



AWA2EL
LEARN 2 BE



الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع الأدبي
الفصل الدراسي الأول

12

إجابات الطالب

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 📠 06-5376266 ✉ P.O.Box: 2088 Amman 11941

🌐 @nccdjor 📧 feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo



إجابات كتاب الطالب- مادة الرياضيات- الصف الثاني عشر الأدبي ف1

الوحدة الأولى: الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

الدرس الأول: الاقترانات الأسية



مسألة اليوم صفحة 8

$$P(t) = 325(0.25)^t$$

$$P(5) = 325(0.25)^5 \approx 0.32 \mu\text{g/mL}$$

أتحقق من فهمي صفحة 9

a

$$f(4) = 3^4 \\ = 81$$

b

$$f(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \\ = 3$$

أتحقق من فهمي صفحة 10

a

$$f(x) = 3^x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x

لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x

b

عندما $x = 0$ فإن $y = 1$ ، ومنه فإن المقطع y لهذا الاقتران هو 1

c

الاقتران $f(x)$ متزايد

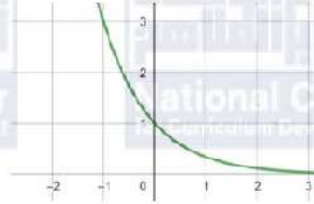
d

الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد



أتحقق من فهمي صفحة 12

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x

لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x

b

عندما $x = 0$ فإن $y = 1$ ، ومنه فإن المقطع y لهذا الاقتران هو 1

c

الاقتران $f(x)$ متناقص

d

الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد

أتحقق من فهمي صفحة 15

$$f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$$

a

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -1$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(-1, \infty)$

الاقتران $f(x)$ متزايد

b

$$f(x) = 4(5)^{-x} = 4\left(\frac{1}{5}\right)^x$$

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 0$

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

الاقتران $f(x)$ متناقص



$$f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$$

c



لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$
مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(-\infty, 2)$
الاقتران $f(x)$ متناقص

أتحقق من فهمي صفحة 16

$$\begin{aligned} f(5) &= 500(2)^5 \\ &= 500(32) \\ &= 16000 \end{aligned}$$

a

عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 ساعات هو 16000 خلية

$$\begin{aligned} 4000 &= 500(2)^x \\ 8 &= (2)^x \\ (2)^3 &= (2)^x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

b

بعد 3 ساعات يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة 4000 خلية

أتدرب وأحل المسائل صفحة 16

$$\begin{aligned} f(3) &= (11)^3 \\ &= 1331 \end{aligned}$$

1

$$\begin{aligned} f(1) &= -5(2)^1 \\ &= -5(2) \\ &= -10 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} f(2) &= 3\left(\frac{1}{7}\right)^2 \\ &= 3\left(\frac{1}{49}\right) \\ &= \frac{3}{49} \end{aligned}$$

3



4

$$\begin{aligned} f(4) &= -(5)^4 + 4 \\ &= -(625) + 4 \\ &= -621 \end{aligned}$$

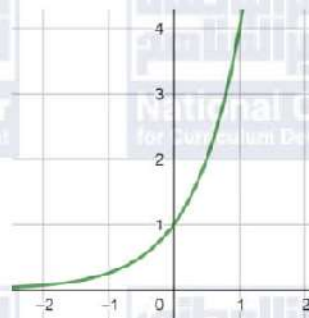
$$\begin{aligned} f(5) &= (3)^5 + 1 \\ &= 243 + 1 \\ &= 244 \end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned} f(2) &= \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 3 \\ &= \frac{1}{81} - 3 \\ &= \frac{1}{81} - \frac{243}{81} \\ &= -\frac{242}{81} \end{aligned}$$

7

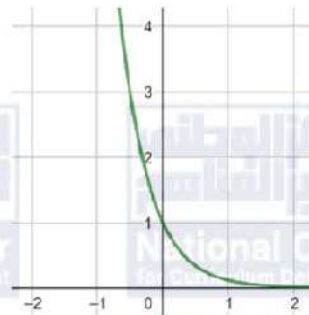
$$f(x) = 4^x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

8

$$f(x) = 9^{-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$



$$f(x) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^x$$

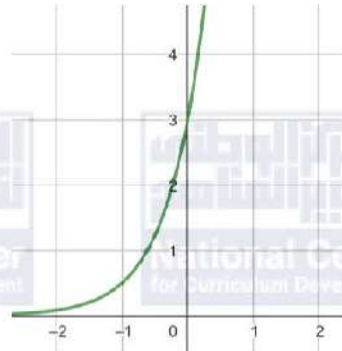


AWAZEL
LEARN 2 BE



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

$$f(x) = 3(6)^x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

10

$$f(x) = 5^{x-1} + 2$$

11

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$
مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(2, \infty)$
الاقتران $f(x)$ متزايد

$$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$$

12

لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -5$
مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(-5, \infty)$
الاقتران $f(x)$ متناقص



13	$f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -6$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(-6, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متناقص
14	$f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 1$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران هو $(1, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد
15	$\begin{aligned} f(0) &= 7000(1.2)^0 \\ &= 7000(1) \\ &= 7000 \end{aligned}$	عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة هو 7000 خلية
16	$\begin{aligned} f(12) &= 7000(1.2)^{12} \\ &\approx 62413 \end{aligned}$	عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة هو 62413 خلية تقريبًا
17	$\begin{aligned} 10080 &= 7000(1.2)^x \\ 1.44 &= (1.2)^x \\ (1.2)^2 &= (1.2)^x \\ x &= 2 \end{aligned}$	بعد ساعتين من بدء التجربة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية
18	$\begin{aligned} f(1) &= 100(0.97)^1 \\ &= 100(0.97) \\ &= 97 \end{aligned}$	نسبة الضوء المارّ خلال لوح زجاجي واحد هي 97%
19	$\begin{aligned} f(3) &= 100(0.97)^3 \\ &\approx 91 \end{aligned}$	نسبة الضوء المارّ خلال 3 ألواح زجاجية هي 91%
20	$\begin{aligned} P(1) &= 100(0.3)^1 \\ &= 100(0.3) \\ &= 30 \end{aligned}$	نسبة المتعافين بعد سنة من التشخيص الأولي للمرض هي 30%



21

$$9 = 100(0.3)^t$$

$$0.09 = (0.3)^t$$

$$(0.3)^2 = (0.3)^t$$

$$t = 2$$

بعد سنتين تصبح نسبة المتعافين 9%

$$f(x) = ab^x$$

من التمثيل البياني نلاحظ أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (0, 1) ،

إذن عندما $x = 0$ فإن $y = 1$

نعوض $x = 0$ و $y = 1$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على:

22

$$1 = ab^0$$

$$1 = a \times 1$$

$$a = 1$$

نلاحظ أيضًا أن النقطة $(1, \frac{1}{4})$ تقع على منحنى الاقتران،

نعوض $x = 1$ و $y = \frac{1}{4}$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على:

$$\frac{1}{4} = ab^1$$

$$\frac{1}{4} = (1)b^1$$

$$b = \frac{1}{4}$$

ومنه فإن قاعدة هذا الاقتران هي: $f(x) = (\frac{1}{4})^x$

$$f(3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

23

الاقتران المختلف هو $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ لأنه الاقتران الوحيد المتناقص والاقترانات الأخرى متزايدة.

24

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{ab^{x+1}}{ab^x}$$

$$= \frac{b^{x+1}}{b^x}$$

$$= b$$



الدرس الثاني: النمو والاضمحلال الأسّي

مسألة اليوم صفحة 18

$$A(t) = a(1 + r)^t = 10.8(1 + 0.026)^t$$

$$t = 2030 - 2020 = 10$$

$$A(10) = 10.8(1 + 0.026)^{10} \approx 13.96$$

العدد التقريبي للسكان عام 2030 م هو 13.96 مليون نسمة

أتحقق من فهمي صفحة 19

a

$$A(t) = 327(1 + 0.18)^t$$

$$A(t) = 327(1.18)^t$$

b

$$A(3) = 327(1.18)^3$$

$$\approx 537$$

عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بدء الدراسة هو 537 بقرة تقريبًا.

أتحقق من فهمي صفحة 21

a

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

$$A(t) = 28500(1 - 0.05)^t$$

$$A(t) = 28500(0.95)^t$$

b

$$A(4) = 28500(0.95)^4$$

$$\approx 23213.43$$

ثمن السيارة بعد 4 سنوات هو 23213.43 دينارًا تقريبًا

أتحقق من فهمي صفحة 22

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$= 5000 \left(1 + \frac{0.0225}{2}\right)^{2 \times 5}$$

$$\approx 5591.85$$

جملة المبلغ بعد 5 سنوات: 5591.85 دينارًا تقريبًا.



أتحقق من فهمي صفحة 23

$$A = Pe^{rt}$$

$$= 6300e^{0.032 \times 9}$$
$$\approx 8402.67$$

جملة المبلغ بعد 9 سنوات: 8402.67 دينارًا تقريبًا.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 24

1

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

$$A(t) = 150(1 + 0.08)^t$$

$$A(t) = 150(1.08)^t$$

2

$$A(5) = 150(1.08)^5$$

$$\approx 220$$

عدد المشاركين بعد 5 سنوات 220 تقريبًا.

3

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

$$A(t) = 50(1 + 0.15)^t$$

$$A(t) = 50(1.15)^t$$

4

$$t = 2025 - 2019 = 6$$

$$A(6) = 50(1.15)^6$$

$$\approx 115.653$$

عدد مستخدمي الموقع سنة 2025م: 115.653 ألف شخص تقريبًا.

5

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

$$A(t) = 17350(1 - 0.035)^t$$

$$A(t) = 17350(0.965)^t$$

6

$$A(3) = 17350(0.965)^3$$

$$\approx 15591.27$$

ثمن السيارة بعد 3 سنوات: 15591.27 دينارًا تقريبًا.

7

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

$$A(t) = 15275(1 - 0.27)^t$$

$$A(t) = 15275(0.73)^t$$



8	$A(7) = 15275(0.73)^7$ ≈ 1687	عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 7 ساعات: 1687 خلية تقريبًا.
9	$A(t) = a(1 - r)^t$ $A(5) = 1550(1 - 0.25)^5$ $= 1550(0.75)^5$ ≈ 368	العدد المتبقي من الدجاج بعد 5 أيام من المرض: 368 دجاجة تقريبًا.
10	$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ $= 1200 \left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^{12t}$	
11	$A = 1200 \left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^{12 \times 5}$ ≈ 1974.37	جملة المبلغ بعد 5 سنوات: 1974.37 دينارًا تقريبًا.
12	$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ $= 6200 \left(1 + \frac{0.084}{365}\right)^{365t}$	
13	$A = 6200 \left(1 + \frac{0.084}{365}\right)^{365 \times 6}$ ≈ 10262.45	جملة المبلغ بعد 6 سنوات: 10262.45 دينارًا تقريبًا.
14	$A = Pe^{rt}$ $= 9000e^{0.036 \times 7}$ ≈ 11579.36	جملة المبلغ بعد 7 سنوات: 11579.36 دينارًا تقريبًا.



15	$A = Pe^{rt}$ $= 8200e^{0.049 \times 9}$ ≈ 12744.94 <p>جملة المبلغ بعد 9 سنوات: 12744.94 دينارًا تقريبًا.</p>
16	$P(t) = 20e^{0.03t}$ $P(72) = 20e^{0.03 \times 72}$ ≈ 173 <p>عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بدء الدراسة: 173 ذبابة تقريبًا.</p>
17	$A = 250 \left(1 + \frac{0.0125}{4}\right)^{4(3)} \approx 259.54$ <p>الخطأ الذي ارتكبه رامي هو أنه كتب معدل الفائدة السنوي 1.25 وكان ينبغي كتابته: 0.0125</p>
18	$1 + \frac{200}{100} = 3$ <p>النسبة المئوية للزيادة 200%، فيكون عامل النمو = 3</p> <p>عدد الإصابات بعد t أسبوعًا هو:</p> $A(t) = 12(1 + r)^t = 12(3)^t$



الدرس الثالث: الأقرانات اللوغاريتمية

مسألة اليوم صفحة 26

الرمز \log هو اختصار لكلمة logarithm (لوغاريتم) وهو معكوس الاقتران الأسي. فإذا كان $b^x = a$ فنقول أن لوغاريتم a للأساس b هو x ، وبالرموز نكتب $\log_b a = x$.

أتحقق من فهمي مثال 1 صفحة 27

a $\log_2 16 = 4 \rightarrow 2^4 = 16$

b $\log_7 7 = 1 \rightarrow 7^1 = 7$

c $\log_3 \left(\frac{1}{243} \right) = -5 \rightarrow 3^{-5} = \frac{1}{243}$

d $\log_9 1 = 0 \rightarrow 9^0 = 1$

أتحقق من فهمي مثال 2 صفحة 27

a $7^3 = 343 \rightarrow \log_7 343 = 3$

b $49^{\frac{1}{2}} = 7 \rightarrow \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$

c $(2)^{-5} = \frac{1}{32} \rightarrow \log_2 \frac{1}{32} = -5$

d $17^0 = 1 \rightarrow \log_{17} 1 = 0$

أتحقق من فهمي صفحة 28

a $\log_5 25 = y$
 $5^y = 25$
 $5^y = 5^2$
 $y = 2$

إذن $\log_5 25 = 2$

b $\log_8 \sqrt{8} = y$
 $8^y = \sqrt{8}$
 $8^y = 8^{\frac{1}{2}}$
 $y = \frac{1}{2}$

إذن $\log_8 \sqrt{8} = \frac{1}{2}$



c

$$\log_{81} 9 = y$$

$$81^y = 9$$

$$9^{2y} = 9^1$$

$$2y = 1$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$\log_{81} 9 = \frac{1}{2} \text{ إذن}$$

d

$$\log_3 \frac{1}{27} = y$$

$$3^y = \frac{1}{27}$$

$$3^y = \frac{1}{3^3}$$

$$3^y = 3^{-3}$$

$$y = -3$$

$$\log_3 \frac{1}{27} = -3 \text{ إذن}$$

أتحقق من فهمي صفحة 29

a

$$\log_2 1 = 0$$

b

$$\log_{32} \sqrt{32} = \log_{32} 32^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}$$

c

$$\log_9 9 = 1$$

d

$$8^{\log_8 13} = 13$$



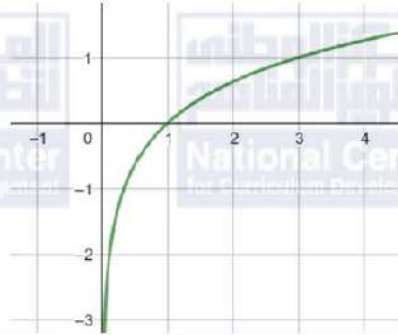
أتحقق من فهمي صفحة 31

$$f(x) = \log_3 x$$



AWA2EL
LEARN 2 BE

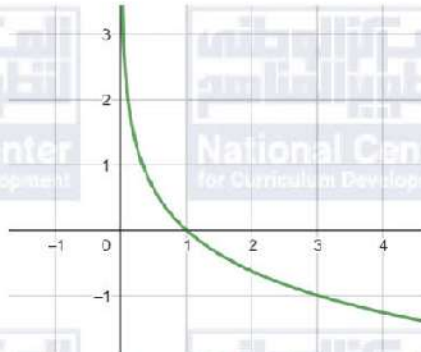
a



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y
لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y
الاقتران متزايد

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

b



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y
لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y
الاقتران متناقص

أتحقق من فهمي صفحة 33

$$f(x) = \log_7(5 - x)$$

$$5 - x > 0$$

$$-x > -5$$

$$x < 5$$

a

مجال الاقتران هو $(-\infty, 5)$



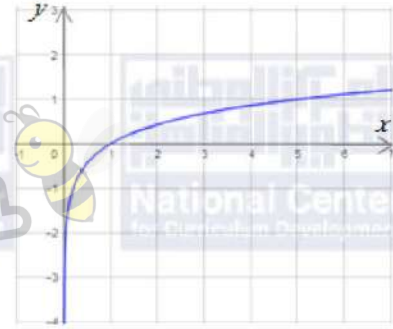
b	$f(x) = \log_5(9 + 3x)$ $9 + 3x > 0$ $3x > -9$ $x > -3$	مجال الاقتران هو $(-3, \infty)$
أدرب وأحل المسائل صفحة 33		
1	$\log_7 343 = 3 \rightarrow 7^3 = 343$	
2	$\log_4 256 = 4 \rightarrow 4^4 = 256$	
3	$\log_{125} 5 = \frac{1}{3} \rightarrow 125^{\frac{1}{3}} = 5$	
4	$\log_{36} 6 = 0.5 \rightarrow 36^{0.5} = 6$	
5	$\log_9 1 = 0 \rightarrow 9^0 = 1$	
6	$\log_{57} 57 = 1 \rightarrow 57^1 = 57$	
7	$2^6 = 64 \rightarrow \log_2 64 = 6$	
8	$4^{-3} = \frac{1}{64} \rightarrow \log_4 \frac{1}{64} = -3$	
9	$6^3 = 216 \rightarrow \log_6 216 = 3$	
10	$5^{-3} = 0.008 \rightarrow \log_5 0.008 = -3$	
11	$51^1 = 51 \rightarrow \log_{51} 51 = 1$	
12	$9^0 = 1 \rightarrow \log_9 1 = 0$	
13	$\log_3 81 = \log_3 3^4$ $= 4$	
14	$\log_{25} 5 = y$ $25^y = 5$ $5^{2y} = 5^1$ $2y = 1$ $y = \frac{1}{2}$	إذن $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
15	$\log_2 32 = \log_2 2^5$ $= 5$	إذن $\log_2 32 = 5$



16	$\log_{49} 343 = y$ $49^y = 343$ $7^{2y} = 7^3$ $2y = 3$ $y = \frac{3}{2}$	$\log_{49} 343 = \frac{3}{2}$ إذن
17	$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ $= -3$	
18	$\log_3 1 = 0$	
19	$\log_{\frac{1}{4}} 4 = y$ $\left(\frac{1}{4}\right)^y = 4$ $4^{-y} = 4^1$ $-y = 1$ $y = -1$	$\log_{\frac{1}{4}} 4 = -1$ إذن
20	$(10)^{\log_{10} \frac{1}{8}} = \frac{1}{8}$	
21	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2^7}} = \log_2 \frac{1}{(2)^{\frac{7}{2}}}$ $= \log_2 (2)^{-\frac{7}{2}}$ $= -\frac{7}{2}$	
22	$\log_a \sqrt[5]{a} = \log_a a^{\frac{1}{5}}$ $= \frac{1}{5}$	
23	$\log_{10} (1 \times 10^{-9}) = \log_{10} 10^{-9}$ $= -9$	
24	$8^{\log_8 5} = 5$	



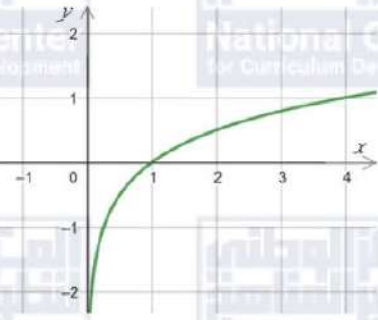
$$f(x) = \log_5 x$$



25
AWAZEL
LEARN 2 BE

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y
لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y
الاقتران متزايد

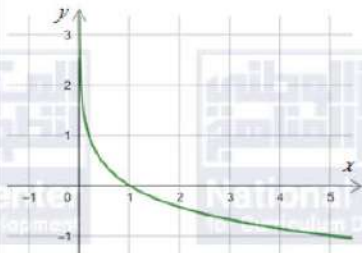
$$f(x) = \log_4 x$$



26

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y
لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y
الاقتران متزايد

$$f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$$



27

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y
لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y
الاقتران متناقص

$$f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$$

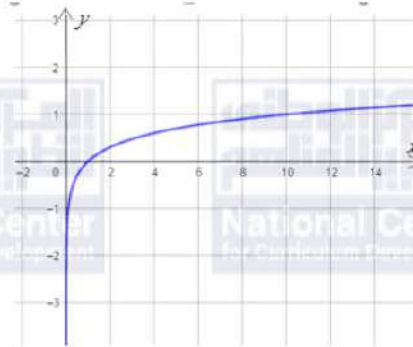


28

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y
لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y
الاقتران متناقص

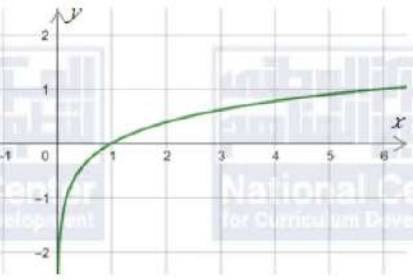


$$f(x) = \log_{10} x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y
لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y
الاقتران متزايد

$$f(x) = \log_6 x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y
لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y
الاقتران متزايد

$$f(x) = \log_3(x - 2)$$

$$x - 2 > 0$$

$$x > 2$$

مجال هذا الاقتران هو $(2, \infty)$

$$f(x) = 5 - 2 \log_7(x + 1)$$

$$x + 1 > 0$$

$$x > -1$$

مجال هذا الاقتران هو $(-1, \infty)$

$$f(x) = -3 \log_4(-x)$$

$$-x > 0$$

$$x < 0$$

مجال هذا الاقتران هو $(-\infty, 0)$



34

$$\begin{aligned}f(x) &= \log_a x \\f(32) &= \log_a 32 \\5 &= \log_a 32 \\a^5 &= 32 \\a^5 &= (2)^5 \\a &= 2\end{aligned}$$

35

$$\begin{aligned}f(x) &= \log_c x \\f\left(\frac{1}{81}\right) &= \log_c \frac{1}{81} \\-4 &= \log_c \frac{1}{81} \\c^{-4} &= \frac{1}{81} \\ \frac{1}{c^4} &= \frac{1}{81} \\c^4 &= 81 \rightarrow c = \pm\sqrt[4]{81} \rightarrow c = \pm 3\end{aligned}$$

ولأن أساس اللوغاريتم لا يكون سالبًا فإن: $c = 3$

36

$$\begin{aligned}P(a) &= 10 + 20 \log_5(a + 1) \\P(4) &= 10 + 20 \log_5(4 + 1) \\ &= 10 + 20 \log_5 5 \\ &= 10 + 20(1) \\ &= 30 \\P(24) &= 10 + 20 \log_5(24 + 1) \\ &= 10 + 20 \log_5 25 \\ &= 10 + 20 \log_5 5^2 \\ &= 10 + 20(2) \\ &= 50 \\P(124) &= 10 + 20 \log_5(124 + 1) \\ &= 10 + 20 \log_5 125 \\ &= 10 + 20 \log_5 5^3 \\ &= 10 + 20(3) \\ &= 70\end{aligned}$$

37

القيمة $P(4) = 30$ تعني أن إنفاق **JD400** على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته **JD 30000** من بيع المنتج

القيمة $P(24) = 50$ تعني أن إنفاق **JD 2400** على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته **JD 50000** من بيع المنتج

القيمة $P(124) = 70$ تعني أن إنفاق **JD 12400** على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته **JD 70000** من بيع المنتج



38	$f(x) = \log_3 x$ c لأن مجال الاقتران هو $(0, \infty)$ وهو متزايد ويمر منحناه بالنقطة $(3, 1)$ حيث $f(3) = \log_3 3 = 1$
39	$f(x) = \log_3(-x)$ b لأن مجال الاقتران هو $(-\infty, 0)$ ، ويمر منحناه بالنقطة $(-3, 1)$ حيث $f(-3) = \log_3(-(-3)) = \log_3(3) = 1$
40	$g(x) = -\log_3 x$ a لأن مجال الاقتران هو $(0, \infty)$ وهو متناقص ويمر منحناه بالنقطة $(3, -1)$ حيث $f(3) = -\log_3 3 = -1$
41	$f(x) = \log_3(x^2)$ بما أن $x^2 > 0$ لجميع الأعداد الحقيقية عدا العدد 0 فإن مجال هذا الاقتران هو $R - \{0\}$ خط التقارب الرأسي هو $x = 0$ (المحور y)
42	$f(x) = \log_3(x^2 - x - 2)$ $x^2 - x - 2 > 0$ $(x - 2)(x + 1) > 0$ نلاحظ أن $(x - 2)(x + 1) > 0$ في الفترتين $(-\infty, -1)$ و $(2, \infty)$ إذن، مجال الاقتران هو $(-\infty, -1), (2, \infty)$ خطا التقارب الرأسيان هما $x = -1, x = 2$ وهما جذرا المعادلة $x^2 - x - 2 = 0$
43	الكتابة الصحيحة للصورة اللوغاريتمية هي: $\log_4 \frac{1}{64} = -3$



الدرس الرابع: قوانين اللوغاريتمات

مسألة اليوم صفحة 35

$$\begin{aligned}L &= 10 \log_{10} R \\L &= 10 \log_{10}(100 \times 10^6) \\&= 10 \log_{10} 10^8 = 10 \times 8 = 80\end{aligned}$$

شدة الصوت تساوي 80 ديسيبل

أتحقق من فهمي صفحة 36

a

$$\begin{aligned}\log_b 14 &= \log_b(2 \times 7) \\&= \log_b 2 + \log_b 7 \\&\approx 0.43 + 1.21 \\&\approx 1.64\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}\log_b \frac{2}{7} &= \log_b 2 - \log_b 7 \\&\approx 0.43 - 1.21 \\&\approx -0.78\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}\log_b 32 &= \log_b 2^5 \\&= 5 \log_b 2 \\&\approx 5 \times 0.43 \\&\approx 2.15\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}\log_b \frac{1}{49} &= \log_b 1 - \log_b 49 \\&= 0 - \log_b 7^2 \\&= 0 - 2 \log_b 7 \\&\approx 0 - 2 \times 1.21 \\&\approx -2.42\end{aligned}$$

أتحقق من فهمي صفحة 38

a

$$\begin{aligned}\log_2 a^2 b^9 &= \log_2 a^2 + \log_2 b^9 \\&= 2 \log_2 a + 9 \log_2 b\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}\log_5 \frac{(x+1)^3}{8} &= \log_5 (x+1)^3 - \log_5 8 \\&= 3 \log_5 (x+1) - \log_5 8\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5} &= \log_3 x^7 y^3 - \log_3 z^5 \\&= \log_3 x^7 + \log_3 y^3 - \log_3 z^5 \\&= 7 \log_3 x + 3 \log_3 y - 5 \log_3 z\end{aligned}$$



$$\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}} = \log_b \left(\frac{x^7 b^2}{y^5} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \log_b \frac{x^7 b^2}{y^5}$$

$$= \frac{1}{3} (\log_b x^7 b^2 - \log_b y^5)$$

$$= \frac{1}{3} (\log_b x^7 + \log_b b^2 - \log_b y^5)$$

$$= \frac{1}{3} (7 \log_b x + 2 \log_b b - 5 \log_b y)$$

$$= \frac{7}{3} \log_b x + \frac{2}{3} \log_b b - \frac{5}{3} \log_b y$$

$$= \frac{7}{3} \log_b x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \log_b y$$

أتحقق من فهمي صفحة 39

a

$$\log_5 a + 3 \log_5 b = \log_5 a + \log_5 b^3$$

$$= \log_5 ab^3$$

b

$$5 \log_b x + \frac{1}{2} \log_b y - 9 \log_b z = \log_b x^5 + \log_b y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$$

$$= \log_b x^5 y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$$

$$= \log_b \frac{x^5 y^{\frac{1}{2}}}{z^9}$$

$$= \log_b \frac{x^5 \sqrt{y}}{z^9}$$



أتحقق من فهمي صفحة 40

$$M(t) = 92 - 28 \log_{10}(t + 1)$$

$$M(29) = 92 - 28 \log_{10}(29 + 1)$$

$$= 92 - 28 \log_{10} 30$$

$$= 92 - 28 \log_{10}(10 \times 3)$$

$$= 92 - 28(\log_{10} 10 + \log_{10} 3)$$

$$\approx 92 - 28(1 + 0.4771)$$

$$\approx 92 - 28(1.4771)$$

$$\approx 92 - 41.3588$$

$$\approx 51$$

النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها هذا الطالب بعد 29 شهرًا هي 51% تقريبًا

أتدرب وأحل المسائل صفحة 40

$$\log_a \frac{5}{6} = \log_a 5 - \log_a 6$$

1

$$\approx 0.699 - 0.778$$

$$\approx -0.079$$

$$\log_a 30 = \log_a(5 \times 6)$$

2

$$= \log_a 5 + \log_a 6$$

$$\approx 0.699 + 0.778$$

$$\approx 1.477$$

3

$$\frac{\log_a 5}{\log_a 6} = \frac{0.699}{0.778} = \frac{699}{778} \approx 0.90$$

4

$$\log_a \frac{1}{6} = \log_a 1 - \log_a 6$$

$$\approx 0 - 0.778$$

$$\approx -0.778$$



5
AWAZEL
LEARN 2 BE



$$\begin{aligned}\log_a 900 &= \log_a 30^2 \\ &= 2 \log_a 30 \\ &= 2 \log_a (5 \times 6) \\ &= 2(\log_a 5 + \log_a 6) \\ &\approx 2(0.699 + 0.778) \\ &\approx 2 \times 1.477 \\ &\approx 2.954\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_a \frac{18}{15} &= \log_a \frac{6}{5} \\ &= \log_a 6 - \log_a 5 \\ &\approx 0.778 - 0.699 \\ &\approx 0.079\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_a (6a^2) &= \log_a 6 + \log_a a^2 \\ &= \log_a 6 + 2 \log_a a \\ &\approx 0.778 + 2 \\ &\approx 2.778\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_a \sqrt[4]{25} &= \log_a \sqrt[4]{5^2} \\ &= \log_a 5^{\frac{2}{4}} \\ &= \log_a 5^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log_a 5 \\ &\approx \frac{1}{2} \times 0.699 \\ &\approx 0.350\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\log_a 5)(\log_a 6) &\approx 0.699 \times 0.778 \\ &\approx 0.544\end{aligned}$$

$$10 \quad \log_a x^2 = 2 \log_a x$$



11

$$\begin{aligned}\log_a \left(\frac{a}{bc} \right) &= \log_a a - \log_a bc \\ &= \log_a a - (\log_a b + \log_a c) \\ &= \log_a a - \log_a b - \log_a c \\ &= 1 - \log_a b - \log_a c\end{aligned}$$



12

$$\begin{aligned}\log_a (\sqrt{x}\sqrt{y}) &= \log_a \sqrt{x} + \log_a \sqrt{y} \\ &= \log_a x^{\frac{1}{2}} + \log_a y^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log_a x + \frac{1}{2} \log_a y\end{aligned}$$

13

$$\begin{aligned}\log_a \left(\frac{\sqrt{z}}{y} \right) &= \log_a \sqrt{z} - \log_a y \\ &= \log_a z^{\frac{1}{2}} - \log_a y \\ &= \frac{1}{2} \log_a z - \log_a y\end{aligned}$$

14

$$\begin{aligned}\log_a \frac{1}{x^2 y^2} &= \log_a 1 - \log_a x^2 y^2 \\ &= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^2) \\ &= 0 - (2 \log_a x + 2 \log_a y) \\ &= -2 \log_a x - 2 \log_a y\end{aligned}$$

15

$$\begin{aligned}\log_a \sqrt[5]{32x^5} &= \log_a (\sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{x^5}) \\ &= \log_a 2x \\ &= \log_a 2 + \log_a x\end{aligned}$$

16

$$\begin{aligned}\log_a \frac{(x^2 y^3)^2}{(x^2 y^3)^3} &= \log_a \frac{1}{x^2 y^3} \\ &= \log_a 1 - \log_a x^2 y^3 \\ &= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^3) \\ &= 0 - (2 \log_a x + 3 \log_a y) \\ &= -2 \log_a x - 3 \log_a y\end{aligned}$$

17

$$\log_a (x + y - z)^7 = 7 \log_a (x + y - z)$$



AWAZEL
LEARN 2 18



$$\begin{aligned} \log_a \sqrt{\frac{x^{12}y}{y^3z^4}} &= \log_a \sqrt{\frac{x^{12}}{y^2z^4}} \\ &= \log_a \frac{\sqrt{x^{12}}}{\sqrt{y^2}\sqrt{z^4}} \\ &= \log_a \frac{x^{\frac{12}{2}}}{y^{\frac{2}{2}}z^{\frac{4}{2}}} \\ &= \log_a \frac{x^6}{yz^2} \\ &= \log_a x^6 - \log_a yz^2 \\ &= 6\log_a x - (\log_a y + \log_a z^2) \\ &= 6\log_a x - (\log_a y + 2\log_a z) \\ &= 6\log_a x - \log_a y - 2\log_a z \end{aligned}$$

19 $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

20 $\log_b(x+y) - \log_b(x-y) = \log_b \frac{x+y}{x-y}$

21 $\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x} = \log_a \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
 $= \log_a \frac{1}{x}$

22 $\log_a(x^2 - 4) - \log_a(x + 2) = \log_a \frac{(x^2 - 4)}{(x + 2)}$
 $= \log_a \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)}$
 $= \log_a(x - 2)$

23 $2 \log_b x - 3 \log_b y + \frac{1}{3} \log_b z = \log_b x^2 - \log_b y^3 + \log_b z^{\frac{1}{3}}$
 $= \log_b \frac{x^2}{y^3} + \log_b z^{\frac{1}{3}}$
 $= \log_b \frac{x^2 z^{\frac{1}{3}}}{y^3}$
 $= \log_b \frac{x^2 \sqrt[3]{z}}{y^3}$

24 $\log_b 1 + 2 \log_b b = \log_b b^2 = 2$



25
AWAZEL
LEARN 2 BE



$$\begin{aligned}f(x) &= 29 + 48.8 \log_6(x + 2) \\f(10) &= 29 + 48.8 \log_6(10 + 2) \\&= 29 + 48.8 \log_6 12 \\&= 29 + 48.8 \log_6(6 \times 2) \\&= 29 + 48.8(\log_6 6 + \log_6 2) \\&\approx 29 + 48.8(1 + 0.3869) \\&\approx 29 + 48.8(1.3869) \\&\approx 29 + 67.68072 \\&\approx 97\end{aligned}$$

النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ هي 97% تقريباً

26

$$\begin{aligned}\frac{\log_a 216}{\log_a 36} &= \frac{\log_a 6^3}{\log_a 6^2} \\&= \frac{3 \log_a 6}{2 \log_a 6} \\&= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

27

$$\log_2 5x = \log_2 5 + \log_2 x$$

28

$$\begin{aligned}\log_b(b - 3) + \log_b(b^2 + 3b) - \log_b(b^2 - 9) \\&= \log_b(b - 3)(b^2 + 3b) - \log_b(b^2 - 9) \\&= \log_b \frac{(b - 3)(b^2 + 3b)}{(b^2 - 9)} \\&= \log_b \frac{(b - 3) \times b(b + 3)}{(b - 3)(b + 3)} \\&= \log_b b \\&= 1\end{aligned}$$



مسألة اليوم صفحة 42

$$A(t) = 10e^{-0.0862t}$$

$$0.5 = 10e^{-0.0862t}$$

$$0.05 = e^{-0.0862t}$$

$$-0.0862t = \ln 0.05$$

$$t = -\frac{\ln 0.05}{0.0862} \approx 35$$

بعد حوالي 35 يوماً سيظل من هذه العينة 0.5 g

أتحقق من فهمي صفحة 43

a $\log 13 \approx 1.1$

b $\log(3.1 \times 10^4) \approx 4.5$

c $\ln 0.25 \approx -1.4$

أتحقق من فهمي صفحة 44

a $\log_3 51 = \frac{\log 51}{\log 3} \approx 3.58$

b $\log_{\frac{1}{2}} 13 = \frac{\log 13}{\log \frac{1}{2}} \approx -3.70$

أتحقق من فهمي مثال 3 صفحة 48

a $7^x = 9$

$$\log 7^x = \log 9$$

$$x \log 7 = \log 9$$

$$x = \frac{\log 9}{\log 7} \approx 1.1292$$

b $2e^{5x} = 64$

$$e^{5x} = 32$$

$$\ln e^{5x} = \ln 32$$

$$5x = \ln 32$$

$$x = \frac{1}{5} \ln 32 \approx 0.6931$$



$$7^{2x+1} = 2^{x-4}$$

$$\log 7^{2x+1} = \log 2^{x-4}$$

$$(2x + 1) \log 7 = (x - 4) \log 2$$

$$2x \log 7 + \log 7 = x \log 2 - 4 \log 2$$

$$2x \log 7 - x \log 2 = -\log 7 - 4 \log 2$$

$$x(2 \log 7 - \log 2) = -\log 7 - 4 \log 2$$

$$x = \frac{-\log 7 - 4 \log 2}{2 \log 7 - \log 2} \approx -1.4751$$

$$4^x + 2^x - 12 = 0$$

$$(2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$$

$$u^2 + u - 12 = 0$$

$$(u + 4)(u - 3) = 0$$

D $u = -4$ أو $u = 3$

$$2^x = -4$$
 أو $2^x = 3$

المعادلة $2^x = -4$ ليس لها حل لأن $2^x > 0$ لكل قيم المتغير x .

$$2^x = 3 \rightarrow x = \log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5850$$

أتحقق من فهمي مثال 4 صفحة 48

$$9 = 6.5(1.014)^t$$

$$\frac{9}{6.5} = (1.014)^t$$

$$\ln \frac{9}{6.5} = \ln(1.014)^t$$

$$\ln \frac{9}{6.5} = t \ln 1.014$$

$$t = \frac{\ln \frac{9}{6.5}}{\ln 1.014} \approx 23$$

سنة تقريبًا من عام 232006 إن، سيبلغ عدد سكان العالم 9 مليارات نسمة بعد



أُتدرب وأُحل المسائل صفحة 49

1 $\log 19 \approx 1.3$

2 $\log(2.5 \times 10^{-3}) \approx -2.6$

3 $\ln 3.1 \approx 1.1$

4 $\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} \approx 3.3$

5 $\log_3 e^2 = \frac{\ln e^2}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1.8$

6 $\ln 5 \approx 1.6$

7 $\log_3 33 = \frac{\log 33}{\log 3} \approx 3.18$

8 $\log_{\frac{1}{3}} 17 = \frac{\log 17}{\log \frac{1}{3}} \approx -2.58$

9 $\log_6 5 = \frac{\log 5}{\log 6} \approx 0.90$

10 $\log_7 \frac{1}{7} = \log_7 1 - \log_7 7 = 0 - 1 = -1$

11 $\log 1000 = 3$

12 $\log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3} \approx 2.46$

13 $6^x = 121$

$\log 6^x = \log 121$

$x \log 6 = \log 121$

$\rightarrow x = \frac{\log 121}{\log 6} \approx 2.6766$



14

$$-3e^{4x} = -27$$

$$e^{4x} = 9$$

$$\ln e^{4x} = \ln 9$$

$$4x = \ln 9$$

$$x = \frac{1}{4} \ln 9 \approx 0.5493$$

15

$$5^{7x-2} = 3^{2x}$$

$$\log 5^{7x-2} = \log 3^{2x}$$

$$(7x - 2) \log 5 = (2x) \log 3$$

$$7x \log 5 - 2 \log 5 = 2x \log 3$$

$$7x \log 5 - 2x \log 3 = 2 \log 5$$

$$x(7 \log 5 - 2 \log 3) = 2 \log 5$$

$$x = \frac{2 \log 5}{7 \log 5 - 2 \log 3} \approx 0.3549$$

16

$$25^x + 5^x - 42 = 0$$

$$(5^x)^2 + 5^x - 42 = 0$$

$$u^2 + u - 42 = 0$$

$$(u + 7)(u - 6) = 0$$

$$u = -7 \text{ أو } u = 6$$

$$5^x = -7 \text{ أو } 5^x = 6$$

المعادلة $5^x = -7$ ليس لها حل لأن $5^x > 0$ لكل قيم المتغير x

$$5^x = 6 \rightarrow x \log 5 = \log 6 \rightarrow x = \frac{\log 6}{\log 5} \approx 1.1133$$

17

$$2(9)^x = 32$$

$$9^x = 16$$

$$\log 9^x = \log 16$$

$$x \log 9 = \log 16$$

$$\rightarrow x = \frac{\log 16}{\log 9} \approx 1.2619$$



$$27^{2x+3} = 2^{x-5}$$

$$\log 27^{2x+3} = \log 2^{x-5}$$

$$(2x + 3) \log 27 = (x - 5) \log 2$$

$$2x \log 27 + 3 \log 27 = x \log 2 - 5 \log 2$$

$$2x \log 27 - x \log 2 = -3 \log 27 - 5 \log 2$$

$$x(2 \log 27 - \log 2) = -3 \log 27 - 5 \log 2$$

$$x = \frac{-3 \log 27 - 5 \log 2}{2 \log 27 - \log 2} \approx -2.2638$$

$$2P = Pe^{0.05t}$$

$$2 = e^{0.05t}$$

$$\ln 2 = \ln e^{0.05t}$$

$$\ln 2 = 0.05t$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.05} \approx 14$$

بعد 14 سنة تقريبًا تصبح جملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي

$$3P = Pe^{0.05t}$$

$$3 = e^{0.05t}$$

$$\ln 3 = \ln e^{0.05t}$$

$$\ln 3 = 0.05t$$

$$t = \frac{\ln 3}{0.05} \approx 22$$

بعد 22 سنة تقريبًا تصبح جملة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي

18

AWA2E
LEARN 2 BE

19

20



$$97 = 873e^{-0.078t}$$

$$\frac{97}{873} = e^{-0.078t}$$

$$\ln \frac{97}{873} = \ln e^{-0.078t}$$

$$\ln \frac{97}{873} = -0.078t$$

$$t = \frac{\ln \frac{97}{873}}{-0.078} \approx 28$$

بعد 28 سنة تقريبًا يصبح في الغابة 97 حيوانًا من الكوالا

$$f(x) = e^{0.5x+3}$$

بما أن النقطة $(-2, k)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثياتها يحققان معادلة المنحنى

$$f(-2) = e^{0.5(-2)+3}$$

$$k = e^2 \approx 7.39$$

بما أن النقطة $(h, 100)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثياتها يحققان معادلة المنحنى

$$f(h) = e^{0.5h+3}$$

$$100 = e^{0.5h+3}$$

$$\ln 100 = \ln e^{0.5h+3}$$

$$\ln 100 = 0.5h + 3$$

$$0.5h = -3 + \ln 100$$

$$h = \frac{-3 + \ln 100}{0.5} \approx 3.2$$

$$3^x + \frac{4}{3^x} = 5$$

$$3^x \left(3^x + \frac{4}{3^x} \right) = 3^x \times 5$$

$$3^{2x} + 4 = 5(3^x)$$

$$3^{2x} - 5(3^x) + 4 = 0$$

$$(3^x)^2 - 5(3^x) + 4 = 0$$

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

$$(u - 4)(u - 1) = 0$$

$$u = 4 \quad \text{أو} \quad u = 1$$

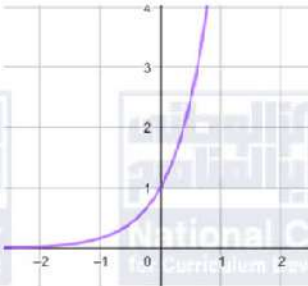
$$3^x = 4 \quad \text{أو} \quad 3^x = 1$$

$$3^x = 4 \quad \rightarrow x = \log_3 4 \approx 1.26$$

$$3^x = 1 \quad \rightarrow x = \log_3 1 = 0$$



اختبار نهاية الوحدة صفحة 50

1	d
2	c
3	A
4	C
5	A
6	B
7	B
8	A
9	B
10	$\log_5 16 = \log_5 4^2$ $= 2 \log_5 4$ $= 2k$
11	$\log_5 256 = \log_5 4^4$ $= 4 \log_5 4$ $= 4k$
12	$f(x) = 6^x$ 

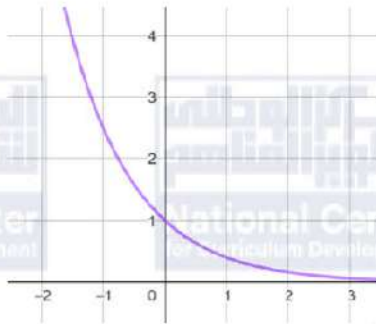
مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$



13
AWAZEL
LEARN 2 BE



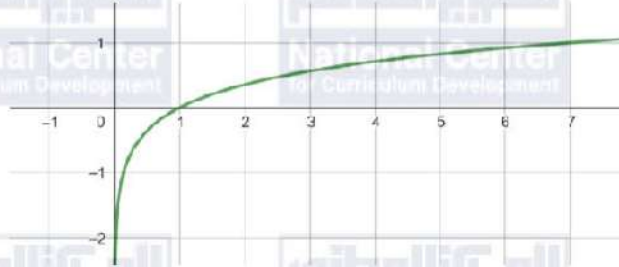
$$g(x) = (0.4)^x$$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R
مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

14

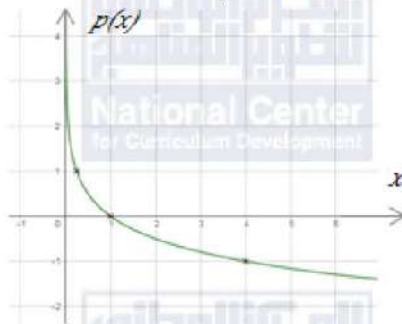
$$h(x) = \log_7 x$$



مجال هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

$$p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$$

$x = \left(\frac{1}{4}\right)^y$	4	1	$\frac{1}{4}$
y	-1	0	1
(x, y)	(4, -1)	(1, 0)	(0.25, 1)



15

مجال هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

16

$$8^x = 2$$

$$2^{3x} = 2^1$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3} \approx 0.3333$$



17

$$\begin{aligned} -3e^{4x+1} &= -96 \\ e^{4x+1} &= 32 \\ \ln e^{4x+1} &= \ln 32 \\ 4x+1 &= \ln 32 \\ 4x &= -1 + \ln 32 \\ x &= \frac{-1 + \ln 32}{4} \approx 0.6164 \end{aligned}$$

18

$$\begin{aligned} 11^{2x+3} &= 5^x \\ \log 11^{2x+3} &= \log 5^x \\ (2x+3) \log 11 &= (x) \log 5 \\ 2x \log 11 + 3 \log 11 &= x \log 5 \\ 2x \log 11 - x \log 5 &= -3 \log 11 \\ x(2 \log 11 - \log 5) &= -3 \log 11 \\ x &= \frac{-3 \log 11}{2 \log 11 - \log 5} \approx -2.2577 \end{aligned}$$

19

$$\begin{aligned} 49^x + 7^x - 72 &= 0 \\ (7^x)^2 + 7^x - 72 &= 0 \\ u^2 + u - 72 &= 0 \\ (u+9)(u-8) &= 0 \\ u = -9 \text{ أو } u = 8 \\ 7^x = -9 \text{ أو } 7^x = 8 \end{aligned}$$

المعادلة $7^x = -9$ ليس لها حل لأن $7^x > 0$ لكل قيم المتغير x

$$7^x = 8 \rightarrow \log 7^x = \log 8 \rightarrow x \log 7 = \log 8 \rightarrow x = \frac{\log 8}{\log 7} \approx 1.0686$$

20

$$\begin{aligned} A &= P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \\ A &= 2500 \left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \times 15} \approx 4688.87 \end{aligned}$$

جملة المبلغ بعد 15 سنة هي JD 4688.87 تقريباً

21

$$\begin{aligned} A &= Pe^{rt} \\ A &= 800e^{0.045 \times 5} \approx 1001.86 \end{aligned}$$

جملة المبلغ بعد 5 سنوات هي JD 1001.86 تقريباً



AW22
LEARN 2 BE

$$v(t) = 30e^{0.1t}$$

$$10000 = 30e^{0.1t}$$

$$\frac{10000}{30} = e^{0.1t}$$

$$\ln \frac{1000}{3} = \ln e^{0.1t}$$

$$\ln \frac{1000}{3} = 0.1t$$

$$t = \frac{\ln \frac{10000}{30}}{0.1} \approx 58.1$$

الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس هو 58.1 دقيقة تقريبًا

23

$$N(t) = 100e^{0.045t}$$

$$N(0) = 100e^{0.045 \times 0} = 100$$

العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العينة هو 100 خلية

24

$$N(5) = 100e^{0.045 \times 5} \approx 125$$

عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 أيام هو 125 خلية تقريبًا

25

$$1400 = 100e^{0.045t}$$

$$14 = e^{0.045t}$$

$$\ln 14 = \ln e^{0.045t}$$

$$\ln 14 = 0.045t$$

$$t = \frac{\ln 14}{0.045} \approx 59$$

بعد 59 يومًا تقريبًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية 1400 خلية

26

$$200 = 100e^{0.045t}$$

$$2 = e^{0.045t}$$

$$\ln 2 = \ln e^{0.045t}$$

$$\ln 2 = 0.045t$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.045} \approx 15$$

بعد 15 يومًا تقريبًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية ضعف العدد الأصلي

27

$$A(h) = a(1 - r)^h$$

$$A(h) = 1000(1 - 0.12)^h$$

$$= 1000(0.88)^h$$



28

$$500 = 1000(0.88)^h$$

$$0.5 = (0.88)^h$$

$$\log 0.5 = h \log 0.88$$

$$h = \frac{\log 0.5}{\log 0.88} \approx 5.42$$

عند ارتفاع 5.42 كيلومتر تقريباً فوق سطح البحر تصبح قيمة الضغط الجوي مساوية نصف قيمتها عند سطح البحر

29

$$S(x) = 400 + 250 \log x$$

$$S(10) = 400 + 250 \log 10 = 650$$

أي أن إنفاق JD 10000 على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها JD 650000



إجابات كتاب الطالب - مادة الرياضيات - الصف الثاني الثانوي الأدبي ف1

الوحدة الثانية: التفاضل

الدرس الأول: قاعدة السلسلة



مسألة اليوم صفحة 54

$$N(t) = 20 - \frac{30}{\sqrt{9-t^2}}$$
$$N'(t) = \frac{30 \left(\frac{-2t}{2\sqrt{9-t^2}} \right)}{9-t^2}$$
$$= \frac{-30t}{(9-t^2)\sqrt{9-t^2}}$$

أتحقق من فهمي صفحة 56

a

$$y = (x^2 - 2)^4$$
$$u = x^2 - 2, \quad y = u^4$$
$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad \frac{dy}{du} = 4u^3$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$= 4u^3 \times 2x$$
$$= 8xu^3$$
$$= 8x(x^2 - 2)^3$$

b

$$y = \sqrt{x^3 + 4x} = (x^3 + 4x)^{\frac{1}{2}}$$
$$u = x^3 + 4x, \quad y = u^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 4, \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$= \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \times (3x^2 + 4)$$
$$= \frac{3x^2 + 4}{2\sqrt{x^3 + 4x}}$$



أتحقق من فهمي صفحة 58

a

$$f'(x) = 5(x^4 + 1)^4(4x^3)$$
$$= 20x^3(x^4 + 1)^4$$
$$f'(1) = 20(1)^3((1)^4 + 1)^4 = 20 \times 16 = 320$$

b

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$$
$$f'(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$$
$$f'(2) = \frac{2(2) + 3}{2\sqrt{2^2 + 3 \times 2 + 2}} = \frac{7}{2\sqrt{12}}$$

c

$$f(x) = \sqrt[4]{(2x^2 - 7)^5} = (2x^2 - 7)^{\frac{5}{4}}$$
$$f'(x) = \frac{5}{4}(2x^2 - 7)^{\frac{1}{4}}(4x)$$
$$= \frac{5}{4}(4x)(2x^2 - 7)^{\frac{1}{4}}$$
$$= 5x \times \sqrt[4]{2x^2 - 7}$$
$$f'(4) = 5 \times 4 \times \sqrt[4]{2(4)^2 - 7} = 20\sqrt[4]{25}$$

أتحقق من فهمي صفحة 59

a

$$f'(x) = 4(1 + x^3)^3(3x^2) + 8x^7$$
$$= 12x^2(1 + x^3)^3 + 8x^7$$

b

$$f(x) = (2x - 1)^{\frac{1}{3}} - (x - 3)^3$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x - 1)^{-\frac{2}{3}}(2) - 3(x - 3)^2(1)$$
$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x - 1)^2}} - 3(x - 3)^2$$

أتحقق من فهمي صفحة 61

a

$$P'(t) = \frac{20t + 1}{2\sqrt{10t^2 + t + 229}}$$



$$t = 2020 - 2015 = 5$$
$$b \quad P'(5) = \frac{20(5) + 1}{2\sqrt{250 + 5 + 229}} = \frac{101}{2\sqrt{484}} \approx 2.3$$

إذن، في سنة 2020 يزداد إجمالي الأرباح بمعدل 2300 دينار لكل سنة.

أتحقق من فهمي صفحة 62

$$\frac{dy}{du} = 5u^4 + 3u^2$$

$$\frac{du}{dx} = -4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (5u^4 + 3u^2) \times -4$$

$$= -4(5(3 - 4x)^4 + 3(3 - 4x)^2)$$

$$= -20(3 - 4x)^4 - 12(3 - 4x)^2$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = -20(625) - 12(25) = -12800$$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 62

$$1 \quad f'(x) = 4(1 + 2x)^3(2)$$
$$= 8(1 + 2x)^3$$

$$2 \quad f'(x) = -5(3 - 2x^2)^{-6}(-4x)$$
$$= 20x(3 - 2x^2)^{-6}$$
$$= \frac{20x}{(3 - 2x^2)^6}$$

$$3 \quad f'(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 7x + 1)^{\frac{1}{2}}(2x - 7)$$
$$= \frac{3}{2}(2x - 7)\sqrt{x^2 - 7x + 1}$$

$$4 \quad f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{7-x}}$$



5

$$\begin{aligned} f'(x) &= 16(2 + 8x)^3(8) \\ &= 128(2 + 8x)^3 \end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned} f(x) &= (4x - 8)^{-\frac{1}{3}} \\ f'(x) &= -\frac{1}{3}(4x - 8)^{-\frac{4}{3}}(4) \\ &= -\frac{4}{3}(4x - 8)^{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

7

$$f'(x) = \frac{9x^2}{2\sqrt{5 + 3x^3}}$$

8

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2(x - 3)$$

9

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x - x^5)^{\frac{1}{3}} + (4 - x)^2 \\ f'(x) &= \frac{1}{3}(2x - x^5)^{-\frac{2}{3}}(2 - 5x^4) + 2(4 - x)(-1) \\ &= \frac{2 - 5x^4}{3^{\frac{2}{3}}(2x - x^5)^{\frac{2}{3}}} - 8 + 2x \end{aligned}$$

10

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(\sqrt{x} + 5)^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2(\sqrt{x} + 5)^3}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

11

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(2x - 5)^2(2)}{2\sqrt{(2x - 5)^3}} \\ &= \frac{3(2x - 5)^2}{\sqrt{(2x - 5)^3}} = 3\sqrt{2x - 5} \end{aligned}$$

12

$$f'(x) = 5(2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^4(6x^2 - 6x + 4)$$



13

$$f(x) = (4x + 1)^{-2}$$

$$f'(x) = -2(4x + 1)^{-3}(4)$$

$$= \frac{8}{(4x + 1)^3}$$

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{8}{\left(4 \times \frac{1}{4} + 1\right)^3} = -1$$

14

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$f'(3) = \frac{-3}{\sqrt{25 - (3)^2}} = -\frac{3}{4}$$

15

$$\frac{dy}{du} = 10u + 3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (10u + 3) \times 3x^2$$

$$= (10(x^3 + 1) + 3) \times 3x^2$$

$$= (10x^3 + 13) \times 3x^2$$

$$= 30x^5 + 39x^2$$



$$y = (2u + 5)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{3}(2u + 5)^{-\frac{2}{3}}(2) = \frac{2}{3}(2u + 5)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2u + 5)^2}}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 1$$

16 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2u + 5)^2}} \times (2x - 1)$$

$$= \frac{2(2x - 1)}{3\sqrt[3]{(2(x^2 - x) + 5)^2}}$$

$$= \frac{4x - 2}{3\sqrt[3]{(2x^2 - 2x + 5)^2}}$$

$$\frac{dy}{du} = 6u - 5$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

17 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$$= (6u - 5) \times (2x)$$

$$= (6(x^2 - 1) - 5) \times (2x)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = (6(4 - 1) - 5) \times (4) = 52$$



$$\frac{dy}{du} = 3(1 + u^2)^2(2u) = 6u(1 + u^2)^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 6u(1 + u^2)^2 \times (2)$$

$$= 12(2x - 1)(1 + (2x - 1)^2)^2$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 12(2 - 1)(1 + (2 - 1)^2)^2 = 48$$

$$19 \quad C'(x) = \frac{1000(2x - 0.1)}{2\sqrt{x^2 - 0.1x}} = \frac{2000x - 100}{2\sqrt{x^2 - 0.1x}} = \frac{1000x - 50}{\sqrt{x^2 - 0.1x}}$$

$$20 \quad C'(20) = \frac{1000(20) - 50}{\sqrt{(20)^2 - 0.1(20)}} = \frac{19950}{\sqrt{398}} \approx 1000$$

$$21 \quad N(t) = 400(1 - 3(t^2 + 2)^{-2})$$

$$N'(t) = 400(6(t^2 + 2)^{-3}(2t)) = \frac{4800t}{(t^2 + 2)^3}$$

$$N'(1) = \frac{4800}{(1 + 2)^3} \approx 178$$

$$22 \quad N'(4) = \frac{4800(4)}{(16 + 2)^3} \approx 3$$

$$f'(x) = g'(h(x)) \times h'(x)$$

$$23 \quad f'(3) = g'(h(3)) \times h'(3)$$

$$= g'(2) \times -2$$

$$= 6 \times -2 = -12$$

$$f'(x) = 3(h(x))^2 \times h'(x)$$

$$24 \quad f'(3) = 3(h(3))^2 \times h'(3)$$

$$= 3(2)^2 \times -2 = -24$$



$$h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

$$h'(2) = f'(g(2)) \times g'(2)$$

$$= f'(3) \times -1$$

نجد مشتقة f ونحسب $f'(3)$

$$f(u) = u^2 - 1 \rightarrow f'(u) = 2u \rightarrow f'(3) = 2 \times 3 = 6$$

$$h'(2) = f'(3) \times -1$$

$$= 6 \times -1 = -6$$

إذن،

$$y = (x^2 - 4)^5$$

$$0 = (x^2 - 4)^5 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0$$

$$\rightarrow x = 2 \text{ أو } x = -2$$

$$26 \quad \frac{dy}{dx} = 5(x^2 - 4)^4(2x) = 10x(x^2 - 4)^4$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = 10(2)(2^2 - 4)^4 = 0$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-2} = 10(-2)((-2)^2 - 4)^4 = 0$$

27

$p(x)$ هو الاقتران الوحيد الذي يمكن اشتقاقه بدون تطبيق قاعدة السلسلة

$$f(x) = (2x + (x^2 + x)^4)^{\frac{1}{3}}$$

$$28 \quad f'(x) = \frac{1}{3}(2x + (x^2 + x)^4)^{-\frac{2}{3}}(2 + 4(x^2 + x)^3(2x + 1))$$

$$= \frac{2 + 4(x^2 + x)^3(2x + 1)}{3\sqrt[3]{(2x + (x^2 + x)^4)^2}}$$



الدرس الثاني: مشتقتا الضرب والقسمة

مسألة اليوم صفحة 64

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= \frac{(8+t^3)(3t^2) - (t^3)(3t^2)}{(8+t^3)^2} \\ &= \frac{24t^2 + 3t^5 - 3t^5}{(8+t^3)^2} \\ &= \frac{24t^2}{(8+t^3)^2}\end{aligned}$$

أتحقق من فهمي صفحة 65

a

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x^3 + 4)(14x - 4) + (7x^2 - 4x)(3x^2) \\ &= 14x^4 - 4x^3 + 56x - 16 + 21x^4 - 12x^3 \\ &= 35x^4 - 16x^3 + 56x - 16\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\sqrt{x} + 1)(3) + (3x - 2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= 3\sqrt{x} + 3 + \frac{3x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= 3\sqrt{x} + 3 + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{9}{2}\sqrt{x} + 3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

أتحقق من فهمي صفحة 67

a

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(x-2)(3) - (3x+1)(1)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{3x-6-3x-1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{-7}{(x-2)^2}\end{aligned}$$



$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)(-3x^{-4}) - (x^{-3})(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

b

$$= \frac{-3x^{-2} - 3x^{-4} - 2x^{-2}}{(x^2 + 1)^2}$$
$$= \frac{-5x^{-2} - 3x^{-4}}{(x^2 + 1)^2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 68

$$P'(t) = \frac{(2t^2 + 9)(0) - (5)(4t)}{(2t^2 + 9)^2}$$

a

$$= \frac{-20t}{(2t^2 + 9)^2}$$

$$P'(2) = \frac{-40}{(8 + 9)^2} = \frac{-40}{289} \approx -0.14$$

b

يتناقص عدد السكان بمعدل 140 نسمة لكل سنة بعد سنتين من الآن

أتحقق من فهمي صفحة 70

$$f'(x) = \frac{-(1)(-3x^2)}{(1 - x^3)^2}$$

a

$$= \frac{3x^2}{(1 - x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(3)(2)}{(2x + 1)^2}$$

b

$$= \frac{-6}{(2x + 1)^2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 71

$$f'(x) = (20x) \times 6(4x^3 - 1)^5(12x^2) + (4x^3 - 1)^6(20)$$
$$= 1440x^3(4x^3 - 1)^5 + 20(4x^3 - 1)^6$$

a



b

$$f'(x) = \frac{(x+2)^4(2x) - (x^2-1) \times 4(x+2)^3 \times 1}{(x+2)^8}$$
$$= \frac{2x(x+2)^4 - 4(x^2-1)(x+2)^3}{(x+2)^8}$$

أُتدرب وأحل المسائل صفحة 71

1

$$f'(x) = (4x-1)(2x) + (x^2-5)(4)$$
$$= 8x^2 - 2x + 4x^2 - 20$$
$$= 12x^2 - 2x - 20$$

2

$$f'(x) = \frac{(x+1)(1) - (x+3)(1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{-2}{(x+1)^2}$$

3

$$f'(x) = \frac{(2x-7)(2x) - (x^2+6)(2)}{(2x-7)^2}$$
$$= \frac{4x^2 - 14x - 2x^2 - 12}{(2x-7)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 14x - 12}{(2x-7)^2}$$

4

$$f'(x) = \frac{(2x-1)^2(6x) - (3x^2) \times 2(2x-1)(2)}{(2x-1)^4}$$
$$= \frac{6x(2x-1)^2 - 12x^2(2x-1)}{(2x-1)^4}$$

5

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{5x+3})(6) - (6x)\left(\frac{5}{2\sqrt{5x+3}}\right)}{5x+3}$$

6

$$f'(x) = x \times 5(1+3x)^4(3) + (1+3x)^5(1)$$
$$= 15x(1+3x)^4 + (1+3x)^5$$



7

$$f'(x) = (2x + 1)^5 \times 4(3x + 2)^3(3) + (3x + 2)^4 \times 5(2x + 1)^4 \times 2$$

$$= 12(2x + 1)^5(3x + 2)^3 + 10(3x + 2)^4(2x + 1)^4$$

8

$$f'(x) = \frac{-(1)(2)}{(5 + 2x)^2} - 8x^3$$

$$= \frac{-2}{(5 + 2x)^2} - 8x^3$$

9

$$f'(x) = (x + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + (\sqrt{x-1})(1)$$

$$= \frac{x+1}{2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1}$$

10

$$f'(x) = \frac{-8\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1 + \sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{-\frac{4}{\sqrt{x}}}{(1 + \sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}$$

11

$$f'(x) = \frac{(-5)(2)(x+2)(1)}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{-10}{(x+2)^3}$$

12

$$f'(x) = \left(x + \frac{2}{x}\right)(2x) + (x^2 - 3)\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$$

$$= 2x^2 + 4 + x^2 - 3 - 2 + \frac{6}{x^2}$$

$$= 3x^2 - 1 + \frac{6}{x^2}$$

13

$$f'(x) = (8x + \sqrt{x})(10x) + (5x^2 + 3)\left(8 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$



14

$$f(x) = 5x - 25 + 50x^{-2} - 10x^{-3}$$

$$f'(x) = 5 - 100x^{-3} + 30x^{-4}$$

15

$$f'(x) = (x^2) \times 3(3x - 1)^2 \times 3 + (3x - 1)^3(2x)$$

$$f'(1) = (1)3(3 - 1)^2 \times 3 + (3(1) - 1)^3(2(1)) = 36 + 16 = 52$$

16

$$f'(4) = \frac{(3 \times 4)(-1)}{2\sqrt{5-4}} + (\sqrt{5-4})(3)$$

$$= \frac{-12}{2 \times 1} + 1 \times 3 = -6 + 3 = -3$$

17

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(1) - (x-1)(2)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(2) = \frac{(4+1)(1) - (2-1)(2)}{(4+1)^2} = \frac{3}{25}$$

18

$$f'(x) = \frac{-9(-6x^2)}{(1-2x^3)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{-9(-6)}{(1+2)^2} = \frac{54}{9} = 6$$

19

$$S'(t) = \frac{(4 + 0.3t)(2000) - 2000t(0.3)}{(4 + 0.3t)^2}$$

$$= \frac{8000}{(4 + 0.3t)^2}$$

20

$$t = 2030 - 2020 = 10$$
$$S'(10) = \frac{8000}{(4 + 3)^2} = \frac{8000}{49} \approx 163$$

يتزايد إجمالي المبيعات بمقدار 163 ألف دينار لكل سنة في عام 2030م.

21

$$P'(t) = 12(2t^2 + 100)(1) + (t + 20) \times 12(4t)$$

$$= 12(2t^2 + 100) + 48t(t + 20)$$



22

$$P'(6) = 12(2(36) + 100) + 48(6)(6 + 20) = 9552$$

يتزايد عدد السكان بمعدل 9552 نسمة كل سنة بعد 6 سنوات من الآن.

23

$$M'(t) = \frac{(t + 1.9)(5.8) - (5.8t)(1)}{(t + 1.9)^2}$$
$$= \frac{11.02}{(t + 1.9)^2}$$

$$M'(5) = \frac{11.02}{(5 + 1.9)^2} \approx 0.23$$

$$\frac{dy}{du} = u \times 3(u^2 + 3)^2(2u) + (u^2 + 3)^3(1)$$
$$= 6u^2(u^2 + 3)^2 + (u^2 + 3)^3$$

$$\frac{du}{dx} = 2(x + 3)(1) = 2x + 6$$

عندما $x = -2$ ، فإن $u = (-2 + 3)^2 = 1$

24

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-2} = \left. \frac{dy}{du} \right|_{u=1} \times \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=-2}$$

$$\left. \frac{dy}{du} \right|_{u=1} = 6(1 + 3)^2 + (1 + 3)^3 = 96 + 64 = 160$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=-2} = 2(-2) + 6 = 2$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-2} = 160 \times 2 = 320$$



$$\frac{dy}{du} = \frac{(u+1) \times 3u^2 - u^3(1)}{(u+1)^2} = \frac{2u^3 + 3u^2}{(u+1)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = 3(x^2 + 1)^2(2x) = 6x(x^2 + 1)^2$$

عندما $x = 1$ ، فإن $u = (1^2 + 1)^3 = 8$

25
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \left. \frac{dy}{du} \right|_{u=8} \times \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1}$$

$$\left. \frac{dy}{du} \right|_{u=8} = \frac{2(8^3) + 3(8^2)}{(8+1)^2} = \frac{1216}{81}$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = 6(1)(1^2 + 1)^2 = 24$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \frac{1216}{81} \times 24 = \frac{9728}{27}$$

26
$$(fg)'(x) = (f \times g)'(x)$$

$$= f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)$$

$$(fg)'(2) = f(2) \times g'(2) + g(2) \times f'(2)$$

$$= 4 \times 2 + 3 \times -1 = 5$$

27
$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(2) = \frac{g(2) \times f'(2) - f(2) \times g'(2)}{(g(2))^2} = \frac{3 \times -1 - 4 \times 2}{(3)^2} = -\frac{11}{9}$$

28
$$(3f + fg)'(x) = 3f'(x) + f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)$$

$$(3f + fg)'(2) = 3f'(2) + f(2) \times g'(2) + g(2) \times f'(2)$$

$$= 3 \times -1 + 4 \times 2 + 3 \times -1 = 2$$

29
$$f'(x) = (x(4x-3)^6) \times 9(1-4x)^8(-4) + (1-4x)^9 \times (x \times 6(4x-3)^5(4) + (4x-3)^6 \times (1))$$

$$f'(x) = -36x(4x-3)^6(1-4x)^8 + (1-4x)^9(24x(4x-3)^5 + (4x-3)^6)$$



$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{x^2+7x+10} \\
 &= \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{(x+5)(x+2)} \\
 &= \frac{2x(x+2)}{(x+5)(x+2)} + \frac{6x}{(x+5)(x+2)} \\
 &= \frac{2x^2+10x}{(x+5)(x+2)} \\
 &= \frac{2x(x+5)}{(x+5)(x+2)} \\
 &= \frac{2x}{x+2}
 \end{aligned}$$

30

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(x+2)(2) - (2x)(1)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} \\
 f'(3) &= \frac{4}{(3+2)^2} = \frac{4}{25}
 \end{aligned}$$

31

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(\sqrt{x})(2) - (2x+8)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} \\
 0 &= \frac{(\sqrt{x})(2) - (2x+8)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} \\
 (\sqrt{x})(2) - (2x+8)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) &= 0
 \end{aligned}$$

32

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{x} - \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} &= 0 \\
 \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} &= 0 \\
 \sqrt{x} &= \frac{4}{\sqrt{x}} \\
 x &= 4
 \end{aligned}$$



الدرس الثالث: مشتقتا الاقتران الأسي والطبيعي والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

مسألة اليوم صفحة 73

$$N = 10000(1 - e^{-0.15d})$$
$$N'(d) = 10000(0.15e^{-0.15d})$$
$$= 1500e^{-0.15d}$$

أتحقق من فهمي صفحة 74

a $f'(x) = 2e^x$

b $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + e^x$
 $= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + e^x$

c $\frac{dy}{dx} = xe^x + e^x$

أتحقق من فهمي صفحة 75

a $f'(x) = 7e^{7x+1}$

b $f'(x) = 3x^2e^{x^3}$

c $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

أتحقق من فهمي صفحة 76

a $P'(t) = 50(-0.004)e^{-0.004t} = -0.2e^{-0.004t}$
 $P'(500) = -0.2e^{-0.004(500)} = -0.2e^{-2} \approx -0.03$

تتناقص الطاقة المتبقية بمعدل 0.03 واط لكل يوم بعد 500 يوم

أتحقق من فهمي صفحة 78

a $f'(x) = \frac{4}{x}$

b $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$



c

$$f'(x) = \frac{(x) \left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(1)}{x^2}$$
$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 80

a

$$f'(x) = \frac{8}{8x} = \frac{1}{x}$$

b

$$f'(x) = 2 \times \frac{7x^6}{x^7} = \frac{14}{x}$$

c

$$f'(x) = \frac{9}{9x+2}$$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 80

1

$$f'(x) = 2e^x$$

2

$$f'(x) = 3e^{3x+9}$$

3

$$f'(x) = (x^2 + 3x - 9)(e^x) + (e^x)(2x + 3)$$

4

$$f'(x) = \frac{x^4 e^x - e^x(4x^3)}{x^8}$$
$$= \frac{x^4 e^x - 4x^3 e^x}{x^8}$$

5

$$f'(x) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

6

$$f'(x) = \frac{(1 + e^x)(e^x) - e^x(e^x)}{(1 + e^x)^2}$$
$$= \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$

7

$$f'(x) = (e^x + 2)(e^x) + (e^x - 1)(e^x) = 2e^{2x} + e^x$$



8

$$f'(x) = (e^{-2x}) \times 5(2x - 1)^4 \times 2 + (2x - 1)^5(-2e^{-2x})$$
$$= 10e^{-2x}(2x - 1)^4 - 2e^{-2x}(2x - 1)^5$$

9

$$f'(x) = 3x^2 - 5 \times 2e^{2x}$$
$$= 3x^2 - 10e^{2x}$$

10

$$f'(x) = \frac{3}{x}$$

11

$$f'(x) = (x^3) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)(3x^2)$$
$$= x^2 + 3x^2 \ln x$$

12

$$f'(x) = \frac{x^2 \left(\frac{1}{x} \right) - (\ln x)(2x)}{x^4}$$
$$= \frac{x - 2x \ln x}{x^4}$$

13

$$f'(x) = (x^2) \left(\frac{4}{4x} \right) + (\ln(4x))(2x)$$
$$= x + 2x \ln(4x)$$

14

$$f'(x) = \frac{\frac{(x)(1) - (x+1)(1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{x(x+1)}$$

15

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2-1}$$

16

$$f'(x) = 4(\ln x)^3 \times \frac{1}{x} = \frac{4(\ln x)^3}{x}$$

17

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-5}$$

18

$$f'(x) = (x^4) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)(4x^3) - \frac{1}{2}e^x = x^3 + 4x^3 \ln x - \frac{1}{2}e^x$$



19

$$f'(x) = (e^{2x})\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(2e^{2x})$$
$$= \frac{e^{2x}}{x} + 2e^{2x} \ln x$$

20

$$f'(x) = (\ln 3x)\left(\frac{7}{7x}\right) + (\ln 7x)\left(\frac{3}{3x}\right)$$
$$= \frac{\ln 3x + \ln 7x}{x}$$

21

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$$

22

$$f'(x) = (e^{2x-1})\left(\frac{2}{2x-1}\right) + (\ln(2x-1))(2e^{2x-1})$$
$$f'(1) = (e^{2-1})\left(\frac{2}{2-1}\right) + (\ln(2-1))(2e^{2-1}) = 2e + 0 = 2e$$

23

$$f'(x) = \frac{x\left(\frac{2x}{x^2}\right) - (\ln x^2)(1)}{x^2} = \frac{2 - \ln x^2}{x^2}$$
$$f'(4) = \frac{2 - \ln 16}{16}$$

24

$$P'(t) = \frac{-100 \times -e^{3-t}}{(1 + e^{3-t})^2} = \frac{100e^{3-t}}{(1 + e^{3-t})^2}$$
$$P'(3) = \frac{100e^{3-3}}{(1 + e^{3-3})^2} = \frac{100}{4} = 25$$

25

$$m'(t) = (t)\left(\frac{1}{t}\right) + (\ln t)(1)$$
$$= 1 + \ln t$$



$$\frac{dy}{du} = 2e^{2u}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 2e^{2u} \times 2x$$

$$= 4xe^{2u}$$

$$= 4xe^{2(x^2+1)}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u+1}$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u+1} \times e^x$$

$$= \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{kx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{3x}) \left(7 \times \frac{1}{x} - 3x^2 \right) - (7 \ln x - x^3)(3e^{3x})}{(e^{3x})^2}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \frac{(e^3)(7 \times 1 - 3) - (7 \ln 1 - 1)(3e^3)}{(e^3)^2}$$

$$= \frac{4e^3 + 3e^3}{(e^3)^2}$$

$$= \frac{7e^3}{(e^3)^2}$$

$$= \frac{7}{e^3}$$



الدرس الرابع: مشتقتا اقتران الجيب واقتران جيب التمام

مسألة اليوم صفحة 82

$$P(t) = 100 + 20 \sin 2\pi t$$

$$\frac{dP}{dt} = 40\pi \cos 2\pi t$$

أتحقق من فهمي صفحة 83

a $f'(x) = \cos x$

b $f'(x) = 3 + \sin x$

c $f'(x) = 3 \cos x - 2 \sin x$

أتحقق من فهمي صفحة 84

a $f'(x) = (e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x) = -e^x \sin x + e^x \cos x$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)(1 - \sin x) - (x + \cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}$$

b $= \frac{\sin x - \sin^2 x - x \cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

$$= \frac{\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x) - x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x - 1 - x \cos x}{\sin^2 x}$$

أتحقق من فهمي مثال 3 صفحة 86

a $f'(x) = -5 \sin 5x$

b $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

c $f'(x) = \frac{-3 \sin 3x}{\cos 3x}$



تحقق من فهمي مثال 4 صفحة 86

$$h'(x) = 4 \times \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} t = \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} t$$

أُتدرب وأحل المسائل صفحة 86

$$f'(x) = -2 \sin x + \cos x$$

$$2 \quad f'(x) = -\sin x$$

$$3 \quad f'(x) = \cos x + \sin x$$

$$4 \quad f'(x) = (x)(\cos x) + (\sin x)(1) \\ = x \cos x + \sin x$$

$$5 \quad f'(x) = (\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x) \\ = -\sin^2 x + \cos^2 x$$

$$6 \quad f'(x) = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x) \\ = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$7 \quad f'(x) = \frac{(\cos x)(e^x) - (e^x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{\cos^2 x}$$

$$8 \quad f'(x) = 2x \cos(x^2 + 1)$$

$$9 \quad f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$10 \quad f'(x) = -5 \sin(5x - 2)$$

$$11 \quad f'(x) = 3 \cos 3x - 6 \sin 6x$$

$$12 \quad f'(x) = -(2x - 3) \sin(x^2 - 3x - 4)$$

$$13 \quad f'(x) = (e^{2x})(10 \cos 10x) + (\sin 10x)(2e^{2x}) \\ = 10e^{2x} \cos 10x + 2e^{2x} \sin 10x$$

$$14 \quad f'(x) = (\cos x^2) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)(-2x \sin x^2) \\ = \frac{1}{x} (\cos x^2) - 2x (\ln x) \sin x^2$$



15	$f'(x) = (\sqrt{x+1}) \left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \right) + \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right)$
16	$f(x) = 4(\sin x)^2$ $f'(x) = 4 \times 2(\sin x)(\cos x) = 8\sin x \cos x$
17	$f(x) = (\cos 2x)^3(\cos x)$ $f'(x) = (\cos 2x)^3(-\sin x) + (\cos x) \times 3(\cos 2x)^2 \times -2 \sin 2x$ $= -(\cos 2x)^3(\sin x) - 6(\cos x)(\cos 2x)^2 \sin 2x$
18	$f'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} = \frac{5}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}$
19	$f'(x) = 2(\cos 2x - \sin x)(-2 \sin 2x - \cos x)$
20	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + \frac{2 \cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$
21	$f'(x) = \frac{(\sin x) \left(2(\ln x) \times \frac{1}{x} \right) - (\ln x)^2(\cos x)}{\sin^2 x}$ $= \frac{2 \sin x \ln x - x \cos x (\ln x)^2}{x \sin^2 x}$
22	$D'(t) = 400 \times 0.4 \cos 0.4t = 160 \cos 0.4t$
23	$H'(t) = 2.4 \times \frac{2\pi}{365} \cos \left(\frac{2\pi}{365}(t-80) \right) = \frac{4.8\pi}{365} \cos \left(\frac{2\pi}{365}(t-80) \right)$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (1 - ((\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)))$$

$$= \frac{1}{2} (1 - (-\sin^2 x + \cos^2 x))$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \sin^2 x - \cos^2 x)$$

$$= \frac{1}{2} (\sin^2 x + 1 - \cos^2 x)$$

$$= \frac{1}{2} (\sin^2 x + \sin^2 x)$$

$$= \frac{1}{2} (2 \sin^2 x)$$

$$= \sin^2 x$$

$$f(x) = (e^x \cos x)(\sin x)^2$$

$$25 \quad f'(x) = (e^x \cos x)(2(\sin x)^1 \cos x) + (\sin x)^2((e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x))$$

$$= 2e^x \sin x (\cos x)^2 - e^x (\sin x)^3 + e^x \cos x (\sin x)^2$$

$$26 \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$



اختبار نهاية الوحدة الثانية

1	D
2	B
3	a
4	C
5	C
6	A
7	b
8	$(fg)'(x) = (f(x))(g'(x)) + (g(x))(f'(x))$ $(fg)'(2) = (f(2))(g'(2)) + (g(2))(f'(2))$ $= (3)(2) + (1)(-4) = 2$
9	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(g(x))(f'(x)) - (f(x))(g'(x))}{(g(x))^2}$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{(g(2))(f'(2)) - (f(2))(g'(2))}{(g(2))^2}$ $= \frac{(1)(-4) - (3)(2)}{(1)^2} = -10$
10	$(3f - 4fg)'(x) = 3f'(x) - 4((f(x))(g'(x)) + (g(x))(f'(x)))$ $(3f - 4fg)'(2) = 3f'(2) - 4((f(2))(g'(2)) + (g(2))(f'(2)))$ $= 3(-4) - 4((3)(2) + (1)(-4))$ $= -12 - 4(2)$ $= -20$
11	$h'(t) = 0.12 \times 0.1e^{0.1t}$ $= 0.012e^{0.1t}$



12	$h'(3) = 0.012e^{0.1(3)} \approx 0.016$
13	$f'(x) = \frac{(3x+1)(1) - (x)(3)}{(3x+1)^2} = \frac{1}{(3x+1)^2}$ $f'(1) = \frac{1}{(3(1)+1)^2} = \frac{1}{16}$
14	$f'(x) = (x^2+2)\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (x+\sqrt{x})(2x)$ $f'(4) = (4^2+2)\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{4}}\right) + (4+\sqrt{4})(2 \times 4) = 18\left(1 + \frac{1}{4}\right) + 6(8) = 70.5$
15	$f'(x) = 3e^{3x} - 3e^{-3x}$ $f'(1) = 3e^3 - 3e^{-3}$
16	$f'(x) = -2x$ $f'(20) = -2(20) = -40$
17	$f'(x) = (x^2)(3)(3x-1)^2(3) + (3x-1)^3(2x)$ $f'(1) = (1)(3)(3-1)^2(3) + (3-1)^3(2)$ $= 36 + 16 = 52$
18	$f'(x) = (x+3)^2(3e^{3x}) + (e^{3x})(2)(x+3)(1)$ $f'(2) = (2+3)^2(3e^6) + (e^6)(2)(2+3)(1)$ $= 75e^6 + 10e^6$ $= 85e^6$
19	$f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ $f'(e) = \frac{3}{e} - \frac{1}{e^2}$
20	$f'(x) = \frac{8x^3}{2\sqrt{2x^4+7}}$



21

$$f'(x) = \frac{-1 \times 5(x^2 + 16)^4(2x)}{(x^2 + 16)^{10}}$$
$$= \frac{-10x}{(x^2 + 16)^6}$$

22

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 5x + 2)^{-\frac{3}{4}}(2x - 5)$$
$$= \frac{2x - 5}{4\sqrt[4]{(x^2 - 5x + 2)^3}}$$

23

$$f'(x) = -40(8x^2 - 6)^{-41}(16x)$$
$$= -640x(8x^2 - 6)^{-41}$$

24

$$f'(x) = \frac{-1 \times 2}{(3 + 2x)^2} = \frac{-2}{(3 + 2x)^2}$$

25

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)(3x^2) - (x^3)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$
$$= \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

26

$$f'(x) = (2x - 8)^2(6x) + (3x^2 - 4)(2)(2x - 8)^1(2)$$
$$= 6x(2x - 8)^2 + 4(3x^2 - 4)(2x - 8)$$

27

$$f'(x) = x^5(6x + 4) + (3x^2 + 4x - 7)(5x^4)$$
$$= 6x^6 + 4x^5 + 15x^6 + 20x^5 - 35x^4$$
$$= 21x^6 + 24x^5 - 35x^4$$

حل آخر:

$$f(x) = 3x^7 + 4x^6 - 7x^5$$
$$f'(x) = 21x^6 + 24x^5 - 35x^4$$

28

$$f'(x) = (x^3)(4)(2x + 6)^3(2) + (2x + 6)^4(3x^2)$$
$$= 8x^3(2x + 6)^3 + 3x^2(2x + 6)^4$$



29	$f'(x) = 3(e^{-x} + e^x)^2(-e^{-x} + e^x)$
30	$f'(x) = (2x^3)(-e^{-x}) + (e^{-x})(6x^2)$ $= -2x^3e^{-x} + 6x^2e^{-x}$
31	$f'(x) = \frac{(x+1)(e^x) - (e^x)(1)}{(x+1)^2}$ $= \frac{xe^x}{(x+1)^2}$
32	$f'(x) = 5 \times \frac{5}{5x-4} = \frac{25}{5x-4}$
33	$f'(x) = \frac{e^x}{e^x} = 1$
34	$f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x-1}$
35	$f'(x) = (x^5)(3 \cos 3x) + (\sin 3x)(5x^4)$ $= 3x^5 \cos 3x + 5x^4 \sin 3x$
36	$f(x) = (\cos x)^2 + \sin x$ $f'(x) = 2(\cos x)^1(-\sin x) + \cos x$ $= -2 \cos x \sin x + \cos x$
37	$f'(x) = \frac{(x) \left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \right) - (\sqrt{\cos x})(1)}{x^2} = \frac{-\sin x}{2x\sqrt{\cos x}} - \frac{\sqrt{\cos x}}{x^2}$
38	$f'(x) = (\sin 5x) \left(\frac{-\sin x}{\cos x} \right) + (\ln(\cos x))(5 \cos 5x)$
39	$f'(x) = \frac{-1 \times 2x}{(x^2+9)^2} \times \frac{x^2+9}{1} = \frac{-2x}{x^2+9}$



40

$$f'(x) = (e^{2x})(2 \cos 2x) + (\sin 2x)(2e^{2x})$$
$$= 2e^{2x} \cos 2x + 2e^{2x} \sin 2x$$

41

$$N'(t) = 1000 \left(\frac{3 \times 2t}{(t^2 + 50)^2} \right) = \frac{6000t}{(t^2 + 50)^2}$$

42

$$N'(1) = \frac{6000}{(1 + 50)^2} \approx 2.3$$

43

$$P'(t) = \frac{-2000 \times 4}{(4t + 80)^2} = \frac{-8000}{(4t + 80)^2}$$

44

$$P'(10) = \frac{-8000}{(40 + 80)^2} \approx -0.56$$

يتناقص عدد الغزلان بمعدل 0.56 غزال كل شهر بعد 10 أشهر من الآن

45

$$P'(t) = \frac{-700 \times 2t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{-1400t}{(t^2 + 1)^2}$$

46

$$P'(3) = \frac{-1400 \times 3}{(9 + 1)^2} = -42$$

يتناقص عدد السكان بمعدل 42 ألف شخص لكل سنة بعد 3 سنوات.



إجابات كتاب الطالب - مادة الرياضيات - الصف الثاني الثانوي الأدبي ف1

الوحدة الثالثة: تطبيقات التفاضل

الدرس الأول: المماس والعمودي على المماس

مسألة اليوم صفحة 92

1 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'(1) = -\frac{1}{1} = -1$

ميل المنحنى عند النقطة (1,1) هو:

2 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - 2} = -1$

3 نلاحظ أن ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة (1, 1) وميل المستقيم L متساويان، أي أن ميل المنحنى عند أي نقطة عليه يساوي ميل مماس المنحنى عند تلك النقطة.

أتحقق من فهمي صفحة 93

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f'(3) = 27 - 18 + 2 = 11$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ معادلة المماس:

$y - 5 = 11(x - 3)$ بتعويض $(x_1, y_1) = (3, 5), m = 11$

$y - 5 = 11x - 33$

$y = 11x - 28$

أتحقق من فهمي صفحة 94

$f(1) = \frac{2-1}{1} = 1 \rightarrow (1, 1)$

$f'(x) = \frac{(x)(2) - (2x-1)(1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$

$f'(1) = \frac{1}{1^2} = 1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ معادلة المماس:

$y - 1 = 1(x - 1)$ بتعويض $(x_1, y_1) = (1, 1), m = 1$

$y - 1 = x - 1$

$y = x$



أتحقق من فهمي صفحة 96

$$f(x) = 1 - \sqrt{x}, f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

a $2\sqrt{x} = 4$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

$$f(4) = 1 - \sqrt{4} = -1$$

نقطة التماس هي $(4, -1)$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2, f'(x) = 0$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$0 = -3x^2 + 6x$$

$$3x(-x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ or } x = 2$$

$$f(0) = -2$$

$$f(2) = -8 + 12 - 2 = 2$$

نقطتا التماس هما $(0, -2), (2, 2)$

أتحقق من فهمي صفحة 97

$$f(x) = \ln x^3, (1, 0)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$$

$$f'(1) = \frac{3}{1} = 3$$

ميل المماس هو 3 إذن ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{3}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة العمودي على المماس

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

بتعويض $(x_1, y_1) = (1, 0), m = -\frac{1}{3}$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$



أُتدرب وأُحل المسائل صفحة 98

$$f(x) = x^3 - 6x + 3, (2, -1), f(2) = -1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

$$f'(2) = 12 - 6 = 6$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المماس:

$$y - (-1) = 6(x - 2)$$

$$y + 1 = 6x - 12$$

$$y = 6x - 13$$

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3}{x} = \frac{x^4}{x} - \frac{3x^3}{x} = x^3 - 3x^2, (1, -2), f(1) = -2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(1) = 3 - 6 = -3$$

$$2 \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المماس:

$$y - (-2) = -3(x - 1)$$

$$y + 2 = -3x + 3$$

$$y = -3x + 1$$

$$f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1), (1, 0), f(1) = 0$$

$$f'(x) = (\sqrt{x})(2x) + (x^2 - 1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$3 \quad f'(1) = (1)(2) + (0)\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المماس:

$$y - 0 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 2$$



$$f(x) = x + \frac{4}{x}, \quad (-4, -5), \quad f(-4) = -5$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$f'(-4) = 1 - \frac{4}{16} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المماس:

$$y - (-5) = \frac{3}{4}(x + 4)$$

$$y + 5 = \frac{3}{4}x + 3$$

$$y = \frac{3}{4}x - 2$$

$$f(x) = x + e^x, \quad (0, 1), \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = 1 + e^x$$

$$f'(0) = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$$

$$5 \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المماس:

$$y - 1 = 2(x - 0)$$

$$y - 1 = 2x$$

$$y = 2x + 1$$

$$f(x) = \ln(x + e), \quad (0, 1), \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x + e}$$

$$f'(0) = \frac{1}{0 + e} = \frac{1}{e}$$

$$6 \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المماس:

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - 0)$$

$$y - 1 = \frac{1}{e}x$$

$$y = \frac{1}{e}x + 1$$



$$f(x) = \sqrt{x-7}, x = 16$$

$$f(16) = \sqrt{16-7} = 3 \rightarrow (16,3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-7}}$$

$$f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16-7}} = \frac{1}{6}$$

7

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{1}{6}(x - 16)$$

$$y - 3 = \frac{1}{6}x - \frac{8}{3}$$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$$

معادلة المماس:

$$f(x) = (x-1)e^x, x = 1$$

$$f(1) = (1-1)e^1 = 0 \rightarrow (1,0)$$

$$f'(x) = (x-1)e^x + e^x(1) = xe^x$$

8

$$f'(1) = 1e^1 = e$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = e(x - 1)$$

$$y = ex - e$$

معادلة المماس:



$$f(x) = \frac{x+3}{x-3}, x = 4$$

$$f(4) = \frac{4+3}{4-3} = 7 \rightarrow (4, 7)$$

$$f'(x) = \frac{(x-3)(1) - (x+3)(1)}{(x-3)^2} = \frac{-6}{(x-3)^2}$$

$$f'(4) = \frac{-6}{(4-3)^2} = -6$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 7 = -6(x - 4)$$

$$y - 7 = -6x + 24$$

$$y = -6x + 31$$

معادلة المماس:

$$f(x) = (\ln x)^2, x = e$$

$$f(e) = (\ln e)^2 = 1 \rightarrow (e, 1)$$

$$f'(x) = 2(\ln x) \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(e) = 2(\ln e) \left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{2}{e}(x - e)$$

$$y - 1 = \frac{2}{e}x - 2$$

$$y = \frac{2}{e}x - 1$$

معادلة المماس:

9

10



$$f(x) = (3x + 10)^2, (-3, 1)$$

$$f'(x) = 2(3x + 10)^1(3) = 6(3x + 10)$$

$$f'(-3) = 6(-9 + 10) = 6$$

ميل المماس هو 6 إذن ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{6}$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{6}(x + 3)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}, (4, 1)$$

$$f'(x) = \frac{-3 \times \frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}$$

$$f'(4) = \frac{-3 \times \frac{1}{\sqrt{8+1}}}{8+1} = -\frac{1}{9}$$

ميل المماس هو $-\frac{1}{9}$ إذن ميل العمودي على المماس هو 9

معادلة العمودي على المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 9(x - 4)$$

$$y = 9x - 35$$

نلاحظ من الرسم أن المنحنى يقطع المحور x في النقطة $(-4, 0)$ أي أن $f(-4) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x+5}$$

$$f'(-4) = \frac{1}{-4+5} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - 0 = -\frac{1}{1}(x + 4)$$

$$y = -x - 4$$



عند تقاطع المنحنى مع المحور y يكون $x=0$

$$y = \ln(0 + 5) = \ln 5$$

ويكون

نقطة تقاطع المنحنى مع محور y هي : $(0, \ln 5)$



AWAZEL
LEARN 2 BE

14

$$f'(x) = \frac{1}{x+5}$$

$$f'(0) = \frac{1}{0+5} = \frac{1}{5}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \ln 5 = -5(x - 0)$$

$$y = -5x + \ln 5$$

معادلة العمودي على المماس:

$$f(x) = 4e^{2x+1}$$

$$f(-1) = 4e^{-2+1} = \frac{4}{e} \rightarrow \left(-1, \frac{4}{e}\right)$$

$$f'(x) = 8e^{2x+1}$$

$$f'(-1) = 8e^{-2+1} = \frac{8}{e}$$

15

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{4}{e} = \frac{8}{e}(x + 1)$$

$$y - \frac{4}{e} = \frac{8}{e}x + \frac{8}{e}$$

$$y = \frac{8}{e}x + \frac{12}{e}$$

معادلة المماس:



$$y = 4e^{2(0)+1} = 4e \rightarrow (0, 4e)$$

نقطة تقاطع المنحنى مع محور y هي $(0, 4e)$

$$f'(x) = 8e^{2x+1}$$

$$f'(0) = 8e^{0+1} = 8e$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - 4e = -\frac{1}{8e}(x)$$

$$y = -\frac{1}{8e}x + 4e$$

$$f(x) = x^2 - x - 12$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$3 = 2x - 1$$

$$4 = 2x$$

$$x = 2$$

$$f(2) = 4 - 2 - 12 = -10$$

النقطة هي $(2, -10)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المماس:

$$y - (-10) = 3(x - 2)$$

$$y + 10 = 3x - 6$$

$$y = 3x - 16$$

مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

$$0 = 3x^2 - 8x$$

$$x(3x - 8) = 0$$

$$18 \quad x = 0 \quad \text{أو} \quad 3x - 8 = 0 \rightarrow 3x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 - 4 = -4$$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4 = -\frac{364}{27}$$

النقاط هي $(0, -4), \left(\frac{8}{3}, -\frac{364}{27}\right)$



مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2x-1}(1) - (x)\left(\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}\right)}{2x-1}$$

$$0 = \frac{\sqrt{2x-1} - \frac{x}{\sqrt{2x-1}}}{2x-1}$$

19 $\sqrt{2x-1} - \frac{x}{\sqrt{2x-1}} = 0$

$$\sqrt{2x-1} = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$$

$$2x-1 = x$$

$$x = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2-1}} = 1$$

النقطة هي $(1, 1)$

ميل مماس المنحنى يساوي 1 أي $f'(x) = 1$

$$f'(x) = 10x - 49$$

$$1 = 10x - 49$$

20 $10x = 50$

$$x = 5$$

$$f(5) = 5(5)^2 - 49(5) + 12 = 125 - 245 + 12 = -108$$

النقطة هي $(5, -108)$

$$f'(x) = 6 - 2x$$

$$f'(1) = 6 - 2 = 4$$

21 $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 5 = 4(x - 1)$$

$$y - 5 = 4x - 4$$

$$y = 4x + 1$$

معادلة المماس:



$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = \frac{1}{4}(x - 1)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{21}{4}$$

$$f'(x) = -2x$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = 2(x + 1)$$

$$y - 5 = 2x + 2$$

$$y = 2x + 7$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = -2(x - 1)$$

$$y - 5 = -2x + 2$$

$$y = -2x + 7$$

$$2x + 7 = -2x + 7$$

$$4x = 0$$

$$x = 0$$

$$y = -2(0) + 7 = 7$$

معادلة المماس عند النقطة $(-1, 5)$:

معادلة المماس عند النقطة $(1, 5)$:

نقطة تقاطع المماسين هي: $(0, 7)$



$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المماس عند النقطة $(1, 1)$:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$26 \quad y - 1 = -2(x - 1)$$

$$y - 1 = -2x + 2$$

$$y = -2x + 3$$

$$f(x) = \sqrt{x} - 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ميل المستقيم $y = 2x - 1$ هو 2، والمماس يوازيه فميله أيضاً هو 2، إذن:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2$$

$$4\sqrt{x} = 1$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{16}$$

$$f\left(\frac{1}{16}\right) = \sqrt{\frac{1}{16}} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

النقطة هي $\left(\frac{1}{16}, -\frac{3}{4}\right)$



الدرس الثاني: المشتقة الثانية، والسرعة، والتسارع

مسألة اليوم صفحة 100

$$v(t) = t + 15$$

$$t + 15 = 15 \rightarrow t = 0 \text{ s}$$

أتحقق من فهمي صفحة 101

a

$$f'(x) = 4x^3 - 6x - \sin x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6 - \cos x$$

b

$$f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$$

$$f'(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

$$f''(x) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$$

أتحقق من فهمي صفحة 103

a

$$v(t) = 6t - 3t^2$$

$$v(3) = 6(3) - 3(3)^2 = 18 - 27 = -9 \text{ m/s}$$

b

بما أن إشارة السرعة سالبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 3$

c

$$a(t) = 6 - 6t$$

$$a(3) = 6 - 6(3) = -12 \text{ m/s}^2$$

d

$$6t - 3t^2 = 0$$

$$3t(2 - t) = 0$$

$$t = 0 \text{ or } t = 2$$

يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0

أتحقق من فهمي صفحة 104

a

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

$$v(3) = 3(3)^2 - 12(3) + 9 = 27 - 36 + 9 = 0 \text{ m/s}$$

b

$$a(t) = 6t - 12$$

$$a(3) = 6(3) - 12 = 6 \text{ m/s}^2$$



يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0

$$3t^2 - 12t + 9 = 0$$

$$c \quad t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0$$

$$t = 1 \text{ or } t = 3$$

أُتدرب وأحل المسائل صفحة 104

$$1 \quad f'(x) = 9x^2 - 8x + 5$$
$$f''(x) = 18x - 8$$

$$2 \quad f'(x) = 2e^x + 2x$$
$$f''(x) = 2e^x + 2$$

$$3 \quad f'(x) = -2 \sin x - 3x^2$$
$$f''(x) = -2 \cos x - 6x$$

$$4 \quad f'(x) = 4 \left(\frac{1}{x} \right) - 9x^2 = \frac{4}{x} - 9x^2$$
$$f''(x) = -\frac{4}{x^2} - 18x$$

$$5 \quad f'(x) = (x^3)(6)(x+6)^5(1) + (x+6)^6(3x^2)$$
$$= 6x^3(x+6)^5 + 3x^2(x+6)^6$$
$$f''(x) = (6x^3)(5)(x+6)^4 + (x+6)^5(18x^2) + 3x^2(6)(x+6)^5$$
$$+ (x+6)^6(6x)$$
$$= 30x^3(x+6)^4 + 18x^2(x+6)^5 + 18x^2(x+6)^5 + 6x(x+6)^6$$

$$6 \quad f'(x) = (x^7) \left(\frac{1}{x} \right) + (\ln x)(7x^6)$$
$$= x^6 + (\ln x)(7x^6)$$
$$f''(x) = 6x^5 + (\ln x)(42x^5) + (7x^6) \left(\frac{1}{x} \right)$$
$$= 13x^5 + (\ln x)(42x^5)$$


$$7 \quad f'(x) = \frac{(x+2)(1) - (x)(1)}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{-2 \times 2(x+2)(1)}{(x+2)^4} = \frac{-4(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-4}{(x+2)^3}$$

$$8 \quad f'(x) = 2x \cos x^2$$
$$f''(x) = (2x)(-2x \sin x^2) + (\cos x^2)(2) = -4x^2 \sin x^2 + 2 \cos x^2$$



9	$f'(x) = -6x^{-4}$ $f''(x) = 24x^{-5}$
10	$f(x) = x^3 - \frac{5}{x} = x^3 - 5x^{-1}$ $f'(x) = 3x^2 + 5x^{-2}$ $f''(x) = 6x - 10x^{-3}$
11	$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$
12	$f'(x) = -4 + 2x - 3x^2$ $f''(x) = 2 - 6x$
13	$f(x) = 8x^3 - 3x + \frac{4}{x} = 8x^3 - 3x + 4x^{-1}$ $f'(x) = 24x^2 - 3 - 4x^{-2}$ $f''(x) = 48x + 8x^{-3}$ $f''(-2) = 48(-2) + 8(-2)^{-3} = -96 - 1 = -97$
14	$f'(x) = \frac{-2}{(2x-4)^2}$ $f''(x) = \frac{2 \times 2 \times (2x-4)^1 \times 2}{(2x-4)^4} = \frac{8}{(2x-4)^3}$ $f''(3) = \frac{8}{(2(3)-4)^3} = \frac{8}{8} = 1$
15	$f'(x) = 3px^2 - 6px + 1$ $f''(x) = 6px - 6p$ $f''(2) = 6p(2) - 6p$ $-1 = 12p - 6p$ $-1 = 6p$ $p = -\frac{1}{6}$
16	$v(t) = 5t^4 - 40t$ $v(3) = 5(3)^4 - 40(3) = 405 - 120 = 285 \text{ m/s}$
17	بما أن إشارة السرعة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب عندما $t = 3$



18	$a(t) = 20t^3 - 40$ $a(3) = 20(3)^3 - 40 = 540 - 40 = 500 \text{ m/s}^2$	
19	 $5t^4 - 40t = 0$ $5t(t^3 - 8) = 0$ $t = 0 \text{ or } t = 2$	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0
20	$s(t) = \frac{3t}{1+t}$ $v(t) = \frac{(1+t)(3) - (3t)(1)}{(1+t)^2} = \frac{3}{(1+t)^2}$ $v(4) = \frac{3}{(1+4)^2} = \frac{3}{25} = 0.12 \text{ m/s}$	
21		بما أن إشارة السرعة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب عندما $t = 4$
22	$a(t) = \frac{-3 \times 2(1+t)(1)}{(1+t)^4} = \frac{-6}{(1+t)^3}$ $a(4) = \frac{-6}{(1+4)^3} = \frac{-6}{125} = -0.048 \text{ m/s}^2$	
23	$v(t) = 2t - 8$ $v(6) = 2(6) - 8 = 4 \text{ m/s}$	
24	$a(t) = 2$ $a(6) = 2 \text{ m/s}^2$	
25	$2t - 8 = 0 \rightarrow t = 4$	يكون رامي في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(5 - 3x^2)^6(1) - (x)(6)(5 - 3x^2)^5(-6x)}{(5 - 3x^2)^{12}}$$

$$= \frac{(5 - 3x^2)^6 + 36x^2(5 - 3x^2)^5}{(5 - 3x^2)^{12}}$$

$$= \frac{(5 - 3x^2)^6}{(5 - 3x^2)^{12}} + \frac{36x^2(5 - 3x^2)^5}{(5 - 3x^2)^{12}}$$

$$= \frac{5 - 3x^2}{(5 - 3x^2)^7} + \frac{36x^2}{(5 - 3x^2)^7}$$

$$= \frac{5 + 33x^2}{(5 - 3x^2)^7}$$

$$v(t) = 3t^2 - 12$$

$$a(t) = 6t$$

$$27 \quad a(t) = 0 \rightarrow 6t = 0 \rightarrow t = 0$$

$$v(0) = 3(0)^2 - 12 = -12 \text{ m/s}$$

$$v(t) = 6t^2 - 24$$

$$a(t) = 12t$$

$$28 \quad v(t) = 0 \rightarrow 6t^2 - 24 = 0 \rightarrow t^2 = 4 \rightarrow t = 2$$

$$a(2) = 12(2) = 24 \text{ m/s}^2$$



الدرس الثالث: تطبيقات القيم القصوى

مسألة اليوم صفحة 106

$$S = 4xy + x^2$$

$$V = x^2y$$

$$0.2 = x^2y \rightarrow y = \frac{0.2}{x^2}$$

$$S = 4xy + x^2$$

$$S(x) = 4x \left(\frac{0.2}{x^2} \right) + x^2 = \frac{0.8}{x} + x^2$$

$$S'(x) = \frac{-0.8}{x^2} + 2x$$

$$\frac{-0.8}{x^2} + 2x = 0 \rightarrow 2x = \frac{0.8}{x^2} \rightarrow 2x^3 = 0.8 \rightarrow x^3 = 0.4 \rightarrow x = \sqrt[3]{0.4}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{0.4}$

$$S''(x) = \frac{1.6}{x^3} + 2$$

$$S''(\sqrt[3]{0.4}) = \frac{1.2}{(\sqrt[3]{0.4})^3} + 2 = 5 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{0.4}$ ،

وتكون أبعاد الحوض التي تجعل كمية الزجاج المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{0.4} \text{ m} , \quad y = \frac{0.2}{(\sqrt[3]{0.4})^2} \text{ m}$$



أتحقق من فهمي صفحة 108

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

$$3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$(3x + 2)(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{2}{3} \text{ أو } x = 2$$

القيم الحرجة هي: $x = 2$ و $x = -\frac{2}{3}$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6\left(-\frac{2}{3}\right) - 4 = -8 < 0$$

$$f''(2) = 6(2) - 4 = 8 > 0$$

توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -\frac{2}{3}$ وهي $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 5 = \frac{175}{27}$

توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = 8 - 2(4) - 4(2) + 5 = -3$

أتحقق من فهمي صفحة 110

$$A = xy$$

$$P = 2x + 2y$$

$$54 = 2x + 2y$$

$$27 = x + y \rightarrow y = 27 - x$$

$$A = xy$$

$$A(x) = x(27 - x) \\ = 27x - x^2$$

$$A'(x) = 27 - 2x$$

$$27 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{27}{2}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \frac{27}{2}$

$$A''(x) = -2 \rightarrow A''\left(\frac{27}{2}\right) = -2 < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{27}{2}$ ، وتكون أكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة هي:

$$A\left(\frac{27}{2}\right) = \frac{729}{4} = 182.25 \text{ m}^2$$

مساحة المستطيل

محيط المستطيل



أتحقق من فهمي صفحة 111

$$S = 4xh + 2x^2$$

$$V = x^2h$$

$$2 = x^2h$$

$$h = \frac{2}{x^2}$$

$$S = 4xh + 2x^2$$

$$S(x) = 4x\left(\frac{2}{x^2}\right) + 2x^2 = \frac{8}{x} + 2x^2$$

$$S'(x) = \frac{-8}{x^2} + 4x$$

$$\frac{-8}{x^2} + 4x = 0$$

$$\rightarrow 4x = \frac{8}{x^2}$$

$$\rightarrow 4x^3 = 8$$

$$\rightarrow x^3 = 2$$

$$\rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2}$

$$S''(x) = \frac{16}{x^3} + 4$$

$$S''(\sqrt[3]{2}) = \frac{16}{(\sqrt[3]{2})^3} + 4 = 12 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{2}$ ،

وتكون أبعاد الخزان التي تجعل كمية المعدن المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt[3]{2} \text{ m,}$$

$$w = x = \sqrt[3]{2} \text{ m,}$$

$$h = \frac{2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \sqrt[3]{2} \text{ m}$$

المساحة الكلية لسطح الخزان

حجم الخزان





أتحقق من فهمي صفحة 113



$$V = x^2h$$
$$A = 4xh + x^2$$

$$54 = 4xh + x^2 \rightarrow 4xh = 54 - x^2$$

$$\rightarrow h = \frac{54 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2h$$

$$V(x) = x^2 \left(\frac{54 - x^2}{4x} \right)$$
$$= \frac{54x - x^3}{4}$$

$$= \frac{54}{4}x - \frac{1}{4}x^3$$

$$V'(x) = \frac{54}{4} - \frac{3}{4}x^2$$

$$\frac{54}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0 \rightarrow 54 - 3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{54}{3} = 18 \rightarrow x = \pm\sqrt{18}$$

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا، فإنه توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt{18}$

$$V''(x) = -\frac{3}{2}x$$

$$V''(\sqrt{18}) = -\frac{3}{2}\sqrt{18} < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \sqrt{18}$ ، وتكون أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt{18} \text{ m}, \quad w = x = \sqrt{18} \text{ m}, \quad h = \frac{54 - 18}{4\sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{18}} \text{ m}$$



أتحقق من فهمي صفحة 115

$$R(x) = (1750 - 2x)x = 1750x - 2x^2$$

$$C(x) = 2250 + 18x$$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 1750x - 2x^2 - 2250 - 18x \\ = 1732x - 2x^2 - 2250$$

$$P'(x) = 1732 - 4x$$

$$1732 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{1732}{4} = 433$$

$$P''(x) = -4 \rightarrow P''(433) = -4 < 0$$

اقتران الإيراد

اقتران التكلفة

اقتران الربح

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 433$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 433$

ومنه فإنه لتحقيق أكبر ربح ممكن يجب إنتاج وبيع 433 ذلابة.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 116

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0$$

$$\rightarrow 2x = 2$$

$$\rightarrow x = 1$$

1

القيمة الحرجة هي: $x = 1$

$$f''(x) = 2$$

$$f''(1) = 2 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي: $f(1) = 1 - 2 + 5 = 4$

$$f'(x) = 15 - 2x - x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 15 - 2x - x^2 = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$\rightarrow (x + 5)(x - 3) = 0$$

$$\rightarrow x = -5 \text{ أو } x = 3$$

2

القيم الحرجة هي: $x = -5$, $x = 3$

$$f''(x) = -2 - 2x$$

$$f''(-5) = -2 + 10 = 8 > 0$$

$$f''(3) = -2 - 6 = -8 < 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -5$ وهي:

$$f(-5) = 20 - 75 - 25 + \frac{125}{3} = -\frac{115}{3}$$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 3$ وهي: $f(3) = 20 + 45 - 9 - 9 = 47$



$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 4x = 0$$

$$\rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$$

$$\rightarrow x = 0, x = \pm 1$$

القيم الحرجة هي: $x = 0, x = 1, x = -1$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f''(0) = 0 - 4 = -4 < 0$$

$$f''(1) = 12 - 4 = 8 > 0$$

$$f''(-1) = 12 - 4 = 8 > 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي: $f(0) = 0 - 0 - 2 = -2$

و توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ و $x = -1$ هي:

$$f(1) = f(-1) = 1 - 2 - 2 = -3$$

$$P = AB + BC + CD$$

محيط الحديقة من دون الجدار

$$300 = AB + x + AB$$

$$300 = 2AB + x$$

$$300 - x = 2AB$$

$$AB = \frac{300 - x}{2} = 150 - \frac{1}{2}x$$

$$A = BC \times AB$$

مساحة الحديقة المستطيلة

$$A(x) = x \times \left(150 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$= 150x - \frac{1}{2}x^2$$

$$A'(x) = 150 - x$$

$$150 - x = 0$$

$$x = 150$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 150$

$$A''(x) = -1$$

$$A''(150) = -1 < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 150$ ، ويكون بعدا الحديقة اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن

$$\text{هما: } BC = x = 150 \text{ m}, AB = 150 - \frac{1}{2}x = 150 - \frac{1}{2}(150) = 75 \text{ m}$$



7	$V = lwh$ $V(x) = (48 - 2x)(30 - 2x)x, \quad 0 \leq x \leq 15$ $= (1440 - 96x - 60x + 4x^2)x$ $= (1440 - 156x + 4x^2)x$ $= 1440x - 156x^2 + 4x^3$	حجم العلية
8	$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2$ $12x^2 - 312x + 1440 = 0$ $x^2 - 26x + 120 = 0$ $(x - 20)(x - 6) = 0$ $x = 20$ أو $x = 6$	توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 6$ والقيمة $x = 20$ خارج مجال اقتران الحجم. إذ يستحيل قص مربعات طول ضلع كل منها 20 cm من زوايا الورقة التي عرضها 30 cm
9	$p(x) = 150 - 0.035x$ $R(x) = (150 - 0.035x)x = 150x - 0.035x^2$	سعر المنتج الواحد هو اقتران الإيراد
10	$R'(x) = C'(x)$ $150 - 0.07x = 10 + 0.18x$ $150 - 10 = 0.07x + 0.18x$ $140 = 0.25x$ $x = \frac{140}{0.25} = 560$	الإيراد الحدي: $R'(x) = 150 - 0.07x$ التكلفة الحدية: $C'(x) = 10 + 0.18x$



$$P(x) = R(x) - C(x)$$

اقتران الربح

$$= (150x - 0.035x^2) - (16000 + 10x + 0.09x^2)$$

11

$$= 150x - 0.035x^2 - 16000 - 10x - 0.09x^2$$

$$= 140x - 0.125x^2 - 16000$$

$$P'(x) = 140 - 0.250x$$

$$140 - 0.250x = 0$$

$$140 = 0.250x$$

$$x = \frac{140}{0.250} = 560$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 560$

11

$$P''(x) = -0.250$$

$$P''(560) = -0.250 < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 560$ ، فيكون عدد القطع اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن هو

560 قطعة

أكبر ربح ممكن هو:

$$P(560) = 140(560) - 0.125(560)^2 - 16000 = 23200$$

سعر الوحدة الواحدة من المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن

12

$$p(250) = 150 - 0.035(560)$$

$$= 130.4$$



حجم المنشور الثلاثي القائم = مساحة القاعدة المثلثة \times ارتفاع المنشور

مساحة المثلث = نصف طول القاعدة المثلث \times ارتفاع المثلث

$$A_1 = \frac{1}{2}x(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$V = \frac{1}{2}x^2l$$

$$1000 = \frac{1}{2}x^2l$$

$$2000 = x^2l$$

$$l = \frac{2000}{x^2}$$

مساحة سطح القالب = مساحتي القاعدتين المثلثيتين + مساحتي الوجهين المستطيلين اللذين إحدى

حافتيهما ضلع القائمة x

$$A = 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 2(xl) = x^2 + 2xl$$

$$A(x) = x^2 + 2x\left(\frac{2000}{x^2}\right)$$

$$= x^2 + \frac{4000}{x}$$

$$13 \quad A'(x) = 2x - \frac{4000}{x^2}$$

$$2x - \frac{4000}{x^2} = 0$$

$$2x = \frac{4000}{x^2}$$

$$2x^3 = 4000$$

$$x^3 = 2000$$

$$x = \sqrt[3]{2000}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2000}$

$$A''(x) = 2 + \frac{8000}{x^3}$$

$$A''(\sqrt[3]{2000}) = 2 + \frac{8000}{(\sqrt[3]{2000})^3} = 2 + \frac{8000}{2000} = 2 + 4 = 5 > 0$$

توجد قيمة صغرى عندما $x = \sqrt[3]{2000}$

إذن أبعاد القالب التي تجعل المواد المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{2000} \text{ cm}, \quad l = \frac{2000}{x^2} = \frac{2000}{(\sqrt[3]{2000})^2} = \sqrt[3]{2000} \text{ cm}$$



الدرس الرابع: الاشتقاق الضمني والمعدلات المرتبطة

مسألة اليوم صفحة 117

$$\frac{dV}{dt} = 0.5$$

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{r=1}$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$0.5 = \pi(1)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$0.5 = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.5}{\pi} \approx 0.16$$

معدل التغير المعطى:

معدل التغير المطلوب:

العلاقة التي تربط بين حجم الخزان وارتفاعه:

إذن يزداد ارتفاع الوقود في الخزان بمعدل 0.16 m/min تقريبًا

أتحقق من فهمي صفحة 119

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} = -2x$$

a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$10y \frac{dy}{dx} - 2e^x = 4 \frac{dy}{dx}$$

$$10y \frac{dy}{dx} - 4 \frac{dy}{dx} = 2e^x$$

b

$$\frac{dy}{dx} (10y - 4) = 2e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^x}{10y - 4}$$



$$(x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (y)(1) + 2y \frac{dy}{dx} = -4 \sin x$$

$$(x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + 2y \frac{dy}{dx} = -4 \sin x - y$$

$$\frac{dy}{dx} (x + 2y) = -4 \sin x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 4 \sin x}{x + 2y}$$

أتحقق من فهمي صفحة 120

$$x^3 + 2y^3 = 6 \quad \text{Nation, } (2, -1)$$

$$3x^2 + 6y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3(2)^2 + 6(-1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

بتعويض $(x, y) = (2, -1)$

$$12 + 6 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{12}{6} = -2$$

ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(2, -1)$ هو -2
معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = -2(x - 2)$$

$$y + 1 = -2x + 4$$

$$y = -2x + 3$$



أتحقق من فهمي صفحة 121

$$\frac{dr}{dt} = 3$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{r=4} = \frac{4}{3} \pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

معدل التغير المعطى:

معدل التغير المطلوب:

العلاقة التي تربط بين حجم البالون ونصف قطره:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$= 4\pi(4)^2(3)$$

$$= 192\pi$$

إذن يزداد حجم البالون بمعدل $192\pi \text{ cm}^3/\text{s}$ عندما يكون طول نصف قطره 4 cm

أدرب وأحل المسائل صفحة 121

$$2x - 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 \quad 4y \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4y} = \frac{x}{2y}$$

$$2x + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2 \quad 3y^2 \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{3y^2}$$

$$2x + 2 \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3 \quad 2 \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} (2 - 2y) = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2 - 2y} = \frac{-x}{1 - y}$$



4

$$2x \frac{dy}{dx} + 2y - 3 \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx} - 7$$
$$2x \frac{dy}{dx} - 3 \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = -7 - 2y$$
$$\frac{dy}{dx} (2x - 3 - 2y) = -7 - 2y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-7 - 2y}{2x - 3 - 2y}$$

5

$$5y^4 \frac{dy}{dx} = 3x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{5y^4}$$

6

$$(x^2) \left(3y^2 \frac{dy}{dx} \right) + (y^3)(2x) + \frac{dy}{dx} = 0$$
$$3x^2 y^2 \frac{dy}{dx} + 2xy^3 + \frac{dy}{dx} = 0$$
$$3x^2 y^2 \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = -2xy^3$$
$$\frac{dy}{dx} (3x^2 y^2 + 1) = -2xy^3$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^3}{3x^2 y^2 + 1}$$

7

$$\sqrt{x} + \sin y = 16$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{dy}{dx} \cos y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} \cos y = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x} \cos y}$$

8

$$(e^x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (y)(e^x) = (x) \left(\frac{dy}{dx} e^y \right) + (e^y)(1)$$
$$e^x \frac{dy}{dx} - x e^y \frac{dy}{dx} = e^y - y e^x$$
$$\frac{dy}{dx} (e^x - x e^y) = e^y - y e^x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y - y e^x}{e^x - x e^y}$$



9 $\sin x + \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \sin x$$

10 $32y \frac{dy}{dx} - 2x = 0$

$$32y \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{32y} = \frac{x}{16y}$$

11 $2x + 2y \frac{dy}{dx} - 4 + 6 \frac{dy}{dx} = 0$

$$2y \frac{dy}{dx} + 6 \frac{dy}{dx} = 4 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} (2y + 6) = 4 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2x}{2y + 6}$$

12 $9x^2 - 2y \frac{dy}{dx} = 0$

$$9(2)^2 - 2(4) \frac{dy}{dx} = 0$$

بتعويض $(x, y) = (2, 4)$

$$36 - 8 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$8 \frac{dy}{dx} = 36$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$



$$4x - 9y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$4(-2) - 9(1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-8 - 9 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$9 \frac{dy}{dx} = -8$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{8}{9}$$

بتعويض $(x, y) = (-2, 1)$

13

$$2y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$2(1) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2e}$$

بتعويض $(x, y) = (e, 1)$

14

$$2(y - 3)^1 \frac{dy}{dx} = 4$$

$$2(1 - 3)^1 \frac{dy}{dx} = 4$$

$$-4 \frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{-4} = -1$$

بتعويض $(x, y) = (6, 1)$

15

$$4x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$4(3) + 2(4) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$12 + 8 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$8 \frac{dy}{dx} = -12$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$$

بتعويض $(x, y) = (3, 4)$

16

ميل المماس عند النقطة $(3, 4)$ هو $-\frac{3}{2}$



معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{2}(x - 3)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$$

17

$$2y \frac{dy}{dx} + (x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + y + 2x = 0$$

$$2(-2) \frac{dy}{dx} + (3) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (-2) + 2(3) = 0 \quad \text{بتعويض } (x, y) = (3, -2)$$

$$-4 \frac{dy}{dx} + 3 \frac{dy}{dx} - 2 + 6 = 0$$

$$-\frac{dy}{dx} = -4$$

$$\frac{dy}{dx} = 4$$

ميل المماس عند النقطة $(3, -2)$ هو 4

18

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-2) = 4(x - 3)$$

$$y + 2 = 4x - 12$$

$$y = 4x - 14$$

19

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

$$y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 3)$$

$$y + 2 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$$

معادلة العمودي على المماس:

20



$$\frac{dx}{dt} = -6$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{x=30}$$

$$V = x^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

$$= 3(30)^2(-6)$$

$$= -16200$$

معدل التغير المعطى:

معدل التغير المطلوب:

العلاقة التي تربط بين حجم المكعب وطول ضلعه:

21

إذن يتناقص حجم المكعب بمعدل $16200 \text{ cm}^3/\text{s}$ عندما يكون طول ضلعه 30 cm

$$\frac{dr}{dt} = 0.5$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{r=3}$$

$$A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$= 8\pi(3)(0.5)$$

$$= 12\pi$$

معدل التغير المعطى:

معدل التغير المطلوب:

العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة ونصف قطرها:

22

إذن تتزايد مساحة سطح الفقاعة بمعدل $12\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ عندما يكون طول نصف قطرها 3 cm

$$\frac{dr}{dt} = 0.13$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{r=0.45}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$= 4\pi(0.45)^2(0.13)$$

$$= 0.1053\pi$$

معدل التغير المعطى:

معدل التغير المطلوب

العلاقة التي تربط بين حجم الورم ونصف قطره:

23

إذن يزداد حجم الورم بمعدل $0.1053\pi \text{ cm}^3/\text{s}$ عندما يكون طول نصف قطره 0.13 cm



$$x^2 + 6y^2 = 10$$

$$(2)^2 + 6y^2 = 10 \rightarrow 6y^2 = 6 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

$$2x + 12y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y}$$

عند النقطة (2, 1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المماس:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

24

$$y - 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

عند النقطة (2, -1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المماس:

$$y - (-1) = \frac{1}{3}(x - 2)$$

$$y + 1 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$$



$$\ln(xy) = x^2 + y^2$$

$$(x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (y)(1) = 2x + 2y \frac{dy}{dx}$$

$$(x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (y)(1) = 2x^2y + 2xy^2 \frac{dy}{dx}$$

$$25 \quad x \frac{dy}{dx} + y = 2x^2y + 2xy^2 \frac{dy}{dx}$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2xy^2 \frac{dy}{dx} = 2x^2y - y$$

$$\frac{dy}{dx} (x - 2xy^2) = 2x^2y - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y - y}{x - 2xy^2}$$

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{w=64}$$

معدل التغير المطلوب

$$u = 150 \sqrt[3]{w^2}$$

$$u = 150w^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{du}{dt} = 150 \times \frac{2}{3} w^{-\frac{1}{3}} \frac{dw}{dt}$$

26

العلاقة التي تربط u مع w هي:

$$\frac{dw}{dt} = 0.05 \quad \text{نكن } w = 0.05t + 8$$

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{w=64} = 150 \times \frac{2}{3} (64)^{-\frac{1}{3}} (0.05)$$

$$= 150 \times \frac{2}{3} \frac{1}{(64)^{\frac{1}{3}}} (0.05)$$

$$= 150 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} (0.05) = 1.25$$



اختبار نهاية الوحدة الثالثة

1	c
2	d
3	c
4	d
5	a
6	d
7	c
8	$f(x) = x^2 - 7x + 10 \quad (2, 0)$ $f'(x) = 2x - 7$ $f'(2) = 4 - 7 = -3$ $y - 0 = -3(x - 2)$ $y = -3x + 6$ معادلة المماس:
9	$f(x) = x^2 - \frac{8}{\sqrt{x}} \quad (4, 12)$ $f'(x) = 2x + \frac{8 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{x} = 2x + \frac{4}{x\sqrt{x}}$ $f'(4) = 2(4) + \frac{4}{4\sqrt{4}} = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$ $y - 12 = \frac{17}{2}(x - 4)$ $y - 12 = \frac{17}{2}x - 34$ $y = \frac{17}{2}x - 22$ معادلة المماس:



$$f(x) = \frac{2x-1}{x} \quad (1, 1)$$

$$f'(x) = \frac{(x)(2) - (2x-1)(1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$y-1 = 1(x-1)$$

$$y-1 = x-1$$

$$y = x$$

10

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1}} \quad (4, 1)$$

$$f'(x) = \frac{-3 \left(\frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \right)}{2x+1} = \frac{-3}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

$$11 \quad f'(4) = \frac{-3}{(8+1)\sqrt{8+1}} = -\frac{1}{9}$$

$$y-1 = -\frac{1}{9}(x-4)$$

$$y-1 = -\frac{1}{9}x + \frac{4}{9}$$

$$y = -\frac{1}{9}x + \frac{13}{9}$$

معادلة المماس:

$$f(x) = (x-7)(x+4), \quad x = 1$$

$$f(1) = (1-7)(1+4) = -30 \rightarrow (1, -30)$$

$$f'(x) = (x-7)(1) + (x+4)(1)$$

$$f'(1) = (1-7) + (1+4) = -1$$

$$y - (-30) = -1(x-1)$$

$$y + 30 = -x + 1$$

$$y = -x - 29$$

معادلة المماس:



$$f(x) = \frac{x}{x+4}, x = -5$$

$$f(-5) = \frac{-5}{-5+4} = 5 \rightarrow (-5, 5)$$

$$f'(x) = \frac{(x+4)(1) - (x)(1)}{(x+4)^2} = \frac{4}{(x+4)^2}$$

$$f'(-5) = \frac{4}{(-5+4)^2} = 4$$

$$y - 5 = 4(x + 5)$$

$$y - 5 = 4x + 20$$

$$y = 4x + 25$$

معادلة المماس:

$$f(x) = 2x^4 + 9x^3 + x, x = -2 \quad (-2, -42)$$

$$f(-2) = 2(-2)^4 + 9(-2)^3 + (-2) = -42$$

$$f'(x) = 8x^3 + 27x^2 + 1$$

$$f'(-2) = 8(-2)^3 + 27(-2)^2 + 1 = 45$$

$$y - (-42) = 45(x + 2)$$

$$y + 42 = 45x + 90$$

$$y = 45x + 48$$

معادلة المماس:

$$f(x) = 7x^3 + 6x - 5, x = 2$$

$$f(2) = 7(2)^3 + 6(2) - 5 = 63$$

$$f'(x) = 21x^2 + 6$$

$$f'(2) = 21(2)^2 + 6 = 90$$

$$y - 63 = -\frac{1}{90}(x - 2)$$

$$y - 63 = -\frac{1}{90}x + \frac{1}{45}$$

$$y = -\frac{1}{90}x + \frac{2836}{45}$$

معادلة العمودي على المماس



$$f(x) = \frac{6x^2 - x^3}{4x^4} = \frac{3}{2}x^{-2} - \frac{1}{4}x^{-1}, \quad x = -2$$

$$f(-2) = \frac{3}{2}(-2)^{-2} - \frac{1}{4}(-2)^{-1} = \frac{3}{2 \times (-2)^2} - \frac{1}{4 \times (-2)^1} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -3x^{-3} + \frac{1}{4}x^{-2}$$

$$f'(-2) = \frac{-3}{(-2)^3} + \frac{1}{4 \times (-2)^2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$

16 $y - \frac{1}{2} = -\frac{16}{7}(x + 2)$

معادلة العمودي على المماس

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{16}{7}x - \frac{32}{7}$$

$$y = -\frac{16}{7}x - \frac{32}{7} + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{16}{7}x - \frac{57}{14}$$

مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2$$

$$4x^3 - 9x^2 = 0$$

$$x^2(4x - 9) = 0$$

17 $x = 0$ أو $4x - 9 = 0 \rightarrow 4x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{4}$

$$f(0) = (0)^4 - 3(0)^3 + 1 = 1$$

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{9}{4}\right)^4 - 3\left(\frac{9}{4}\right)^3 + 1 = \frac{1931}{256}$$

النقاط هي $(0, 1), \left(\frac{9}{4}, -\frac{1931}{256}\right)$

ميل مماس المنحنى 12 أي $f'(x) = 12$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$3x^2 = 12$$

18 $x^2 = 4 \rightarrow x = 2$ أو $x = -2$

$$f(2) = (2)^3 + 3 = 11$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 3 = -5$$

النقاط هي $(2, 11), (-2, -5)$



19

$$f'(x) = 8x - 5$$

$$f''(x) = 8$$

20

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 9e^x$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 9e^x$$

21

$$f'(x) = 10 - \left((2x) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) + (\sqrt{x})(2) \right)$$

$$= 10 - (\sqrt{x} + 2\sqrt{x})$$

$$= 10 - 3\sqrt{x}$$

$$f''(x) = -3 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{-3}{2\sqrt{x}}$$

22

$$f(x) = \sqrt{x}(x+2) = x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(2) = \frac{3}{4}(2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

23

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2, x = 1$$

$$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 24x^2 - 18x - 2$$

$$f''(1) = 24 - 18 - 2 = 4$$



24	$\frac{dA}{dt} = 50$ $\left. \frac{dr}{dt} \right _{r=20}$ $A = \pi r^2$ $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ $50 = 2\pi(20) \frac{dr}{dt}$ $\frac{dr}{dt} = \frac{5}{4\pi}$ <p>معدل التغير المعطى: معدل التغير المطلوب العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة ونصف قطرها:</p>	
	<p>إذن يزداد طول نصف قطر البقعة بمعدل $\frac{5}{4\pi}$ m/min عندما يكون طول نصف قطرها 20 m</p>	
25	$v(t) = 3t^2 - 12t + 12$ $v(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 12 = 0 \text{ m/s}$	
26		بما أن السرعة صفر، إذن الجسم في حالة سكون لحظي.
27	$a(t) = 6t - 12$ $a(2) = 12 - 12 = 0 \text{ m/s}^2$	
		يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون السرعة صفرًا
28	$3t^2 - 12t + 12 = 0$ $t^2 - 4t + 4 = 0$ $(t - 2)(t - 2) = 0$ $t = 2$	
29	$v(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}$ $v(3) = \frac{9}{2} + 3 + \frac{1}{2} = 8 \text{ m/s}$	
30	$a(t) = t + 1$ $a(3) = 3 + 1 = 4 \text{ m/s}^2$	
31		يكون الشخص في حالة سكون لحظي عندما تكون السرعة صفرًا لكن السرعة هنا هي $\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t^2 + 2t + 1) = \frac{1}{2}(t + 1)^2$ وهذا مقدار موجب لجميع قيم $t \geq 0$ ، ولا يمكن أن يكون صفرًا، فلا يكون الشخص في حالة سكون لحظي أبدًا.



$$f'(x) = 24 - 6x^2$$

$$24 - 6x^2 = 0$$

$$6x^2 = 24 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

القيم الحرجة هي: $x = 2$ و $x = -2$

$$f''(x) = -12x$$

$$f''(-2) = 24 > 0$$

$$f''(2) = -24 < 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$ وهي $f(-2) = 9 - 48 + 16 = -23$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = 9 + 48 - 16 = 41$

$$f'(x) = 3(3x - 2)^2(3) - 9$$

$$= 9(3x - 2)^2 - 9$$

$$9(3x - 2)^2 - 9 = 0$$

$$(3x - 2)^2 = 1 \rightarrow 3x - 2 = \pm 1 \rightarrow x = 1 \text{ أو } x = \frac{1}{3}$$

القيمة الحرجة هي: $x = 1, x = \frac{1}{3}$

$$33 \quad f''(x) = 18(3x - 2)^1(3) = 54(3x - 2)$$

$$f''(1) = 54 > 0$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = -54 < 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = (3 - 2)^3 - 9 = -8$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{1}{3}$ وهي $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(3\left(\frac{1}{3}\right) - 2\right)^3 - 9\left(\frac{1}{3}\right) = -4$



$$f(x) = 4x^5 - 10x^2$$

$$f'(x) = 20x^4 - 20x$$

$$20x^4 - 20x = 0$$

$$20x(x^3 - 1) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ أو } x = 1$$

القيم الحرجة هي: $x = 1$ و $x = 0$

34

$$f''(x) = 80x^3 - 20$$

$$f''(0) = -20 < 0$$

$$f''(1) = 60 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = -6$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي $f(0) = 0$

$$\frac{dV}{dt} = 800$$

معدل التغير المعطى:

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{r=60}$$

معدل التغير المطلوب

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

العلاقة التي تربط بين حجم البالون ونصف قطره:

35

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$800 = 4\pi(60)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{800}{14400\pi} = \frac{1}{18\pi}$$

إذن يزداد طول نصف قطر البالون بمعدل $\frac{1}{18\pi}$ cm/s عندما يكون طول نصف قطره 60 cm



$$P = x + 2y$$

$$A = xy$$

$$245000 = xy \rightarrow y = \frac{245000}{x}$$

$$P = x + 2y$$

$$P(x) = x + 2\left(\frac{245000}{x}\right)$$

$$= x + \frac{490000}{x}$$

$$P'(x) = 1 - \frac{490000}{x^2}$$

36

$$1 - \frac{490000}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{490000}{x^2} = 1 \rightarrow x^2 = 490000 \rightarrow x = \pm 700$$

$$P''(x) = \frac{980000}{x^3}$$

$$P''(700) = \frac{980000}{(700)^3} > 0$$

لكن الأطوال لا تكون سالبة، لذا فإن $x = 700$

إذن توجد قيمة صغرى عندما $x = 700$

وتكون أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن هي:

$$x = 700 \text{ m و } y = \frac{245000}{700} = 350 \text{ m}$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$2y \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = -2x$$

37

$$\frac{dy}{dx} (2y - 1) = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y - 1}$$



38

$$2x + 6 - 8 \frac{dy}{dx} + 10y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-8 \frac{dy}{dx} + 10y \frac{dy}{dx} = -2x - 6$$

$$\frac{dy}{dx} (10y - 8) = -2x - 6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 6}{10y - 8}$$

39

$$2y \frac{dy}{dx} + (x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (y)(1) + 2x = 0$$

$$2(3) \frac{dy}{dx} + (-4) \left(\frac{dy}{dx} \right) + (3)(1) + 2(-4) = 0$$

$$6 \frac{dy}{dx} - 4 \frac{dy}{dx} + 3 - 8 = 0$$

$$2 \frac{dy}{dx} = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}$$

بتعويض $(x, y) = (-4, 3)$ ينتج أن:

ميل المماس عند النقطة $(-4, 3)$ هو $\frac{5}{2}$

40

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{5}{2}(x - (-4))$$

$$y - 3 = \frac{5}{2}x + 10$$

$$y = \frac{5}{2}x + 13$$

معادلة المماس:

41

$$A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$$

$$A'(x) = 10 - 2x$$

$$10 - 2x = 0 \rightarrow x = 5$$

$$A''(x) = -2$$

$$A''(5) = -2 < 0$$

مساحة المستطيل

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 5$

توجد قيمة عظمى عندما $x = 5$

إذن أكبر مساحة ممكنة هي $A(5) = 10(5) - (5)^2 = 25 \text{ cm}^2$



$$V = x^2 y$$

$$S = 8x + 4y$$

$$144 = 8x + 4y$$

$$4y = 144 - 8x$$

$$y = 36 - 2x$$

$$V(x) = x^2(36 - 2x)$$

$$= 36x^2 - 2x^3$$

حجم الصندوق

مجموع أطوال الأحرف

حجم الصندوق بدلالة x

$$V'(x) = 72x - 6x^2$$

$$72x - 6x^2 = 0$$

$$6x(12 - x) = 0$$

$$x = 0 \text{ أو } x = 12$$

توجد قيمتان حرجتان هما $x = 0$ و $x = 12$

$$V''(x) = 72 - 12x$$

$$V''(0) = 72 > 0$$

$$V''(12) = 72 - 144 = -72 < 0$$

توجد قيمة عظمى عندما $x = 12$

إذن قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن هي $x = 12$

$$6x^2 + 8y \frac{dy}{dx} = 0$$

بتعويض $(x, y) = (-2, -1)$ ينتج أن:

$$44 \quad 6(-2)^2 + 8(-1) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$24 - 8 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 3$$



$$3x^2 - (x^2) \left(2y \frac{dy}{dx} \right) - (y^2)(2x) = 0$$

بتعويض $(x, y) = (3, -2)$ ينتج أن:

$$3(3)^2 - (3)^2 \left(2(-2) \frac{dy}{dx} \right) - ((-2)^2)(2(3)) = 0$$

$$27 + 36 \frac{dy}{dx} - 24 = 0$$

$$36 \frac{dy}{dx} = -3$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{36} = -\frac{1}{12}$$