الإبداع في الرياضيات

الصف الثاني عشر الفرع العلمي

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الثالثة

الأعداد المركبة

"مكثف"

إعداد

أ. زكي غنيم
0788557325

أ.ابراهيم العقرباوي
0790082328

أولاً الأعداد المركّبة

المفهوم	ملاحظات
العدد التخيلي $(imaginary\ number)$:	$\sqrt{-k}$
الوحدة التخيلية $(imaginary\ unit)$:	$i=\sqrt{-1} \rightarrow i^2=-1\ ,\ i^3=-i\ ,\ i^4=1$
	بشكل عام: $i^n=1$ إذا كانت n من مضاعفات الـ 4
إيجاد الجذر الرئيس	يمكن إيجاد الجذر الرئيس للعدد الحقيقي السالب $(-k)$ كالتالي: $\sqrt{-k}=\sqrt{-1*k}=\sqrt{-1}*\sqrt{k}=i\sqrt{k}$ مثال: $\sqrt{-16}=\sqrt{-1*16}=\sqrt{-1}*\sqrt{16}=\sqrt{-1}*4=i*4=4i$ ملاحظة: 1) يُكتب الرمز i على يمين العدد المضروب فيه ، مثال : $(5i)$. 2) يكتب على يسار المتغيير أو الجذر ، مثال : $(ix\ ,2i\sqrt{14})$.
ضرب الأعداد التخيلية	1) إذا كان $a\ ,b>0$: فإنه : $\sqrt{a*b}=\sqrt{a}*\sqrt{b}$. 2) إذا كان $a\ ,b<0$: نفرض أنَّ $(\sqrt{-1}=i)$. 3) فردي $(-1)^n=-1, n:$, زوجي $(-1)^n=1, n:$. مثال: $1)\ \sqrt{-4}*\sqrt{-9}=i\sqrt{4}*i\sqrt{9}=2i*3i=6i^2=6(-1)=-6$ $2) i^{15}=(i^2)^7\times i=(-1)^7\times i=-i$
العدد المركب	$z=a+ib$ ، حيث أن : a: جزء حقيقي , b : جزء تخيلي , ib : عدد تخيلي مثال: $z=12-5i \rightarrow a=12\ ,\ b=-5$
المساواة للأعداد المركبة	$a+ib=c+id\ \Leftrightarrow$ $a=c$ الجزء الحقيقي $b=d$ الجزء التخيلي $, a,b,c,d\in R$ مثال: جد قيم $x\ ,y$ الحقيقية التي تجعل المعادلة التالية صحيحة: $x^2-1+i(2y-5)=8+9i$? $x^2-1=8\rightarrow x^2=9\rightarrow x=\pm 3$ $2y-5=9\rightarrow 2y=14\rightarrow y=7$
مرافق العدد المركب	إذا كان $(z=a+ib)$ فإنَّ مرافق العدد المركَّب هو $(\overline{z}=a-ib)$ حيث أن كلا منهما انعكاس للآخر في المحور الحقيقي. ملاحظة : إذا كان: العدد $z=a$ ، فإنَّ مرافقه : $\overline{z}=a$ مثال: $z=-3+5i\rightarrow \overline{z}=-3-5i$
مقياس العدد المركّب	هو المسافة بين نقطة الأصل والنقطة $(a,b)\leftarrow r=\vert z\vert$ $\vert z\vert=\sqrt{(a)^2+(b)^2}$ مثال: جد مقياس العدد المركَّب $z=3-4i$؟ $\vert z\vert=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

المفهوم	ملاحظات
سعة العدد المركب	هي الزاوية θ المحصورة بين المحور الحقيقي الموجب والقطعة المستقيمة التي تصل نقطة الأصل بالنقطة التي تمثل العدد المركب $-\pi < \theta \leq \pi$ ، ورمزها : $\theta = Arg(z)$ ملاحظة: يجب ضبط الآلة الحاسبة على نظام الراديان.
في الربع الأول	$z = a + ib \rightarrow \theta = Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ مثال: $z = 4 + 3i \rightarrow \theta = Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.64$
في الربع الثاني	$z = -a + ib \rightarrow \theta = Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ مثال: $z = -3 + 8i \rightarrow \theta = Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) \approx 1.93$
في الربع الثالث	$z = -a - ib \rightarrow \theta = Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$ مثال: $z = -1 - 6i \rightarrow \theta = Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{6}{1}\right) - \pi \approx -1.74$
في الربع الرابع	$z = a - ib \rightarrow \theta = Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ مثال: $z = 8 - 4i \rightarrow \theta = Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{4}{8}\right) \approx -0.46$
على المحور الحقيقي (Re)	$z = a \rightarrow \theta = Arg(z) = 0 \ , z = -a \rightarrow \theta = Arg(z) = \pi$ مثال: $z = 5 \rightarrow \theta = Arg(z) = 0 \ , z = -5 \rightarrow \theta = Arg(z) = \pi$
على المحور التخيلي (Im)	$z = ib \rightarrow \theta = Arg(z) = \frac{\pi}{2} \ , \ z = -ib \rightarrow \theta = Arg(z) = -\frac{\pi}{2}$ مثال: $z = 5i \rightarrow \theta = Arg(z) = \frac{\pi}{2} \ , \ z = -5i \rightarrow \theta = Arg(z) = -\frac{\pi}{2}$
الصورة المثلثية للعدد المركب	$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ حيث أن: $\theta = Arg(z) \ , \ r = \|z\| \ , z = a + ib$ مثال: أكتب العدد المركب : $z = 1 + i$ في صورة مثلثية؟ $\|z\| = r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \leftarrow$ لاحظ أن العدد يقع في الربع الأول $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

إمتحان درس الأعداد المركَّبة

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (15):

1) قيمة الجذر الرئيسي بدلالة i للعدد : $\sqrt{\frac{25}{-4(-3)^2}}$ هي :

$a)\ \frac{5}{12}$ $\quad b)\ \frac{5}{6}$ $\quad c)\ \frac{5}{12}i$ $\quad d)\ \frac{5}{6}i$

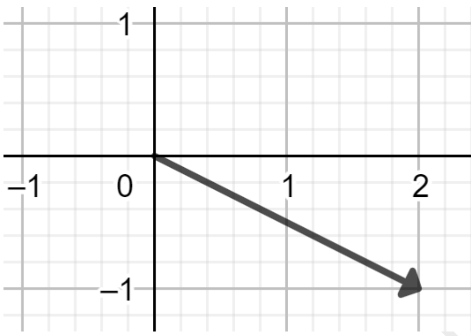
2) ناتج : (i^{143}) بأبسط صورة :

$a)\ i$ $\quad b)\ -i$ $\quad c)\ 1$ $\quad d)\ -1$

3) العدد المركَّب z بالصورة القياسية للعدد $\frac{15-\sqrt{-50}}{5}$ ، هو :

$a)\ 3-\sqrt{2}i$ $\quad b)\ 3+\sqrt{2}i$ $\quad c)\ 3-5i$ $\quad d)\ 3+5i$

4) العدد المركَّب z للتمثيل البياني التالي ، هو :



$a)\ z=2-i$ $\quad b)\ z=-1+2i$

$c)\ z=-2+i$ $\quad d)\ z=1-2i$

5) قيمة y الحقيقية التي تجعل المعادلة : $i(2x-5y)+3x+5y=7+3i$

$a)\ 2$ $\quad b)\ \frac{1}{2}$ $\quad c)\ \frac{1}{5}$ $\quad d)\ 5$

ليكن العدد المركَّب : $z = -2\sqrt{3}+2i$ ، أجب عن الأسئلة : $\{6+7+8\}$

6) $|\overline{z}|$ تساوي:

$a)\ \sqrt{8}$ $\quad b)\ 4$ $\quad c)\ 2\sqrt{3}$ $\quad d)\ 16$

7) $Arg(z)$ تساوي:

$a)\ \frac{\pi}{6}$ $\quad b)\ \frac{\pi}{3}$ $\quad c)\ \frac{5\pi}{6}$ $\quad d)\ \frac{2\pi}{3}$

8) $Arg(\overline{z})$ تساوي:

$a)\ -\frac{5\pi}{6}$ $\quad b)\ -\frac{\pi}{6}$ $\quad c)\ -\frac{\pi}{3}$ $\quad d)\ -\frac{2\pi}{3}$

أ. زكي غنيم

أ.ابراهيم العقرباوي

9) الصورة المثلثية للعدد $z=-1+i$ ، هي :

$a)\ z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ $b)\ z=-\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$c)\ z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $d)\ z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

إذا كان : $z=a+ib$ ، حيث $|z|=2\sqrt{2}$ ، $Arg(z)=\frac{5\pi}{4}$ ، أجب عن السؤالين $\{10+11\}$:

10) الصورة القياسية للعدد z هي :

$a)-1-i$ $b)-2+2i$ $c)-2-2i$ $d)\ 2-2i$

---

11) قياس الزاوية المحصورة بين $z,\bar{z}$ هي :

$a)\ \frac{\pi}{4}$ $b)\ \frac{5\pi}{4}$ $c)\ \frac{5\pi}{2}$ $d)\ \frac{\pi}{2}$

---

12) إذا كان $z=3+ki$ ، حيث أنَّ $Arg(z)<0$, $|z|=5$ ،
فإنَّ قيمة العدد الحقيقي k تساوي:

$a)\ 4$ $b)-4$ $c)\ 2$ $d)-2$

---

13) الصورة القياسية للعدد المركَّب الذي مقياسه يساوي $\sqrt{13}$
وسعته : $\theta=\pi-\tan^{-1}(1.5)$:

$a)\ z=\ -3+6i$ $b)\ z=-1.5+3i$
$c) z=-2+3i$ $d)\ z=2+3i$

إذا كان : $Arg(2+i)=B$ ، أجب عن السؤالين $\{14+15\}$:

14) جد سعة العدد $z=1+2i$ بدلالة B:

$a)-B$ $b)\ \frac{\pi}{2}-B$ $c)\ B$ $d) \pi-B$

---

15) سعة العدد $Z=-2-i$ بدلالة B:

$a) B-\pi$ $b)\ \frac{\pi}{2}+B$ $c)\ B$ $d) \pi-B$

أ. زكي غنيم

أ.ابراهيم العقرباوي

إجابات أسئلة الإمتحان

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8
فرع الإجابة الصحيح	*d*	*b*	*a*	*a*	*c*	*b*	*c*	*a*

رقم السؤال	9	10	11	12	13	14	15
فرع الإجابة الصحيح	*a*	*c*	*d*	*b*	*c*	*b*	*a*

أ. زكي غنيم

أ.ابراهيم العقرباوي

ثانياً العمليات على الأعداد المركّبة

العملية	ملاحظات
جمع وطرح الأعداد المركبة	إذا كان : $z_1 = x + iy\ , z_2 = a + ib$: $z_1 + z_2 = (a + x) + i(b + y)$ $z_1 - z_2 = (a - x) + i(b - y)$ مثال: $(8 - 5i) - (2 - 11i) = 5 + 7i - 9 - 4i = -4 + 3i$
ضرب الأعداد المركبة	1) نستخدم خاصية التوزيعية للضرب ، ويوضع مكان $(i^2 = -1)$. 2) $z\,\bar{z} = (\|z\|)^2 = a^2 + b^2$ 3) $(a + ib)^2 = a^2 + 2iab + b^2(-1) = a^2 - b^2 + 2iab$ مثال: جد ناتج كلٍ مما يلي: 1) $5i(3 - 7i) = 15i - 35(-1) = 35 + 15i$ 2) $(5 + 4i)(5 - 4i) = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$ 3) $(3 + 6i)^2 = 9 + 2 * 3 * 6i + 36(-1) = -27 + 36i$
قسمة الأعداد المركبة	التخلص من i في المقام " نضرب المقام بمرافقه " مثال: جد ناتج كلٍ مما يلي: 1) $\frac{8 - 5i}{3 - 2i} \times \frac{3 + 2i}{3 + 2i} = \frac{24 + 16i - 15i - 10(-1)}{9 + 14} = \frac{34}{13} + \frac{1}{13}i$ 2) $\frac{3 + 5i}{2i} \times \frac{i}{i} = \frac{3i + 5(-1)}{2(-1)} = \frac{3i - 5}{-2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$
ضرب وقسمة الأعداد المركبة المكتوبة بالصورة المثلثية	: $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ $z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right)$ هنا يجب أن تكون: $-\pi < \theta_1 \pm \theta_2 \le \pi$ الزاوية الناتجة ضمن هذه الفترة وإلا يتم إضافة $2\pi n$ حتى تدخل في الفترة مثال: إذا كان: $z_1 = 2\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right), z_2 = 10\left(\cos -\frac{2\pi}{7} + i\sin -\frac{2\pi}{7}\right)$ 1) $z_1 z_2 = 2 \times 10\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}\right)\right)$ $= 20\left(\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}\right)$ 2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{10}{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7} - \frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{7} - \frac{6\pi}{7}\right)\right)$ $= 5\left(\cos -\frac{8\pi}{7} + i\sin -\frac{8\pi}{7}\right)$ $= 5\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$ $\boxed{-\frac{8\pi}{7} + 2\pi = \frac{6\pi}{7}}$

<table>
<tr><th>العملية</th><th>ملاحظات</th></tr>
<tr><td>سعة ومقياس

ضرب عددين مركبين</td><td>

$Arg(z_1\, z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2) \leftarrow -\pi < \theta_1 + \theta_2 \leq \pi$
$r = |z_1 z_2| = |z_1|\, |z_2|$
مثال:
إذا كان: $z_1 = \sqrt{12} - 2i\, , z_2 = \sqrt{5} - i\sqrt{15}$ ، جد مقياس و سعة $z_1 z_2$ ؟
" السعة " $Arg(z_1 z_2) = Arg(z_2) + Arg(z_1)$
$= -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\right) + \left(-\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right)\right)$
$= -\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$
" المقياس " $r = |z_1 z_2| = |z_1|\, |z_2| = 4 \times 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$
</td></tr>
<tr><td>سعة قسمة عددين مركبين</td><td>

$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2) \leftarrow -\pi < \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$
$r = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$
مثال:
إذا كان: $z_1 = \sqrt{12} - 2i\, , z_2 = \sqrt{5} - i\sqrt{15}$ ، جد مقياس و سعة $\frac{z_2}{z_1}$؟
" السعة " $Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = Arg(z_2) - Arg(z_1)$
$= -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\right) - \left(-\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right)\right)$
$= -\tan^{-1}(\sqrt{3}) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$
" المقياس " $r = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
</td></tr>
<tr><td>الجذر التربيعي للعدد المركب</td><td>

العدد المركب: $z = a + ib$ ، الجذر: $\sqrt{z} = x + iy$
" تربيع الطرفين للجذر " $z = (x + iy)^2$
" فك التربيع " $z = x^2 + 2xyi + y^2 * i^2 \rightarrow z = x^2 - y^2 + 2xyi$
" مقارنة مع العدد المركَّب " $a = x^2 - y^2\ ,\ b = 2xy$
" نحل نظام المعادلات الناتج واعتماد الحلول الحقيقية $(x, y \in R)$ "
مثال: جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 3 - 4i$ ؟
$3 - 4i = x^2 - y^2 + 2xyi \rightarrow 2xy = -4 \rightarrow y = -\frac{2}{x}$
$x^2 - y^2 = 3 \rightarrow x^2 - \left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 3 \rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$
" ضرب x^2 " $x^4 - 4 = 3x^2 \rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow$
$(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$
" مرفوض لأن x, y عددان حقيقيان " $(x^2 + 1) = 0$
$(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x = \pm 2$
$x = 2 \rightarrow y = -\frac{2}{2} = -1 \quad , \quad x = -2 \rightarrow y = \frac{-2}{-2} = 1$
" جذرا العدد $3 - 4i$ ، هما " $2 - i \quad , \quad -2 + i$
</td></tr>
</table>

العملية	ملاحظات
الجذور المركبة لمعادلات كثيرات حدود	**مثال:** حل المعادلة التالية: $2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$ ؟ " ترتيب " $2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 = 0$ " تجريب $x = -3$ " $2(-3)^3 - 8(-3)^2 - 13(-3) + 87 = 0$ " $(x+3)$ عاملا للمعادلة ← اجراء عملية القسمة " $\dfrac{2z^3 - 8z^2 - 13z + 87}{x+3}$ " الناتج " $2z^2 - 14z - 29 = 0$ " القانون العام " $z = \dfrac{--14 \pm \sqrt{-36}}{2*2} = \dfrac{14}{4} \pm \dfrac{6}{4}i$ " حلول المعادلة " $z = -3 \ , \dfrac{7}{2} + \dfrac{3}{2}i \ , \quad \dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{2}i$
إيجاد معادلة تربيعية إذا علم أحد الجذور	1) إذا علم أحد جذور المعادلة ، فإنه يمكن السير بخطوات عكسية (بدءاً بالجذر المعلوم) لإيجاد المعادلة الأصلية أو أحد عواملها . 2) تستعمل هذه الطريقة لإيجاد قيم معاملات مجهولة في المعادلة. 3) يمكن كتابة معادلة تربيعية ، جذراها معروفان z_1, z_2 كما يأتي : $z^2 - (z_1 + z_2)z + (z_1 z_2) = 0$ " يمكن استعمال هذه الفكرة لحل الأسئلة التالية بطرق مباشرة " **مثال:** جد المعادلة التربيعية التي جذراها المركبان هما : $2 \pm 5i$ ؟ $x = 2 \pm 5i \rightarrow x - 2 = \ \pm 5i$ " تربيع الطرفين " $(x-2)^2 = (\pm 5)^2 \ \rightarrow \ x^2 - 4x + 4 = \ -25$ " المعادلة التربيعية " $x^2 - 4x + 29 = 0$

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

إمتحان درس العمليات على الأعداد المركّبة

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (14):

ليكن : $z_1 = 2 - 3i \ , z_2 = 4 + 2i$ ، أجب عن الأسئلة $(1 - 4)$

1) $z_2 - z_1$ تساوي:

$a) -2 - 5i$ $\quad b)\ 2 + 5i$ $\quad c) 2 - 5i$ $\quad d) -2 + 5i$

2) $z_2 z_1$ تساوي:

$a) 14 - 7i$ $\quad b)\ 2 - i$ $\quad c) 14 - 8i$ $\quad d) 2 - 7i$

3) $(\overline{z_1})^2$ تساوي :

$a) -5 + 12i$ $\quad b)\ 5 + 12i$ $\quad c) 13 - 12i$ $\quad d) -5 - 12i$

4) $\frac{z_2}{z_1} * 13i$ تساوي :

$a) \frac{2}{13} + \frac{16}{13} i$ $\quad b) -16 + 2i$ $\quad c)\ 16 + 2i$ $\quad d)\ 16 - 2i$

5) إذا كان : $z_1 = 20\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right) \ , z_2 = 4\left(\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)\right)$

فإنّ ناتج : $\frac{z_1}{z_2}$ ، بالصورة المثلثية:

$a) 4\left(\cos\left(\frac{-10\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{-10\pi}{7}\right)\right)$ $\quad b) \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right)$

$c)\ 4\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{-3\pi}{7}\right)\right)$ $\quad d)\ 4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right)$

6) قيمة الثابت b في المعادلة : $\frac{a-6i}{1-2i} = b + 4i$ ، هي:

$a)\ 5$ $\quad b)\ 13$ $\quad c)\ 7$ $\quad d)\ 4$

ليكن : $z_1 = \sqrt{12} - 2i \ , z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$ ، أجب عن الأسئلة $(7 + 8 + 9)$:

7) سعة : $Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ تساوي :

$a) \frac{7\pi}{12}$ $\quad b) \frac{11\pi}{12}$ $\quad c) \frac{-\pi}{4}$ $\quad d) \frac{5\pi}{4}$

أ. زكي غنيم

أ.ابراهيم العقرباوي

8) $Arg\left(\frac{i}{z_2}\right)$ ، تساوي:

$a)\ \frac{-5\pi}{4}$ $\quad b)\ \frac{5\pi}{4}$ $\quad c)\ \frac{-\pi}{4}$ $\quad d)\ \frac{\pi}{4}$

---

9) $Arg\left(\frac{-1}{z_2}\right)$ ، تساوي:

$a)\ \frac{-5\pi}{4}$ $\quad b)\ \frac{5\pi}{4}$ $\quad c)\ \frac{-\pi}{4}$ $\quad d)\ \frac{\pi}{4}$

---

10) الجذرين التربيعيين للعدد المركَّب $3-4i$ هما :

$a)\ 2-i\,,-2+i$ $\quad b)\ 2-i\,,2+i$

$c)\ 4-i\,,-4+i$ $\quad d)\ 1-2i\,,1+2i$

---

11) إذا كان $2+4i$ هو أحد جذور المعادلة $x^2+ax+2b=0$ ، فإنَّ قيمة الثابت b هو :

$a)\ 20$ $\quad b)\ 10$ $\quad c)-12$ $\quad d)-6$

---

12) إذا كان كثير حدود من الدرجة الرابعة ، فإنَّ إحدى المعلومات التالية خاطئة :

a) له أربعة جذور حقيقية .

b) زوجان من الجذور المكركَّبة المترافقة.

c) له 3 جذور مركبة و جذر واحد حقيقي.

d) له جذران حقيقيان وآخران مركبان مترافقان.

---

13) حل المعادلة $z^3+10=5z^2-4z$ هو :

$a)\ 1\ \ ,3\pm i$ $\quad b)\ 1\ \ ,6\pm 2i$ $\quad c)-1\ \ ,3\pm i$ $\quad d)-1\ \ ,6\pm 2i$

---

14) ناتج $(1-i)^3$ هو:

$c)\ 2-2i$ $\quad d)\ 2+2ia)-2+2i$ $\quad b)-2-2i$

أ. زكي غنيم

أ.ابراهيم العقرباوي

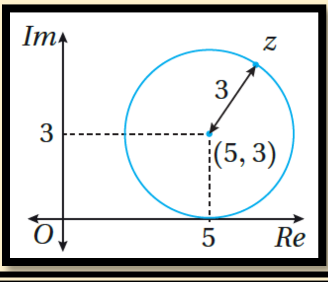
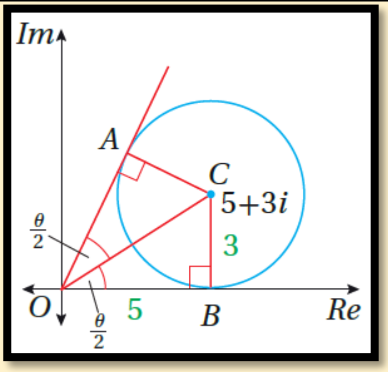
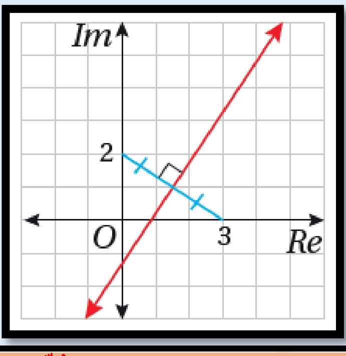
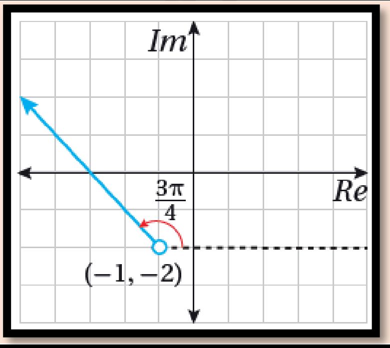
إجابات أسئلة الإمتحان

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7
فرع الإجابة الصحيح	*b*	*c*	*a*	*b*	*d*	*a*	*b*

رقم السؤال	8	9	10	11	12	13	14
فرع الإجابة الصحيح	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*	*c*	*b*

ثالثاً المحل الهندسي في المستوى المركّب

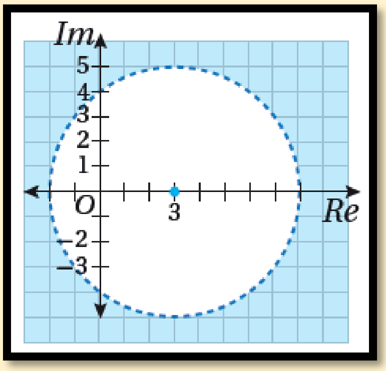
تمثيل المعادلات في المستوى المركّب

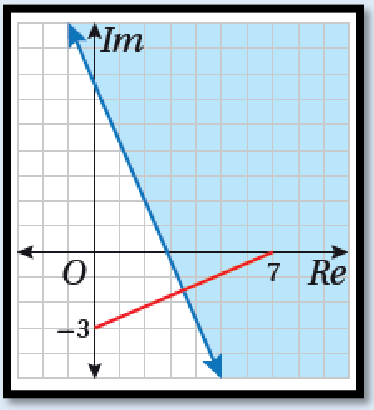
	الدائرة	التمثيل بالمستوى المركّب
المحل الهندسي	هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك في مسار يبعد مسافة محددة (نصف قطر الدائرة) عن نقطة ثابتة (مركز الدائرة)	
المعادلة بالصورة القياسية	$\|z-(a+ib)\|=r$ دائرة مركزها (a,b) وطول نصف قطرها (r) وحدة مثال: $\|z-5-3i\|=3 \to \|z-(5+3i)\|=3$ دائرة مركزها $(2,-8)$ وطول نصف قطرها (3) وحدة	
القيمة العظمى لسعة الأعداد المركّبة التي تحقق المعادلة	أكبر سعة للعدد المركب z= قياس الزاوية $\angle BOA$ المحصورة بين مماس الدائرة $\overline{OA}$ والمحور الحقيقي. لإيجاد $\angle BOA$: 1) $\triangle OBC$ يطابق $\triangle OAC$ في ثلاثة أضلاع. 2) $\overline{OC}$ ينصّف $\angle BOA$ ، $\overline{OB}$ عمودي على $\overline{BC}$ 3) $\triangle OBC$ قائم الزاوية في B 4) $tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{5}{3} \to \frac{\theta}{2}=tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ 5) $\theta=2tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\approx 1.08$	
	المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة	التمثيل بالمستوى المركّب
المحل الهندسي	هو المحل الهندسي للنقطة z التي تتحرك في المستوى المركّب وتظل على بعدين متساويين من النقطتين الثابتتين z_1, z_2	
المعادلة بالصورة القياسية	$\|z-(a+ib)\|=\|z-(c+id)\|$ المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين : $(c,d),(a,b)$ مثال: $\|z-3\|=\|z-2i\|$ $\|z-(3+0i)\|=\|z-(0+2i)\|$ معادلة المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين: $(0,2),(3,0)$	
	الشعاع الذي يبدأ بالنقطة (a,b)	التمثيل بالمستوى المركّب
المحل الهندسي	هو شعاع يبدأ بالنقطة (a,b) ويصنع زاوية قياسها : (θ) راديان مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي	
المعادلة بالصورة القياسية	$Arg(z-(a+ib))=\theta$ مثال: $Arg(z+1+2i)=\frac{3\pi}{4}$ $Arg(z-(-1-2i))=\frac{3\pi}{4}$ معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(-1,-2)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع المستقيم الذي يوازي المحور الحقيقي	

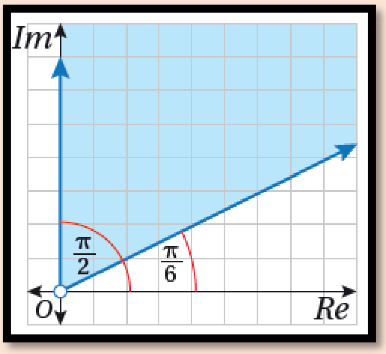
أ. زكي غنيم

أ.ابراهيم العقرباوي

تمثيل المتباينات في المستوى المركّب

	الدائرة	التمثيل بالمستوى المركّب
مثال	$\lvert z-3\rvert > 5$	
تحديد المنحنى الحدودي	$:\lvert z-3\rvert = 5$ دائرة مركزها $(3,0)$ ونصف قطرها 5 وحدات ملاحظة : 1) إذا وُجدت المساواة في رمز المتباينة ← نرسم المنحنى الحدودي متصلا 2) إذا لم توجد المساواة في رمز المتباينة ← نرسم المنحنى الحدودي متقطّعاً	
تحديد منطقة الحلول الممكنة	نختار عدد مركب عشوائي مثل $z=0+0i$ للتحقق من صحة المتباينة : $\lvert 0+0i-3\rvert \overset{?}{>} 5 \to \sqrt{9} \overset{?}{>} 5 \to 3 \overset{?}{>} 5$ خاطئة نستنتج أن نقطة الإختبار " التي تقع داخل المنحنى الحدودي لا تحقق المتباينة ← منطقة الحلول الممكنة تقع خارج المنحنى الحدودي	

	المنصّف العمودي للقطعة المستقيمة	التمثيل بالمستوى المركّب
مثال	$\lvert z-7\rvert \le \lvert z+3i\rvert$	
تحديد المنحنى الحدودي	$:\lvert z-7\rvert = \lvert z+3i\rvert$ المنصِّف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(7,0),(0,-3)$ توجد رمز مساواة في رمز المتباينة ← نرسم المنحنى الحدودي متصلا	
تحديد منطقة الحلول الممكنة	نختار عدد مركب عشوائي مثل $z=0+0i$ للتحقق من صحة المتباينة : $\lvert z-7\rvert \overset{?}{\le} \lvert z+3i\rvert \to \lvert 0-7\rvert \overset{?}{\le} \lvert 0+3i\rvert$ $\sqrt{49} \overset{?}{\le} \sqrt{9} \to 7 \overset{?}{\le} 3$ خاطئة نستنتج أن نقطة الإختبار " التي تقع يسار المنحنى الحدودي لا تحقق المتباينة ← منطقة الحلول الممكنة تقع يمين المنحنى الحدودي	

	الشعاع الذي يبدأ بالنقطة (a,b)	التمثيل بالمستوى المركّب
مثال	$\frac{\pi}{6} \le Arg(z) \le \frac{\pi}{2}$	
تحديد المنحنى الحدودي	$: Arg(z) = \frac{\pi}{6}$ شعاع يبدأ بنقطة الأصل ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{6}$ مع المحور الحقيقي الموجب $: Arg(z) = \frac{\pi}{2}$ شعاع يبدأ بنقطة الأصل ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي الموجب	
تحديد منطقة الحلول الممكنة	هي جزء من من المستوى المركَّب محدود بشعاعين. تُستثنى نقطة الأصل بدائرة مُفرَغة في بداية الشعاع.	

أ. زكي غنيم
أ.ابراهيم العقرباوي

إمتحان درس المحل الهندسي في المستوى المركّب

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (10):

1) الصورة الديكارتية للمحل الهندسي : $|z-i| = 9$ هي:

$b)\ x^2 + (y-1)^2 = 81$ $a)\ (x-1)^2 + y^2 = 81$

$d)\ x^2 + (y+1)^2 = 9$ $c)\ (x+1)^2 + y^2 = 9$

2) الصورة الديكارتية للمحل الهندسي : $\frac{|z-3i|}{|z-5|} = 1$ هي:

$b) 3y - 5x + 16 = 0$ $a)\ 6y - 10x + 16 = 0$

$d)\ 10x - 6y + 16 = 0$ $c)\ 5x - 3y + 16 = 0$

3) معادلة المحل الهندسي للشعاع الذي يبدأ من النقطة $(1, -2)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ مع المستقيم الذي يوازي المحور الحقيقي هو :

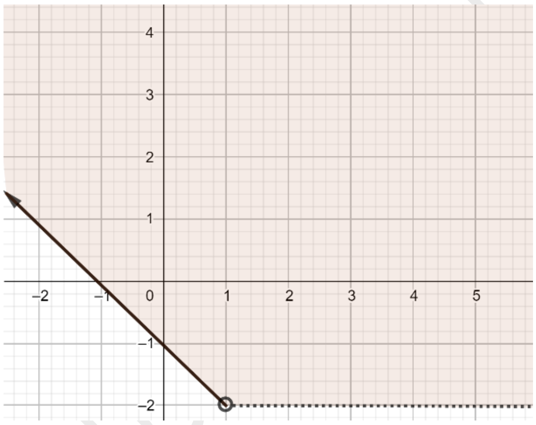
$b)\ Arg(z+1-2i) = \frac{3\pi}{4}$ $a)\ Arg(z+1-2i) = -\frac{3\pi}{4}$

$d)\ Arg(z-1-2i) = -\frac{3\pi}{4}$ $c)\ Arg(z-1+2i) = \frac{3\pi}{4}$

4) القيمة العظمى لسعة الأعداد المركّبة (z) التي تحقق المعادلة : $|z+2-2\sqrt{3}i| = 2$ ، هي:

$a)\ \frac{2\pi}{3}$ $b)\ \frac{\pi}{3}$ $c)\ \frac{\pi}{6}$ $d)\ \frac{5\pi}{6}$

5) متباينة المحل الهندسي الذي تمثّله المنطقة المظللة التالية:



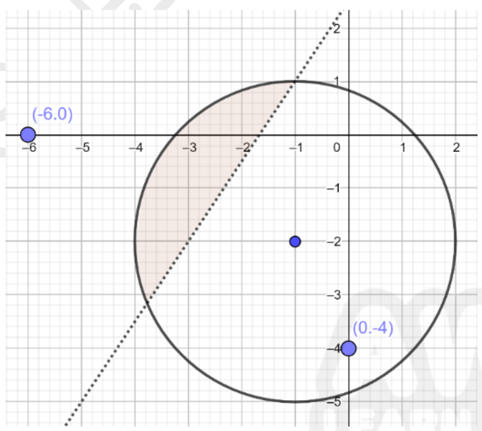
$a)\ 0 < Arg(z-1+2i) \le \frac{3\pi}{4}$

$b)\ 0 \le Arg(z-1+2i) < \frac{3\pi}{4}$

$c)\ 0 \le Arg(z+1-2i) < \frac{3\pi}{4}$

$d)\ 0 < Arg(z+1-2i) \le \frac{3\pi}{4}$

6) متباينة المحل الهندسي الذي تمثّله المنطقة المظللة التالية:



$a)\ |z+2+i| \le 3\ ,\ |z+6| \le |z+4i|$

$b)\ |z+2+i| \le 3\ ,\ |z+6| < |z+4i|$

$c)\ |z+2+i| \le 6\ ,\ |z-6| < |z-4i|$

$d)\ |z+2-i| \le 6\ ,\ |z-6| < |z-4i|$

7) أكبر قيمة للعدد المركَّب $|z|$ الذي يحقق المعادلة : $|z-3-4i| = 2$, هو :

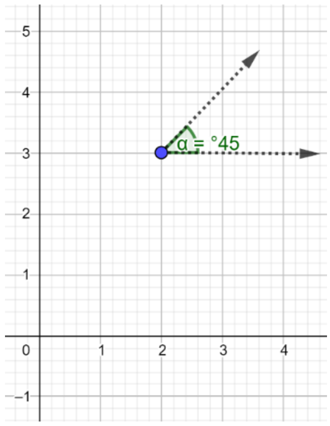
$a)10$ $\quad$ $b)5$ $\quad$ $c)7$ $\quad$ $d)\ 6$

8) العدد المركَّب الذي يحقق كلاً من المحل الهندسي $|z-2| = |z+2i|$,
والمحل الهندسي $|z+3+2i| = |z+1-2i|$, هو :

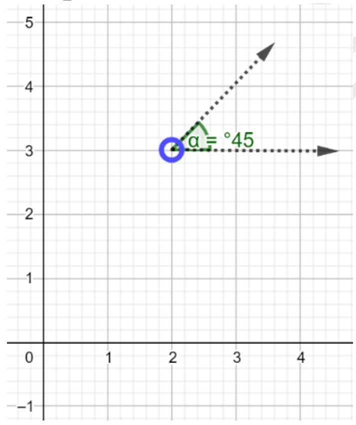
$a)-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}i$ $\quad$ $b)\frac{4}{3}-\frac{4}{3}i$ $\quad$ $c)\ 2-2i$ $\quad$ $d)\ -2+2i$

9) التمثيل البياني للمحل الهندسي : $Arg(z-2-3i) = \frac{\pi}{4}$, هو:

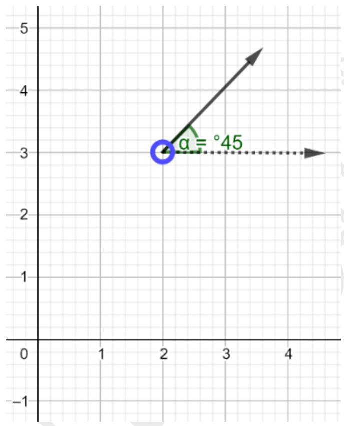
$a)$



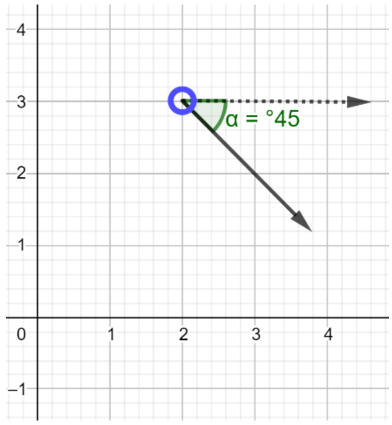
$b)$



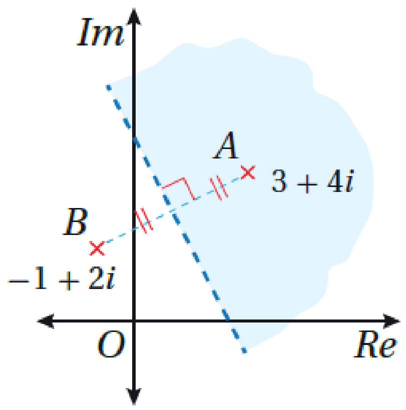
$c)$



$d)$



10) إحدى الآتية تصف المنطقة المظلَّلة في الشكل المجاور :



$a)\ |z-1+2i| < |z+3+4i|$

$b)\ |z-1+2i| > |z+3+4i|$

$c)\ |z+1-2i| < |z-3-4i|$

$d)\ |z+1-2i| > |z-3-4i|$

إجابات أسئلة الإمتحان

رقم السؤال	1	2	3	4	5
فرع الإجابة الصحيح	*b*	*a*	*c*	*d*	*a*

رقم السؤال	6	7	8	9	10
فرع الإجابة الصحيح	*b*	*c*	*a*	*c*	*d*

أ. زكي غنيم

أ.ابراهيم العقرباوي

إمتحان وحدة الأعداد المركَّبة

الاسم :.................	الصف : 12 علمي	
اليوم :	التاريخ: / /	____ 60
الزمن : ساعة		

أجب عن الأسئلة التالية جميعها وعددها (4) علماً بأن عدد صفحات الاختبار (2)

السؤال الأول : (9 علامات)

1) جد قيمة x وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة التالية صحيحة:

$i(2x-4y)+x+3y=26+32i$؟ (3 علامات)

2) اكتب العدد المركَّب التالي بالصورة المثلثيَّة : $z=\ -2\sqrt{3}-2i$؟

(3 علامات)

3) اكتب العدد المركَّب التالي بالصورة القياسيَّة : $z=12\left(cos-\frac{\pi}{4}+i\ sin-\ \frac{\pi}{4}\right)$ ؟

(3 علامات)

السؤال الثاني : (21 علامة)

1) جد الجذرين التربيعيين للعدد المركَّب : $z=\ -15+8i$؟

(5 علامات)

2) إذا كان : $(1+4i\ )$ جذراً للمعادلة : $x^3+5x^2+ax+b=0$ ، جد مايلي: (6 علامات)

a) قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين $a\ ,b$؟

b) الجذرين الآخرين لهذه المعادلة ؟

3) إذا كان: $\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i$ ، جد قيمة كلٍّ من العددين الحقيقيين $a\ ,b$؟

(4 علامات)

4) حُلَّ المعادلة التالية: $z^3+4z^2-10z+12=0$؟

(6 علامات)

السؤال الثالث : **(30 علامة)**

1) إذا كانت: $|z-5i|=3$ أجب عن السؤالين الآتيين : **(7 علامات)**

a) أرسم المحل الهندسي الذي تمثّله المعادلة في المستوى المركّب؟

b) جد القيمة العظمى لسعة الأعداد المركّبة z التي تحقق المعادلة؟

2) مثّل في المستوى المركّب المحل الهندسي للنقاط التي تحقّق

المتباينة : $|z-1+i|\le 1$ ، والمتباينة $-\frac{\pi}{3}<Arg(z)<0$؟ **(7 علامات)**

3) مثّل في المستوى المركّب المعادلة : $|z-3i|=13$ ، والمعادلة : $Arg(z-4)=\frac{\pi}{4}$،

ثم جد العدد المركّب z الذي يحققهما معاً ؟ **(8 علامات)**

4) مثّل في المستوى المركّب المعادلة : $|z-3-2i|=5$ ، والمعادلة: $|z-6i|=|z-7+i|$ ،

ثم جد العددين المركّبين الذين يحققان المعادلتين معاً ؟ **(8 علامات)**

أ. زكي غنيم

أ.ابراهيم العقرباوي