac{-1}{2})^{-4} =$

5) $(16)^{\frac{3}{4}} =$

6) $(49)^{\frac{1}{2}} =$

7) $(25)^{\frac{-3}{2}} =$

8) $\sqrt[3]{-64} =$

9) $\sqrt{(9)^{-1}} =$

10) $(2006)^0 =$

من الأمثلة على الاقترانات الأسية : $h(x)=(0.4)^x$, $g(x)=(\frac{1}{2})^x$, $f(x)=3^x$

ويُمكِن استعمال تعريف الأُسس وخصائصها لإيجاد قيمة الاقتران الأُسّي عند أيِّ قيمة معطاة.

مثلا : $f(x)=3^x \Rightarrow f(2)=3^2=3\times3=9$

$$f(x)=(\frac{3}{4})^x \Rightarrow f(-2)=(\frac{3}{4})^{-2}=(\frac{4}{3})^2=\frac{(4)^2}{(3)^2}=\frac{16}{9}$$

تمارين

1) $f(x)=2^x \Rightarrow f(2)=$

2) $f(x)=4^x \Rightarrow f(-2)=$

3) $f(x)=8^x \Rightarrow f(0)=$

4) $f(x)=(\frac{1}{4})^x \Rightarrow f(-1)=$

5) $f(x)=(\frac{2}{3})^x \Rightarrow f(-2)=$

6) $f(x)=(\frac{5}{3})^x \Rightarrow f(-2)=$

7) $f(x)=(\frac{2}{5})^x \Rightarrow f(2)=$

8) $f(x)=(\frac{1}{2})^x \Rightarrow f(3)=$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

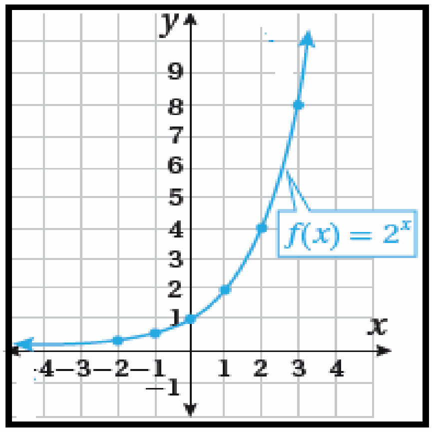
أتحقَّق من فهمي أجد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

a) $f(x)=3^x, x=4$

b) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x, x=-1$

a	$f(4)=3^4=81$
b	$f(-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$

2) التمثيل البياني للاقتران الأُسِّي، وخصائصه :



لتمثيل الاقتران بيانيا ، نكون جدولا لقيم (x) وعادة تكون حول الصفر
ثم نجد قيم (y) المقابلة لها فالتحديد على المستوى الديكارتي
وتوصيلها معا بخط منحني

مثال1) $f(x) = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
$y=f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

ويمكن استنتاج الخصائص الآتية من خلال الرسم :

1) المجال : وهو مجموعة القيم التي يمكن تعويضها مكان (x)
وهو هنا مجموعة الأعداد الحقيقية : R أو $(-\infty,\infty)$

2) المدى : وهو مجموعة القيم الناتجة من التعويض في (y) أو الجزء المستخدم من المحور (y)
وهو هنا مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة : R^+ أو $(0,\infty)$

3) المقطع من المحور (x):دائما لإيجاد المقطع من المحور (x) نضع (y=0) ولا يوجد مقطع من (x) هنا

4) المقطع من المحور (y):دائما لإيجاد المقطع من المحور (y) نضع (x=0)
والمقطع من (y) هنا يساوي (1) لأن $2^0 = 1$

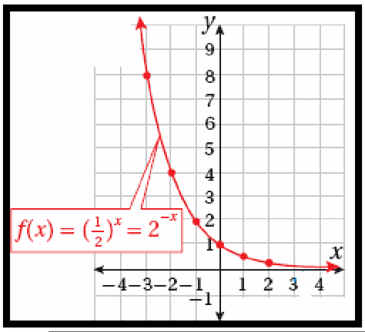
5) التزايد والتناقص : إذا كانت قيم (y) تزداد بازدياد قيم (x) فإن الاقتران يكون متزايداً أي يصعد منحناه إلى الأعلى كلما اتجهنا إلى اليمين
أما إذا كانت قيم (y) تتناقص كلما زادت قيم (x) فإن الاقتران يكون متناقصاً أي ينزل منحناه إلى الأسفل كلما اتجهنا إلى اليمين ، ... وفي هذا المثال نلاحظ أن الاقتران متزايد

6) واحد لواحد : يكون الاقتران واحد لواحد إذا لم يكن هناك عنصرين لهما نفس الصورة أي(لكل عنصر وصورته)
أو عدم وجود خط أفقي يقطع المنحنى أكثر من مرة ...والاقتران هنا واحد لوحد

7) خط التقارب الأفقي:هو خط يقترب منه منحنى الاقتران عندما تقترب (x) من (∞) أو (- ∞) وهو هنا 0 = y

---

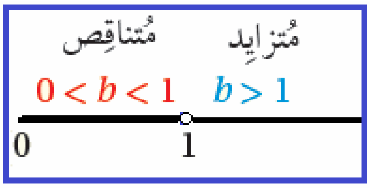
مثال2) $f(x) = 2^{-x}$



x	-2	-1	0	1	2
$y=f(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

نفس الخصائص باستثناء أن الاقتران متناقص

تعلّم $f(x) = b^{-x} = \left(\frac{1}{b}\right)^x$



---

3) مثل منحنى الاقتران $f(x) = 4^x$ بيانيا
ثم جد 1)المجال

x	-2	-1	0	1	2
$y=f(x)$					

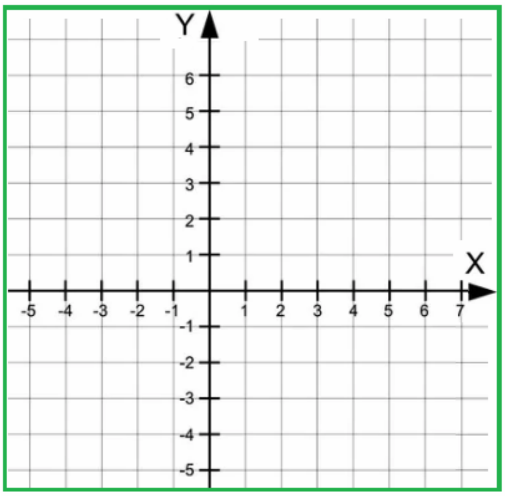
2)المدى

3) المقطع من (x)

4) المقطع من (y)

5)هل الاقتران متزايد أم متناقص؟

6) هل الاقتران واحد لواحد أم لا ؟



أتحقّق من فهمي إذا كان: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

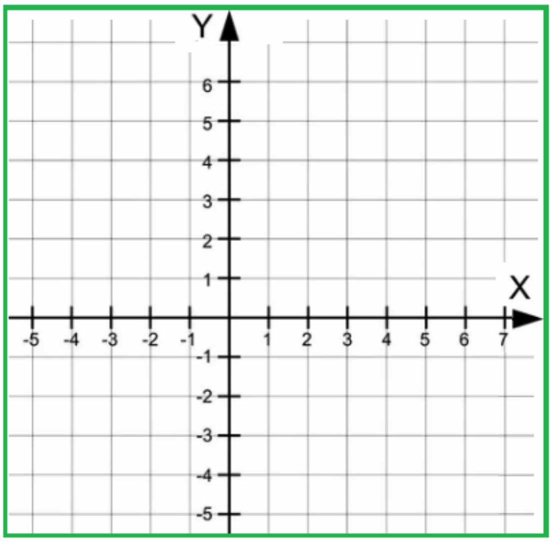
a) أُمثّل الاقتران بيانيًّا، ثم أُحدّد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

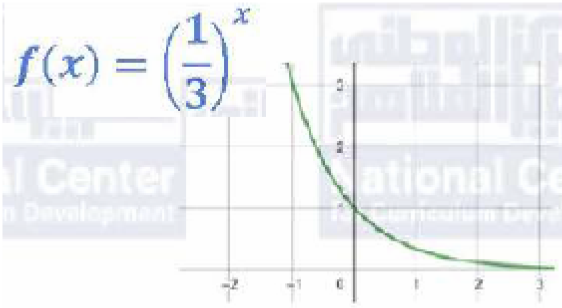
b) أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين.

c) هل الاقتران $f(x)$ مُتزايِد أم مُتناقِص؟

d) هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد؟

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$					





أتدرّب وأحُلّ المسائل أجد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = (11)^x , x = 3$

2) $f(x) = -5(2)^x , x = 1$

3) $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^x , x = 2$

4) $f(x) = -(5)^x + 4, x = 4$

5) $f(x) = 3^x + 1, x = 5$

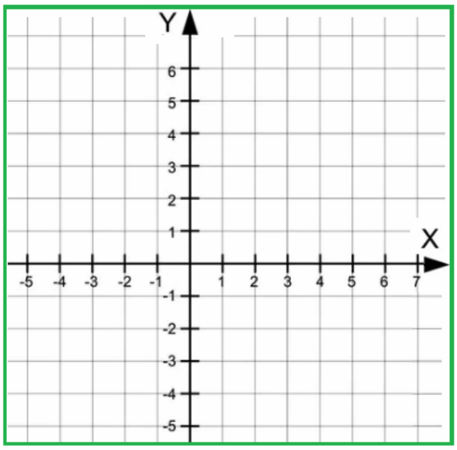
6) $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x - 3, x = 2$

1	$f(3) = (11)^3 = 1331$
2	$f(1) = -5(2) = -10$
3	$f(2) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^2 = 3\left(\frac{1}{49}\right) = \frac{3}{49}$

4	$f(4) = -(5)^4 + 4 = -(625) + 4 = -621$
5	$f(5) = (3)^5 + 1 = 243 + 1 = 244$
6	$f(2) = \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 3 = \frac{1}{81} - 3 = -\frac{242}{81}$

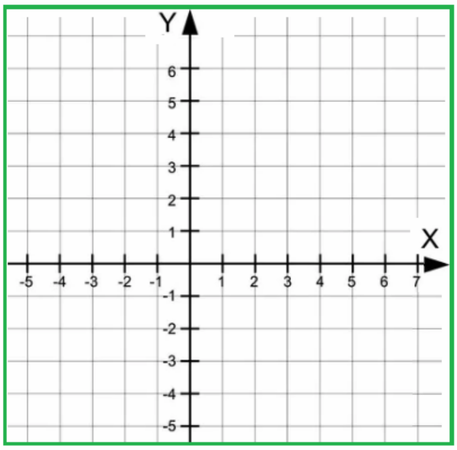
أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أجد مجاله ومداه:

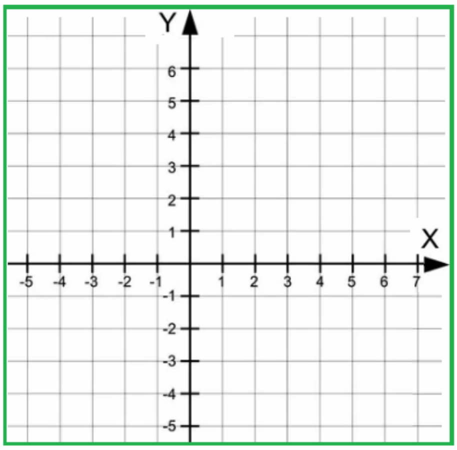
10) $f(x) = 3(6)^x$ 9) $f(x) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^x$ 8) $f(x) = 9^{-x}$ 7) $f(x) = 4^x$



x	-2	-1	0	1	2
$y=f(x)$					

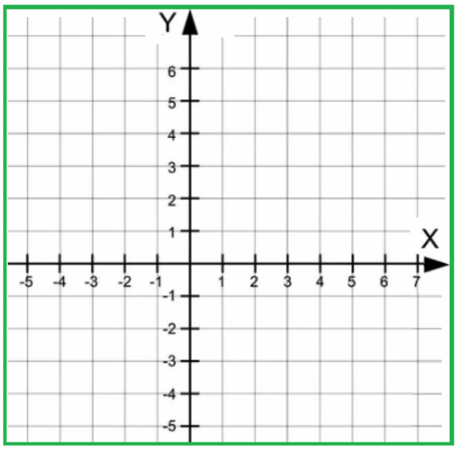
x	-2	-1	0	1	2
$y=f(x)$					

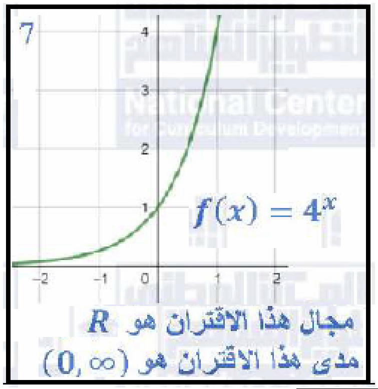


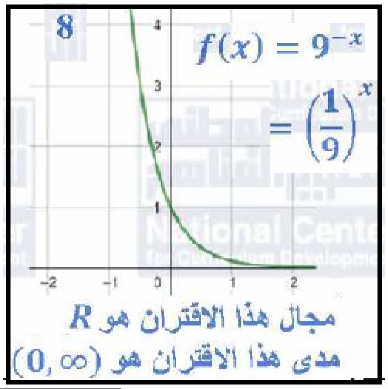


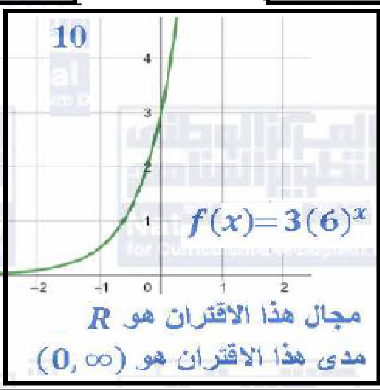
x	-2	-1	0	1	2
$y=f(x)$					

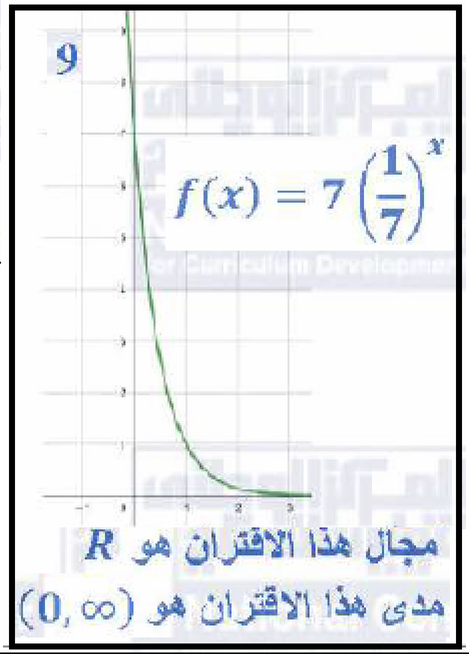
x	-2	-1	0	1	2
$y=f(x)$					











أجد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1. $f(x) = (13)^x, x = 2$
2. $f(x) = 4(5)^x, x = 3$
3. $f(x) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^x, x = 3$
4. $f(x) = -(3)^x + 7, x = 4$
5. $f(x) = -(2)^x + 1, x = 6$
6. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 12, x = 3$

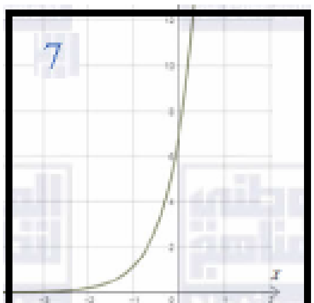
Hasanat

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه:

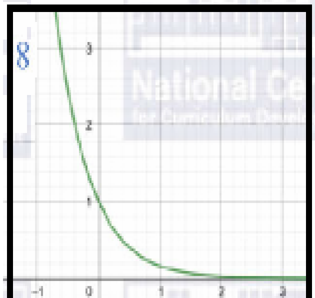
7. $f(x) = 7(6)^x$
8. $f(x) = 7^{-x}$
9. $f(x) = 5\left(\frac{1}{8}\right)^x$
10. $f(x) = 2(9)^x$

1	$f(2) = (13)^2 = 169$
2	$f(3) = 4(5)^3 = 4 \times 125 = 500$
3	$f(3) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 7 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

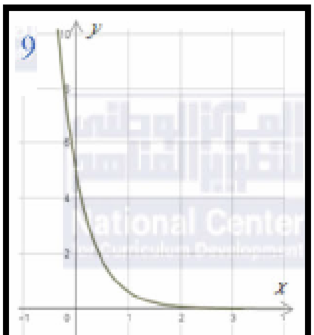
4	$f(4) = -(3)^4 + 7 = -74$
5	$f(6) = -(2)^6 + 1 = -63$
6	$f(3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 12 = \frac{1}{64} - 12 = -\frac{767}{64}$



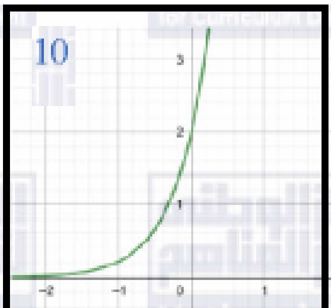
المجال هو R
المدى هو $(0, \infty)$



المجال هو R
المدى هو $(0, \infty)$



المجال هو R
المدى هو $(0, \infty)$



المجال هو R
المدى هو $(0, \infty)$

3) خصائص الاقتران الأُسّي في صورة: $f(x) = ab^{x-h} + k$

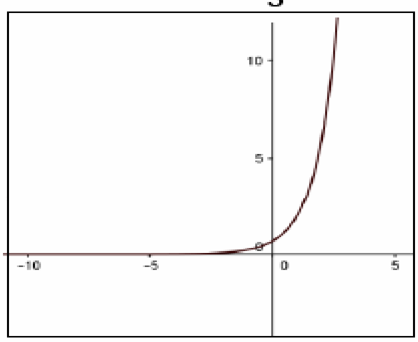
خصائص $f(x) = ab^{x-h} + k$

- مجال الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة (k, ∞).
- الاقتران $f(x)$ مُتناقِص إذا كان $0 < b < 1$.
- الاقتران $f(x)$ مُتزايِد إذا كان $b > 1$.
- للاقتران $f(x)$ خط تقارب أفقيًّا هو المستقيم $y = k$.

يُعتبر الاقتران $f(x) = ab^{x-h} + k$ تحويلا هندسيا لمنحنى الاقتران $f(x) = b^x$

عند كتابة الاقتران الأسي بهذه الصورة ، فيمكن إيجاد المدى وخط التقارب الأفقي وتحديد التزايد والتناقص

$h(x) = 6(\frac{1}{3})^{2-x}$



$h(x) = 6(\frac{1}{3})^{2-x} = 6(\frac{1}{3})^{-(x-2)}$

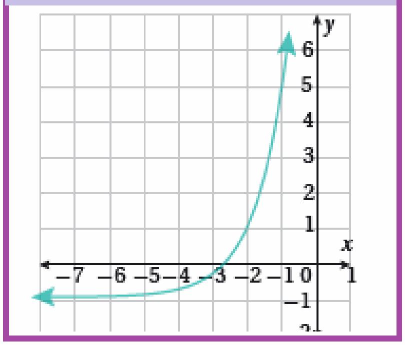
$= 6((\frac{1}{3})^{-1})^{(x-2)} = 6(3)^{x-2} + 0$

المدى $(0, \infty)$

خط التقارب $y = 0$

متزايد $3 > 1$

$f(x) = 2(3^{x+2}) - 1$



$f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$

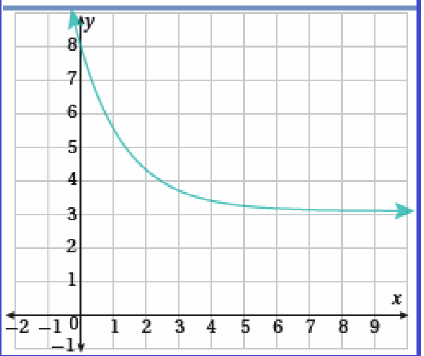
$= 2(3)^{x+2} + (-1)$

المدى $(-1, \infty)$

خط التقارب $y = -1$

متزايد $3 > 1$

$f(x) = 5(2^{-x}) + 3$



$f(x) = 5(2)^{-x} + 3 = 5(2^{-1})^x + 3$

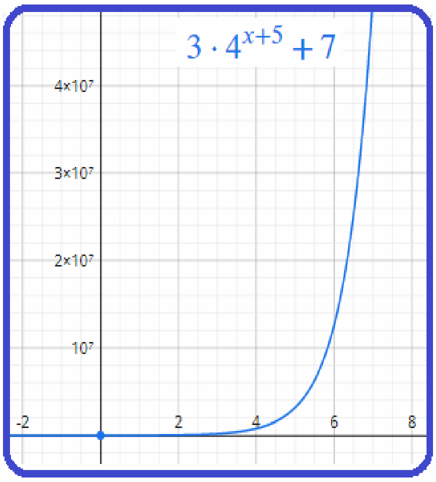
$= 5(\frac{1}{2})^x + 3$

المدى $(3, \infty)$

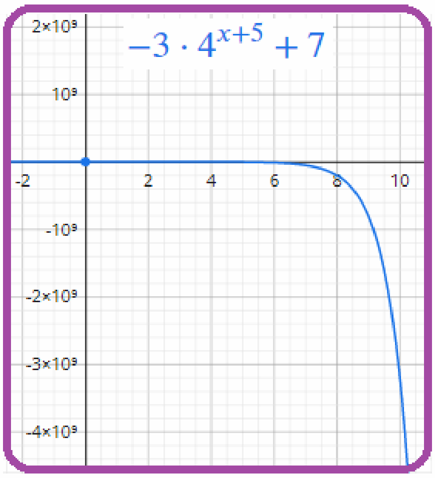
خط التقارب $y = 3$

متناقص $\frac{1}{2} < 1$

ملاحظة: إذا كانت (a) سالبة ، فلا تغيير على خط التقارب الأفقي ، ولكن المدى يصبح $(-\infty, k)$ بدلاً من (k, ∞) وعكس قاعدة التزايد والتناقص

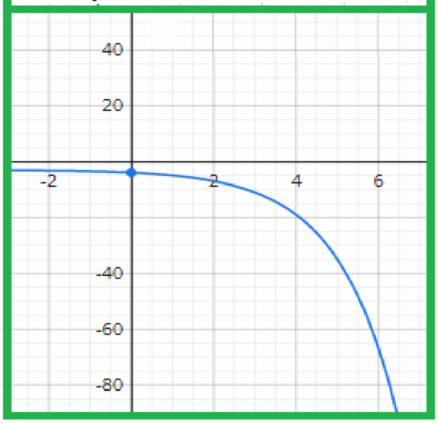


المدى $(7, \infty)$
متزايد



المدى $(-\infty, 7)$
متناقص

$f(x) = -(2)^x - 3$



المدى $(-\infty, -3)$
متناقص

لإيجاد المقطع من (x) نضع y=0

لإيجاد المقطع من (y) نضع x=0

إذا كان: $a^x = a^y$ ، فإنّ $x = y$ ، حيث: $a > 0, a \neq 0$

معادلات أسية :

$$4^{x+1} = 32 \Rightarrow (2^2)^{x+1} = 2^5$$
$$\Rightarrow 2x + 2 = 5 \Rightarrow x = 1.5$$

$$3^{2x} = 81 \Rightarrow 3^{2x} = 3^4$$
$$\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

	الاقتران	المقطع من x	المقطع من y	خط التقارب الأفقي	المدى
1)	$f(x) = 3^{2x}$	$-$	$y = 1$	$y = 0$	$(0, \infty)$
2)	$f(x) = 2^{3x} - 16$	$x = 1.3$	$y = -15$	$y = -16$	$(-16, \infty)$
3)	$f(x) = 2^x + 8$	$-$	$y = 9$	$y = 8$	$(8, \infty)$
4)	$f(x) = 2^{1-x} - 4$	$x = -1$	$y = -2$	$y = -4$	$(-4, \infty)$
5)	$f(x) = 2(3)^{x+1}$				
6)	$f(x) = 2(3)^x + 1$				
7)	$f(x) = -2(3)^{x+1}$				
8)	$f(x) = 1 - 2(3)^x$				
9)	$f(x) = -2(3)^{6-2x}$				
10)	$f(x) = 1 - 3(2)^{-x}$				

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

أتحقَّق من فهمي

أجـد خط التقارب الأفقي لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد مجاله ومداه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايدًا:

a) $f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$ b) $f(x) = 4\,(5)^{-x}$ c) $f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$

أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد مجاله ومداه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

11) $f(x) = 5^{x-1} + 2$

12) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$

13) $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$

14) $f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$

Hasanat

a	$f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$	خط تقارب أفقي هو $y = -1$ مجال الاقتران هو R المدى هو $(-1, \infty)$ الاقتران متزايد
b	$f(x) = 4(5)^{-x} = 4\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$	خط تقارب أفقي هو $y = 0$ مجال الاقتران هو R المدى هو $(0, \infty)$ الاقتران متناقص
c	$f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$	خط تقارب أفقي هو $y = 2$ مجال الاقتران هو R المدى هو $(-\infty, 2)$ الاقتران متناقص

11	$f(x) = 5^{x-1} + 2$	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$ مدى هذا الاقتران هو $(2, \infty)$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R الاقتران $f(x)$ متزايد
12	$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -5$ المدى هو $(-5, \infty)$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R الاقتران متناقص
13	$f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -6$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المدى هو $(-6, \infty)$ الاقتران متناقص
14	$f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 1$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المدى هو $(1, \infty)$ الاقتران متزايد

أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد مجاله ومداه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

11) $f(x) = 7^{x-2} + 1$ 12) $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} - 3$ 13) $f(x) = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 7$ 14) $f(x) = 7(4)^{x-5} + 3$

11	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 1$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(1, \infty)$ الاقتران متزايد
12	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -3$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(-3, \infty)$ الاقتران متناقص
13	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -7$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(-7, \infty)$ الاقتران متناقص
14	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 3$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(3, \infty)$ الاقتران متزايد

4) تطبيقات

تُمثّل المعادلة $N(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$ الكمية المتبقّية N بالغرامات من عيّنة كتلتها 1 g من الراديوم 226 حيث t الزمن بالسنوات.

1 أجد كمّية الراديوم 226 المتبقية بعد 3240 سنة.

$$N(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$$

$$N(3240) = (\frac{1}{2})^{\frac{3240}{1620}} = (\frac{1}{2})^2 = 0.25$$

2 بعد كم سنة يبقى من كمّية الراديوم 0.125 g؟

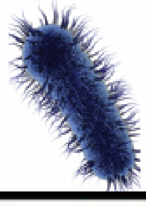
$$N(t) = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$$

$$0.125 = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}} \Rightarrow \frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}} \Rightarrow (\frac{1}{2})^3 = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}} \Rightarrow 3 = \frac{t}{1620} \Rightarrow t = 4860$$

أتحقق من فهمي: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 500\,(2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في عيّنة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات

a) أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة بعد 5 ساعات.

b) بعد كم ساعةً يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة 4000 خلية؟



a	$f(5) = 500(2)^5 = 500(32) = 16000$ أتحقق من فهمي صفحة 16
b	$4000 = 500(2)^x \Rightarrow 8 = (2)^x \Rightarrow (2)^3 = (2)^x \Rightarrow x = 3$

أتدرّب وأحلّ المسائل

بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 7000\,(1.2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

15 أجد عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة.

16 أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.

17 بعد كم ساعةً يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية؟

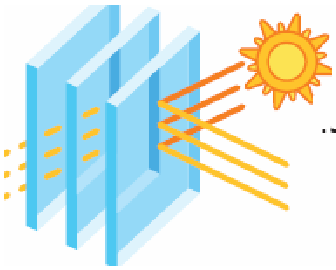
16

15	$f(0) = 7000(1.2)^0 = 7000(1) = 7000$
16	$f(12) = 7000(1.2)^{12} \approx 62413$
17	$10080 = 7000(1.2)^x \Rightarrow 1.44 = (1.2)^x$ $(1.2)^2 = (1.2)^x \Rightarrow x = 2$

ضوء: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 100\,(0.97)^x$ النسبة المئوية للضوء المارّ خلال x من الألواح الزجاجية المتوازية:

18 أجد النسبة المئوية للضوء المارّ خلال لوح زجاجي واحد.

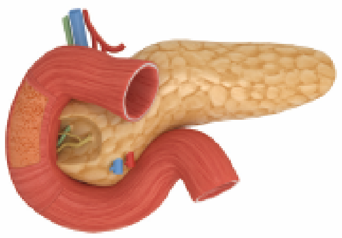
19 أجد النسبة المئوية للضوء المارّ خلال 3 ألواح زجاجية.



18	$f(1) = 100(0.97)^1 = 100(0.97) = 97$ نسبة الضوء المارّ خلال لوح زجاجي واحد هي 97%
19	$f(3) = 100(0.97)^3 \approx 91$ نسبة الضوء المارّ خلال 3 ألواح زجاجية هي 91%

الأستاذ عبدالقادر الحسنات 077 88 531 078

سرطان البنكرياس: يُمثِّل الاقتران: $P(t) = 100(0.3)^t$ النسبة المئوية للمتعافين من مرضى سرطان البنكرياس، مِمَّنْ هم في المرحلة المُتقدِّمة، حيث تعافوا بعد t سنة من التشخيص الأوَّلي للمرض:



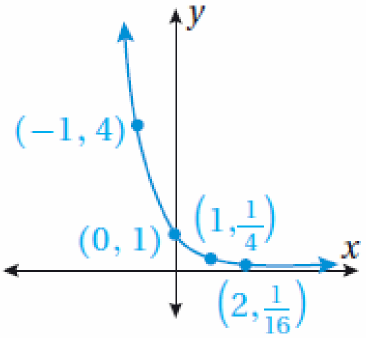
20 أجد النسبة المئوية للمتعافين بعد سنة من التشخيص الأوَّلي للمرض.

21 بعد كم سنةً تصبح النسبة المئوية للمتعافين 9%؟

20	$P(1) = 100(0.3)^1 = 100(0.3) = 30$ نسبة المتعافين بعد سنة هي 30%
21	$9 = 100(0.3)^t \Rightarrow 0.09 = (0.3)^t$ $(0.3)^2 = (0.3)^t \Rightarrow t = 2$

مهارات التفكير العليا

22 تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور التمثيل البياني لمنحنى الاقتران: $f(x) = ab^x$. أجد $f(3)$، مُبرِّرًا إجابتي.



23 أكتشف المُختلِف: أيُّ الاقترانات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$y = 5(3)^x$ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $f(x) = 2(4)^x$ $y = 3^x$

24 تحدٍّ: إذا كان الاقتران: $f(x) = ab^x$ أُسِّيًّا، فأُثبِت أنَّ $\frac{f(x+1)}{f(x)} = b$.

22	من التمثيل البياني نلاحظ أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0, 1)$ ، إذن عندما $x = 0$ فإن $y = 1$ نعوض $x = 0$ و $y = 1$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على: $f(x) = ab^x$ $1 = ab^0$ $1 = a \times 1 \Rightarrow a = 1$ نلاحظ أيضا أن النقطة $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ تقع على منحنى الاقتران، نعوض $x = 1$ و $y = \frac{1}{4}$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على: $\frac{1}{4} = ab^1$ $\frac{1}{4} = (1)b^1 \Rightarrow b = \frac{1}{4}$ ومنه فإن قاعدة هذا الاقتران هي: $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $f(3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$
23	الاقتران المختلف هو $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ لأنه الاقتران الوحيد المتناقص والاقترانات الأخرى متزايدة.
24	$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{ab^{x+1}}{ab^x} = \frac{b^{x+1}}{b^x} = b$

بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 400(2)^{\frac{x}{3}}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة في تجربة مخبرية:

15 أجد عدد الخلايا البكتيرية عند بَدْء التجربة.

16 أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.

17 بعد كم ساعةً يصبح عدد الخلايا البكتيرية 102400 خلية؟

15	$f(x) = 400(2)^{\frac{x}{3}}$ $f(0) = 400(2)^0 = 400$
16	$f(12) = 400(2)^{\frac{12}{3}} = 400(2)^4 = 400 \times 16 = 6400$
17	$102400 = 400(2)^{\frac{x}{3}}$ $256 = (2)^{\frac{x}{3}} \Rightarrow (2)^8 = (2)^{\frac{x}{3}} \Rightarrow \frac{x}{3} = 8 \Rightarrow x = 24$

خزّان: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 2(0.75)^x$ كميّة الماء المُتبقِّية في خزّان (بالمتر المُكعَّب) بعد x ساعة نتيجة ثقب فيه:

18 أجد كميّة الماء المُتبقِّية في الخزّان بعد ساعة واحدة.

19 ما الزمن الذي تصبح فيه كميّة الماء المُتبقِّية في الخزّان $\frac{9}{8}\ m^3$ تقريبًا؟

18	$f(1) = 2(0.75)^1 = 1.5\ m^3$
19	$\frac{9}{8} = 2(0.75)^x \Rightarrow \frac{9}{16} = (0.75)^x \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^x \Rightarrow x = 2$

أسئلة الوزارة / 2023 / الدرس الأول

1) إذا كان $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، فإنّ $f(-3)$ تساوي:

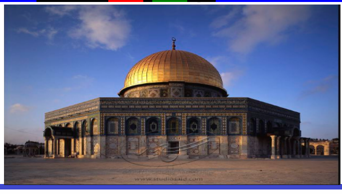
d) -8 c) 8 b) $-\frac{1}{8}$ a) $\frac{1}{8}$

2) خط التقارب الأفقي للاقتران $f(x) = 5^{x+1} - 3$ هو:

d) $y = -1$ c) $y = 1$ b) $y = -3$ a) $y = 3$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات



الدرس 2 النمو والاضمحلال الأُسِّي
Exponential Growth and Decay

1) **مفهوم أساسي** **اقتران النمو الأُسِّي** هو كل اقتران أُسِّي يتزايد بنســبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

t الفترة الزمنية، و a الكمِّية الابتدائية، و r النسبة المئوية للنمو في فترة زمنية مُحدَّدة.

$$A(t) = a\,(1 + r)^t$$

عامل النمو: أساس العبارة الأُسِّية $(1 + r)$

مثال1) بلغ عدد سكان الوطن العربي عام 2000 حوالي 291 مليون نسمة تقريبا فإذا كانت نسبة النمو السكّاني 2.3 % سنويًا، جد عدد السكان المتوقع عام 2025 (أي بعد 25 سنة).

اسم الدولة العربية	عدد سكانها / 2022
مصر	102.251.100 نسمة
الجزائر	43.851.044 نسمة
السودان	43.849.260 نسمة
العراق	40.222.493 نسمة
المغرب	36.910.560 نسمة
السعودية	34.813.871 نسمة
اليمن	30.042.375 نسمة
سوريا	18.275.704 نسمة
الصومال	15.893.222 نسمة
تونس	11.946.284 نسمة
الأردن	10.203.134 نسمة
الإمارات	9.890.402 نسمة
لبنان	6.831.971 نسمة
ليبيا	6.871.292 نسمة
فلسطين	5.23 مليون نسمة
عمان	5.106.622 نسمة
موريتانيا	4.775.110 نسمة
الكويت	4.270.571 نسمة
قطر	2.908.978 نسمة
البحرين	1.107.000 نسمة
جيبوتي	1.000.000 نسمة
جزر القمر	862.359 نسمة

$$A(t) = a(1+r)^t$$

$$\Rightarrow A(25) = (291)(1+\frac{2.3}{100})^{25} = (291)(1+0.023)^{25} \approx 513.8$$

مثال2) يتزايد عدد الأغنام في إحدى المَزارع بنسبة 22 % سنويًا ، جد عدد الأغنام بعد (5) سنوات علمًا بأنَّ عددها في المزرعة حالياً هو(1321) رأسا .

$$A(t) = a(1+r)^t$$

$$\Rightarrow A(5) = (1321)(1+\frac{22}{100})^5 = (1321)(1.22)^5 \approx 3570$$

مثال3) بلغ عدد سكّان بلدة ما (95425) نسمة عام 2010 ، فإذا كانت نسبة النمو السكّاني فيها 2.4 % سنويًّا، جد عدد سكان هذه البلدة بعد (20) سنة . (الجواب: 153342)

مثال4) حصل أحد المهندسين على وظيفة في إحدى الشركات براتب أولي (650 JD)،على أن يتم زيادة راتبه سنوياً بنسبة 1.5 % ، جد راتبه بعد (7) سنوات . (الجواب: 721.4)

مثال5) اشترى سالم قطعة أرض بمبلغ (17500 JD) ، فإذا كان سعرها يتزايد بمعدل 11.5 % ، جد سعر القطعة بعد (10) سنوات . (الجواب: 51974)

Hasanat

مسألة اليوم بلغ عدد سكّان المملكة الأردنية الهاشمية نحو 10.8 ملايين نسمة عام 2020م.

إذا كانت نسبة النمو السكّاني قرابة 2.6% سنويًّا، فأجد العدد التقريبي للسكّان عام 2030م.

$$A(t) = a(1+r)^t = 10.8(1+0.026)^t$$

$$t = 2030 - 2020 = 10$$

$$A(10) = 10.8(1+0.026)^{10} \approx 13.960$$

أتحقّق من فهمي في دراسة شملت إحدى مَزارع الأبقار، تبيّن أنَّ عدد الأبقار في المزرعة يزداد بنسبة 18% سنويًّا:

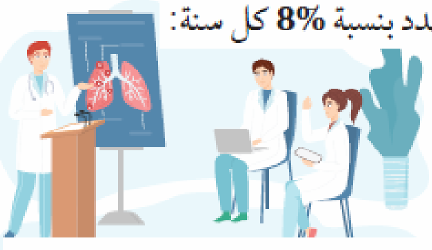
a) أكتب اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثّل عدد الأبقار بعد t سنة، علمًا بأنّ عددها في المزرعة عند بَدْء الدراسة هو 327 بقرة.

b) أجد عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بَدْء الدراسة.

a	$A(t) = 327(1+0.18)^t$ $A(t) = 327(1.18)^t$	b	$A(3) = 327(1.18)^3$ ≈ 537

أتدرّب وأحلّ المسائل

يبلغ عدد المشاركين في مؤتمر طبي 150 طبيبًا هذه السنة، ويُتوقَّع زيادة هذا العدد بنسبة 8% كل سنة:



1. أكتب اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثّل عدد المشاركين بعد t سنة.
2. أجد عدد المشاركين المُتوقَّع بعد 5 سنوات.

استخدم 50 ألف شخص موقعًا إلكترونيًّا تعليميًّا سنة 2019م، ثم ازداد عدد مستخدمي الموقع بنسبة 15% كل سنة:

3. أكتب اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثّل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.
4. أجد عدد مستخدمي الموقع سنة 2025م.

1	$A(t) = a(1+r)^t$ $A(t) = 150(1+0.08)^t$ $A(t) = 150(1.08)^t$	2	$A(5) = 150(1.08)^5$ ≈ 220
3	$A(t) = a(1+r)^t$ $A(t) = 50000(1+0.15)^t$ $A(t) = 50000(1.15)^t$	4	$t = 2025 - 2019 = 6$ $A(6) = 50000(1.15)^6$ ≈ 115653

18. تحدٍّ: اكتُشِفت 12 إصابة بالإنفلونزا الموسمية في إحدى البلدان، ولوحِظ أنَّ عدد الإصابات بهذا المرض في كل أسبوع يساوي ثلاثة أمثال عددها في الأسبوع السابق. أكتب اقترانًا يُمثّل عدد الإصابات بهذا المرض بعد t أسبوعًا من اكتشاف حالات الإصابة الأولى.

18	النسبة المئوية للزيادة 200%، فيكون عامل النمو $1 + \frac{200}{100} = 3$
	إذا كان عدد الإصابات في البداية يساوي N، فإن عددها بعد t أسبوعًا هو $A(t) = N(1+r)^t = N3^t$

2)

مفهوم أساسي اقتران الاضمحلال الأُسّــي هو اقتران أُسّي يتناقص بنســبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

$A(t) = a\,(1-r)^t$

t الفترة الزمنية، و a الكمّية الابتدائية، و r النسبة المئوية للنمو في فترة زمنية مُحدَّدة.

عامل النمو: أساس العبارة الأُسِّية $(1+r)$

مثال1) أُجريت دراسة على إحدى البحيرات؛ لتحديد مدى تأثير التلوّث على عدد الأسماك فيها، فوُجِدَ أنّ عدد الأسماك في البحيرة يقل بنسبة 20 % كل سنة. جد عدد الأسماك في البحيرة بعد (3) سنوات ، علمًا بأنّ عدد الأسماك عند بدء الدراسة يساوي 12000 سمكة.

$$A(t) = a(1-r)^t$$

$$\Rightarrow A(3) = (12000)(1-\frac{20}{100})^3 = (12000)(0.8)^3 = 6144$$

مثال2) اشترى أحمد سيّارة تعمل على الكهرباء بمبلغ JD 25000 . إذا كان ثمن السيّارة يقلّ بنسبة 10 % سنويًّا؛ جد ثمن السيّارة بعد 5 سنوات.

$$A(\text{t}) = a(1-r)^t$$

$$\Rightarrow A(5) = 25000(1-0.1)^5 = 25000(0.9)^5 = 14762.25$$

مثال3) اشترى محمد دراجة نارية بمبلغ JD 8950 . إذا كان ثمن السيّارة يقلّ بنسبة 4.5 % سنويًّا؛ جد ثمن السيّارة بعد 6 سنوات. (الجواب 6789.6)

مثال4) يتناقص عدد الأشجار في إحدى الغابات بنسبة 8.5 % سنويًّا ، فإذا كان عدد الأشجار الآن 65420 شجرة ، جد عددها بعد 10 سنوات. (الجواب 26910)

مثال5) تتناقص مساحة الأراضي الصالحة للزراعة في إحدى الدول بنسبة 5 % سنويًّا ؛ فإذا كان عدد الدونمات القابلة للزراعة الآن 25 مليون دونم ، جد عدد الدونمات القابلة للزراعة بعد 20 سنة (الجواب 8.96)

أتحقّق من فهمي اشترت سوسن سيّارة هجينة قابلة للشحن بمبلغ **JD 28500**.

إذا كان ثمن السيّارة يقلّ بنسبة **5%** سنويًّا،

a) أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي لثمن السيّارة بعد t سنة. b) أجد ثمن السيّارة بعد 4 سنوات.

a	$A(t)=28500(1-0.05)^t$ $A(t)=28500(0.95)^t$	b	$A(4)=28500(0.95)^4$ ≈ 23213

سيّارة: يتناقص ثمن سيّارة سعرها **JD 17350** بنسبة **3.5%** سنويًّا:

5. أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي لثمن السيّارة بعد t سنة.
6. أجد ثمن السيّارة بعد 3 سنوات.

5	$A(t)=a(1-r)^t$ $A(t)=17350(1-0.035)^t$ $A(t)=17350(0.965)^t$	6	$A(3)=17350(0.965)^3$ ≈ 15591.27

بكتيريا: يتناقص عدد الخلايا البكتيرية في عيّنة مخبرية بنسبة **27%** كل ساعة بعد إضافة مضاد حيوي إلى العيّنة:

7. أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي الذي يُمثّل عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة، علمًا بأنّ عددها عند إضافة المضاد الحيوي هو 15275 خلية.
8. أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة بعد 7 ساعات.

7	$A(t)=a(1-r)^t$ $A(t)=15275(1-0.27)^t$ $A(t)=15275(0.73)^t$	8	$A(7)=15275(0.73)^7$ ≈ 1687

9. دجاج: يَنفُق الدجاج في مزرعة للدواجن بنسبة 25% يوميًّا نتيجة إصابته بمرض ما.

أجد العدد المُتبقّي منه بعد 5 أيام من بَدْء المرض، علمًا بأنّ عدده الأوّلي في المزرعة هو 1550 دجاجة.

9	$A(t)=a(1-r)^t$ $A(5)=1550(1-0.25)^5$ $=1550(0.75)^5 \approx 368$

استخدم 35 ألف شخص موقعًا إلكترونيًا تعليميًا هذه السنة، ومن المُتوقَّع أنْ يزداد هذا العدد بنسبة 2% كل سنة:

1 أكتب اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثِّل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة. 2 أجد عدد مستخدمي الموقع بعد 7 سنوات.

1	$A(t) = 35000(1 + 0.02)^t = 35000(1.02)^t$
2	$A(7) = 35000(1.02)^7 \approx 40204$

تلوُّث: في دراسة علمية تناولت درجة تأثير التلوُّث في عدد الأسماك التي تعيش في إحدى البحيرات، توصَّل الباحثون إلى أنَّ عدد الأسماك في البحيرة يقلُّ بنسبة 20% كل سنة:

3 أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي الذي يُمثِّل عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة، علمًا بأنَّ عددها عند بَدْء الدراسة هو 12000 سمكة.

4 أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد 3 سنوات.

3	$A(t) = 12000(1 - 0.2)^t = 12000(0.8)^t$
4	$A(3) = 12000(0.8)^3 = 6144$

بلغ عدد سكّان لواء المُوقَّر (شرق العاصمة عمّان) 84370 نسمة تقريبًا سنة 2015م. إذا كانت نسبة النمو السكّاني في اللواء 2.4% سنويًّا، فأُجيب عن السؤالين الآتيين:

5 أكتب اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثِّل عدد سكّان اللواء بعد t سنة.

6 أجد العدد التقريبي لسكّان اللواء سنة 2030م.

5	$A(t) = 84370(1 + 0.024)^t = 84370(1.024)^t$
6	$2030 - 2015 = 15$ $A(15) = 84370(1.024)^{15} \approx 120417$

سيّارة: يتناقص ثمن سيّارة سعرها JD 19725 بنسبة 3% سنويًّا:

7 أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي لثمن السيّارة بعد t سنة. 8 أجد ثمن السيّارة بعد 4 سنوات.

7	$A(t) = 19725(1 - 0.03)^t = 19725(0.97)^t$
8	$A(4) = 19725(0.97)^4 \approx JD17462$

3) **مفهوم أساسي** يُمكِن حساب جُملة المبلغ المستحق في حالة الربح المُركَّب باستعمال الصيغة الآتية:

n: عدد مرّات إضافة الربح المُركَّب في السنة. t: عدد السنوات.

r: مُعدَّل الفائدة السنوي الذي يُكتَب في صورة عشرية. P: المبلغ الأصلي

$$\text{جُمْلة المبلغ} = A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

مثال1) استثمر سليمان مبلغ JD 9000 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ % 1.46 ، وتضاف كل (3) أشهر ، جد جُمْلة المبلغ بعد (3) سنوات.

$$A(t) = P(1+\frac{r}{n})^{nt} \ , \ n = \frac{\text{(عدد الأشهر)}}{\text{(عدد المرات)}} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\Rightarrow A(3) = (9000)(1+\frac{0.0146}{4})^{4(3)} = 9402.2$$

مثال2) استثمر ماجد مبلغ (8000 JD) في بنك بنسبة ربح مركب قيمتها(% 1.34) بحيث تضاف كل(6) أشهر جد جملة المبلغ بعد (4) سنوات

$$A = P(1+\frac{r}{n})^{nt} = 8000(1+\frac{0.0134}{2})^{2(4)} = 8438.9$$

مثال3) استثمر عماد مبلغ (4000 JD) في بنك بنسبة ربح مركب قيمتها(% 6) بحيث تضاف كل يوم جد جملة المبلغ بعد (5) سنوات

$$A = P(1+\frac{r}{n})^{nt} = 4000(1+\frac{0.06}{365})^{365(5)} = 5546.3$$

أتحقّق من فهمي اســتثمرت تهاني مبلغ JD 5000 في شــركة، بنســبة ربح مُركَّب تبلغ 2.25%، وتضاف كل 6 أشهر. أجد جُمْلة المبلغ بعد 5 سنوات.

$$A = 5000\left(1+\frac{0.0225}{2}\right)^{2\times5} \approx 5591.85$$

استثمر ربيع مبلغ JD 1200 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 10%، وتضاف كل شهر:

10 أكتب صيغة تُمثِّل جُمْلة المبلغ بعد t سنة.

11 أجد جُمْلة المبلغ بعد 5 سنوات.

10	$A=1200\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{12t}$
11	$A=1200\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{12\times5} \approx 1974.37$

استثمرت هند مبلغ JD 6200 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 8.4%، وتضاف كل يوم:

12 أكتب صيغة تُمثِّل جُمْلة المبلغ بعد t سنة.

13 أجد جُمْلة المبلغ بعد 6 سنوات.

12	$A= 6200\left(1+\frac{0.084}{365}\right)^{365t}$
13	$A = 6200\left(1+\frac{0.084}{365}\right)^{365\times6} \approx 10262.45$

4) الاقتران الأسّي الطبيعي : $f(x) = e^x$ و الربح المُركّب المستمر

مفهوم أساسي يُمكِن حساب جُمْلة المبلغ المستحق في حالة الربح المُركّب المستمر باستعمال الصيغة الآتية:

r: مُعدّل الفائدة المستمر الذي يُكتَب في صورة عشرية. t: عدد السنوات. P : المبلغ الأصلي

$$\text{جُمْلة المبلغ} = A = P e^{rt}$$

مثال1) أودع ماجد مبلغ(4000 JD) في بنك بمعدل فائدة قدرها (5 %)، واحتسب البنك الفائدة باستمرار جد جملة المبلغ بعد 10 سنوات

$$A(t) = Pe^{rt} \Rightarrow A(10) = (4000)\, e^{(0.05)(10)} = 6595$$

مثال2) أودع سالم مبلغ(5000 JD) في بنك بمعدل فائدة قدرها (3 %) ، واحتسب البنك الفائدة باستمرار ، إذا بلغت جملة المبلغ بعد (t) سنة (10000)، جد عدد السنين

$$A(t) = P\ e^{rt} \Rightarrow 10000 = (5000)\ e^{0.03t} \Rightarrow 2 = e^{0.03t}$$

$$\ln 2 = \ln e^{0.03t} \Rightarrow 0.69 = (0.03t)\ln e \Rightarrow t = \frac{0.69}{0.03} = 23$$

أتحقّق من فهمي أودعت سارة مبلغ 6300 JD في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركّب مستمر مقدارها 3.2%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 9 سنوات.

$$\boxed{A = 6300e^{0.032\times 9} \approx 8402.67}$$

14 أودع حسام مبلغ 9000 JD في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركّب مستمر مقدارها 3.6%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 7 سنوات.

14	$A = Pe^{rt} \Rightarrow A = 9000e^{0.036\times 7} \approx 11579.36$

15 أودعت ليلى مبلغ 8200 JD في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركّب مستمر مقدارها 4.9%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 9 سنوات.

15	$A = Pe^{rt} \Rightarrow A = 8200e^{0.049\times 9} \approx 12744.94$

16 أعَدَّ باحث دراسة عن تكاثر ذباب الفاكهة، وتوصّل إلى أنّه يُمكِن تمثيل العدد التقريبي للذباب بالاقتران: $P(t) = 20e^{0.03t}$، حيث P عدد الذباب بعد t ساعة. أجد عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بَدْء الدراسة، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

16	$P(t) = 20e^{0.03t} \Rightarrow P(72) = 20e^{0.03\times 72} \approx 173$

استثمر عامر مبلغ JD 8000 في شركة صناعية، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 5.5%، وتضاف كل شهر:

9 أكتب صيغة تُمثِّل جُمْلة المبلغ بعد t سنة. 10 أجد جُمْلة المبلغ بعد 3 سنوات.

9	$A = 8000\left(1 + \dfrac{0.055}{12}\right)^{12t}$
10	$A = 8000\left(1 + \dfrac{0.055}{12}\right)^{12\times 3} \approx JD\ 9431.59$

11 أودعت ليلى مبلغ JD 60000 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 6%.

أجد جُمْلة المبلغ بعد 17 سنة.

11	$A = 60000e^{0.06\times 17} \approx JD166391.69$

أسئلة الوزارة / 2023 / الدرس الأول

3) يبلغ عدد المشاركين في جمعية خيرية (40) شخصًا هذه السنة، ويُتوقع زيادة هذا العدد بنسبة 7% كل سنة.

ما اقتران النمو الأسي الذي يُمثل عدد المشاركين بعد t سنة؟

a) $A(t) = 40(0.93)^t$ c) $A(t) = 40(0.07)^t$

b) $A(t) = 40(1.07)^t$ d) $A(t) = 40(1.7)^t$

b) استثمر معاذ مبلغ JD7000 في شركة بنسبة ربح مُركب تبلغ 1.5% وتُضاف كل 4 أشهر.

جد جملة المبلغ بعد 5 سنوات؟ (11 علامة)

الدرس 3 الاقترانات اللوغاريتمية
Logarithmic Functions

مفهوم أساسي

إذا كان: $x > 0, b > 0, b \neq 1$، فإنَّ:

الصورة اللوغاريتمية		الصورة الأُسّية
$\log_b x = y$	$\Leftrightarrow$	$b^y = x$

1) مفهوم اللوغاريتم :

$\boxed{\log_2 8}$ تعني : كم مرة نضرب العدد (2) في نفسه ليكون الناتج (8) ؟؟؟ الجواب (3) . إذاً $\boxed{\log_2 8 = 3}$

كذلك: $\boxed{\log_5 25}$ تعني : (5) أس كم تساوي (25) ؟؟؟ الجواب (2) . إذاً $\boxed{\log_5 25 = 2}$

أي أن أي صيغة أسية يمكن تحويلها إلى لوغاريتمية (بشرط الأساس موجب ولا يساوي 1)

$$(2)^6 = 64 \Leftrightarrow Log_2(64) = 6 \qquad (7)^2 = 49 \Leftrightarrow Log_7(49) = 2$$

$$Log_6(36) = 2 \Leftrightarrow (6)^2 = 36 \qquad Log_3(81) = 4 \Leftrightarrow (3)^4 = 81$$

1. $\log_2 16 = 4 \Rightarrow \log_2 16 = 4 \to 2^4 = 16$
2. $\log_7 7 = 1 \Rightarrow \log_7 7 = 1 \to 7^1 = 7$
3. $\log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right) = -3 \Rightarrow \log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right) = -3 \to (10)^{-3} = \frac{1}{1000}$
4. $\log_5 1 = 0 \Rightarrow \log_5 1 = 0 \to 5^0 = 1$

أتحقّق من فهمي أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسّية:

a) $\log_2 16 = 4$

b) $\log_7 7 = 1$

c) $\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5$

d) $\log_9 1 = 0$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
رياضيات

a	$\log_2 16 = 4$	$\to 2^4 = 16$
b	$\log_7 7 = 1$	$\to 7^1 = 7$
c	$\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5$	$\to 3^{-5} = \frac{1}{243}$
d	$\log_9 1 = 0$	$\to 9^0 = 1$

1) $12^2 = 144 \Rightarrow 12^2 = 144 \to \log_{12} 144 = 2$

2) $36^{\frac{1}{2}} = 6 \Rightarrow 36^{\frac{1}{2}} = 6 \to \log_{36} 6 = \frac{1}{2}$

3) $(3)^{-4} = \frac{1}{81} \Rightarrow (3)^{-4} = \frac{1}{81} \to \log_3 \left(\frac{1}{81}\right) = -4$

4) $34^0 = 1 \Rightarrow 34^0 = 1 \to \log_{34} 1 = 0$

أتحقّق من فهمي أكتب كل معادلة أُسِّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

a) $7^3 = 343$

b) $49^{\frac{1}{2}} = 7$

c) $(2)^{-5} = \frac{1}{32}$

d) $17^0 = 1$

a	$7^3 = 343 \to \log_7 343 = 3$
b	$49^{\frac{1}{2}} = 7 \to \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$
c	$(2)^{-5} = \frac{1}{32} \to \log_2 \frac{1}{32} = -5$
d	$17^0 = 1 \to \log_{17} 1 = 0$

ويمكن إيجاد قيمة اللوغاريتم عن طرق تحويله إلى معادلة أسية ، قم حلها

1) $\log_2 8 \Rightarrow \log_2 8 = y \Rightarrow 2^y = 8$

$\Rightarrow 2^y = 2^3 \Rightarrow y = 3$

2) $\log_7 \sqrt{7} \Rightarrow \log_7 \sqrt{7} = y \Rightarrow 7^y = \sqrt{7}$

$\Rightarrow 7^y = 7^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

3) $\log_9 3 \Rightarrow \log_9 3 = y \Rightarrow 9^y = 3$

$\Rightarrow (3^2)^y = 3 \Rightarrow 3^{2y} = 3^1$

$\Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

4) $\log_{10} 0.01 \Rightarrow \log_{10} 0.01 = y \Rightarrow 10^y = 0.01$

$\Rightarrow 10^y = \frac{1}{100} \Rightarrow 10^y = 10^{-2}$

$\Rightarrow y = -2$

أكتبُ كلّ معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي، على الصورة الأُسّية:

1 $\log_4 1024 = 5$ 2 $\log_3 729 = 6$ 3 $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ 4 $\log_{25} 5 = 0.5$

أكتبُ كلّ معادلة أُسّية ممّا يأتي، على الصورة اللوغاريتمية:

5 $6^3 = 216$ 6 $3^{-2} = \frac{1}{9}$ 7 $5^4 = 625$ 8 $2^{-3} = 0.125$

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي، من دون استعمال الآلة الحاسبة:

9 $\log_2 256$ 10 $\log_9 27$ 11 $\log 0.1$ 12 $\log_{\frac{7}{2}} 1$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسّية:

1 $\log_7 343 = 3$ 2 $\log_4 256 = 4$ 3 $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

4 $\log_{36} 6 = 0.5$ 5 $\log_9 1 = 0$ 6 $\log_{57} 57 = 1$

1	$\log_7 343 = 3 \rightarrow 7^3 = 343$	4	$\log_{36} 6 = 0.5 \rightarrow 36^{0.5} = 6$
2	$\log_4 256 = 4 \rightarrow 4^4 = 256$	5	$\log_9 1 = 0 \rightarrow 9^0 = 1$
3	$\log_{125} 5 = \frac{1}{3} \rightarrow 125^{\frac{1}{3}} = 5$	6	$\log_{57} 57 = 1 \rightarrow 57^1 = 57$

أكتب كل معادلة أُسّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

7 $2^6 = 64$ 8 $4^{-3} = \frac{1}{64}$ 9 $6^3 = 216$

10 $5^{-3} = 0.008$ 11 $(51)^1 = 51$ 12 $9^0 = 1$

7	$2^6 = 64 \rightarrow \log_2 64 = 6$	10	$5^{-3} = 0.008 \rightarrow \log_5 0.008 = -3$
8	$4^{-3} = \frac{1}{64} \rightarrow \log_4 \frac{1}{64} = -3$	11	$51^1 = 51 \rightarrow \log_{51} 51 = 1$
9	$6^3 = 216 \rightarrow \log_6 216 = 3$	12	$9^0 = 1 \rightarrow \log_9 1 = 0$

2) خصائص اللوغاريتمات :

الجذر التربيعي يُلغي التربيع .... والعكس

$$x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x \;,\; (\sqrt{x})^2 = x$$

كذلك اللوغاريتم والأس أو القوة متعاكسان ....
كل منهما يُلغي الأخر عندما يكون الأساس نفسه

$$Log_4 (4)^7 = 7 \quad ، \quad 3^{Log_3 (5)} = 5$$

مفهوم أساسي الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان: $b > 0, b \neq 1$، فإنّ:

• $\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
• $\log_b b = 1$	$b^1 = b$
• $\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
• $b^{\log_b x} = x, \; x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

13 $e^{\ln \frac{1}{2}}$ 14 $\log_y \sqrt[3]{y}$ 15 $\log(1.0 \times 10^{-6})$ 16 $6^{\log_6 2.8}$

$$a^{\log_a x} = x$$

أتحقّق من فهمي أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

a) $\log_2 1$ b) $\log_{32} \sqrt{32}$ c) $\log_9 9$ d) $8^{\log_8 13}$

a	$\log_2 1 = 0$	b	$\log_{32} \sqrt{32} = \log_{32} 32^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$	c	$\log_9 9 = 1$	d	$8^{\log_8 13} = 13$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

13 $\log_3 81$ 14 $\log_{25} 5$ 15 $\log_2 32$

16 $\log_{49} 343$ 17 $\log_{10} 0.001$ 18 $\log_{\frac{3}{2}} 1$

19 $\log_{\frac{1}{4}} 4$ 20 $(10)^{\log_{10} \frac{1}{8}}$ 21 $\log_2 \frac{1}{\sqrt{(2)^7}}$

22 $\log_a \sqrt[5]{a}$ 23 $\log_{10} (1 \times 10^{-9})$ 24 $8^{\log_8 5}$

13	$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$
14	$\log_{25} 5 = y \Rightarrow 25^y = 5$ $5^{2y} = 5^1 \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$
15	$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

16	$\log_{49} 343 = y \quad 49^y = 343$ $7^{2y} = 7^3 \Rightarrow 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$
17	$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$
18	$\log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$

19	$\left(\frac{1}{4}\right)^y = 4 \Rightarrow 4^{-y} = 4^1$ $-y = 1 \Rightarrow y = -1$
20	$(10)^{\log_{10} \frac{1}{8}} = \frac{1}{8}$
21	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2^7}} = \log_2 \frac{1}{(2)^{\frac{7}{2}}}$ $= \log_2 (2)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{7}{2}$

22	$\log_a \sqrt[5]{a} = \log_a a^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$
23	$\log_{10}(1 \times 10^{-9})$ $= \log_{10} 10^{-9} = -9$
24	$8^{\log_8 5} = 5$

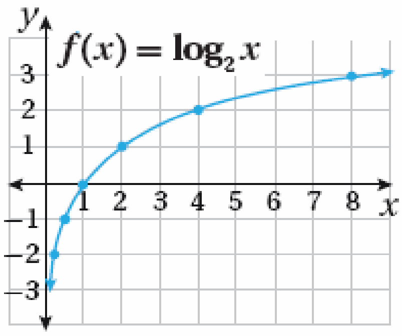
3) تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانيًا

a) $f(x)=\log_2 x$

$y=\log_2 x$ تُكافِئ المعادلة: $x=2^y$

اختيار قِيَم للمُتغيِّر y، ثم إيجاد قِيَم x المرتبطة بها

$x=2^y$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2



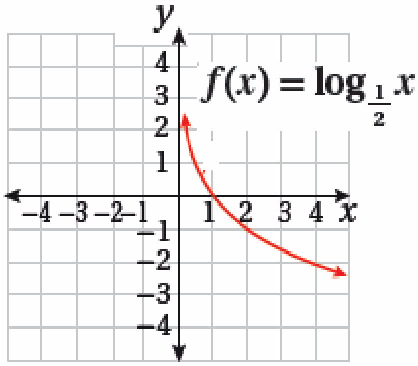
- مجال الاقتران هو الفترة $(0,\infty)$.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1
- لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y؛ لأنَّ $x>0$ دائمًا.
- الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y.
- الاقتران مُتزايِد.

b) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$

$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ تُكافِئ المعادلة: $x=(\frac{1}{2})^y$.

اختيار قِيَم للمُتغيِّر y، ثم إيجاد قِيَم x المرتبطة بها

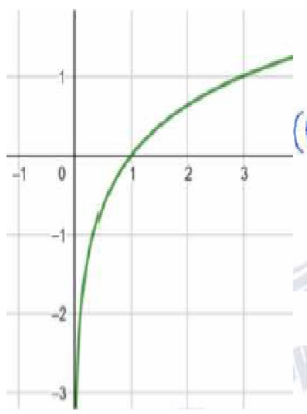
$x=(\frac{1}{2})^y$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	-2	-1	0	1	2



- مجال الاقتران هو الفترة $(0,\infty)$.
- المدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1
- لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y؛ لأنَّ $x>0$ دائمًا.
- الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y.
- الاقتران مُتناقِص.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا: a) $f(x)=\log_3 x$ b) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$



$f(x)=\log_3 x$

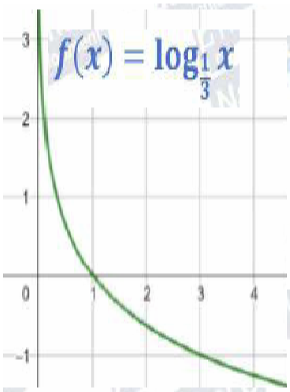
مجال هذا الاقتران هو R^+ أي $(0,\infty)$

مدى هذا الاقتران هو R

المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد



مجال هذا الاقتران هو R^+ أي $(0,\infty)$

مدى هذا الاقتران هو R

المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

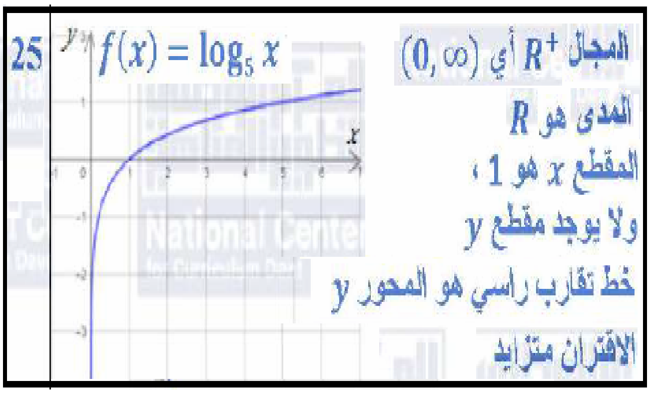
خط تقارب رأسي هو المحور y

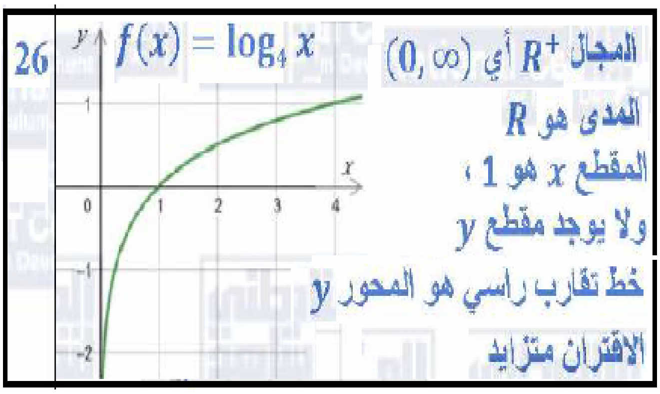
الاقتران متناقص

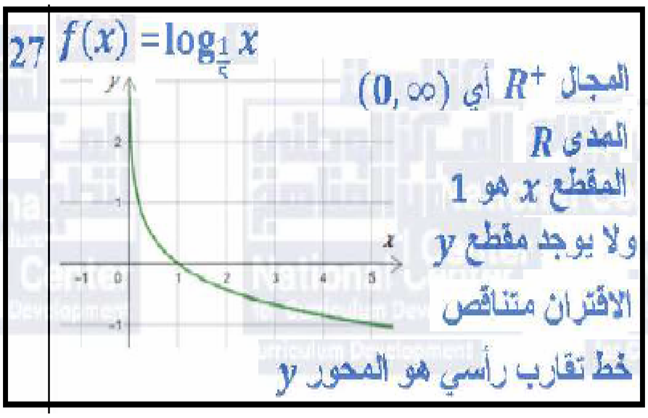
أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

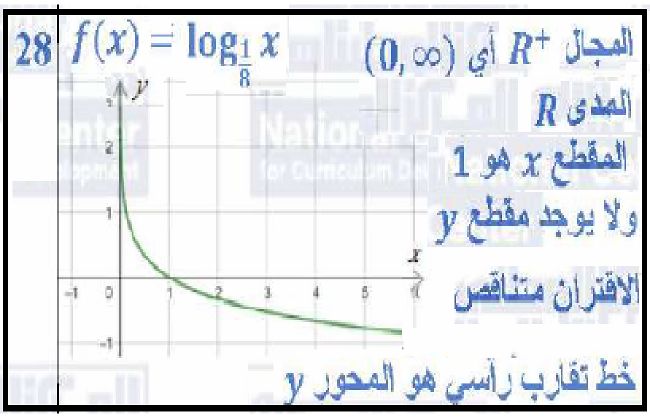
25) $f(x) = \log_5 x$ 26) $g(x) = \log_4 x$ 27) $h(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

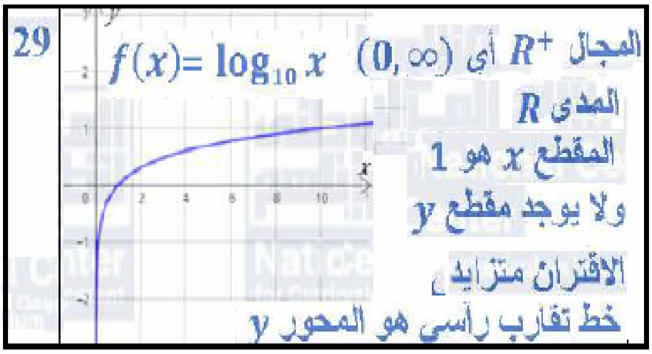
28) $r(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$ 29) $f(x) = \log_{10} x$ 30) $g(x) = \log_6 x$

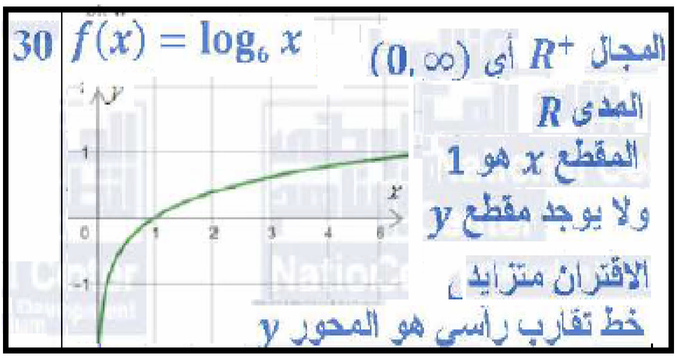










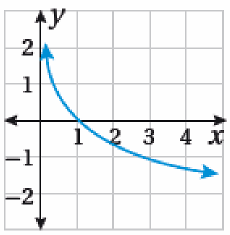


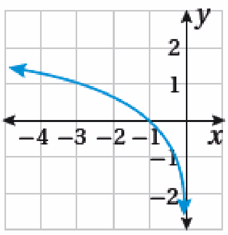
مهارات التفكير العليا

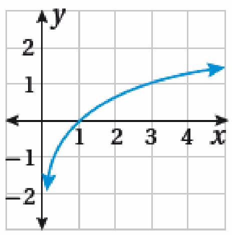
تبرير: أكتب بجانب كل اقتران ممّا يأتي رمز تمثيله البياني المناسب، مُبرِّرًا إجابتي:

38) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} (x)$ 39) $f(x) = \log_3 (-x)$ 40) $g(x) = -\log_3 x$

38	c
39	b
40	a

a)


b)


c)


4) مجال الاقتران اللوغاريتمي: $f(x) = \log_b g(x)$ هو قيم (x) التي يكون عندها g(x) موجبا

لا يمكن إيجاد اللوغاريتم للعدد غير الموجب: $\text{Log}_2(-2)$, $\text{Log}_3(-1)$, $\text{Log}_4(0)$ قيم غير معرفة

مثلاً :

الاقتران	$f(x)=\log_5 x$	$g(x)=\log_5(x-1)$	$f(x)=3-\log_2(4-x)$	$g(x)=\log_3(x)-1$
مجاله	$x>0$	$x>1$	$x<4$	$x>0$

جد المجال :

a) $f(x) = \log_5 (x-2)$ b) $f(x) = \ln(x+3)$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

c) $f(x) = \log x + 4$ d) $f(x) = \log_3(x+1) - 2$

أتحقق من فهمي أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي:

a) $f(x) = \log_7 (5-x)$ b) $f(x) = \log_5 (9+3x)$

a	$5-x>0 \Rightarrow -x>-5 \Rightarrow x<5$ مجال الاقتران هو $(-\infty, 5)$
b	$9+3x>0 \Rightarrow 3x>-9 \Rightarrow x>-3$ مجال الاقتران هو $(-3, \infty)$

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي:

31 $f(x) = \log_3 (x-2)$ 32 $f(x) = 5 - 2\log_7 (x+1)$ 33 $f(x) = -3\log_4(-x)$

31	$f(x)=\log_3(x-2) \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow$ مجال هذا الاقتران هو $(2, \infty)$
32	$f(x)=5-2\log_7(x+1) \Rightarrow x+1>0 \Rightarrow x>-1 \Rightarrow$ مجال هذا الاقتران هو $(-1, \infty)$
33	$f(x)=-3\log_4(-x) \Rightarrow -x>0 \Rightarrow x<0 \Rightarrow$ مجال هذا الاقتران هو $(-\infty, 0)$

34 أجد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x) = \log_a x$ يمرُّ بالنقطة $(32, 5)$.

35 أجد قيمة c التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x) = \log_c x$ يمرُّ بالنقطة $(\frac{1}{4}, -4)$.

34	$f(32) = \log_a 32 \Rightarrow 5 = \log_a 32 \Rightarrow a^5=32 \Rightarrow a^5=(2)^5 \Rightarrow a=2$
35	$f\left(\frac{1}{81}\right) = \log_c \frac{1}{81} \Rightarrow -4 = \log_c \frac{1}{81} \Rightarrow c^{-4} = \frac{1}{81} \Rightarrow \frac{1}{c^4} = \frac{1}{81}$
	$c^4 = 81 \rightarrow c = \pm\sqrt[4]{81} \rightarrow c = \pm 3$ $c=3 \Leftarrow$ أساس اللوغاريتم لا يكون سالبًا

إعلانــات: يُمثِّل الاقتــران: $P(a) = 10 + 20 \log_5 (a+1)$ مبيعات شــركة (بآلاف الدنانير) من مُنتَــج جديد، حيث a المبلــغ (بمئات الدنانير) الذي تُنفِقه الشــركة على إعلانــات المُنتَج. وتعنــي القيمة: $P(1) \approx 19$ أنَّ إنفاق JD 100 على الإعلانات يُحقِّق إيرادات قيمتها JD 19000 من بيع المُنتَج:

36 أجد $P(4)$، و $P(24)$، و $P(124)$.

37 أُفسِّر معنى القِيَم التي أوجدْتُها في الفرع السابق.

36	$P(a) = 10 + 20\log_5(a+1)$ $P(4) = 10 + 20\log_5(4+1) = 10 + 20\log_5 5 = 10 + 20(1) = 30$ $P(24) = 10 + 20\log_5(24+1) = 10 + 20\log_5 25 = 10 + 20(2) = 50$ $P(124) = 10 + 20\log_5(124+1) = 10 + 20\log_5 125 = 10 + 20(3) = 70$

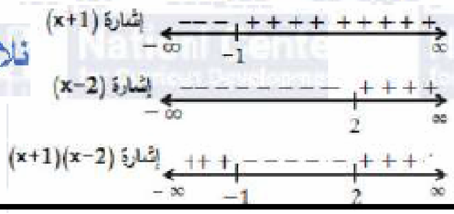
37	القيمة $P(4) = 30$ تعني أن إنفاق JD400 على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته JD 30000 من بيع المنتج القيمة $P(24) = 50$ تعني أن إنفاق JD 2400 على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته JD 50000 من بيع المنتج القيمة $P(124) = 70$ تعني أن إنفاق JD 12400 على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته JD 70000 من بيع المنتج

تحدٍّ: أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي، مُحدِّدًا خط (خطوط) تقاربه الرأسي:

41 $f(x) = \log_3 (x^2)$

42 $f(x) = \log_3 (x^2 - x - 2)$

43 $f(x) = \log_3 \left(\frac{x+1}{x-5}\right)$

41	$f(x) = \log_3(x^2)$ بما أن $x^2 > 0$ لجميع الأعداد الحقيقية عدا العدد 0 فإن مجال هذا الاقتران هو $R - \{0\}$ خط التقارب الرأسي هو $x = 0$ (المحور y)
42	$f(x) = \log_3(x^2 - x - 2) \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) > 0$ نلاحظ أن $(x-2)(x+1) > 0$ في الفترتين $(-\infty, -1)$، و $(2, \infty)$ إذن، المجال هو $(-\infty, -1), (2, \infty)$ 

43 **أكتشف الخطأ:** كتبت منى المعادلة الأُسِّية: $4^{-3} = \frac{1}{64}$ في صورة لوغاريتمية كما يأتي: $\log_4 (-3) = \frac{1}{64}$

أكتشف الخطأ الذي وقعت فيه منى، ثم أُصحِّحه.

43	الكتابة الصحيحة للصورة اللوغاريتمية هي: $\log_4 \frac{1}{64} = -3$

الملخص

**إذا كان $y = f(x) = Log_2(x-1) - 4$ ، وأردنا أن نجد

1) المجال : نضع ما بداخل اللوغاريتم أكبر من صفر ونحل المتباينة الناتجة :

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in (0, \infty)$$

2) المقطع من (x) نضع (y = 0) ونحل المعادلة ، فينتج أن

$$Log_2(x-1) - 4 = 0 \Rightarrow Log_2(x-1) = 4 \Rightarrow x - 1 = 2^4 \Rightarrow x = 17$$

3) المقطع من (y) نضع (x = 0) فينتج أن : قيمة غير معرفة لذلك لا يقطع المحور (y)

$$y = Log_2(0-1) - 4 = \boxed{Log_2(-1)} - 4$$

4) خط التقارب الرأسي: نساوي ما بداخل اللوغاريتم بالصفر ونحل المعادلة الناتجة : $x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

ملاحظة : في الاقتران $(f(x)= Log(x + a) + c)$:إذا كانت الإضافة أو الطرح داخل اللوغاريتم (+a) فإن ذلك يعني الإزاحة يمين (-) أو يسار(+)

ولكن إذا كانت الإضافة أو الطرح على كامل الاقتران (+c) فإنه يتم إزاحة المنحنى إلى الأعلى(+) أو الأسفل (-)

	الاقتران	المجال	المقطع من x	المقطع من y	خط التقارب الرأسي
1)	$f(x) = Log_2(x+4)$	$x > -4$	$x = -3$	$y = 2$	$x = -4$
2)	$f(x) = Log(2x-6)$	$x > 3$	$x = 3.5$	---	$x = 3$
3)	$f(x) = Log_3(x-1) - 2$	$x > 1$	$x=10$	---	$x = 1$
4)	$f(x) = Log_4(x+2) + 1$	$x > -2$	$x = -1.75$	$y = 1.5$	$x = -2$
5)	$f(x) = Log_5(8-2x)$	$x < 4$	$x=3.5$	$y=Log_5 8$	$x = 4$
6)	$f(x) = Log_3(x+9)$				
7)	$f(x) = Log(3x-12)$				
8)	$f(x) = Log_{\frac{1}{2}}(4-2x) - 8$				

أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسّية:

1) $\log_3 729 = 6$
2) $\log_5 625 = 4$
3) $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$
4) $\log_{64} 8 = 0.5$
5) $\log_7 1 = 0$
6) $\log_{43} 43 = 1$

1	$\log_3 729 = 6 \rightarrow 3^6 = 729$	4	$\log_{64} 8 = 0.5 \rightarrow 64^{0.5} = 8$
2	$\log_5 625 = 4 \rightarrow 5^4 = 625$	5	$\log_7 1 = 0 \rightarrow 7^0 = 1$
3	$\log_{64} 4 = \frac{1}{3} \rightarrow 64^{\frac{1}{3}} = 4$	6	$\log_{43} 43 = 1 \rightarrow 43^1 = 43$

أكتب كل معادلة أُسّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

7) $4^5 = 1024$
8) $3^{-4} = \frac{1}{81}$
9) $7^3 = 343$
10) $5^{-2} = 0.04$
11) $(32)^1 = 32$
12) $8^0 = 1$

7	$4^5 = 1024 \rightarrow \log_4 1024 = 5$	10	$5^{-2} = 0.04 \rightarrow \log_5 0.04 = -2$
8	$3^{-4} = \frac{1}{81} \rightarrow \log_3 \frac{1}{81} = -4$	11	$32^1 = 32 \rightarrow \log_{32} 32 = 1$
9	$7^3 = 343 \rightarrow \log_7 343 = 3$	12	$8^0 = 1 \rightarrow \log_8 1 = 0$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

13) $\log_2 64$
14) $\log_{81} 9$
15) $\log_2 32$
16) $\log_{25} 125$
17) $\log_{10} 0.0001$
18) $\log_{\frac{5}{3}} 1$
19) $\log_{\frac{1}{6}} 6$
20) $(10)^{\log_{10} \frac{1}{9}}$
21) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{(3)^6}}$
22) $\log_b \sqrt[7]{b}$
23) $\log_{10} (1 \times 10^{-5})$
24) $4^{\log_4 3}$

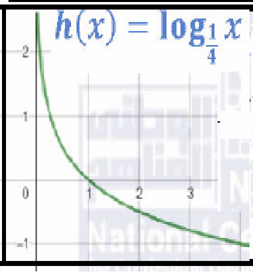
13	$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$
14	$\log_{81} 9 = y \rightarrow 81^y = 9 \Rightarrow (9^2)^y = 9 \Rightarrow 9^{2y} = 9 \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$
15	$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$
16	$\log_{25} 125 = y \rightarrow 25^y = 125 \Rightarrow (5^2)^y = 5^3 \Rightarrow 5^{2y} = 5^3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$
17	$\log_{10} 0.0001 = \log_{10} 10^{-4} = -4$
18	$\log_{\frac{5}{3}} 1 = 0$
19	$\log_{\frac{1}{6}} 6 = y \rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^y = 6 \Rightarrow (6^{-1})^y = 6^1 \Rightarrow 6^{-y} = 6^1 \Rightarrow -y = 1 \Rightarrow y = -1$
20	$(10)^{\log_{10} \frac{1}{9}} = \frac{1}{9}$
21	$\log_3 \frac{1}{\sqrt{3^6}} = \log_3 \frac{1}{3^3} = \log_3 3^{-3} = -3$
22	$\log_b \sqrt[7]{b} = \log_b b^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}$
23	$\log_{10}(1 \times 10^{-5}) = \log_{10} 10^{-5} = -5$
24	$4^{\log_4 3} = 3$

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

25) $f(x) = \log_8 x$ 26) $g(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$ 27) $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

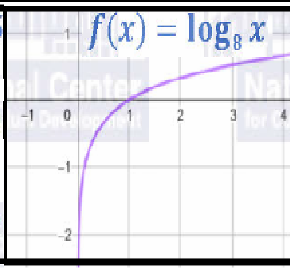
28) $r(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$ 29) $f(x) = \log_9 x$ 30) $g(x) = \log_{11} x$

26 27 28



المجال R^+ أي $(0,\infty)$
المدى R الاقتران متناقص
خط تقارب رأسي هو المحور y
المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

25 29 30



المجال R^+ أي $(0,\infty)$
المدى R الاقتران متزايد
خط تقارب رأسي هو المحور y
المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي:

31) $f(x) = \log_2 (x+3)$ 32) $f(x) = 7 + 2\log_5 (x-2)$ 33) $f(x) = -5\log_7 (-x)$

34) ضوء: تُمثِّل المعادلة: $\log_{10}\left(\frac{I}{12}\right) = -0.0125x$ العلاقة بين شِدَّة الضوء I بوحدة lumen والعمق x بالأمتار في إحدى البحيرات. كم تبلغ شِدَّة الضوء عند عمق 10 m؟

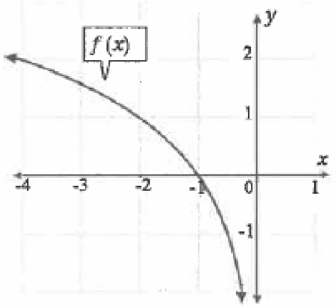
31	$f(x) = \log_2(x+3) \Rightarrow x+3>0 \Rightarrow x>-3 \Rightarrow$ مجال الاقتران هو $(-3,\infty)$
32	$f(x) = 7+2\log_5(x-2) \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow$ مجال الاقتران هو $(2,\infty)$
33	$f(x) = -5\log_7(-x) \Rightarrow -x>0 \Rightarrow x<0 \Rightarrow$ مجال الاقتران هو $(-\infty,0)$
34	$\log_{10}\left(\frac{I}{12}\right) = -0.0125(10) \Rightarrow \log_{10}\left(\frac{I}{12}\right) = -0.125$ $10^{-0.125} = \frac{I}{12} \Rightarrow I = 12 \times 10^{-0.125} \approx 118.5$ lumen

أسئلة الوزارة / الدرس الثالث

5) قيمة $\log_3 9^5$ هي:
a) 9 b) 7 c) 5 d) 10

6) مجال الاقتران $f(x) = \log_7(x-3)$ هو:
a) $(-3,\infty)$ b) $(3,\infty)$
c) $(-\infty,-3)$ d) $(-\infty,3)$

7) يُمثِّل الشكل الآتي التمثيل البياني لمنحنى الاقتران $f(x)$. أيّ الآتية يُمثِّل قاعدة الاقتران $f(x)$ ؟



a) $f(x) = -\log_2 x$
b) $f(x) = \log_2(-x)$
c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح
الأستاذ عبدالقادر الحسنات

الدرس 4 قوانين اللوغاريتمات
Laws of Logarithms

$\boxed{\mathrm{Log}_8 1 = 0}$ $\boxed{\mathrm{Log}_3 1 = 0}$ $\boxed{\mathrm{Log}_{\frac{2}{3}} 1 = 0}$

$\boxed{Log_4 0 = (\text{غير معرف})}$

1) قوانين اللوغاريتمات

$b\ ,\ x\ ,\ y \in R^+, p \in R\ ,\ b \neq 1 \Rightarrow$

$$1)\ \log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$2)\ \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

$$3)\ \log_b(x)^p = p \times \log_b(x)$$

$$Log_4 x^3 = 3Log_4 x$$

$$Log_9 3x^5 \neq 5Log_9 3x$$

$$Log_3 4x^2 = Log_3 4 + Log_3 x^2 = Log_3 4 + 2Log_3 x$$

أمثلة

1) $Log_3(15) = Log_3(3\times5) = Log_3 3 + Log_3 5 = 1 + Log_3 5$

$\boxed{Log_4 3 \times Log_4 5 \neq Log_4(3\times5)}$ $\boxed{Log_4 3 \times Log_4 5 \neq Log_4 3 + Log_4 5}$

2) $Log_5\left(\frac{4}{7}\right) = Log_5 4 - Log_5 7 ...$ $\boxed{Log_4 3 \div Log_4 5 \neq Log_4\left(\frac{3}{5}\right)}$ $\boxed{Log_7\left(\frac{2}{9}\right) \neq \frac{Log_7 2}{Log_7 9}}$

3) $Log_4 16 = Log_4(4)^2 = 2Log_4 4 = 2$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

4) $Log_5\sqrt{5} = Log_5(5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}Log_5 5 = \frac{1}{2}$

$\boxed{\mathrm{Log}_4 4 = 1}$ $\boxed{\mathrm{Log}_7 7 = 1}$ $\boxed{\mathrm{Log}_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 1}$

5) $\mathrm{Log}_3 4 = 1.26\ ,\ \mathrm{Log}_3 6 = 1.63 \Rightarrow \mathrm{Log}_3 24 = ?$

$$\mathrm{Log}_3 24 = \mathrm{Log}_3(4\times6) = \mathrm{Log}_3 4 + \mathrm{Log}_3 6 = 1.26 + 1.63 = 2.89$$

6) $\mathrm{Log}_4 5 = 1.16\ ,\ \Rightarrow \mathrm{Log}_4 25 = ?$

$$\mathrm{Log}_4 25 = \mathrm{Log}_4(5\times5) = \mathrm{Log}_4 5^2 = (2)\mathrm{Log}_4 5 = (2)(1.16) = 2.32$$

تمارين

$$Log_b 3 = 0.9 \quad , \quad Log_b 4 = 1.4 \quad , \quad Log_b 0.5 = -0.7 \Rightarrow$$

1) $Log_b (8) =$

2) $Log_b (6) =$

3) $Log_b \sqrt{3} =$

4) $Log_b (\frac{3}{2}) =$

5) $Log_b (\frac{2}{3}) =$

6) $Log_b (\frac{1}{4}) =$

$$Log_5 2 = 0.43 \quad , \quad Log_5 9 = 1.37 \quad \Rightarrow$$

1) $Log_5 \frac{8}{81} =$

2) $Log_5 \sqrt[3]{18} =$

3) $Log_5 \frac{4}{9} =$

أتحقّق من فهمي إذا كان: $\log_b 7 \approx 1.21$، وكان: $\log_b 2 \approx 0.43$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $\log_b 14$ b) $\log_b \frac{2}{7}$ c) $\log_b 32$ d) $\log_b \frac{1}{49}$

a	$\log_b 14 = \log_b(2 \times 7) \approx 1.64$	b	$\log_b \frac{2}{7} = \log_b 2 - \log_b 7 \approx -0.78$
c	$\log_b 32 = \log_b 2^5 \approx 2.15$	d	$\log_b \frac{1}{49} = \log_b 1 - \log_b 49 \approx -2.42$

أتدرّب وأحُلّ المسائل 40 إذا كان: $\log_a 6 \approx 0.778$، وكان: $\log_a 5 \approx 0.699$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) $\log_a \frac{5}{6}$
2) $\log_a 30$
3) $\frac{\log_a 5}{\log_a 6}$
4) $\log_a \frac{1}{6}$
5) $\log_a 900$
6) $\log_a \frac{18}{15}$
7) $\log_a (6a^2)$
8) $\log_a \sqrt[4]{25}$
9) $(\log_a 5)(\log_a 6)$

1	$\log_a \frac{5}{6} = \log_a 5 - \log_a 6 \approx 0.699 - 0.778 \approx -0.079$
2	$\log_a 30 = \log_a (5 \times 6) = \log_a 5 + \log_a 6 \approx 0.699 + 0.778 \approx 1.477$
3	$\frac{\log_a 5}{\log_a 6} = \frac{0.699}{0.778} = \frac{699}{778} \approx 0.90$

4	$\log_a \frac{1}{6} = \log_a 1 - \log_a 6 \approx 0 - 0.778 \approx -0.778$
5	$\log_a 900 = \log_a 30^2 = 2\log_a 30 = 2\log_a (5 \times 6)$ $= 2(\log_a 5 + \log_a 6) \approx 2(0.699 + 0.778) \approx 2 \times 1.477 \approx 2.954$
6	$\log_a \frac{18}{15} = \log_a \frac{6}{5} = \log_a 6 - \log_a 5 \approx 0.778 - 0.699 \approx 0.079$

7	$\log_a (6a^2) = \log_a 6 + \log_a a^2 = \log_a 6 + 2\log_a a \approx 0.778 + 2 \approx 2.778$
8	$\log_a \sqrt[4]{25} = \log_a \sqrt[4]{5^2} = \log_a 5^{\frac{2}{4}} = \log_a 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a 5 \approx \frac{1}{2} \times 0.699 \approx 0.350$
9	$(\log_a 5)(\log_a 6) \approx 0.699 \times 0.778 \approx 0.544$

أخطاء شائعة

1) مجموع لوغاريتمي عددين للأساس نفسه = لوغاريتم (حاصل ضرب العددين)...ولكن العكس غير صحيح

أي أن : لوغاريتم (المجموع) لا يساوي (حاصل ضرب) اللوغاريتمين $\boxed{Log_3(5+6) \neq Log_3 5 \times Log_3 6}$

كذلك : لوغاريتم (المجموع) لا يساوي (مجموع) اللوغاريتمين $\boxed{Log_3(5+6) \neq Log_3 5 + Log_3 6}$

$a, x, y \in R^+,\ a \neq 1 \Rightarrow$

$Log_a x + Log_a y = Log_a(x \times y)$

$Log_a(x+y) \neq Log_a x + Log_a y$

$Log_a(x+y) \neq Log_a x \times Log_a y$

2) طرح لوغاريتمي عددين للأساس نفسه = لوغاريتم (الأول ÷ الثاني)...أيضاً العكس غير صحيح

أي أن : لوغاريتم (الطرح) لا يساوي (لوغاريتم الأول ÷ لوغاريتم الثاني) $\boxed{Log_4(7-2) \neq \dfrac{Log_4 7}{Log_4 2}}$

كذلك :
لوغاريتم (الطرح) لا يساوي لوغاريتم(الأول) – لوغاريتم(الثاني) $\boxed{Log_4(7-2) \neq Log_4 7 - Log_4 2}$

$a, x, y \in R^+,\ a \neq 1 \Rightarrow$

$Log_a x - Log_a y = Log_a \dfrac{x}{y}$

$x > y$ $\quad Log_a(x-y) \neq \dfrac{Log_a x}{Log_a y}$

$Log_a(x-y) \neq Log_a x - Log_a y$

3) إذا كان اللوغاريتم مضروباً في عدد ، يجب أن نحوله إلى قوة قبل إجراء أي عملية

$$2Log_3 4 + Log_3 5 = Log_3 4^2 + Log_3 5 = Log_3(16 \times 5)$$

$$2Log_3 4 + Log_3 5 \neq 2Log_3(4 \times 5)$$

4)عند وجود لوغاريتم لحاصل ضرب مقدارين أحدهما مرفوعا لقوة (دون الآخر) نحول إلى جمع لوغاريتمين ثم القوة

$$Log_4(7x^3) \neq 3Log_4 7x$$

$$Log_4(7x^3) = Log_4 7 + Log_4 x^3 = Log_4 7 + 3Log_4 x$$

OR $$Log_4(7x^3) = Log_4(\sqrt[3]{7})^3 x^3 = Log_4(\sqrt[3]{7}x)^3 = 3Log_4 \sqrt[3]{7}x = 3Log_4 \sqrt[3]{7} + 3Log_4 x$$

2) كتابة اللوغاريتمات بالصورة المُطوَّلة

نحتاجُ أحياناً إلى إعادة كتابة عبارات لوغاريتمية بصورة مطوّلة ، فنستخدم قوانين اللوغاريتمات لعمل ذلك

$$1)Log_3(5x^3\sqrt{y}) = Log_3(5) + Log_3(x^3) + Log_3(\sqrt{y})$$

$$= Log_3 5 + 3Log_3 x + \frac{1}{2}Log_3 y$$

$$2)\ Log_2 \frac{\sqrt[3]{(2x-1)^2}}{7} = Log_2 \sqrt[3]{(2x-1)^2} - Log_2 7$$

$$= \frac{2}{3}Log_2(2x-1) - Log_2 7$$

$$3)Log_a \frac{3x^2y^5}{z^4} = Log_a(3x^2y^5) - Log_a z^4$$

$$= Log_a 3 + 2Log_a x + 5Log_a y - 4Log_a z$$

$$4)Log_b \frac{ax^2y}{k} =$$

$$5)Log_b \frac{a^3\sqrt[5]{x^2}}{2y} =$$

$$6)Log_b \frac{4+3x^2}{\sqrt{x^2+1}} =$$

أتحقّق من فهمي أكتب كل مقــدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة،

علمًا بـــأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيّة موجبة:

a) $\log_2 a^2 b^9$ b) $\log_5 \frac{(x+1)^3}{8}$ c) $\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5}$ d) $\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}}$

a	$\log_2 a^2 b^9 = 2\log_2 a + 9\log_2 b$
b	$\log_5 \frac{(x+1)^3}{8} = 3\log_5(x+1) - \log_5 8$

c	$\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5} = 7\log_3 x + 3\log_3 y - 5\log_3 z$
d	$\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}} = \log_b \left(\frac{x^7 b^2}{y^5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{7}{3}\log_b x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\log_b y$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيّة موجبة:

10 $\log_a x^2$

11 $\log_a \left(\frac{a}{bc}\right)$

12 $\log_a (\sqrt{x}\sqrt{y})$

13 $\log_a \left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right)$

14 $\log_a \frac{1}{x^2 y^2}$

15 $\log_a \sqrt[5]{32x^5}$

16 $\log_a \frac{(x^2 y^3)^2}{(x^2 y^3)^3}$

17 $\log_a (x+y-z)^7,\ x+y>z$

18 $\log_a \sqrt{\frac{x^{12} y}{y^3 z^4}}$

10	$\log_a x^2 = 2\log_a x$
11	$\log_a \left(\frac{a}{bc}\right) = \log_a a - \log_a bc = \log_a a - (\log_a b + \log_a c)$ $= \log_a a - \log_a b - \log_a c = 1 - \log_a b - \log_a c$
12	$\log_a(\sqrt{x}\sqrt{y}) = \log_a \sqrt{x} + \log_a \sqrt{y} = \log_a x^{\frac{1}{2}} + \log_a y^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y$
13	$\log_a \left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right) = \log_a \sqrt{z} - \log_a y = \log_a z^{\frac{1}{2}} - \log_a y = \frac{1}{2}\log_a z - \log_a y$
14	$\log_a \frac{1}{x^2y^2} = \log_a 1 - \log_a x^2y^2 = \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^2)$ $= 0 - (2\log_a x + 2\log_a y) = -2\log_a x - 2\log_a y$
15	$\log_a \sqrt[5]{32x^5} = \log_a \left(\sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{x^5}\right) = \log_a 2x = \log_a 2 + \log_a x$

16	$\log_a \frac{(x^2y^3)^2}{(x^2y^3)^3} = \log_a \frac{1}{x^2y^3} = \log_a 1 - \log_a x^2y^3$ $= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^3) = 0 - (2\log_a x + 3\log_a y)$ $= -2\log_a x - 3\log_a y$
17	$\log_a (x+y-z)^7 = 7\log_a(x+y-z)$
18	$\log_a \sqrt{\frac{x^{12}y}{y^3z^4}} = \log_a \sqrt{\frac{x^{12}}{y^2z^4}} = \log_a \frac{\sqrt{x^{12}}}{\sqrt{y^2}\sqrt{z^4}} = \log_a \frac{x^{\frac{12}{2}}}{y^{\frac{2}{2}}z^{\frac{4}{2}}} = \log_a \frac{x^6}{yz^2}$ $= \log_a x^6 - \log_a yz^2 = 6\log_a x - (\log_a y + \log_a z^2)$ $= 6\log_a x - (\log_a y + 2\log_a z) = 6\log_a x - \log_a y - 2\log_a z$

3) كتابة اللوغاريتمات بالصورة المُختصَرة

نحتاجُ أحياناً إلى كتابة المقدار اللوغاريتمي على شكل لوغاريتم واحد ، فنستخدم قوانين اللوغاريتمات أيضاً

$$1)\frac{2}{3}Log_5 8 - Log_5 6 - Log_5 4 = Log_5 8^{\frac{2}{3}} - (Log_5 6 + Log_5 4)$$

$$= Log_5(\sqrt[3]{8})^2 - Log_5(6\times 4)$$

$$= Log_5(2)^2 - Log_5(24)$$

$$= Log_5 4 - Log_5(24)$$

$$= Log_5 \frac{4}{24} = Log_5 \frac{1}{6}$$

$$= Log_5 1 - Log_5 6$$

$$= 0 - Log_5 6 = -Log_5 6$$

$$2)Log_a x^5 - 2Log_a xy = Log_a x^5 - Log_a (xy)^2$$

$$= Log_a \frac{x^5}{(xy)^2}$$

$$= Log_a \frac{x^5}{x^2 y^2} = Log_a \frac{x^3}{y^2}$$

$$3)Log_3(x^2 - y^2) - Log_3(x+y) = Log_3 \frac{x^2 - y^2}{x+y}$$

$$= Log_3 \frac{(x-y)(x+y)}{x+y}$$

$$= Log_3(x-y)$$

$$4)3Log_a x + 2Log_a y - 4Log_a z =$$

$$5)Log_4 a + \frac{1}{2}Log_4 b =$$

أتحقَّق من فهمي

أكتب كل مقـــدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

a) $\log_5 a + 3\log_5 b$ b) $5\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 9\log_b z$

a	$\log_5 a + 3\log_5 b = \log_5 a + \log_5 b^3 = \log_5 ab^3$
b	$5\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 9\log_b z = \log_b x^5 + \log_b y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$ $= \log_b x^5 y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9 = \log_b \frac{x^5 y^{\frac{1}{2}}}{z^9} = \log_b \frac{x^5\sqrt{y}}{z^9}$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

19) $\log_a x + \log_a y$

20) $\log_b (x+y) - \log_b (x-y),\ x>y$

21) $\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x}$

22) $\log_a (x^2-4) - \log_a (x+2),\ x>2$

23) $2\log_b x - 3\log_b y + \frac{1}{3}\log_b z$

24) $\log_b 1 + 2\log_b b$

19	$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
20	$\log_b (x+y) - \log_b (x-y) = \log_b \frac{x+y}{x-y}$
21	$\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x} = \log_a \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \log_a \frac{1}{x}$
22	$\log_a (x^2-4) - \log_a (x+2) = \log_a \frac{(x^2-4)}{(x+2)} = \log_a \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} = \log_a (x-2)$

23	$2\log_b x - 3\log_b y + \frac{1}{3}\log_b z = \log_b x^2 - \log_b y^3 + \log_b z^{\frac{1}{3}}$ $= \log_b \frac{x^2}{y^3} + \log_b z^{\frac{1}{3}} = \log_b \frac{x^2 z^{\frac{1}{3}}}{y^3} = \log_b \frac{x^2\sqrt[3]{z}}{y^3}$
24	$\log_b 1 + 2\log_b b = \log_b b^2 = 2$

3) مسائل عملية

يُمكن الاستفادة من الاقترانات اللوغاريتمية وقوانينها في كثير من التطبيقات الحياتية

مثال : في تجربة لتحديد مدى تأثير المُدَّة الزمنية في درجة تذكُّر الطلبة للمعلومات، تقدَّمت مجموعة من الطلبة اختبار في مادَّة مُعيَّنة، ثم لاختبارات مُكافِئة لهذا الاختبار على مدار مُدَد شهرية بعد ذلك، فوجد فريق البحث أنَّ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها أحد الطلبة بعد t شهرًا من إنهائه دراسة المادَّة تعطى بالاقتران: $M(t) = 85 - 25Log_{10}(t+1)$

جد النسبة المئوية للمادَّة التي يتذكَّرها هذا الطالب بعد 19 شهرًا من إنهائه دراستها، علمًا بأنَّ $Log_{10}2 = 0.3$

$$M(t) = 85 - 25Log_{10}(t+1) \Rightarrow M(19) = 85 - 25Log_{10}(19+1)$$
$$= 85 - 25Log_{10}(20) = 85 - 25Log_{10}(2\times 10)$$
$$= 85 - 25(Log_{10}10 + Log_{10}2)$$
$$= 85 - 25(1+0.3) = 0.52 \Rightarrow 52\ \%$$

أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $M(t) = 92 - 28\log_{10}(t+1)$ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها طالب من مادَّة مُعيَّنة بعد t شهرًا من إنهائه دراستها. أجد النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها هذا الطالب بعد 29 شهرًا من إنهائه دراسة المادَّة، علمًا بأنَّ $\log_{10}3 \approx 0.4771$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

$$M(29) = 92 - 28\log_{10}(29+1) = 92 - 28\log_{10}30$$
$$= 92 - 28\log_{10}(10\times 3) = 92 - 28(\log_{10}10 + \log_{10}3)$$
$$\approx 92 - 28(1+0.4771) \approx 92 - 28(1.4771)$$
$$\approx 92 - 41.3588 \approx 51 \Rightarrow 51\%$$

25 نمو: يُمثِّل الاقتران: $f(x) = 29 + 48.8\log_6(x+2)$ النسبة المئوية لطول الطفل الذكر الآن من طوله عند البلوغ، حيث x عمره بالسنوات. أجد النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ، علمًا بأنَّ $\log_6 2 \approx 0.3869$.

25

$$f(x) = 29 + 48.8\log_6(x+2)$$
$$f(10) = 29 + 48.8\log_6(10+2) = 29 + 48.8\log_6 12$$
$$= 29 + 48.8\log_6(6\times 2) = 29 + 48.8(\log_6 6 + \log_6 2)$$
$$\approx 29 + 48.8(1+0.3869) \approx 29 + 48.8(1.3869)$$
$$\approx 29 + 67.68072 \approx 97 \Rightarrow 97\%$$

مهارات التفكير العليا

26 تحدٍّ: أُثبِت أنَّ $\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{3}{2}$.

27 أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحَلِّ الآتي، ثم أُصحِّحه: $\log_2 5x = (\log_2 5)(\log_2 x)$ ✗

28 تبرير: أُثبِت أنَّ $\log_b (b-3) + \log_b (b^2 + 3b) - \log_b (b^2 - 9) = 1$، حيث: $b > 3$، مُبرِّرًا إجابتي.

26	$\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{\log_a 6^3}{\log_a 6^2} = \frac{3\log_a 6}{2\log_a 6} = \frac{3}{2}$
27	$\log_2 5x = \log_2 5 + \log_2 x$
28	$\log_b(b-3) + \log_b(b^2+3b) - \log_b(b^2-9)$ $= \log_b(b-3)(b^2+3b) - \log_b(b^2-9)$ $= \log_b \frac{(b-3)(b^2+3b)}{(b^2-9)} = \log_b \frac{(b-3)\times b(b+3)}{(b-3)(b+3)} = \log_b b = 1$

أسئلة الوزارة 2023

8) أيّ المقادير الآتية يكافئ المقدار $3\log a + \log b - \log c$ ، علمًا بأنّ المتغيرات جميعها تمثل أعدادًا حقيقية موجبة؟

a) $\log\left(\frac{a^3 b}{c}\right)$ b) $\log(a^3 + b - c)$ c) $\log\left(\frac{ab}{c}\right)^3$ d) $\log\left(\frac{3ab}{c}\right)$

* إذا كان $\log_a 7 \approx 1.21$ ، $\log_a 3 \approx 0.68$ ، فأجب عن الفقرتين 9 و 10 الآتيتين:

9) قيمة $\log_a 21$ هي:

a) 0.53 b) 1.89 c) 3.63 d) 4.76

10) قيمة $\log_a\left(\frac{a}{7}\right)$ هي:

a) 0.21 b) −0.21 c) 0.83 d) −0.83

كتاب التمارين

إذا كان: $\log_a 7 \approx 0.936$، وكان: $\log_a 3 \approx 0.528$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1. $\log_a \frac{3}{7}$
2. $\log_a 21$
3. $\frac{\log_a 3}{\log_a 7}$
4. $\log_a \frac{1}{7}$
5. $\log_a 441$
6. $\log_a \frac{49}{27}$
7. $\log_a (7a^2)$
8. $\log_a \sqrt[4]{81}$
9. $(\log_a 3)(\log_a 7)$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقية موجبة:

10. $\log_a x^7$
11. $\log_a \left(\frac{ac}{b}\right)$
12. $\log_a (\sqrt{x})$
13. $\log_a \left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right)$
14. $\log_a \frac{1}{x^3 y^4}$
15. $\log_a \sqrt[7]{128x^7}$
16. $\log_a \frac{(x^{-1} y^2)^4}{(x^5 y^{-2})^3}$
17. $\log_a \sqrt{\frac{x^2 y^3}{z^3}}$
18. $\log_a (x-y+z)^9, y-x<z$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقية موجبة:

19. $\log_a x - \log_a y$
20. $\log_b (b-1) + 2\log_b b, b>1$
21. $\log_a \sqrt{x} - \log_a \frac{1}{\sqrt{x}}$
22. $\log_a (x^2-25) - \log_a (x+5), x>5$
23. $3\log_b 1 - \log_b b$
24. $8\log_b x + 4\log_b y - \frac{1}{2}\log_b z$

25. إيــرادات: يُمثِّل الاقتران: $T(a) = 10 + 20\log_6 (a+1)$ مبيعات شــركة (بآلاف الدنانيــر) من مُنتَج جديد، حيث a المبلغ (بآلاف الدنانير) الذي تُنفِقه الشــركة على إعلانات المُنتَج، و $a \geq 0$. وتعنــي القيمة: $T(1) \approx 17.7$ أنَّ إنفاق JD 1000 على الإعلانات يُحقِّق إيرادات قيمتها JD 17700 من بيع المُنتَج. أجد قيمة إيرادات الشــركة بعد إنفاقها مبلغ 11 ألف دينار على الإعلانات، علمًا بأنَّ $\log_6 2 \approx 0.3869$.

1	$\log_a \frac{3}{7} = \log_a 3 - \log_a 7 \approx 0.528 - 0.936 \approx -0.408$
2	$\log_a 21 = \log_a 3 \times 7 = \log_a 3 + \log_a 7 \approx 0.528 + 0.936 \approx 1.464$
3	$\frac{\log_a 3}{\log_a 7} \approx \frac{0.528}{0.936} \approx 0.56$
4	$\log_a \frac{1}{7} = \log_a 1 - \log_a 7 \approx 0 - 0.936 \approx -0.936$
5	$\log_a 441 = \log_a 21^2 = 2\log_a 21 = 2\log_a (3 \times 7)$ $= 2(\log_a 3 + \log_a 7) \approx 2(0.528 + 0.936) \approx 2 \times 1.464 \approx 2.928$

6	$\log_a \frac{49}{27} = \log_a 49 - \log_a 27 = \log_a 7^2 - \log_a 3^3 = 2\log_a 7 - 3\log_a 3$ $\approx 2(0.936) - 3(0.528) \approx 1.872 - 1.584 \approx 0.288$
7	$\log_a (7a^2) = \log_a 7 + \log_a a^2 = \log_a 7 + 2\log_a a \approx 0.936 + 2 \approx 2.936$
8	$\log_a \sqrt[4]{81} = \log_a \sqrt[4]{3^4} = \log_a 3 \approx 0.528$
9	$(\log_a 3)(\log_a 7) \approx 0.528 \times 0.936 \approx 0.494$

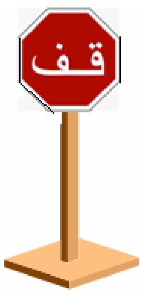
10	$\log_a x^7 = 7\log_a x$
11	$\log_a \left(\frac{ac}{b}\right) = \log_a ac - \log_a b = \log_a a + \log_a c - \log_a b = 1 + \log_a c - \log_a b$
12	$\log_a (\sqrt{x}) = \log_a x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a x$

13	$\log_a \left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right) = \log_a \sqrt{xy} - \log_a z = \log_a (xy)^{\frac{1}{2}} - \log_a z$ $= \log_a x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - \log_a z = \log_a x^{\frac{1}{2}} + \log_a y^{\frac{1}{2}} - \log_a z$ $= \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - \log_a z$
14	$\log_a \frac{1}{x^3 y^4} = \log_a 1 - \log_a x^3 y^4 = \log_a 1 - (\log_a x^3 + \log_a y^4)$ $= 0 - (3\log_a x + 4\log_a y) = -3\log_a x - 4\log_a y$
15	$\log_a \sqrt[7]{128x^7} = \log_a \sqrt[7]{128} \times \sqrt[7]{x^7} = \log_a 2x = \log_a 2 + \log_a x$

16	$\log_a \frac{(x^{-1}y^2)^4}{(x^5y^{-2})^3} = \log_a \frac{x^{-4}y^8}{x^{15}y^{-6}} = \log_a x^{-19}y^{14}$ $= \log_a x^{-19} + \log_a y^{14} = -19\log_a x + 14\log_a y$
17	$\log_a \sqrt{\frac{x^2y^3}{z^3}} = \log_a \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{y^3}}{\sqrt{z^3}} = \log_a \frac{xy^{\frac{3}{2}}}{z^{\frac{3}{2}}} = \log_a xy^{\frac{3}{2}} - \log_a z^{\frac{3}{2}}$ $= \log_a x + \log_a y^{\frac{3}{2}} - \log_a z^{\frac{3}{2}} = \log_a x + \frac{3}{2}\log_a y - \frac{3}{2}\log_a z$
18	$\log_a (x-y+z)^9 = 9\log_a (x-y+z)$

19	$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
20	$\log_b (b-1) + 2\log_b b = \log_b (b-1) + \log_b b^2$ $= \log_b b^2(b-1)$
21	$\log_a \sqrt{x} - \log_a \frac{1}{\sqrt{x}} = \log_a \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \log x$
22	$\log_a (x^2-25) - \log_a (x+5) = \log_a \frac{(x^2-25)}{(x+5)} = \log_a \frac{(x+5)(x-5)}{(x+5)} = \log_a (x-5)$
23	$3\log_b 1 - \log_b b = 3(0) - 1 = -1$
24	$8\log_b x + 4\log_b y - \frac{1}{2}\log_b z = \log_b x^8 + \log_b y^4 - \log_b z^{\frac{1}{2}}$ $= \log_b x^8y^4 - \log_b z^{\frac{1}{2}} = \log_b \frac{x^8y^4}{z^{\frac{1}{2}}} = \log_b \frac{x^8y^4}{\sqrt{z}}$

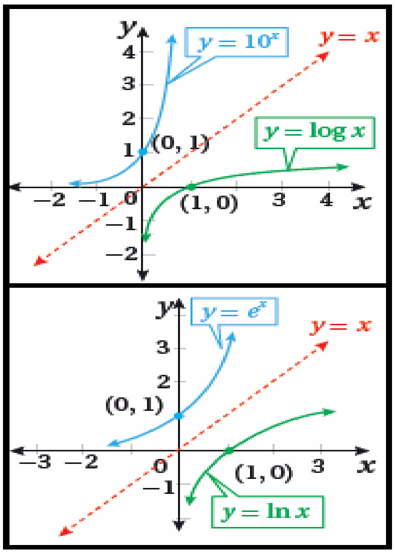
25	$T(a) = 10 + 20\log_6 (a+1)$ $f(11) = 10 + 20\log_6 (11+1) = 10 + 20\log_6 (12) = 10 + 20\log_6 (6\times 2)$ $= 10 + 20(\log_6 6 + \log_6 2) \approx 10 + 20(1 + 0.3869)$ $\approx 10 + 20(1.3869) \approx 10 + 27.738 \approx 37.738$



مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

الدرس 5
المعادلات الأسِّية
Exponential Equations



1) اللوغاريتم الاعتيادي، واللوغاريتم الطبيعي:

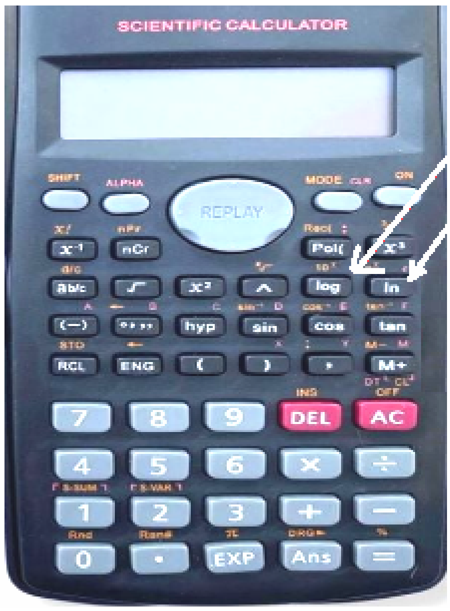
يُطلَق على اللوغاريتم للأساس 10 أو (Log_{10}) اسم اللوغاريتم الاعتيادي ويُكتَب عادةً من دون أساس. وهو الاقترانَ العكسي للاقتران الأسِّي: $y = 10^x$

$$10^y = x \text{ إذا وفقط إذا } y = \log_{10} x \ , x > 0$$

أمّا اللوغاريتم للأساس e أو (Log_e) فيُسمّى اللوغاريتم الطبيعي (natural logarithm)، ورمزه (Ln). وهو الاقترانَ العكسي للاقتران الأسِّي الطبيعي $y = e^x$

$$e^y = x \text{ إذا وفقط إذا } y = \ln x \ , x > 0$$

تنطبق خصائص اللوغاريتمات على اللوغاريتمِ الاعتيادي واللوغاريتم الطبيعي، ويُمكِن الاستفادة منها في إيجاد قيمة كلٍّ منهما حيث تحوي الآلة الحاسبة زِرًّا خاصًّا باللوغاريتم الاعتيادي(log) ، وزِرًّا خاصًّا باللوغاريتم الطبيعي هو(ln) ويُمكِن من خلالهما إيجاد قيمة اللوغاريتم لأيِّ عدد حقيقي موجب.



1. $\log 2.7$ ⟶ [log] 2.7 [=] 0.4313637642
2. $\log(1.3 \times 10^5)$ ⟶ [log] (1.3 × 10 [$x^{\blacksquare}$] 5) [=] 5.113943352
3. $\ln 17$ ⟶ [ln] 17 [=] 2.833213344

ويمكن حل فرع (2) باستعمال قوانين اللوغاريتمات أيضا

$$Log(1.3 \times 10^5) = Log(1.3) + Log(10^5)$$
$$= Log(1.3) + 5Log(10) = 0.1139 + 5(1) = 5.1139$$

أتحقَّق من فهمي 43

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

a) $\log 13$ b) $\log(3.1 \times 10^4)$ c) $\ln 0.25$

a	$\log 13 \approx 1.1$
b	$\log(3.1 \times 10^4) \approx 4.5$
c	$\ln 0.25 \approx -1.4$

2) تغيير الأساس :

معظم الآلات الحاسبة تحتوي على زرّين للوغاريتمات، هما : Log و Ln .
ولإيجاد قيمة لوغاريتم أساسه مختلف ($Log_4 7$) ، نستعمل القاعدة الآتية :

باختصار :
نختار أي عدد موجب (غير الواحد)
ونجعله أساساً للعددين المعطيين ،
الأساس القديم في المقام والآخر في البسط

$$\boxed{Log_b a = \frac{Log(a)}{Log(b)} = \frac{Ln(a)}{Ln(b)} = \frac{Log_c(a)}{Log_c(b)} \qquad a, b, c \in R^+,\ a \neq 1,\ b \neq 1,\ c \neq 1}$$

$$Log_4(7) = \frac{Log_5(7)}{Log_5(4)} \quad , \quad Log_3(8) = \frac{Log_6(8)}{Log_6(3)} \quad , \quad Log_9(1.2) = \frac{Ln(1.2)}{Ln(9)} = \frac{Log(1.2)}{Log(9)}$$

$$1) Log_4 8 = \frac{Log\,8}{Log\,3} = \frac{0.903}{0.477} = 1.89$$

$$\boxed{\text{OR}} \quad = \frac{Ln\,8}{Ln\,3} = \frac{2.079}{1.098} = 1.89$$

$$2) Log_2 1.3 = \frac{Log\,1.3}{Log\,2} = \frac{0.1139}{0.301} = 0.3785$$

$$\boxed{\text{OR}} \quad Log_2 1.3 = Log_2 \frac{13}{10} = Log_2 13 - Log_2 10 = \frac{Ln 13}{Ln 2} - \frac{Log\,10}{Log\,2}$$

$$= \frac{2.5649}{0.6931} - \frac{1}{0.301} = 3.7006 - 3.322 = 0.3783$$

$$3) Log_{\frac{2}{5}} 4 = \frac{Ln\,4}{Ln\,0.4} = \frac{1.39}{-0.92} = -1.5$$

$$\boxed{\text{OR}} \quad Log_{\frac{2}{5}} 4 = \frac{Ln\,4}{Ln\,\frac{2}{5}} = \frac{Ln\,4}{Ln\,2 - Ln\,5} = \frac{1.39}{0.69 - 1.61} = \frac{1.39}{-0.92} = -1.5$$

$$4) Log_4 5 = 1.16 \quad , \quad Log_4 6 = 1.29 \quad \Rightarrow Log_5 6 = ?$$

$$Log_5 6 = \frac{Log_4 6}{Log_4 5} = \frac{1.29}{1.16} = 1.11$$

$$5)\ Log_5 8 = 1.29 \Rightarrow (Log_3 8 \times Log_5 3) = ?$$

$$Log_3 8 \times Log_5 3 = \frac{Log_5 8}{Log_5 3} \times Log_5 3 = Log_5 8 = 1.29$$

أتحقق من فهمي 44 أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنْ لزم):

a) $\log_3 51$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 13$

a	$\log_3 51 = \dfrac{\log 51}{\log 3} \approx 3.58$	b	$\log_{\frac{1}{2}} 13 = \dfrac{\log 13}{\log \frac{1}{2}} \approx -3.70$

أتدرّب وأحلُّ المسائل

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1 $\log 19$ 2 $\log(2.5 \times 10^{-3})$ 3 $\ln 3.1$

4 $\log_2 10$ 5 $\log_3 e^2$ 6 $\ln 5$

1	$\log 19 \approx 1.3$	4	$\log_2 10 = \dfrac{\log 10}{\log 2} \approx 3.3$
2	$\log(2.5 \times 10^{-3}) \approx -2.6$	5	$\log_3 e^2 = \dfrac{\ln e^2}{\ln 3} = \dfrac{2}{\ln 3} \approx 1.8$
3	$\ln 3.1 \approx 1.1$	6	$\ln 5 \approx 1.6$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنْ لزم):

7 $\log_3 33$ 8 $\log_{\frac{1}{3}} 17$ 9 $\log_6 5$

10 $\log_7 \frac{1}{7}$ 11 $\log 1000$ 12 $\log_3 15$

7	$\log_3 33 = \dfrac{\log 33}{\log 3} \approx 3.18$	10	$\log_7 \dfrac{1}{7} = \log_7 1 - \log_7 7 = 0 - 1 = -1$
8	$\log_{\frac{1}{3}} 17 = \dfrac{\log 17}{\log \frac{1}{3}} \approx -2.58$	11	$\log 1000 = 3$
9	$\log_6 5 = \dfrac{\log 5}{\log 6} \approx 0.90$	12	$\log_3 15 = \dfrac{\log 15}{\log 3} \approx 2.46$

3) المعادلات الأُسّية : المعادلة الأُسّية هي معادلة تتضمَّن قوى أُسسها مُتغيِّرات،
ولحَلِّها نكتب طرفي المعادلة في صورة قوَّتين للأساس نفسه، ثم نقارن بين أُسَّي الطرفين

$$\boxed{a > 0 \;,\; a \neq 1 \;:\; a^x = a^y \Rightarrow x = y}$$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

1) $4^x = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3 \Rightarrow x = 3$

2) $2^{x+5} = 8 \Rightarrow 2^{x+5} = 2^3 \Rightarrow x + 5 = 3 \Rightarrow x = -2$

3) $3^{2x-1} = 81 \Rightarrow 3^{2x-1} = 3^4 \Rightarrow 2x - 1 = 4 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

4) $8^{2x+1} = 4^{x-3} \Rightarrow ((2)^3)^{2x+1} = ((2)^2)^{x-3} \Rightarrow 2^{6x+3} = 2^{2x-6}$

$\Rightarrow 6x + 3 = 2x - 6 \Rightarrow 4x = -9 \Rightarrow x = \dfrac{-9}{4}$

5) $7^{x^2-9} = 1 \Rightarrow 7^{x^2-9} = 7^0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

6) $5^{3x+2} = (25)^{x-1}$ … . … $\boxed{x = -4}$

7) $8^{x-1} = (\dfrac{1}{2})^{3x}$ … . … $\boxed{x = \dfrac{1}{2}}$

8) $2^{x^2} \times 2^x = 4$ … . … $\boxed{x = 1 , -2}$

*** في بعض المعادلات الأُسِّية لا يُمكِن كتابة طرفي المعادلة في صورة قوّتين للأساس نفسه، مثلا : $2^x = 25$

عندها نستعمل خاصية المساواة اللوغاريتمية (حيث أنَّ الاقتران اللوغاريتمي هو اقتران واحد لواحد)

ولذلك عند حَلِّ هذا النوع من المعادلات نأخذ اللوغاريتم نفسه لطرفي المعادلة، ثم نستعمل قانون القوّة للوغاريتمات

$$x, y, b \in R^+,\ b \neq 1 \Rightarrow \boxed{x = y \Leftrightarrow Log_b\, x = Log_b\, y}$$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

1) $2^x = 6 \Rightarrow Log\, 2^x = Log\, 6 \Rightarrow x\ Log\, 2 = Log\, 6$

$$\Rightarrow x = \frac{Log\, 6}{Log\, 2} = \frac{0.778}{0.301} = 2.58$$

$\boxed{OR}$: $Ln\, 2^x = Ln\, 6 \Rightarrow x = \frac{Ln\, 6}{Ln\, 2} = \frac{1.79}{0.69} = 2.58$

---

2) $5 \times 3^{x+1} = 12 \Rightarrow 3^{x+1} = \frac{12}{5} = 2.4 \Rightarrow Log\, 3^{x+1} = Log\, 2.4$

$$\Rightarrow (x+1)\ Log\, 3 = Log\, 2.4$$

$$\Rightarrow x + 1 = \frac{Log\, 2.4}{Log\, 3} = \frac{0.38}{0.48} = 0.79 \Rightarrow x = -0.208$$

---

3) $2^{x+1} = 5^{2x} \Rightarrow Ln\, 2^{x+1} = Ln\, 5^{2x} \Rightarrow (x+1) Ln\, 2 = 2x Ln\, 5$

$$\Rightarrow xLn\, 2 + Ln\, 2 = 2xLn\, 5 \Rightarrow xLn\, 2 - 2xLn\, 5 = -Ln\, 2$$

$$\Rightarrow x(Ln\, 2 - 2Ln\, 5) = -Ln\, 2 \Rightarrow x = \frac{-Ln\, 2}{Ln\, 2 - Ln\, 25} = 0.27$$

---

4) $e^{x+1} = 4 \Rightarrow Lne^{x+1} = Ln\, 4 \Rightarrow (x+1) Lne = 1.39$

$$\Rightarrow (x+1)(1) = 1.39 \Rightarrow x = 0.39$$

---

5) $100\, e^{0.08t} = 2500 \Rightarrow e^{0.08t} = 25 \Rightarrow \ln e^{0.08t} = \ln 25 \Rightarrow 0.08t = \ln 25$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 25}{0.08} \Rightarrow t \approx 40.2359$$

---

6) $4^{x+3} = 3^{-x} \Rightarrow \log 4^{x+3} = \log 3^{-x} \Rightarrow (x+3) \log 4 = -x \log 3$

$$\Rightarrow x \log 4 + 3 \log 4 = -x \log 3 \Rightarrow x \log 4 + x \log 3 = -3 \log 4$$

$$\Rightarrow x(\log 4 + \log 3) = -3 \log 4 \Rightarrow x = \frac{-3 \log 4}{\log 4 + \log 3} \approx -1.6737$$

أتحقَّق من فهمي 48 أحُلّ المعادلات الأُسِّية الآتية، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

a) $7^x = 9$ b) $2e^{5x} = 64$ c) $7^{2x+1} = 2^{x-4}$

a	$7^x = 9$ $\log 7^x = \log 9$ $x \log 7 = \log 9$ $x = \dfrac{\log 9}{\log 7} \approx 1.1292$	b	$2e^{5x} = 64$ $e^{5x} = 32$ $\ln e^{5x} = \ln 32$ $5x = \ln 32$ $x = \dfrac{1}{5}\ln 32 \approx 0.6931$	c	$7^{2x+1} = 2^{x-4}$ $\log 7^{2x+1} = \log 2^{x-4}$ $(2x+1)\log 7 = (x-4)\log 2$ $2x\log 7 + \log 7 = x\log 2 - 4\log 2$ $2x\log 7 - x\log 2 = -\log 7 - 4\log 2$ $x(2\log 7 - \log 2) = -\log 7 - 4\log 2$ $x = \dfrac{-\log 7 - 4\log 2}{2\log 7 - \log 2} \approx -1.4751$

تمارين

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

1) $\boxed{8^x = 7}$ 2) $\boxed{e^{2x-1} = 8}$

3) $\boxed{6^{2x-3} = 4^{x+2}}$ 4) $\boxed{5^{x-2} = 1}$

5) $\boxed{4^{x+2} = \sqrt{5}}$ 6) $\boxed{-4e^{2x} = -7}$

*** أحياناً نضطر إلى تحويل المعادلة الأسية إلى معادلة غير خطية بفرض u :

1) $4^x - 2^x = 20 \Rightarrow 2^{2x} - 2^x - 20 = 0 ::: u = 2^x$

$\Rightarrow u^2 - u - 20 = 0 \Rightarrow (u-5)(u+4) = 0$

$\Rightarrow u = 5$, $u = -4 \Rightarrow \boxed{2^x = 5}$, $\boxed{2^x = -4 \text{ (تهمل)}}$

$\Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow Ln\,2^x = Ln\,5 \Rightarrow x = \dfrac{Ln\,5}{Ln\,2} = \dfrac{1.6}{0.69} \approx 2.3$

2) $25^x + 4\times 5^x - 12 = 0 \Rightarrow 5^{2x} + 4\times 5^x - 12 = 0 ::: u = 5^x$

$\Rightarrow u^2 + 4u - 12 = 0 \Rightarrow (u-2)(u+6) = 0$

$\Rightarrow u = 2$, $u = -6 \Rightarrow \boxed{5^x = 2}$, $\boxed{5^x = -6 \text{ (تهمل)}}$

$\Rightarrow 5^x = 2 \Rightarrow Log_5 5^x = Log_5 2$

$\Rightarrow xLog_5 5 = Log_5 2 \Rightarrow x(1) = \dfrac{Ln\,2}{Ln\,5} = \dfrac{0.69}{1.6} \approx 0.43$

3) $6^{2x} - 11\times 6^x + 30 = 0 \Rightarrow (6^x)^2 - 11(6^x) + 30 = 0 ::: u = 6^x$

$\Rightarrow u^2 - 11u + 30 = 0 \Rightarrow (u-5)(u-6) = 0$

$\Rightarrow u = 5$, $u = 6 \Rightarrow \boxed{6^x = 5}$, $\boxed{6^x = 6}$

$\Rightarrow 6^x = 5 \Rightarrow Ln\,6^x = 5$..................... $6^x = 6$

$\Rightarrow x = \dfrac{Ln\,5}{Ln\,6} = 0.89$............. $x = 1$

4) $9^x - 10\times 3^x = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 10(3^x) = 0 ::: u = 3^x$

$\Rightarrow u^2 - 10u = 0 \Rightarrow u(u-10) = 0$

$\Rightarrow u = 10$, $u = 0 \Rightarrow \boxed{3^x = 10}$, $\boxed{3^x = 0 \text{ (تهمل)}}$

$\Rightarrow 3^x = 10 \Rightarrow Log\,3^x = 10$

$\Rightarrow x = \dfrac{Log\,10}{Log\,3} = \dfrac{1}{0.48} \Rightarrow x = 2.1$

أتحقّق من فهمي 48 أحُلّ المعادلات الأُسّية الآتية، d) $4^x + 2^x - 12 = 0$

D $4^x + 2^x - 12 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 12 = 0 \Rightarrow u^2 + u - 12 = 0$

$(u+4)(u-3) = 0 \Rightarrow u = -4$ أو $u = 3 \Rightarrow 2^x = -4$ أو $2^x = 3$

المعادلة $2^x = -4$ ليس لها حل لأن $2^x > 0$ لكل قيم المتغير x

$2^x = 3 \quad \rightarrow x = \log_2 3 = \dfrac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5850$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

تمارين

1) $9^x - 28 \times 3^x + 27 = 0$......... $\boxed{x = 0 \quad , \quad x = 3}$

2) $5^x + 25 \times 5^{-x} = 10$......... $\boxed{x = 1}$

3) $4^x - 9 \times 2^x = 36$......... $\boxed{x = 3.6}$

4) $8^x - 5 \times 2^x = 0$......... $\boxed{x = 1.16}$

أَحُلُّ المعادلات الأُسِّية الآتية، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

13) $6^x = 121$ 14) $-3e^{4x} = -27$ 15) $5^{7x-2} = 3^{2x}$

16) $25^x + 5^x - 42 = 0$ 17) $2(9)^x = 32$ 18) $27^{2x+3} = 2^{x-5}$

13
$6^x = 121$
$\log 6^x = \log 121$
$x \log 6 = \log 121$
$\rightarrow x = \dfrac{\log 121}{\log 6} \approx 2.6766$

14
$-3e^{4x} = -27$
$e^{4x} = 9$
$\ln e^{4x} = \ln 9$
$4x = \ln 9$
$x = \dfrac{1}{4}\ln 9 \approx 0.5493$

15
$\log 5^{7x-2} = \log 3^{2x}$
$(7x-2)\log 5 = (2x)\log 3$
$7x\log 5 - 2\log 5 = 2x\log 3$
$7x\log 5 - 2x\log 3 = 2\log 5$
$x(7\log 5 - 2\log 3) = 2\log 5$
$x = \dfrac{2\log 5}{7\log 5 - 2\log 3} \approx 0.3549$

16
$(5^x)^2 + 5^x - 42 = 0 \Rightarrow u^2 + u - 42 = 0 \Rightarrow (u+7)(u-6) = 0$
$u = -7$ أو $u = 6 \Rightarrow 5^x = -7$ أو $5^x = 6$
المعادلة $5^x = -7$ ليس لها حل لأن $5^x > 0$ لكل قيم المتغير x
$5^x = 6 \rightarrow x\log 5 = \log 6 \rightarrow x = \dfrac{\log 6}{\log 5} \approx 1.1133$

17
$2(9)^x = 32$ $9^x = 16 \Rightarrow \log 9^x = \log 16 \Rightarrow x\log 9 = \log 16$
$\rightarrow x = \dfrac{\log 16}{\log 9} \approx 1.2619$

18
$\log 27^{2x+3} = \log 2^{x-5}$ $(2x+3)\log 27 = (x-5)\log 2$
$2x\log 27 + 3\log 27 = x\log 2 - 5\log 2 \Rightarrow 2x\log 27 - x\log 2 = -3\log 27 - 5\log 2$
$x(2\log 27 - \log 2) = -3\log 27 - 5\log 2 \Rightarrow x = \dfrac{-3\log 27 - 5\log 2}{2\log 27 - \log 2} \approx -2.2638$

مهارات التفكير العليا

22) تبرير: أجد قيمة كلٍّ من k، وh إذا وقعت النقطة $(-2, k)$، والنقطة $(h, 100)$ على منحنى الاقتران: $f(x) = e^{0.5x+3}$، مُبرِّرًا إجابتي.

23) تحدٍّ: أَحُلُّ المعادلة: $3^x + \dfrac{4}{3^x} = 5$.

22
$f(x) = e^{0.5x+3} \Rightarrow f(-2) = e^{0.5(-2)+3} \Rightarrow k = e^2 \approx 7.39$
بما أن النقطة $(h, 100)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثياها يحققان معادلة المنحنى
$f(h) = e^{0.5h+3} \Rightarrow 100 = e^{0.5h+3} \Rightarrow 0.5h + 3 = \ln 100$
$\Rightarrow 0.5h = \ln 100 - 3 \Rightarrow h = \dfrac{1}{0.5}\ln 100 - \dfrac{3}{0.5}$
$\Rightarrow h = 2\ln 100 - 6 \approx 3.2$

23
$3^x\left(3^x + \dfrac{4}{3^x}\right) = 3^x \times 5 \Rightarrow 3^{2x} + 4 = 5(3^x) \Rightarrow 3^{2x} - 5(3^x) + 4 = 0$
$\Rightarrow (3^x)^2 - 5(3^x) + 4 = 0 \Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0 \Rightarrow (u-4)(u-1) = 0$
$\Rightarrow u = 4$ or $u = 1 \Rightarrow 3^x = 4$ or $3^x = 1$
$\Rightarrow 3^x = 4 \rightarrow x = \log_3 4 \approx 1.26 \Rightarrow 3^x = 1 \rightarrow x = \log_3 1 = 0$

4) تطبيقات حياتية وعلمية. :

مثال1) قُدِّر عدد سكّان العالَم بنحو 6.5 مليار نسمة عام 2006م. ويُمثّل الاقتران: $P(t) = 6.5(1.014)^t$ عدد سكّان العالَم (بالمليار نسمة) بعد t عامًا منذ عام 2006م.

بعد كم سنةً من عام 2006م سيبلغ عدد سكّان العالَم 13 مليار نسمة؟ 9 مليارات نسمة؟

$$P(t) = 6.5\,(1.014)^t$$

$$13 = 6.5\,(1.014)^t \Rightarrow 2 = (1.014)^t \Rightarrow \ln 2 = \ln(1.014)^t$$

$$\Rightarrow \ln 2 = t \ln 1.014 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 1.014} \approx 50$$

أتحقّق من فهمي 48 اعتمادًا على المعطيات الواردة في المثال السابق،

بعد كم سنةً من عام 2006م سيبلغ عدد سكّان العالَم 9 مليارات نسمة؟

$$9 = 6.5(1.014)^t \Rightarrow \frac{9}{6.5} = (1.014)^t \Rightarrow \ln\frac{9}{6.5} = \ln(1.014)^t$$

$$\Rightarrow \ln 9 - \ln 6.5 = t \ln 1.014 \Rightarrow t \approx 23$$

مثال2) وجد العلماء أنّه يُمكن معرفة عمر عيّنة من كائن ميّت؛ وفقًا لنسبة الكربون 14 المتبقّية فيها عن طريق الاقتران: $A(p) = \frac{\ln p}{-0.000121}$، حيث $A(p)$ عمر العيّنة بالسنوات، P النسبة المئوية (بالصورة العشرية) المتبقّية من الكربون 14 في العيّنة. أجد النسبة المئوية من الكربون 14 المتبقّية في جمجمة إنسان عمرها 2715 عامًا تقريبًا.

$$A(p) = \frac{\ln p}{-0.000121} \Rightarrow 2715 = \frac{\ln p}{-0.000121} \Rightarrow -0.328515 = \ln p$$

$$\Rightarrow p = e^{-0.328515} \Rightarrow p \approx 0.72 \Rightarrow 72\%$$

مثال3) تُمثّل المعادلة $T = 27 + 219e^{-0.032t}$ درجة حرارة معدن (بالسلسيوس °C) بعد t دقيقة من بدء تبريده.

جد الزمن اللازم لتبريد المعدن لدرجة حرارة 100 °C

$$T = 27 + 219e^{-0.032t}$$

$$100 = 27 + 219e^{-0.032t} \Rightarrow 73 = 219e^{-0.032t}$$

$$\frac{1}{3} = e^{-0.032t} \Rightarrow \ln\frac{1}{3} = -0.032t \Rightarrow t \approx 34.332$$

مثال4) تُمثّل المعادلة $T = 18 + 12\,e^{0.002t}$ درجة حرارة حساس جهاز إلكتروني (بالسلسيوس °C) بعد t ساعة من بدء تشغيل الجهاز.

14 جد حرارة الحساس بعد 5 ساعات من بدء التشغيل. 15 بعد كم ساعة من بدء تشغيل الجهاز تصل حرارة الحساس إلى 50°C

$$T = 18 + 12e^{0.002t} \Rightarrow T = 18 + 12e^{0.002\times 5} \Rightarrow T \approx 30.121$$

$$T = 18 + 12e^{0.002t} \Rightarrow 50 = 18 + 12e^{0.002t} \Rightarrow 32 = 12e^{0.002t} \Rightarrow e^{0.002t} \approx 2.7$$

$$\Rightarrow e^{0.002t} = e \Rightarrow t = \frac{1}{0.002} = 500$$

أودعت سميرة مبلغ P في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 5 %:

19 بعد كم سنةً تصبح جُمْلة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي؟

20 بعد كم سنةً تصبح جُمْلة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي؟

إرشاد: صيغة جُمْلة المبلغ للربح المُركَّب المستمر هي: $A = Pe^{rt}$.

19 $2P = Pe^{0.05t} \Rightarrow 2 = e^{0.05t}$

$\Rightarrow 0.05t = \ln 2$

$\Rightarrow t = \frac{1}{0.05}\ln 2 = 20\ln 2 \approx 14$

20 $3P = Pe^{0.05t} \Rightarrow 3 = e^{0.05t}$

$\Rightarrow 0.05t = \ln 3 \Rightarrow t = 20\ln 3 \approx 22$

21 كوالا: تناقصت أعداد حيوان الكوالا في إحدى الغابات وَفق الاقتران: $N = 873e^{-0.078t}$،

حيث N العدد المُتبقّي من هذا الحيوان في الغابة بعد t سنة.

بعد كم سنةً يصبح في الغابة 97 حيوانًا من الكوالا؟

21 $97 = 873e^{-0.078t} \Rightarrow \frac{97}{873} = e^{-0.078t} \Rightarrow \frac{1}{9} = e^{-0.078t} \Rightarrow -0.078t = \ln\frac{1}{9}$

$\Rightarrow -0.078t = \ln 1 - \ln 9 \Rightarrow -0.078t = 0 - \ln 9 \Rightarrow t = \frac{\ln 9}{0.078} \approx 28$

أسئلة الوزارة 2023

11) إذا كان $\log 12 \approx \frac{11}{10}$ ، $\log 5 \approx \frac{7}{10}$ ، فإنّ قيمة $\log_5 12$ تقريبًا هي:

a) $\frac{11}{7}$ b) $\frac{7}{11}$ c) $\frac{4}{10}$ d) $\frac{18}{10}$

12) حل المعادلة الأسية $4e^{-2x} = 24$ هو:

a) $-\ln 3$ b) $\ln 3$ c) $-\frac{\ln 6}{2}$ d) $\frac{\ln 6}{2}$

13) حل المعادلة الأسية $2^x = 3$ هو:

a) $\frac{\log 3}{\log 2}$ b) $\frac{\log 2}{\log 3}$ c) $\log\frac{3}{2}$ d) $\log\frac{2}{3}$

14) يُمثّل الاقتران $N(t) = 50 + 10e^{0.2t}$ عدد ذباب الفاكهة بعد (t) ساعة من بدء دراسة عليها.

العدد الأصلي للذباب عند بدء الدراسة هو:

a) 70 b) 10 c) 50 d) 60

a) يُمثّل الاقتران $f(x) = 300(2)^{\frac{x}{3}}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة في تجربة مخبرية.

بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 1200 خلية؟ (9 علامات)

كتاب التمارين

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $\log 17$
2) $\log(1.5\times 10^{-4})$
3) $\ln 2.3$
4) $\log_2 15$
5) $\log_5 e^7$
6) $\ln 7$

1	$\log 17 \approx 1.2$	4	$\log_2 15 = \frac{\log 15}{\log 2} \approx 3.9$
2	$\log(1.5\times 10^{-4}) \approx -3.8$	5	$\log_5 e^7 = 7\times\frac{\ln e}{\ln 5} \approx 4.3$
3	$\ln 2.3 \approx 0.8$	6	$\ln 7 \approx 1.95$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنْ لزم):

7) $\log_5 27$
8) $\log_{\frac{1}{4}} 19$
9) $\log_7 8$
10) $\log_8 \frac{1}{8}$
11) $\log 10000$
12) $\log_3 18$

7	$\log_5 27 = \frac{\log 27}{\log 5} \approx 2.05$	10	$\log_8 \frac{1}{8} = -1$
8	$\log_{\frac{1}{4}} 19 = \frac{\log 19}{\log \frac{1}{4}} \approx -2.12$	11	$\log 10000 = 4$
9	$\log_7 8 = \frac{\log 8}{\log 7} \approx 1.07$	12	$\log_3 18 = \frac{\log 18}{\log 3} \approx 2.63$

أحُلّ المعادلات الأُسّية الآتية، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

13) $5^x = 120$
14) $-4e^{4x} = -64$
15) $3^{2x+1} = 7^{5x}$
16) $64^x + 2(8^x) - 3 = 0$
17) $7(4)^x = 49$
18) $21^{x-1} = 3^{7x+1}$

13	$5^x = 120 \Rightarrow \log 5^x = \log 120 \Rightarrow x\log 5 = \log 120 \Rightarrow x = \frac{\log 120}{\log 5} \approx 2.9746$
14	$-4e^{4x} = -64 \Rightarrow e^{4x} = 16 \Rightarrow \ln e^{4x} = \ln 16 \Rightarrow 4x = \ln 16 \Rightarrow x = \frac{\ln 16}{4} \approx 0.9631$
15	$3^{2x+1} = 7^{5x} \Rightarrow \log 3^{2x+1} = \log 7^{5x} \Rightarrow (2x+1)\log 3 = (5x)\log 7$ $2x\log 3 + \log 3 = 5x\log 7 \Rightarrow 2x\log 3 - 5x\log 7 = \log 3$ $x(2\log 3 - 5\log 7) = \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3}{2\log 3 - 5\log 7} \approx -0.1459$

16	$64^x + 2(8)^x - 3 = 0 \Rightarrow (8^x)^2 + 2(8)^x - 3 = 0 \Rightarrow u^2 + 2u - 3 = 0$
	$(u+3)(u-1) = 0 \Rightarrow u = -3$ أو $u = 1 \Rightarrow 8^x = -3$ أو $8^x = 1$
	$8^x = 1 \rightarrow x = \log_8 1 = 0$ المعادلة $8^x = -3$ ليس لها حل لأن $8^x > 0$ لجميع قيم x.
17	$7(4)^x = 49 \Rightarrow (4)^x = 7 \Rightarrow \log(4)^x = \log 7 \Rightarrow x\log 4 = \log 7 \Rightarrow x = \frac{\log 7}{\log 4} \approx 1.4037$
18	$21^{x-1} = 3^{7x+1} \Rightarrow \log 21^{x-1} = \log 3^{7x+1} \Rightarrow (x-1)\log 21 = (7x+1)\log 3$
	$x\log 21 - \log 21 = 7x\log 3 + \log 3 \Rightarrow x\log 21 - 7x\log 3 = \log 21 + \log 3$
	$x(\log 21 - 7\log 3) = \log 21 + \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 21 + \log 3}{\log 21 - 7\log 3} \approx -0.8918$

19 حرارة: تُمثِّل المعادلة: $T = 27 + 219e^{-0.032t}$ درجة حرارة معدن (بالسليسيوس °C) بعد t دقيقة من بَدْء تبريده. متى تصبح درجة حرارة المعدن 100°C؟

19	$T = 27 + 219e^{-0.032t}$ $\quad 100 = 27 + 219e^{-0.032t}$ $\quad 73 = 219e^{-0.032t}$
	$73 = 219e^{-0.032t}$ $\quad \frac{73}{219} = e^{-0.032t}$ $\quad \ln\frac{73}{219} = \ln e^{-0.032t}$ $\quad \ln\frac{73}{219} = -0.032t$
	$t = -\frac{\ln\frac{73}{219}}{0.032} \approx 34.3$ إذن، تصبح درجة حرارة المعدن 100 °C بعد حوالي 34.3 min من بدء تبريده.

أرانب: توصَّلت دراسة إلى أنَّ عدد الأرانب في محمية طبيعية يتزايد وَفق الاقتران: $N(t) = \frac{2000}{1+3e^{-0.05t}}$، حيث N عدد الأرانب في المحمية بعد t سنة:

20 أجد عدد الأرانب في المحمية عند بَدْء الدراسة.

21 بعد كم سنةً يصبح عدد الأرانب في المحمية 700 أرنب؟

20	$N(t) = \frac{2000}{1+3e^{-0.05t}} \Rightarrow N(0) = \frac{2000}{1+3e^{-0.05(0)}} = \frac{2000}{4} = 500$

21	$700 = \frac{2000}{1+3e^{-0.05t}} \Rightarrow 1 + 3e^{-0.05t} = \frac{2000}{700} \Rightarrow 3e^{-0.05t} = \frac{20}{7} - 1 = \frac{13}{7}$
	$e^{-0.05t} = \frac{13}{21} \Rightarrow \ln e^{-0.05t} = \ln\frac{13}{21} \Rightarrow -0.05t = \ln\frac{13}{21} \Rightarrow t = -\frac{\ln\frac{13}{21}}{0.05} \approx 9.6$

أسماك: يُمثِّل الاقتران: $P(t) = 200e^t$ عدد أسماك السلمون P في نهر بعد t سنة من بَدْء دراسة مُعيَّنة عليها:

22 أجد عدد أسماك السلمون في النهر عند بَدْء الدراسة.

23 بعد كم سنةً يصبح عدد أسماك السلمون في النهر 4000 سمكة؟

22	$P(t) = 200e^t \quad P(0) = 200e^0 = 200$
23	$4000 = 200e^t \Rightarrow 20 = e^t \Rightarrow \ln 20 = \ln e^t \Rightarrow t = \ln 20 \approx 3$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ مما يأتي:

1 خط التقارب الأفقي للاقتران: $f(x) = 4(3^x)$ هو:

a) $y = 4$ b) $y = 3$

c) $y = 1$ d) $y = 0$

2 حَلّ المعادلة: $\ln e^x = 1$ هو:

a) 0 b) $\frac{1}{e}$

c) 1 d) e

3 قيمة $\log(0.1)^2$ هي:

a) -2 b) -1

c) 1 d) 2

4 أحد الآتية يُكافئ المقدار:

$\log_a 27 - \log_a 9 + \log_a 3$:

a) $\log_a 3$ b) $\log_a 6$

c) $\log_a 9$ d) $\log_a 27$

5 أحد الآتية يُكافئ المقدار: $\log_a \frac{ax^5}{y^3}$:

a) $5 \log_a x - 3 \log_a y + 1$

b) $a \log_a x^5 - \log_a y^3$

c) $5a \log_a x - 3 \log_a y$

d) $1 - 5 \log_a x - 3 \log_a y$

6 حَلّ المعادلة: $2^{x+1} = 4^{x-1}$ هو:

a) 2 b) 3

c) 4 d) 8

7 قيمة $\log 10$ هي:

a) $2 \log 5$ b) 1

c) $\log 5 \times \log 2$ d) 0

8 إذا كان: $e^{x^2} = 1$، فإنّ قيمة x هي:

a) 0 b) 1

c) 2 d) 4

9 الاقترانات اللوغاريتمية التي في صورة:

$f(x) = \log_b x$، حيث: b عدد حقيقي،

و $b > 0$, $b \neq 1$، تمرّ جميع منحنياتها بالنقطة:

a) $(1, 1)$ b) $(1, 0)$

c) $(0, 1)$ d) $(0, 0)$

إذا كان: $\log_5 4 = k$، فأكتب قيمة كلٍّ مما يأتي بدلالة k:

10 $\log_5 16$

11 $\log_5 256$

اختبار نهاية الوحدة

أُمثِّل كل اقتران ممّا يأتي بيانيًّا، ثم أُحدِّد مجاله ومداه:

12 $f(x) = 6^x$

13 $g(x) = (0.4)^x$

14 $h(x) = \log_7 x$

15 $p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

أَحُلُّ المعادلات الأُسّية الآتية، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

16 $8^x = 2$

17 $-3e^{4x+1} = -96$

18 $11^{2x+3} = 5^x$

19 $49^x + 7^x - 72 = 0$

20 استثمر سليمان مبلغ 2500 JD في شركة صناعية، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 4.2%، وتضاف شهريًّا. أجد جُملة المبلغ بعد 15 سنة.

21 أودع سعيد مبلغ 800 JD في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 4.5%. أجد جُملة المبلغ بعد 5 سنوات.

22 فيروس: انتشر فيروس في شبكة حواسيب وَفق الاقتران: $v(t) = 30e^{0.1t}$، حيث v عدد أجهزة الحاسوب المصابة، و t الزمن بالدقائق. أجد الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس.

يُمثِّل الاقتران: $N(t) = 100e^{0.045t}$ عدد الخلايا البكتيرية في عيِّنة مخبرية بعد t يومًا:

23 أجد العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العيِّنة.

24 أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة بعد 5 أيام.

25 بعد كم يومًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة 1400 خلية؟

26 بعد كم يومًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيِّنة ضعف العدد الأصلي؟

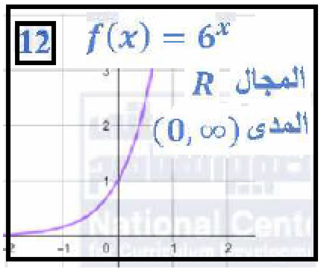
يقاس الضغط الجوي بوحدة تُسمّى هيكتوباسكال (hPa)، ويبلغ هذا الضغط عند سطح البحر $1000\ hPa$، ويتناقص بنسبة 12% لكل كيلومتر فوق سطح البحر:

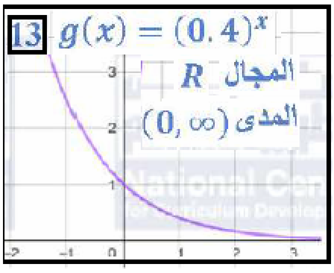
27 أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي للضغط الجوي عند ارتفاع h كيلومترًا عن سطح البحر.

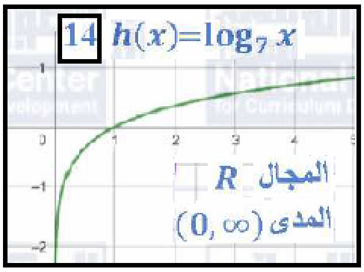
28 عند أيِّ ارتفاع تساوي قيمة الضغط الجوي نصف قيمة الضغط الجوي عند سطح البحر؟

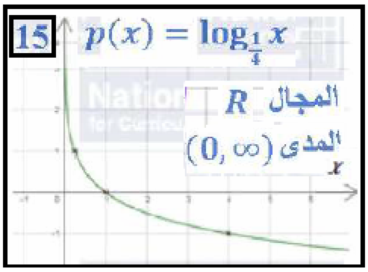
29 إعلانات: يُمثِّل الاقتران: $S(x) = 400 + 250 \log x$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من مُنتَج جديد، حيث x المبلغ (بآلاف الدنانير) الذي تُنفِقه الشركة على إعلانات المُنتَج، و $x \geq 1$. وتعني القيمة: $S(1) = 400$ أنَّ إنفاق 1000 JD على الإعلانات يُحقِّق إيرادات قيمتها 400000 JD من بيع المُنتَج. أجد $S(10)$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

1	d	4	C	7	B	10	$\log_5 16 = \log_5 4^2 = 2\log_5 4 = 2k$
2	c	5	A	8	A	11	$\log_5 256 = \log_5 4^4 = 4\log_5 4 = 4k$
3	A	6	B	9	B		

12


13


14


15


16	$8^x = 2 \Rightarrow 2^{3x} = 2^1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \approx 0.3333$
17	$-3e^{4x+1} = -96 \Rightarrow e^{4x+1} = 32 \Rightarrow \ln e^{4x+1} = \ln 32 \Rightarrow 4x+1 = \ln 32$ $\Rightarrow 4x = -1 + \ln 32 \Rightarrow x = \frac{-1+\ln 32}{4} \approx 0.6164$
18	$11^{2x+3} = 5^x \quad \log 11^{2x+3} = \log 5^x \quad (2x+3)\log 11 = (x)\log 5$ $2x\log 11 + 3\log 11 = x\log 5 \Rightarrow 2x\log 11 - x\log 5 = -3\log 11$ $x(2\log 11 - \log 5) = -3\log 11 \Rightarrow x = \frac{-3\log 11}{2\log 11 - \log 5} \approx -2.2577$
19	$49^x + 7^x - 72 = 0 \quad (7^x)^2 + 7^x - 72 = 0 \quad u^2 + u - 72 = 0$ $(u+9)(u-8) = 0 \quad u = -9$ أو $u = 8 \quad 7^x = -9$ أو $7^x = 8$ المعادلة $7^x = -9$ ليس لها حل لأن $7^x > 0$ لكل قيم المتغير x $7^x = 8 \rightarrow \log 7^x = \log 8 \rightarrow x\log 7 = \log 8 \rightarrow x = \frac{\log 8}{\log 7} \approx 1.0686$

20	$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ $A = 2500\left(1+\frac{0.042}{12}\right)^{12\times15} \approx 4688.87$ جملة المبلغ بعد 15 سنة $JD\ 4688.87$ تقريبًا
21	$A = Pe^{rt}$ $A = 800e^{0.045\times5} \approx 1001.86$ جملة المبلغ بعد 5 سنوات هي $JD1001.86$ تقريبًا

22	$v(t) = 30e^{0.1t}$ $10000 = 30e^{0.1t}$ $\frac{10000}{30} = e^{0.1t}$ $\ln\frac{1000}{3} = \ln e^{0.1t}$ $\ln\frac{1000}{3} = 0.1t$ $t = \frac{\ln\frac{10000}{30}}{0.1} \approx 58.1$

23	$N(t) = 100e^{0.045t}$ $N(0) = 100e^{0.045\times 0} = 100$ العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العينة هو 100 خلية
24	$N(5) = 100e^{0.045\times 5} \approx 125$ عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 أيام هو 125 خلية تقريبًا

25	$1400 = 100e^{0.045t} \Rightarrow 14 = e^{0.045t} \Rightarrow \ln 14 = \ln e^{0.045t} \Rightarrow \ln 14 = 0.045t$ $t = \frac{\ln 14}{0.045} \approx 59$ بعد 59 يومًا تقريبًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية 1400 خلية
26	$200 = 100e^{0.045t} \Rightarrow 2 = e^{0.045t} \Rightarrow \ln 2 = \ln e^{0.045t} \Rightarrow \ln 2 = 0.045t$ $t = \frac{\ln 2}{0.045} \approx 15$ بعد 15 يومًا تقريبًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية ضعف العدد الأصلي

27	$A(h) = a(1-r)^h \Rightarrow A(h) = 1000(1-0.12)^h = 1000(0.88)^h$
28	$500 = 1000(0.88)^h$ $0.5 = (0.88)^h$ $\log 0.5 = h\log 0.88$ $h = \frac{\log 0.5}{\log 0.88} \approx 5.42$ عند ارتفاع 5.42 كيلومتر تقريبًا فوق سطح البحر تصبح قيمة الضغط الجوي مساوية نصف قيمتها عند سطح البحر

29	$S(x) = 400 + 250\log x$ أي أن إنفاق JD 10000 على الإعلانات $S(10) = 400 + 250\log 10 = 650$ يحقق إيرادات قيمتها JD 650000

امتحان شامل (مراجعة مكثفة) / الوحدة الأولى

السؤال الأول : ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

1) إذا كان $f(x)=(\frac{1}{3})^{x-1}$ ، فإن قيمة $f(-1)$ تساوي :

$a)\ 9$ $\quad b)-9$ $\quad c)\ \frac{1}{9}$ $\quad d)-\frac{1}{9}$

2) إذا كان $f(x)=2^{x+a}-3$ وكان $f(-1)=5$ ، فإن قيمة الثابت (a) تساوي :

$a)\ 8$ $\quad b)-4$ $\quad c)\ 4$ $\quad d)\ 6$

3) تتزايد قيمة قطعة أرض بمعدل % 7.5 سنوياً ، إذا كانت قيمتها حالياً 12500 JD ، فإن قيمتها بعد 5 سنوات تساوي:

$a)\ 14356$ $\quad b)\ 17945.4$ $\quad c)\ 6771.9$ $\quad d)\ 8464.8$

4) استثمر رجل مبلغ 5000 JD في شركة ، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ % 1.23 ، وتضاف كل (4) أشهر ، جد جُمْلة المبلغ بعد (6) سنوات.

$a)\ 5382.1$ $\quad b)\ 4643.6$ $\quad c)\ 5015.4$ $\quad d)\ 5124.3$

5) $Log_{\frac{1}{3}}1$ يساوي : $\quad a)\ 3$ $\quad b)\ 1$ $\quad c)\ 0$ $\quad d)$ غير معرف

6) $Log_2 0$ يساوي : $\quad a)\ 2$ $\quad b)\ 1$ $\quad c)\ 0$ $\quad d)$ غير معرف

7) إذا كانت $3^2=9$ ، فإن الصورة اللوغاريتمية لهذه المعادلة الأسية هي :

$a)\ Log_2 9=3$ $\quad b)\ Log_3 9=2$ $\quad c)\ Log_3 2=9$ $\quad d)\ Log_9 3=2$

8) إذا كانت $Log_b \frac{1}{32}=-5$ ، فإن قيمة الثابت (b) تساوي :

$a)\ 2$ $\quad b)-4$ $\quad c)\ 4$ $\quad d)\ 5$

9) إذا كان $Log_7 3=0.56$ ، فإن قيمة $Log_3 7$ تساوي :

$a)-0.56$ $\quad b)-0.65$ $\quad c)\ 1.78$ $\quad d)\ 3.56$

10) إذا كانت $4e^{2x}=6$ ، فإن قيمة (x) تساوي :

$a)\ 2$ $\quad b)-0.2$ $\quad c)\ 0.2$ $\quad d)\ 0.4$

*** إذا كانت $\text{Log}_2 3 = 1.58$, $\text{Log}_2 5 = 2.3$, $\text{Log}_2 7 = 2.8$ ، فأجب عن الأسئلة (11 – 20)

11) $\text{Log}_2 35 =$ a) 0.5 b) 5.1 c) 4.11 d) 6.44

12) $Log_2 45 =$ a) 5.46 b) 3.88 c) 8.88 d) 9.936

13) $\text{Log}_2 2.5 =$ a) 1.25 b) 1.3 c) 4.6 d) 1.5

14) $Log_2 \frac{3}{7} =$ a) 4.424 b) 0.56 c) 1.2 d) −1.2

15) $\text{Log}_2 \frac{25}{\sqrt{7}} =$ a) 3.2 b) 2.3 c) 4.4 d) 1.8

16) $\text{Log}_2 14 =$ a) 4.16 b) 3.8 c) 0.357 d) 1.4

17) $Log_2 \sqrt[5]{9} =$ a) 3.95 b) 0.95 c) 0.63 d) 7.9

18) $\text{Log}_2 \frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt{14}} =$ a) 3.19 b) −0.2 c) −0.61 d) 0.69

19) $\frac{\text{Log}_2 3}{\text{Log}_2 7} =$ a) 0.43 b) −1.22 c) 1.8 d) 0.56

20) $(\text{Log}_2 5)^2 =$ a) 4.6 b) 4.3 c) 5.29 d) 1.25

السؤال الثاني : أكمل الفراغات بما يناسب في الجدولين الآتيين :

	الاقتران	المدى	المقطع من x	المقطع من y	خط التقارب الأفقي
1)	$f(x)=3^{2x+1}-27$				
2)	$f(x)=2^{x-1}+8$				
3)	$f(x)=(\frac{1}{2})^{x-3}+1$				
4)	$f(x)=16-4^{2x}$				

	الاقتران	المجال	المقطع من x	المقطع من y	خط التقارب الرأسي
1)	$f(x)=Log_2(x-8)$				
2)	$f(x)=Log(3x+6)$				
3)	$f(x)=Log_3(x+2)-1$				
4)	$f(x)=Log_{\frac{1}{4}}(x-2)+1$				

السؤال الثالث : حل المعادلات الأسية الآتية :

1) $(5)^{x^2-9}=1$ 2) $2e^{x-1}=3$ 3) $16^x+4^{x+1}=12$

السؤال الرابع : أكمل الفراغ فيما يأتي :

1) الصورة المطولة للمقدار $Log_b \frac{3\sqrt{x}}{a^2}$ هي :

2) الصورة المختصرة للمقدار $Log_a 8 - Log_a 2 + 2Log_a 5$ هي :

3) الصورة المختصرة للمقدار $Log_5 6 \times Log_4 5$ هي :

السؤال الخامس : أودع رجل مبلغ (4000 JD) في بنك بمعدل فائدة قدرها (4 %)،واحتسب البنك الفائدة باستمرار، جد جملة المبلغ بعد (10) سنوات

السؤال السادس : إذا كان انتشار أحد الفيروسات المعدية في دولة ما يُعطى بالاقتران $v(t)=20\,e^{0.2\,t}$ حيث (t) الزمن بالأيام ، جد عدد الأيام اللازمة ليصل عدد المصابين إلى (10000) شخص

إجابات السؤال الأول

الرقم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
الإجابة	a	c	b	a	c	d	b	a	c	c	b	a	b	d	a	b	c	c	d	c