المرجع في الرياضيات

للصف الثاني ثانوي العلمي

كتاب التمارين

الفصل الأول

الوحدة الثالثة (الأعداد المركبة)

يعتبر مرجعاً للطلاب ومعلمي المادة

الأستاذ: معتصم ابراهيم
0788586401

الوحدة الثالثة: الأعداد المركبة

استعد لدراسة الوحدة:

حل معادلات كثيرات الحدود:

أحل كلاً من المعادلتين الآتيتين:

1) $x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x-6)(x+2) = 0$

$x - 6 = 0$

$\boxed{x = 6}$

$x + 2 = 0$

$\boxed{x = -2}$

2) $2x^3 - 6x^2 + 7x - 60 = 0$

الأصفار النسبية المحتملة $\frac{p}{q} = \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}}$:

لتحليل المعادلة من خلال تحليل العوامل ومن خلال التجربة :

$p = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm30, \pm60$

$q = \pm1, \pm2$

$\pm\frac{p}{q} = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm30, \pm60$

بالتعويض ، نجد أن العدد $x = 4$ يحقق هذه المعادلة :

$2(4)^3 - 6(4)^2 + 7(4) - 60 = 0$

$2(64) - 6(16) + 7(4) - 60 = 0$

$128 - 96 + 28 - 60 = 0$

$156 - 156 = 0$

إذن $\boxed{x=4}$ هو أحد أصفار المعادلة، و $x-4$ هو أحد عوامل المقدار: $2x^3-6x^2+7x-60$

لإيجاد العامل الآخر ، أقسم هذا المقدار على $(x-4)$:

	x^3	x^2	x	الثابت
4	2	-6	7	-60
	0	8	8	60
	2	2	15	0

بالتحليل وفق نتيجة القسمة:

$$(x-4)(2x^2+2x+15)=0$$

العبارة التربيعية $2x^2+2x+15$ مميزها سالب ، أي ليس لها جذور حقيقية .

الحل الوحيد لهذه المعادلة هو : $x=4$

$$b^2-4ac$$

$$2^2-4(2)(15)$$

$$2^2-4(2)(15)$$

$$4-120=-116$$

مثال : أحل المعادلة $3x^3+7x^2-9x=5x+24$.

استعمل نظرية الأصفار النسبية لإيجاد أحد أصفار المعادلة على النحو الآتي:

$$3x^3+7x^2-9x=5x+24$$

$$3x^3+7x^2-9x-5x-24=0$$

$$3x^3+7x^2-14x-24=0$$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} : \frac{24}{1}$

لتحليل المعادلة من خلال تحليل عوامل العدد 24 وذلك من خلال التجربة $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6$

بالتعويض ، نجد أن العدد $x=2$ يحقق هذه المعادلة :

$$3(2)^3 + 7(2)^2 - 14(2) - 24 = 0$$

$$24 + 28 - 28 - 24 = 0$$

إذن $\boxed{x = 2}$ هو أحد أصفار المعادلة، و $x - 2$ هو أحد عوامل المقدار: $3x^3 + 7x^2 - 14x - 24$

لإيجاد العامل الآخر ، أقسم هذا المقدار على $(x - 2)$:

	x^3	x^2	x	الثابت
2	3	7	-14	-24
	0	6	26	24
	3	13	12	0

بالتحليل وفق نتيجة القسمة:

$$(x - 2)(3x^2 + 13x + 12) = 0$$

خاصية الضرب الصفري:

$$3x^2 + 13x + 12 = 0 \qquad or \qquad x - 2 = 0$$

نحلل المعادلة التربيعية الناتجة:

$$3x^2 + 13x + 12 = 0$$

$$(3x + 4)(x + 3) = 0$$

$$3x + 4 = 0$$

$$3x = -4$$

$$\boxed{x = \frac{-4}{3}}$$

$$x + 3 = 0$$

$$\boxed{x = -3}$$

إذن يوجد للمعادلة 3 حلول (أصفار) هي : $\frac{-4}{3}$, -3 , 2 .

تمثيل المتجهات في المستوى الإحداثي والعمليات عليها:

3) إذا كانت $A(4,2)$ ، وكانت $B(2,6)$ ، فاكتب الصورة الإحداثية للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ ، ثم أجد مقداره .

$\overrightarrow{AB} = \langle x_B - x_A \, , y_B - y_A \rangle$

بتعويض $A(4,2)$ و $B(2,6)$ ، والتبسيط :

$\overrightarrow{AB} = \langle 2-4 \, , 6-2 \rangle$

$\overrightarrow{AB} = \langle -2 \, , 4 \rangle$

صيغة مقدار المتجه $a = \langle a_1 + a_2 \rangle$

$|a| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$

بتعويض $\overrightarrow{AB} = a = \langle -2 \, , 4 \rangle$

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2}$

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{4+16}$

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{20}$

$\overrightarrow{AB} = 2\sqrt{5}$

إذن ، $\overrightarrow{AB} = \langle -2 \, , 4 \rangle$ ، ومقداره هو $2\sqrt{5}$.

4) إذا كانت $A(-2,3)$ ، وكانت $B(0,7)$ ، فاكتب الصورة الإحداثية للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ ، ثم أجد مقداره .

$\overrightarrow{AB} = \langle x_B - x_A \, , y_B - y_A \rangle$

بتعويض $A(-2,3)$ و $B(0,7)$ ، والتبسيط :

$\overrightarrow{AB} = \langle 0-(-2) \, , 7-3 \rangle$

$\overrightarrow{AB} = \langle 2 \, , 4 \rangle$

صيغة مقدار المتجه $a = \langle a_1 + a_2 \rangle$

$$|a| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

بتعويض $\overrightarrow{AB} = a = \langle 2\,, 4 \rangle$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{2^2 + 4^2}$$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{4 + 16}$$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{20}$$

$$\overrightarrow{AB} = 2\sqrt{5}$$

إذن ، $\overrightarrow{AB} = \langle 2\,, 4 \rangle$ ، ومقداره هو $2\sqrt{5}$.

مثال: إذا كانت $A(-5, 4)$ ، وكانت $B(2, 7)$ ، فاكتب الصورة الإحداثية للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ ، ثم أجد مقداره.

صيغة الصورة الإحداثية للمتجه:

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_B - x_A\,, y_B - y_A \rangle$$

بتعويض $A(-5, 4)$ و $B(2, 7)$ ، والتبسيط :

$$\overrightarrow{AB} = \langle 2 - (-5)\,, 7 - 4 \rangle$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 7\,, 3 \rangle$$

صيغة مقدار المتجه $a = \langle a_1 + a_2 \rangle$

$$|a| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

بتعويض $\overrightarrow{AB} = a = \langle 7\,, 3 \rangle$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{7^2 + 3^2}$$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{49 + 9}$$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{58}$$

إذن ، $\overrightarrow{AB} = \langle 7\,, 3 \rangle$ ، ومقداره هو $\sqrt{58}$.

معادلة الدائرة:

5) اكتب معادلة دائرة مركزها $(-1\,,8)$ ، وطول نصف قطرها 5 وحدات .

صيغة معادلة دائرة مركزها (h,k) ، ونصف قطرها r

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

بتعويض $(h\,,k)=(3\,,-4)$ ، و $r=5$

$$(x+1)^2+(y-8)^2=25$$

6) اكتب معادلة دائرة مركزها $(-7\,,13)$ ، وتمر بالنقطة $(5\,,4)$ وحدات .

أجد طول نصف القطر r ، وهو المسافة بين المركز ونقطة تمر بها الدائرة :

صيغة المسافة بين نقطتين :

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

بتعويض $(x_2,y_2)=(-7\,,13)$ ، $(x_1,y_1)=(5\,,4)$

$$r=\sqrt{(5+7)^2+(4-13)^2}$$

$$r=\sqrt{144+81}$$

$$r=\sqrt{225}$$

$$r=15$$

صيغة معادلة دائرة مركزها (h,k) ، ونصف قطرها r

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

بتعويض $(h\,,k)=(-7\,,13)$ ، و $r=15$

$$(x+7)^2+(y-13)^2=225$$

مثال : اكتب معادلة دائرة مركزها $(3\,,-4)$ ، وتمر بنقطة الأصل .

أجد طول نصف القطر r ، وهو المسافة بين المركز ونقطة تمر بها الدائرة :

صيغة المسافة بين نقطتين:

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

بتعويض $(x_2, y_2) = (3\,, -4)$ ، $(x_1, y_1) = (0\,, 0)$

$$r = \sqrt{(3-0)^2 + (-4-0)^2}$$

$$r = \sqrt{9+16}$$

$$r = \sqrt{25}$$

$$r = 5$$

صيغة معادلة دائرة مركزها (h, k) ، ونصف قطرها r

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

بتعويض $(h\,, k) = (3\,, -4)$ ، و $r = 5$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

حل نظام متباينات خطية:

7) أمثل بيانياً منطقة حل نظام المتباينات الآتي، ثم اتحقق من صحة الحل:

$$4x + 3y \leq 12$$

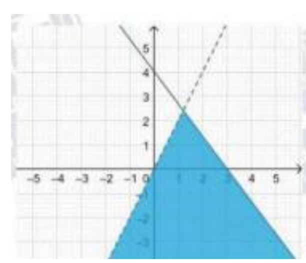
$$y - 2x < 0$$

نرسم المستقيم $4x + 3y \leq 12$ بخط متصل.

ونرسم المستقيم $y - 2x < 0$ بخط متقطع على المستوى الديكارتي نفسه .

ونظلل المنطقة التي تحوي النقاط التي تحقق كلا المتباينتين.

للتحقق من صحة الحل نعوض الزوج $(2, 0)$ في المتباينتين .



$$4(2) + 3(0) \leq 12$$

$8 \leq 12$ ✓ العبارة صحيحة

$$(0) - 2(2) < 0$$

$-4 < 0$ ✓ العبارة صحيحة

إذن الحل صحيح لأن الزوج $(2, 0)$ من منطقة الحل المظللة حقق المتباينتين معاً .

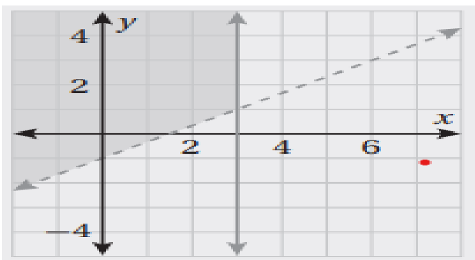
مثال: أمثل بيانياً منطقة حل نظام المتباينات الآتي، ثم اتحقق من صحة الحل:

$x \leq 3$

$y > \frac{2}{3}x - 1$

الخطوة الأولى: أمثل بيانياً المستقيمين الحدوديين.

أمثل بيانياً المستقيمين الحدوديين : $x = 3$ و $y > \frac{2}{3}x - 1$ في المستوى $y = \frac{2}{3}x - 1$ في المستوى الإحداثي نفسه ، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة الثانية ، فإنني أرسم المستقيم : $y = \frac{2}{3}x - 1$ متقطعاً ، أما المستقيم : $x = 3$ ، فأرسمه متصلاً ، نظراً إلى وجود مساواة في رمز المتباينة الأولى كما في الشكل المجاور.



الخطوة الثانية: أحدد منطقة التقاطع بين حلي المتباينتين.

أظلل منطقة الحل لكل متباينة، ومن ثم تكون المنطقة المشتركة بين منطقتي حل المتباينتين هي حل نظام المتباينات كما في الشكل المجاور.

الخطوة الثالثة: أتحقق من صحة الحل.

أتحقق من صحة الحل باختيار زوج مرتب يقع في منطقة حل النظام ، مثل $(0, 2)$ ، ثم أعوضه في متباينات النظام جميعها:

المتباينة الأولى:

$x \leq 3$

بالتعويض:

$0 \leq 3$ ✓ العبارة صحيحة

المتباينة الثانية:

$y > \frac{2}{3}x - 1$

بالتعويض:

$2 > \frac{2}{3}(0) - 1$

$2 > -1$ ✓ العبارة صحيحة

الدرس الأول

الأعداد المركبة

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i :

1) $\sqrt{-128}$

$= \sqrt{-1 \times 2 \times 64}$

$= 8\sqrt{2}\, i$

2) $\sqrt{-14}$

$= \sqrt{-1 \times 14}$

$= \sqrt{14} i$

3) $\sqrt{-81}$

$= \sqrt{-1 \times 81}$

$= 9i$

4) $\sqrt{-125}$

$= \sqrt{-1 \times 5 \times 25}$

$= 5\sqrt{5} i$

5) $3\sqrt{-32}$

$= 3\sqrt{-1 \times 2 \times 16}$

$= 12\sqrt{2} i$

6) $\sqrt{\frac{-28}{9}}$

$= \sqrt{-1 \times \frac{7 \times 4}{9}}$

$= \frac{2\sqrt{7}i}{3}$

أجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة مفترضاً أن $i = \sqrt{-1}$:

7) i^7

$= i^3$

$= -i$

8) i^{12}

$= i^0$

$= 1$

9) i^{98}

$= i^2$

$= -1$

10) i^{121}

$= i^1$

$= i$

أملأ الفراغ بما هو مناسب في الجدول الآتي:

z	$Re(z)$	$Im(z)$
$-4+6i$	-4	6
-3	-3	0
$8i$	0	8
$-8+3i$	-8	3

أمثل كلا من الأعداد المركبة الآتية في المستوى المركب المجاور:

12) 5

13) -4

14) $4i$

15) $-3i$

16) $4-2i$

17) $-3+5i$

18) $-3-5i$

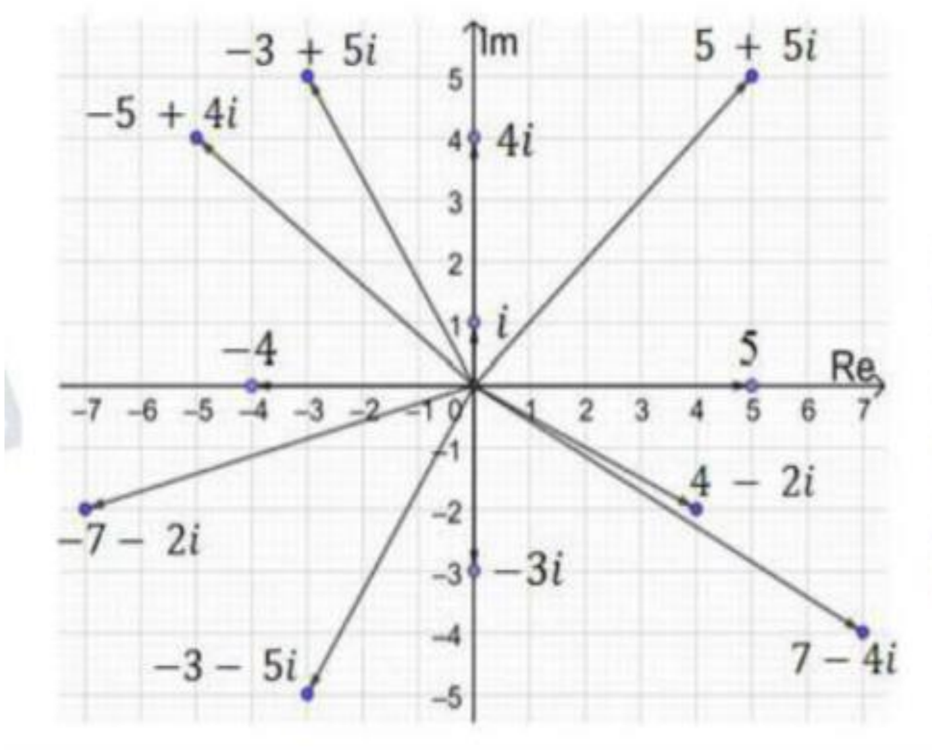
19) i

20) $7-4i$

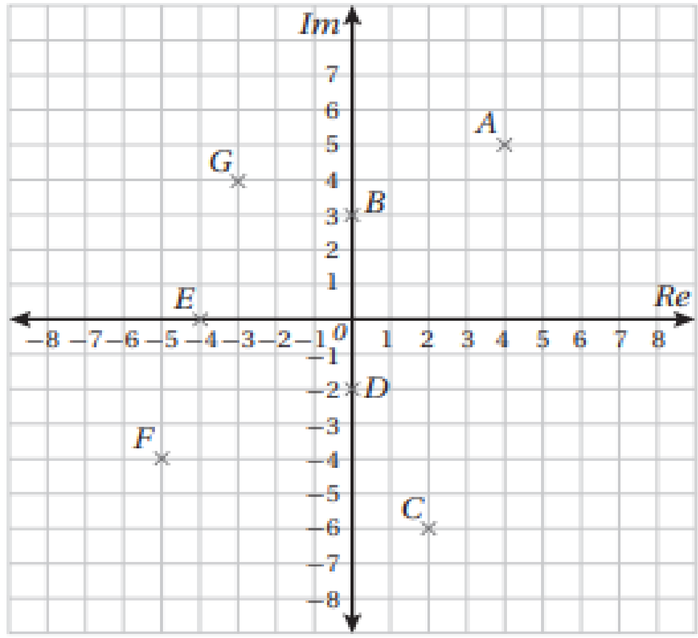
21) $-5+4i$

22) $-7-2i$

23) $5+5i$



24) أكتب كلا من الأعداد المركبة الممثلة بيانياً في المستوى المركب المجاور بالصورة القياسية، ثم أجد مقياسه وسعته .



$A = 4 + 5i$

$|A| = \sqrt{16 + 25}$

$|A| = \sqrt{41}$

$Arg(A) = \tan^{-1}\frac{5}{4}$

$Arg(A) \approx 0.90$

$B = 3i$

$|B| = \sqrt{9}$

$|B| = 3$

$Arg(B) = \frac{\pi}{2}$

$C = 2 - 6i$

$|C| = \sqrt{4 + 36}$

$|C| = 2\sqrt{10}$

$Arg(C) = \tan^{-1} 3$

$Arg(C) \approx -1.25$

$E = -4$

$|E| = \sqrt{16}$

$|E| = 4$

$Arg(E) = \pi$

$F = -5 - 4i$

$|F| = \sqrt{25 + 16}$

$|F| = \sqrt{41}$

$Arg(F) = -\left(\pi - \tan^{-1}\frac{5}{4}\right)$

$Arg(F) \approx -2.47$

$G = -3 - 4i$

$|G| = \sqrt{9 + 16}$

$|G| = \sqrt{25}$

$|G| = 5$

$Arg(G) = \pi - \tan^{-1}\frac{4}{3}$

$Arg(G) \approx 2.21$

أجد قيمة x ، وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة :

25) $(2x + 1) + 4i = 7 - i(y - 3)$

$2x + 1 = 7$

$2x = 7 - 1$

$\boxed{x = 3}$

$4 = -(y - 3)$

$4 = -y + 3$

$y = 3 - 4$

$\boxed{y = -1}$

26) $i(2x-4y)+x+3y=26-32i$

$i(2x-4y)+x=26-3y-32i$

$x=26-3y$

$2x-4y=32$

$2(26-3y)-4y=32$

$52-6y-4y=32$

$52-10y=32$

$10y=52-32$

$10y=20$

$\boxed{y=2}$

$x=26-3y$

$x=26-3(2)$

$\boxed{x=20}$

اكتب كلاً من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية:

27) 6

$|z|=6$

$Arg(z)=\tan^{-1}\frac{0}{6}=0$

$z=6(\cos 0+i\sin 0)$

28) $-5i$

$|z|=5$

$Arg(z)=-\frac{\pi}{2}$

$z=5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

29) $-2\sqrt{3}-2i$

$$|z| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (2)^2}$$

$$|z| = \sqrt{12+4}$$

$$|z| = 4$$

$$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{5\pi}{6}$$

$$z = 4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

30) $-1+i$

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$$

$$|z| = \sqrt{2}$$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1} 1 = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

31) $4-2i$

$$|z| = \sqrt{(4)^2 + (2)^2}$$

$$|z| = \sqrt{16+4}$$

$$|z| = \sqrt{20}$$

$$|z| = 2\sqrt{5}$$

$$Arg(z) = -\tan^{-1}\frac{1}{2} \approx -0.46$$

$$z = 2\sqrt{5}(\cos(-0.46) + i\sin(-0.46))$$

32) $2 + 8i$

$|z| = \sqrt{(2)^2 + (8)^2}$

$|z| = \sqrt{4 + 64}$

$|z| = \sqrt{68}$

$|z| = 2\sqrt{17}$

$Arg(z) = \tan^{-1} 4 \approx 1.33$

$z = 2\sqrt{17}(\cos(1.33) + i\sin(1.33))$

اكتب كلاً من الأعداد المركبة الآتية بالصورة القياسية:

33) $6(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$= 6(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

$= 3\sqrt{3} + 3i$

34) $12(\cos\pi + i\sin\pi)$

$= 12(-1 + i(0))$

$= -12$

35) $8(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

$= 8(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$= -4 + 4i\sqrt{3}$

36) $3(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4})$

$= 3(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i)$

$= \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i$

أجد مرافق كل من الأعداد المركبة الآتية، ثم أمثلها جميعاً في المستوى المركب نفسه:

37) $-1 - i\sqrt{5}$

$\bar{z} = -1 + i\sqrt{5}$

38) $9 - i$

$\bar{z} = 9 + i$

39) $2 - 8i$

$\bar{z} = 2 + 8i$

40) $-9i$

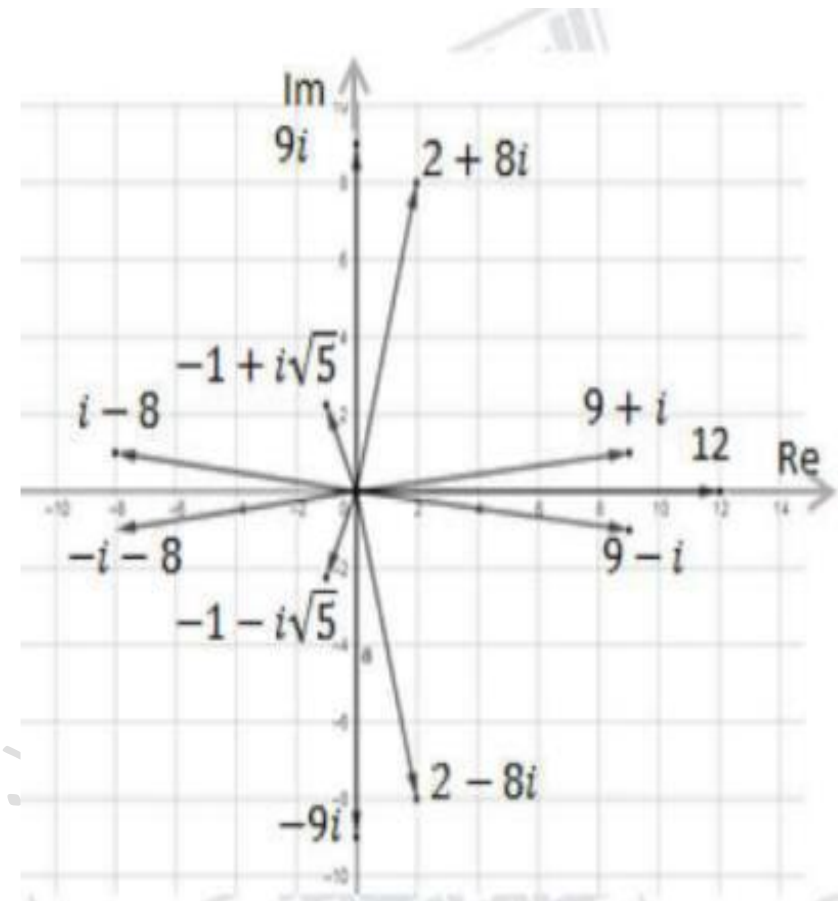
$\bar{z} = 9i$

41) 12

$\bar{z} = 12$

42) $i - 8$

$\bar{z} = -i - 8$



الدرس الثاني

العمليات على الأعداد المركبة

1) $(6+8i)+(3-5i)$

$= (6+3)+(8-5)i$

$= 9+3i$

2) $(-6-3i)-(-8+2i)$

$= -6-3i+8-2i$

$= 2-5i$

3) $4\mathrm{i}(7-3\mathrm{i})$

$= 28i-12i^2$

$= 28i+12$

$= 12+28i$

4) $(8-6i)(8+6i)$

$= (8\times 8)+(8\times 6i)+(-6i\times 8)+(-6i\times 6i)$

$= 64+48i-48i-36i^2$

$= 64+48i-48i+36$

$= 64+36$

$= 100$

5) $(-2+2i\sqrt{3})^3$

$= (-2+2i\sqrt{3})^2(-2+2i\sqrt{3})$

$$= (4 - 8i\sqrt{3} + 12i^2)(-2 + 2i\sqrt{3})$$

$$= (4 - 8i\sqrt{3} - 12)(-2 + 2i\sqrt{3})$$

$$= (-8 - 8i\sqrt{3})(-2 + 2i\sqrt{3})$$

$$= (-8 \times -2) + \left(-8 \times 2i\sqrt{3}\right) + \left(-8i\sqrt{3} \times -2\right) + (-8i\sqrt{3} \times 2i\sqrt{3})$$

$$= (16) + \left(-16i\sqrt{3}\right) + \left(16i\sqrt{3}\right) + (-48i^2)$$

$$= (16) + \left(-16i\sqrt{3}\right) + \left(16i\sqrt{3}\right) + (48)$$

$$= 16 + 48$$

$$= 64$$

6) $\frac{(2+i)(1-i)}{4-3i}$

$$= \frac{2 - 2i + i - i^2}{4 - 3i}$$

$$= \frac{2 - 2i + i + 1}{4 - 3i}$$

$$= \frac{3 - i}{4 - 3i}$$

$$= \frac{3 - i}{4 - 3i} \cdot \frac{4 + 3i}{4 + 3i}$$

$$= \frac{12 + 9i - 4i - 3i^2}{(4)^2 + (3)^2}$$

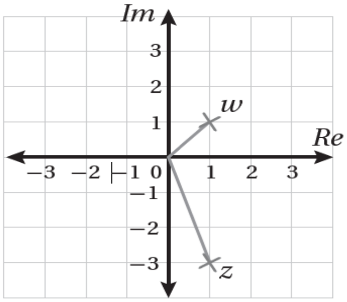
$$= \frac{12 + 5i + 3}{16 + 9}$$

$$= \frac{15 + 5i}{25}$$

$$= \frac{15}{25} + \frac{5}{25}i$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$$

معتمداً المستوى المركب المجاور الذي يبين العددين المركبين z و w، أجيب عن الاسئلة الثلاثة الأتية تباعاً .



7) أكتب كلا من العددين z و w بالصورة القياسية .

$$z = 1 - 3i$$

$$w = 1 + i$$

8) أجد السعة والمقياس لكل من العددين المركبين wz و $\frac{w}{z}$.

$$wz = (1 - 3i)(1 + i)$$

$$wz = 1 + i - 3i - 3i^2$$

$$wz = 1 + i - 3i + 3$$

$$wz = 4 - 2i$$

$$|wz| = \sqrt{(4)^2 + (2)^2}$$

$$|wz| = \sqrt{16 + 4}$$

$$|wz| = \sqrt{20}$$

$$|wz| = 2\sqrt{5}$$

$$Arg(wz) = -\tan^{-1}\frac{1}{2} \approx -0.46$$

$$\frac{w}{z} = \frac{(1+i)}{(1-3i)} \cdot \frac{(1+3i)}{(1+3i)}$$

$$\frac{w}{z} = \frac{1 + 3i + i + 3i^2}{(1)^2 + (3)^2}$$

$$\frac{w}{z} = \frac{1 + 4i - 3}{10}$$

$$\frac{w}{z} = \frac{-2+4i}{10}$$

$$\frac{w}{z} = \frac{-2}{10} + \frac{4}{10}i$$

$$\frac{w}{z} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}}$$

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \sqrt{\frac{5}{25}}$$

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$Arg\left(\frac{w}{z}\right) = \pi - \tan^{-1}2 \approx 2.03$$

9) أمثل العددين wz و $\frac{w}{z}$ في المستوى المركب .

$$wz = 4 - 2i$$

$$\frac{w}{z} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

إذا كان : $z = -3 + 3i\sqrt{3}$ ، وكان : $|w| = 18, Arg\ (w) = -\frac{\pi}{6}$ ، فأجد ناتج كل مما يأتي :

10) $Arg(z)$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

11) $|z|$

$$|z| = \sqrt{(3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2}$$

$$|z| = \sqrt{9 + 27}$$

$$|z| = \sqrt{36}$$

$$|z| = 6$$

12) $Arg(zw)$

$$Arg(zw) = Arg(z) + Arg(w) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$Arg(zw) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$

$$Arg(zw) = \frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$$

$$Arg(zw) = \frac{3\pi}{6}$$

$$Arg(zw) = \frac{\pi}{2}$$

13) $|zw|$

$$|zw| = |z| \times |w| = 6 \times 18 = 108$$

أجد الجذرين التربيعين لكل عدد مركب مما يأتي:

14) $-15+8i$

$$\sqrt{-15+8i}=x+yi$$

$$-15+8i=(x+yi)^2$$

$$-15+8i=x^2-y^2+2xyi$$

$$x^2-y^2=-15$$

$$\frac{2xy}{2x}=\frac{8}{2x}$$

$$\boxed{y=\frac{4}{x}}$$

$$x^2-\left(\frac{4}{x}\right)^2=-15$$

$$x^2-\frac{16}{x^2}=-15$$

$$\left[x^2-\frac{16}{x^2}=-15\right]\quad\times x^2$$

$$x^4-16=-15x^2$$

$$x^4+15x^2-16=0$$

$$(x^2+16)(x^2-1)=0$$

$$x^2=1$$

$$x=\pm1$$

$$y=\frac{4}{1}=4$$

$$y=\frac{4}{-1}=-4$$

$$\sqrt{-15+8i}=\pm(1+4i)$$

15) $-7-24i$

$\sqrt{-7-24i} = x + yi$

$-7-24i = (x+yi)^2$

$-7-24i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$x^2 - y^2 = -7$

$\frac{2xy}{2x} = \frac{-24}{2x}$

$\boxed{y = -\frac{12}{x}}$

$x^2 - \left(-\frac{12}{x}\right)^2 = -7$

$x^2 - \frac{144}{x^2} = -7$

$\left[x^2 - \frac{144}{x^2} = -7\right] \quad \times x^2$

$x^4 - 144 = -7x^2$

$x^4 - 7x^2 - 144 = 0$

$(x^2+16)(x^2-9) = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

$y = \frac{-12}{-3} = 4$

$y = \frac{-12}{3} = -4$

$\sqrt{-7-24i} = \pm(3-4i)$

16) $105 + 88i$

$105 + 88i = x + yi$

$105 + 88i = (x + yi)^2$

$105 + 88i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 105$

$\frac{2xy}{2x} = \frac{88}{2x}$

$\boxed{y = \frac{44}{x}}$

$x^2 - \left(\frac{44}{x}\right)^2 = 105$

$x^2 - \frac{1936}{x^2} = 105$

$\left[x^2 - \frac{1936}{x^2} = 105\right] \quad \times x^2$

$x^4 - 1936 = 105x^2$

$x^4 - 105x^2 - 1936 = 0$

$(x^2 + 16)(x^2 - 121) = 0$

$x^2 = 121$

$x = \pm 11$

$\boxed{y = \frac{44}{x}}$

$y = \frac{44}{11} = 4$

$y = \frac{44}{-11} = -4$

$\sqrt{105 + 88i} = \pm(11 + 4i)$

17) إذا كان : $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ، فأكتبه بالصورة المثلثية ، مبيناً أن $\omega^3 = 1$.

$$Arg(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$|\omega| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$|\omega| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$|\omega| = \sqrt{\frac{4}{4}}$$

$$|\omega| = 1$$

$$\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$|\omega^3| = |\omega| \times |\omega| \times |\omega|$$

$$|\omega^3| = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$Arg(\omega^3) = Arg(\omega) + Arg(\omega) + Arg(\omega)$$

$$Arg(\omega) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$$

$$\omega^3 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = 1$$

إذا كان : $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5})$ ، وكان : $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3})$ ، فأجد كلاً مما يأتي بالصورة المثلثية :

18) $z_1 z_2$

$$z_1 z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}) \times 2(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3})$$

$$z_1 z_2 = 3 \times 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_1 z_2 = 6\left(\cos\frac{8\pi}{15} + i\sin\frac{8\pi}{15}\right)$$

19) $z_1(\overline{z_1})$

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\overline{z_1} = 3\left(\cos\frac{-\pi}{5} + i\sin\frac{-\pi}{5}\right)$$

$$z_1\overline{z_1} = 3 \times 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right)\right)$$

$$z_1\overline{z_1} = 9(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$z_1\overline{z_1} = 9(1 + 0)$$

$$z_1\overline{z_1} = 9$$

20) ${z_2}^3$

$${z_2}^3 = {z_2}^2 \times z_2 = 2^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right) \times z_2$$

$${z_2}^3 = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$${z_2}^3 = 8\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_2{}^3 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8$$

$$z_2{}^3 = 8(-1+0)$$

$$z_2{}^3 = -8$$

21) $\frac{z_2}{z_1}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15}\right)$$

22) إذا كان : $\left|\frac{u-9i}{3+i}\right| = 5$ ، فما قيمة u ، علماً بأنها سالبة ؟

$$\left|\frac{u-9i}{3+i}\right| = 5$$

$$\frac{|u-9i|}{|3+i|} = 5$$

$$\frac{u^2+81}{9+1} = 25$$

$$\frac{\sqrt{u^2+81}}{\sqrt{10}} = \sqrt{25}$$

$$\sqrt{u^2+81} = 5\sqrt{10}$$

$$u^2+81 = 250$$

$$u^2 = 250-81$$

$$u^2 = 169$$

$$u = \pm 13$$

وحسب المعطيات u سالبة ، إذن $u = -13$

23) إذا كان : $(1+4i)$ جذراً للمعادلة : $x^3+5x^2+ax+b=0$ ، فأجد قيمة كل من العددين الحقيقين a و b ، والجذريين الآخرين لهذه المعادلة .

$(1+4i)^3+5(1+4i)^2+a(1+4i)+b=0$

$(1+4i)^2(1+4i)+5(1+4i)^2+a(1+4i)+b=0$

$(1+8i-16)(1+4i)+5(1+8i-16)+a(1+4i)+b=0$

$1+8i-16+4i-32-64i+5+40i-80+a+4ai+b=0$

$-122+a+b-12i+4ai=0$

$-122+a+b+(4a-12)i=0$

$-122+a+b=0$

$4a-12=0$

$4a=12$

$\boxed{a=3}$

$-122+3+b=0$

$-119+b=0$

$\boxed{b=119}$

المعادلة هي $x^3+5x^2+3x+119=0$

بما أن $(1+4i)$ جذر للمعادلة، وحيث أن المعادلة ذات معاملات حقيقية فإن الجذر الثاني هو المرافق للجذر الأول أي : $(1-4i)$.

$=\big(x-(1+4i)\big)\big(x-(1-4i)\big)$

$=(x-1-4i)(x-1+4i)$

$=x^2-x+4xi-x+1-4i-4xi+4i-16i^2$

$=x^2-2x+17$

ثم نقسم كثير الحدود $x^3+5x^2+3x+119$ على $x^2-2x+17$ فنحصل على :

$x^3+5x^2+3x+119=(x^2-2x+17)(x+7)$

24) أجد قيمتي الجذر التربيعي : $\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}}$

$\frac{362-153i}{2-3i}$ نبسط

$= \frac{362-153i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i}$

$= \frac{362(2)-362(3i)-153i(2)-153i(3i)}{(2)^2+(3)^2}$

$= \frac{724-1086i-306i+459}{13}$

$= \frac{1183-780i}{13}$

$= \frac{1183}{13} - \frac{780}{13}i$

$= 91-60i$

$\sqrt{91-60i} = x+yi$

$(\sqrt{91-60i})^2 = (x+yi)^2$

$91-60i = x^2-y^2+2xyi$

$x^2-y^2 = 91$

$\frac{2xy}{2x} = -\frac{60}{2x}$

$\boxed{y = -\frac{30}{x}}$

$x^2 - \left(-\frac{30}{x}\right)^2 = 91$

$x^2 - \frac{900}{x^2} = 91$

$\left[x^2 - \frac{900}{x^2} = 91\right] \times x^2$

$x^4 - 900 = 91x^2$

$x^4 - 91x^2 - 900 = 0$

$(x^2 + 9)(x^2 - 100) = 0$

$x^2 = 100$

$x = \pm 10$

$y = \frac{30}{x}$

$y = \frac{30}{10} = 3$

$y = \frac{30}{-10} = -3$

$\sqrt{\frac{362 - 153i}{2 - 3i}} = \pm(10 - 3i)$

25) أثبت أن أحد الجذرين التربيعيين للعدد : $(7 + 24i)$ هو $(4 + 3i)$ ، ثم أجد الجذر التربيعي الآخر.

$(4 + 3i) = \sqrt{7 + 24i}$

$(4 + 3i)^2 = \left(\sqrt{7 + 24i}\right)^2$

$(4 + 3i)^2 = 7 + 24i$

$= (4 + 3i)^2$

$= 16 + 24i - 9$

$= 7 + 24i$

إذن هو أحد جذري العدد $(7 + 24i)$ ويكون الجذر الآخر هو: $-4 - 3i$

26) أثبت أن سعة $(7+24i)$ تساوي ضعف سعة $(4+3i)$.

$$\theta_1 = Arg(7+24i) = \tan^{-1}\frac{24}{7} \approx 1.287$$

$$\theta_2 = Arg(4+3i) = \tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 0.6435$$

$$2 \times \theta_2 = 2(0.6435) = 1.287 = \theta_1$$

27) أثبت أن مقياس $(7+24i)$ يساوي مربع مقياس $(4+3i)$.

$$|7+24i| = \sqrt{(7)^2+(24)^2}$$

$$|7+24i| = \sqrt{49+576}$$

$$|7+24i| = \sqrt{625}$$

$$\boxed{|7+24i| = 25}$$

$$|4+3i| = \sqrt{(4)^2+(3)^2}$$

$$|4+3i| = \sqrt{16+9}$$

$$|4+3i| = \sqrt{25}$$

$$|4+3i| = 5$$

$$\boxed{|4+3i|^2 = 25}$$

$$\boxed{|7+24i| = |4+3i|^2}$$

28) إذا كان : $\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i$ ، فأجد قيمة كل من العددين الحقيقين a و b .

$$\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i$$

$$\frac{a}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}+\frac{b}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}=1-i$$

$$\frac{3a-ai}{(3)^2+(1)^2}+\frac{b-2bi}{(1)^2+(2)^2}=1-i$$

$$\frac{3a-ai}{9+1}+\frac{b-2bi}{1+4}=1-i$$

$$\frac{3a-ai}{10}+\frac{b-2bi}{5}=1-i$$

$$\frac{3a}{10}+\frac{a}{10}i+\frac{b}{5}-\frac{2b}{5}i=1-i$$

$$\frac{3a}{10}+\frac{b}{5}=1$$

$$\frac{3a}{10}+\frac{2b}{10}=1$$

$$\boxed{3a+2b=10}$$

$$\frac{a}{10}+\frac{2b}{5}=1$$

$$\frac{a}{10}+\frac{4b}{10}=1$$

$$\frac{a+4b}{10}=1$$

$$a+4b=10$$

$$\boxed{a=10-4b}$$

$$3(10-4b)+2b=10$$

$$30-12b+2b=10$$

$$30-10b=10$$

$$10b=30-10$$

$$10b=20$$

$$\boxed{b=2}$$

$$a=10-4(2)$$

$$a=10-8$$

$$\boxed{a=2}$$

أحل كل معادلة مما يأتي:

29) $2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

الأصفار النسبية المحتملة هي : ..... , $\pm 1 , \pm 3 , \pm 29$

بالتعويض، نجد أن العدد $z = -3$ يحقق المعادلة :

$2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 = 0$

$2(-3)^3 - 8(-3)^2 - 13(-3) + 87 = 0$

$-54 - 72 + 39 + 87 = 0$

$-126 + 126 = 0$

إذن $z + 3$ هو أحد العوامل ، نجري القسمة فنجد أن :

	z^3	z^2	z	الثابت
-3	2	-8	-13	87
	0	-6	42	-87
	2	-14	29	0

$2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 = (z + 3)(2z^2 - 14z + 29)$

$(z + 3) = 0$

$z = -3$

$2z^2 - 14z + 29 = 0$

$a = 2 \ , b = -14 \ , c = 29$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\times2\times29}}{2(2)}$$

$$z=\frac{14\pm\sqrt{196-232}}{4}$$

$$z=\frac{14\pm\sqrt{-36}}{4}$$

$$z=\frac{14\pm6i}{4}$$

$$z=\frac{7\pm3i}{2}$$

$$z=\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2}i$$

إذن لهذه المعادلة 3 حلول هي : $\frac{7}{2}-\frac{3}{2}i$ ، $\frac{7}{2}+\frac{3}{2}i$ ، -3

30) $z^3+4z^2-10z+12=0$

الأصفار النسبية المحتملة هي : $\pm12\,,\pm6\,,\pm3\,,\pm4\,,\pm2\,,\pm1$

بالتعويض، نجد أن العدد $z=-6$ يحقق المعادلة :

$$(-6)^3+4(-6)^2-10(-6)+12=0$$

$$-216+144+60+12=0$$

$$-216+216=0$$

إذن $z+6$ هو أحد العوامل ، نجري القسمة فنجد أن :

	z^3	z^2	z	الثابت
-6	1	4	-10	12
	0	-6	12	-12
	1	-2	2	0

$(z+6)(z^2-2z+2)=0$

$z+6=0$

$z=-6$

$z^2-2z+2=0$

$a=1\ ,b=-2\ ,c=2$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$z=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 1\times 2}}{2(1)}$$

$$z=\frac{2\pm\sqrt{4-6}}{2}$$

$$z=\frac{2\pm\sqrt{-2}}{2}$$

$$z=\frac{2\pm 2i}{2}$$

$$z=\frac{2}{2}\pm\frac{2}{2}i$$

$z=1\pm i$

إذن لهذه المعادلة 3 حلول هي : $1-i$ ، $1+i$ ، -6

31) إذا كان : $-2+i$ هو أحد جذور المعادلة : $z^4+az^3+bz^2+10z+25=0$ ، فأجد قيمة a وقيمة b ، ثم أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة .

$(-2+i)^4+a(-2+i)^3+b(-2+i)^2+10(-2+i)+25=0$

$(-2+i)^2(-2+i)^2+a(-2+i)^2(-2+i)+b(-2+i)^2+10(-2+i)+25=0$

$(4-4i-1)(4-4i-1)+(4-4i-1)(-2+i)+b(4-4i-1)+10(-2+i)+25=0$

$(3-4i)(3-4i)+a(3-4i)(-2+i)+b(3-4i)+10(-2+i)+25=0$

$(9-12i-12i-16)+a(-6+3i+8i+4)+b(3-4i)-20+10i+25=0$

$(-7-24i)+a(-2+11i)+b(3-4i)+10i+5=0$

$-7-24i-2a+11ai+3b-4bi+10i+5=0$

$-2-14i-2a+11ai+3b-4bi=0$

$-2-2a+3b-14i+11ai-4bi=0$

$-2-2a+3b=0$

$2a=3b-2$

$a=\frac{3b}{2}-1$

$-14+11a-4b=0$

$11a-4b=14$

$11\left(\frac{3b}{2}-1\right)-4b=14$

$\frac{33b}{2}-\frac{11}{2}-4b=14$

$\frac{33b}{2}-\frac{8b}{2}-11=14$

$\frac{25b}{2}=25$

$25b=50$

$\boxed{b=2}$

$11a-4(2)=14$

$11a-4(2)=14$

$11a-8=14$

$11a=22$

$\boxed{a=2}$

المعادلة هي :

$z^4+2z^3+2z^2+10z+25=0$

بما أن $-2+i$ جذر لهذة المعادلة ومعاملاتها حقيقية ، فإن المرافق $-2-i$ الجذر الاخر لها .

نكون المعادلة كما يلي :

$z^2-(\text{مجموع الجذرين})z+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$

$z^2-(-2+i)z+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$

مجموع الجذرين $=(-2+i)+(-2-i)$

مجموع الجذرين $=(-4)+(0)$

مجموع الجذرين $=-4$

حاصل ضرب الجذرين $=(-2+i)\times(-2-i)$

حاصل ضرب الجذرين $=4+2i-2i-i^2$

حاصل ضرب الجذرين $=4+2i-2i+1$

حاصل ضرب الجذرين $=5$

$z^2-(-4)z+(\ 5\ )=0$

$z^2+4+5=0$

ثم نقسم $z^4+2z^3+2z^2+10z+25$ على z^2+4+5 فنحصل على :

$z^4+2z^3+2z^2+10z+25=(z^2+4+5)(z^2-2z+5)$

$a=1\ ,b=-2\ ,c=5$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$z=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times5}}{2(1)}$$

$$z=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}$$

$$z=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}$$

$$z=\frac{2\pm 4i}{2}$$

$$z=\frac{2}{2}\pm\frac{4}{2}i$$

$$\boxed{z=1\pm 2i}$$

جذور هذه المعادلة هي: $x_1=-2-i$ ، $x_2=-2+i$ ، $x_3=1+2i$ ، $x_4=1-2i$

الدرس الثالث

المحل الهندسي في المستوى المركب

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، ثم أمثله في المستوى المركب، وأجد معادلته الديكارتيه :

1) $|z+5i|-3=1$

$|z+5i|=1+3$

$|z-(0-5i)|=4$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,-5)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات .

المعادلة الديكارتية :

$|z+5i|-3=1$

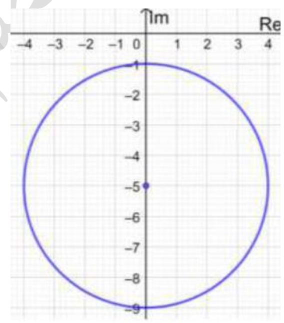
$|x+yi+5i|=4$

$|x+(y+5)i|=4$

$\sqrt{x^2+(5+y)^2}=4$

$\left(\sqrt{x^2+(5+y)^2}\right)^2=(4)^2$

$x^2+(5+y)^2=16$

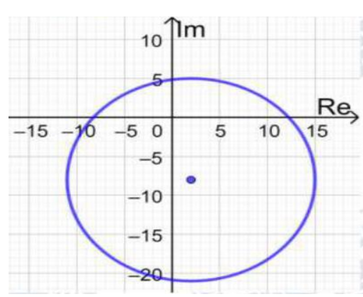


2) $|z-2+8i|=13$

$|z-(2-8i)|=13$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(2,-8)$ وطول نصف قطرها 13 وحدة .

المعادلة الديكارتية :



$|x+yi-2+8i|=13$

$|(x-2)+(y+8)i|=13$

$\sqrt{(x-2)^2+(y+8)^2}=13$

$(x-2)^2+(y+8)^2=169$

$3)\ |z+4-3i|=7$

$|z-(-4+3i)|=7$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-4,3)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات .

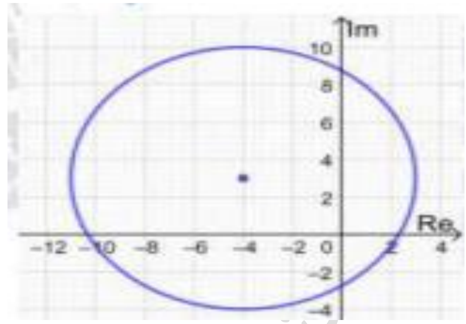
المعادلة الديكارتية:

$|x+yi+4-3i|=7$

$|(x+4)+(y-3)i|=7$

$\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}=7$

$(x+4)^2+(y-3)^2=49$



$4)\ |z+3+5i|=|z-i|$

$|z-(-3-5i)|=|z-(0+i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-3,-5),(0,1)$

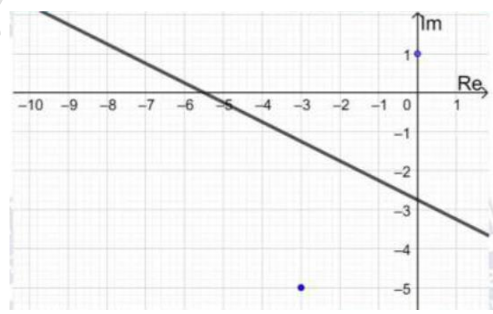
$|z+3+5i|=|z-i|$

$|x+yi+3+5i|=|x+yi-i|$

$|(x+3)+(y+5)i|=|x+(y-1)i|$

$\sqrt{(x+3)^2+(y+5)^2}=\sqrt{(x)^2+(y-1)^2}$

$(x+3)^2+(y+5)^2=(x)^2+(y-1)^2$



$x^2+6x+9+y^2+10y+25=x^2+y^2-2y+1$

$x^2+6x+9+y^2+10y+25=x^2+y^2-2y+1$

$6x+12y-33=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي :

$2x+4y-11=0$

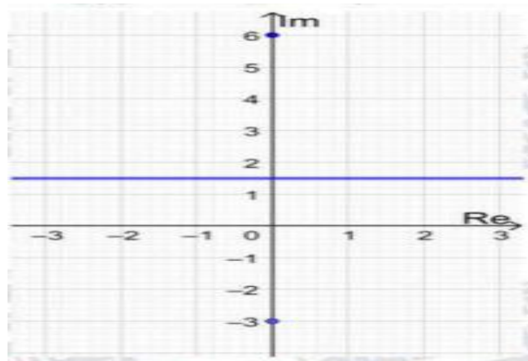
5) $\frac{|z+3i|}{|z-6i|} = 1$

$|z+3i| = |z-6i|$

$|z-(0-3i)| = |z-(0+6i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,-3),(0,6)$

$|z-(-3i)| = |z-(6i)|$



$|x+yi+3i| = |x+yi-6i|$

$\sqrt{(x)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x)^2+(y-6)^2}$

$(x)^2+(y+3)^2 = (x)^2+(y-6)^2$

$x^2+y^2+6y+9 = x^2+y^2-12y+36$

$18y-27=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي:

$2y-3=0$

$y=1.5$

6) $|6-2i-z| = |z+4i|$

$|-z+6-2i| = |z+4i|$

$|z-6+2i| = |z+4i|$

$|z-(6-2i)| = |z-(0-4i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(6,-2),(0,-4)$

$|x+yi-6+2i| = |x+yi+4i|$

$\sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x)^2+(y+4)^2}$

$(x-6)^2+(y+2)^2 = (x)^2+(y+4)^2$

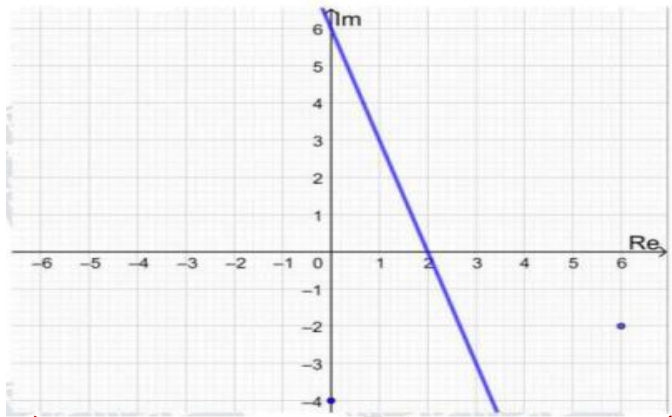
$x^2-12x+36+y^2+4y+4 = x^2+y^2+8y+16$

$x^2-12x+36+y^2+4y+4 = x^2+y^2+8y+16$

$$-12x - 4y + 24 = 0$$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي :

$$3x + y - 6 = 0$$

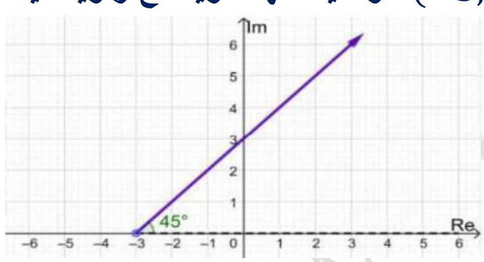


أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلات الآتية، ثم أمثله في المستوى المركب:

7) $Arg(z+3) = \frac{\pi}{4}$

$$Arg(z-(-3)) = \frac{\pi}{4}$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-3, 0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي الموجب .



8) $Arg(z+3-2i) = \frac{2\pi}{3}$

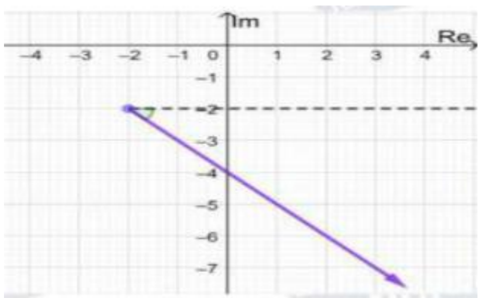
$$Arg(z-(-3+2i)) = \frac{2\pi}{3}$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-3, 2)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب .

9) $Arg(z + 2 + 2i) = -\frac{\pi}{4}$

$Arg(z - (-2 - 2i) = -\frac{\pi}{4}$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-2, -2)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب .



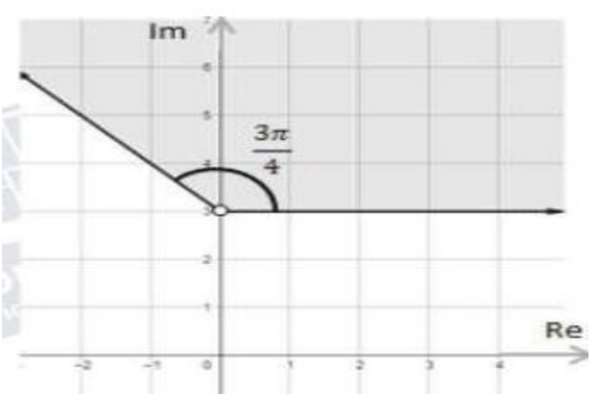
أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي الذي تمثله كل متباينة مما يأتي:

10) $0 \leq Arg(z - 3i) \leq \frac{3\pi}{4}$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z - 3i) = \frac{3\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0, 3)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب .

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z - 3i) = 0$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0, 3)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها 0 مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب .

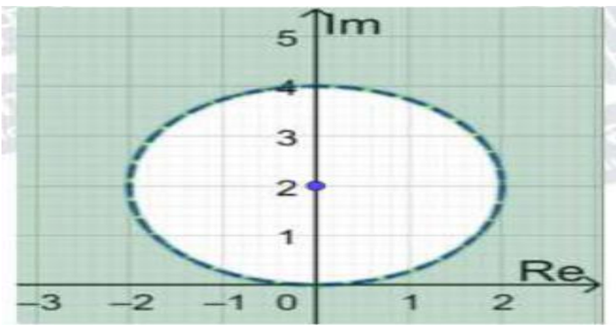
المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء المظلل من المستوى المركب كما في الشكل المجاور:



11) $|z-2i|>2$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-2i|=2$ ، وهو دائرة مركزها $(0,2)$ وطول نصف قطرها وحدتان .

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً ، أما منطقة المحل الهندسي فهي خارج الدائرة ، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة أكبر من طول نصف القطر .

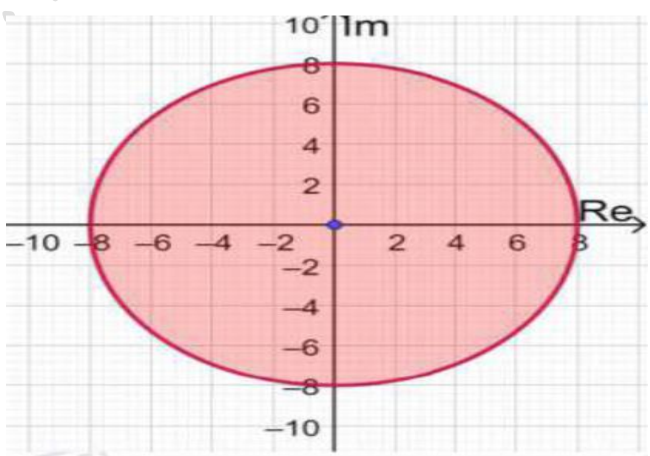


12) $|z|\le 8$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z|=8$ ، وهو دائرة مركزها $(0,0)$ وطول نصف قطرها 8 وحدات .

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلاً .

أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها.



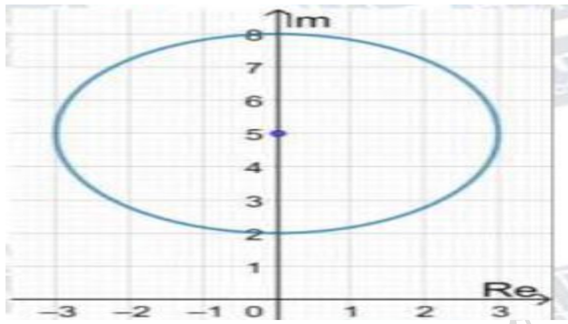
إذا كانت : $|z-5i|=3$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

13) ارسم المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة في المستوى المركب.

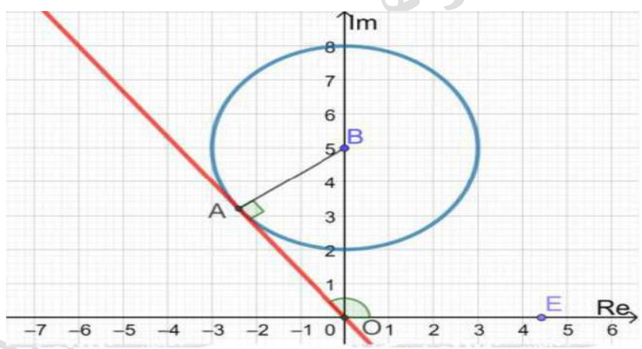
$|z-5i|=3$

$|z-(5i)|=3$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,5)$ وطول نصف قطرها 3 وحدات .



14) أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة .



أكبر سعة للعدد المركب z تساوي قياس الزاوية $\angle EOA$ المحصورة بين مماس الدائرة OA والمحور الحقيقي الموجب .

نصف قطر الدائرة AB عمودي على المماس OA في نقطة التماس A .

$OA=\sqrt{(OB)^2-(AB)^2}$

$OA=\sqrt{25-9}$

$OA=\sqrt{16}$

$OA=4$

$$\tan \angle BOA = \frac{3}{4}$$

$$\tan \angle BOA = \tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 0.64$$

$$m\,\angle EOB \approx \frac{\pi}{2} + 0.64 \approx 2.21$$

القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة المعطاة هي 2.21

15) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة : $|z-1+i| \leq 1$ ، والمتباينة : $-\frac{\pi}{3} < Arg(z) < 0$.

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-1+i| = 1$ وهو دائرة (ترسم بخط متصل) مركزها $(1,-1)$ وطول نصف قطرها وحده واحده .

أما منطقة المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تحقق هذه المتباينة فهي داخل الدائرة وعلى محيطها.

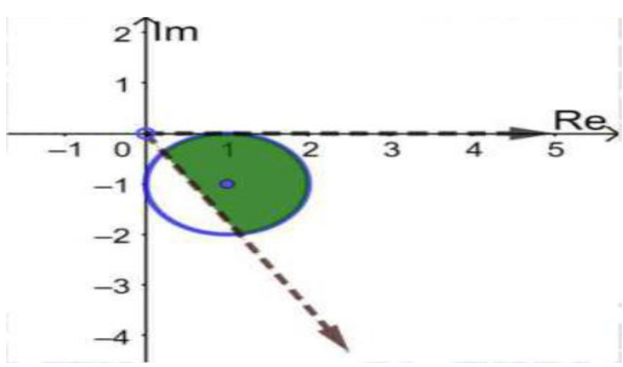
$$-\frac{\pi}{3} < Arg(z) < 0$$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z) = -\frac{\pi}{3}$ شعاعاً (بخط متقطع) يبدأ من النقطة $(0,0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي الموجب .

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z) = 0$ شعاعاً نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها 0 مع المحور الحقيقي الموجب .

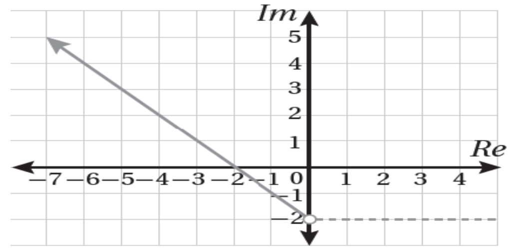
المحل الهندسي للنقاط التي تحقق هذه المتباينة هو الجزء من المستوى المركب المحصور بين هذين الشعاعين.

أما المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معاً فهو كما في الشكل:



16) أكتب (بدلالة z) معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقاط الممثلة في المستوى المركب المجاور .

$$Arg(z+2i)=\frac{3\pi}{4}$$



17) إذا كانت: $u=-7+7i$ ، وكانت : $v=7+7i$ ، فأجد بصيغة : $|z-z_1|$ معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل ، والنقطتين اللتين تمثلان العددين المركبين u و v .

$$u=-7+7i \quad , \quad v=7+7i$$

$$Arg(u)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{7}{7}\right)=\pi-\tan^{-1}(1)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

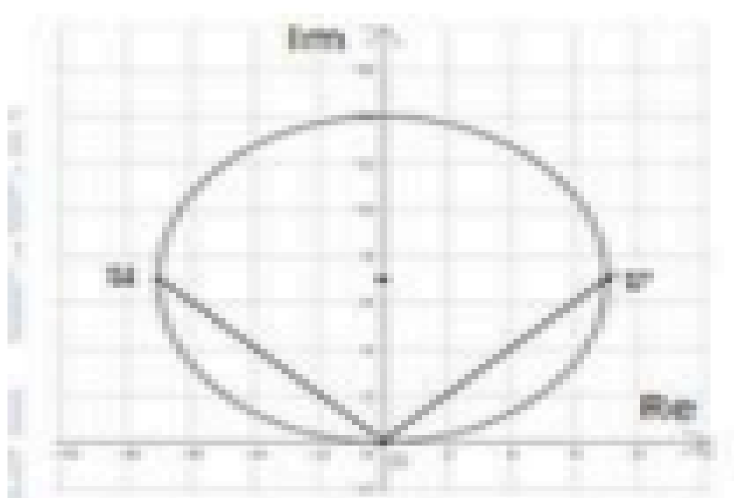
$$Arg(v)=\tan^{-1}\left(\frac{7}{7}\right)=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$$

الزاوية بين u و v تساوي $\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ ، فالقطعة المستقيمة uv قطر لهذه الدائرة .

ومركزها هو نقطة منتصف هذه القطعة وهي $\left(\frac{-7+7}{2},\frac{7+7}{2}\right)$ أي $(0,7)$ ، وطول نصف قطرها يساوي

$$\sqrt{(7-0)^2-(7-7)^2}=7$$

إذن معادلة الدائرة المطلوبة هي : $|z-7i|=7$



18) إذا كانت: $u = -1 + i$ ، فأجد u^2 ، ثم أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة : $|z| < 2$ ، والمتباينة : $|z - u| < |z - u^2|$.

$$u = -1 - i$$

$$u^2 = (1 + i)^2$$

$$u^2 = 2i$$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $u = -1$ ، وهو دائرة مركزها $(0,0)$ وطول نصف قطرها وحدتان .

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة ، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً .

أما منطقة المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تحقق هذه المتباينة فهي داخل الدائرة، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر.

$$z - u^2 < |z - u|$$

$$|z - 2i| < |z - (-1 - i)|$$

$$|z - 2i| = |z - (-1 - i)|$$

المنحنى الحدودي لهذه الدائرة معادلته $|z - 2i| = |z - (-1 - i)|$

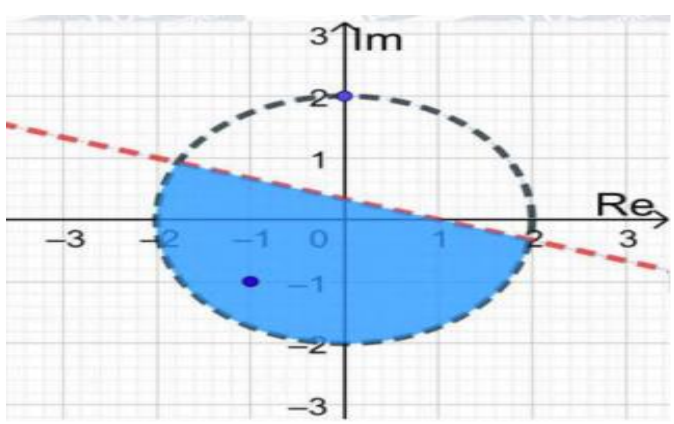
وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(-1، -1)$ و $(0،2)$

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة .

$$|0 - 2i| < |0 + 1 - i)| \rightarrow 2 > \sqrt{2} \quad \checkmark$$

بما أن العدد 0 يحقق المتباينة ، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z = 0$ المظللة في الرسم أدناه .



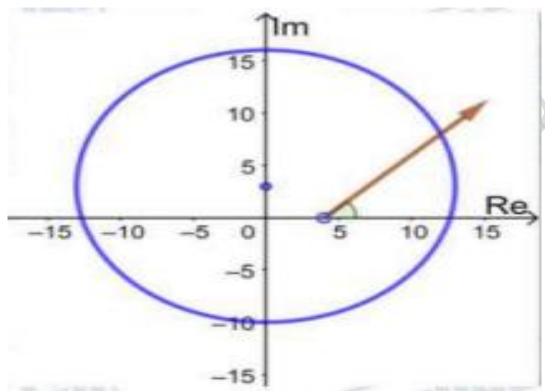
19) أمثل في المستوى المركب المعادلة : $|z-3i| = 13$ ، والمعادلة : $Arg(z-4) = \frac{\pi}{4}$ ، ثم أجد العدد المركب z الذي يحققهما معاً .

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,3)$ وطول نصف قطرها 13 وحدة .

$$Arg(z-4) = \frac{\pi}{4}$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(4,0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي الموجب أي أن ميله يساوي 1 ومعادلته هي :

$y - 0 = 1(x-4)$ أي $\rightarrow y = x - 4$



لإيجاد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معاً، نجد نقاط تقاطع المنحنيين:

$y = x - 4 , y \geq 0, x \geq 0$ و $x^2 + (y-3)^2 = 169$ بالتعويض :

$$x^2 + (x-4-3)^2 = 169$$

$$2x^2 - 14x + 49 = 169$$

$$x^2 - 7x - 60 = 0$$

$$(x+5)(x-12) = 0$$

$$x - 12 = 0$$

$$x = 12 \quad \rightarrow \quad y = 8$$

العدد المركب الذي يحقق المعادلتين معاً هو : $z = 12 + 8i$

20) أمثل في المستوى المركب المعادلة: $|z-3-2i|=5$ ، والمعادلة $|z-6i|=|z-7+i|=5$، اللذين يحققان المعادلتين معاً .

$$|z-3-2i|=5$$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(3,2)$ وطول نصف قطرها 5 وحدة .

ومعادلتها : $(x-3)^2+(y-2)^2=25$

$$|z-6i|=|z-7+i|=5$$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(7,-1)$ ، $(0,6)$ الذي يمر بالنقطة $(3.5,2.5)$ وميله 1 ، ومعادلته هي :

$y-2.5=1(x-3.5) \rightarrow$ أي $y=x-1$

لإيجاد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معاً، نجد نقاط تقاطع المنحنيين:

$(x-3)^2+(y-2)^2=25$ و $y=x-1$ بالتعويض :

$$(x-3)^2+(x-1-2)^2=25$$

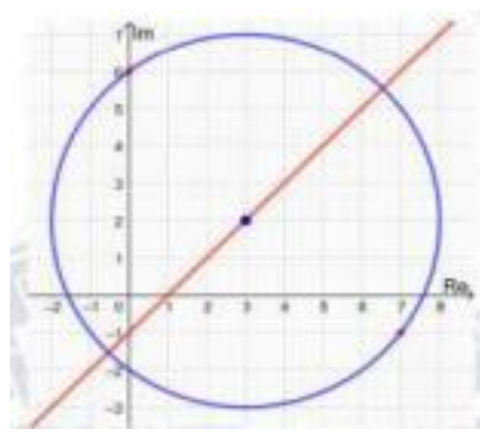
$$(x-3)^2+(x-3)^2=25$$

$$(x^2-6x+9)+(x^2-6x+9)=25$$

$$2x^2-12x+18=25$$

$$2x^2-12x-7=0$$

$$a=2 \quad ,b=-12 \quad ,c=-7$$



$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{(-12)^2-4\times2\times-7}}{2(2)}$$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{144+56}}{4}$$

$$x=\frac{12\pm\sqrt{200}}{4}$$

$$x=\frac{12\pm10\sqrt{2}}{4}$$

$$x = \frac{6 \pm 5\sqrt{2}}{2}$$

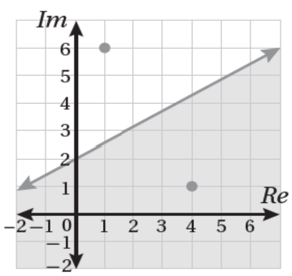
$$y = \frac{4 \pm 5\sqrt{2}}{2} i$$

العددان المركبان اللذان يحققان المعادلتين معاً هما:

$$z_1 = \frac{6 + 5\sqrt{2}}{2} + \frac{4 + 5\sqrt{2}}{2} i \quad , z_2 = \frac{6 - 5\sqrt{2}}{2} + \frac{4 - 5\sqrt{2}}{2} i$$

اكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظللة في كل مما يأتي :

21



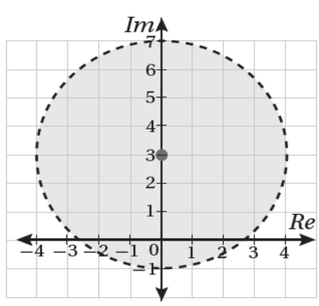
المنحنى الحدودي هنا هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(1, 6)$ ، $(4, 1)$ ومعادلته هي : $|z - 4 - i| = |z - 1 - 6i|$

ولأن المنطقة المظللة تشمل النقاط الأقرب إلى النقطة $(4, 1)$

والخط الحدودي متقطع، فإن المتباينة هي:

$$|z - 4 - i| < |z - 1 - 6i|$$

22

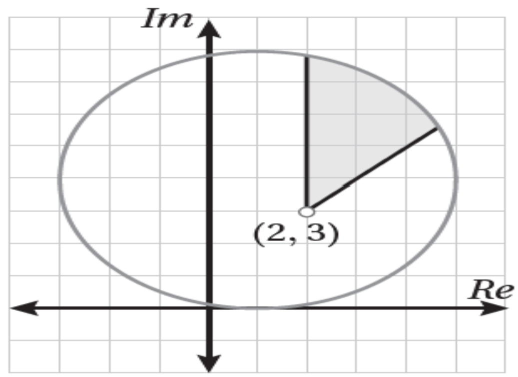


المنحنى الحدودي هنا هو دائرة مركزها (0,3) وطول نصف قطرها 4 وحدات ومعادلتها هي $|z - 3i| = 4$

ولأن المنطقة المظللة تشمل النقاط الواقعة داخل الدائرة، ولأن المنحنى الحدودي متقطع، فإن المتباينة هي:

$$|z - 3i| < 4$$

23) اكتب (بدلالة z) نظام متباينات يمثل المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظللة في الشكل الآتي :



مركز الدائرة هو (1,4) ، وطول نصف قطرها 4 وحدات والتظليل داخلها وهي مرسومة متصلة فالمتباينة التي تصفها هي : $|z-1-4i| \leq 4$

ولدينا شعاعان متصلان منطلقان من النقطة (2,3) ، السفلي يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الخط الأفقي ، والعلوي يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع الخط الأفقي وتم تظليل المنطقة المحصورة بينهما ، فالمتباينة التي تصف هذه المنطقة هي $\frac{\pi}{4} \leq Arg(z-2-3i) \leq \frac{\pi}{2}$

إذن نظام المتباينات الذي تمثله المنطقة المظللة هو :

$$\frac{\pi}{4} \leq Arg(z-2-3i) \leq \frac{\pi}{2} \quad , \quad [z-1-4i] \leq 4$$