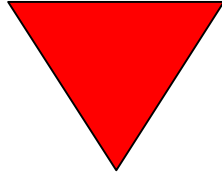


Hasanat
Hasanat



مدرسة البقعة الثانوية للبنين

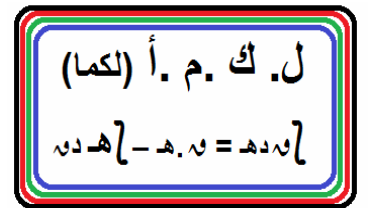
الرياضيات Collins 2024 / 2023

الثاني الثانوي العلمي

طرائف النكامل

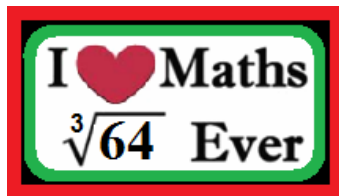


Integration Techniques



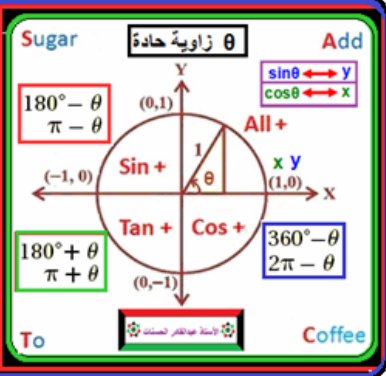
العلم : طرق جمع طريق ، بينما طرائف جمع طريقة

الأستاذ : عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77





θ°	0°	30°	45°	60°
$\theta \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



$$1) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$2) \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$3) \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$4) \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$5) \boxed{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1} \Rightarrow 6) \boxed{\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta} \Rightarrow 7) \boxed{\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta}$$

(بقسمة كل حد في (5) على $(\sin^2 \theta)$) (بقسمة كل حد في (5) على $(\cos^2 \theta)$)

$$8) \boxed{\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta}$$

$$9) \boxed{\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta}$$

$$10) \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta}$$

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta}$$

(جيب) الزاوية يساوي (جتا) متممها والعكس

$$11) \boxed{\sin(-\theta) = -\sin \theta}$$

$$\boxed{\cos(-\theta) = \cos \theta}$$

$$\boxed{\tan(-\theta) = -\tan \theta}$$

(الجتا) لا يتأثر بالسالب

$$12) \boxed{\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b}$$

$$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) = \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta \Rightarrow 13) \boxed{\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta}$$

$$14) \boxed{\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b}$$

$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta \Rightarrow 15)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1 \end{aligned}}$$

$$16) \boxed{\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}}$$

$$\tan 2\theta = \tan(\theta + \theta) \Rightarrow 17)$$

$$\boxed{\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}}$$

$$18) \boxed{\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)}$$

$$19) \boxed{\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)}$$

$$20) \boxed{\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}}$$



$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$



$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 + \dots + x^1y^{n-2} + x^0y^{n-1})$$



$$a^2 + b^2 = \dots : \text{لا يحل}$$



$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 : \text{فك}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) : \text{تحليل}$$



$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

من قواعد التكامل غير المحدود

$$\int a x^n dx = \frac{a x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a \ln k} e^{ax+b} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin x + c$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

$$\int \frac{\text{أي مقدار بسطه}}{\text{مشتقة لمقامه}} dx = \ln |\text{المقام}| + c$$

$$\text{الإزاحة} = s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

$$\text{المسافة الكلية} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt$$

مراجعة التكامل غير المحدود (مادة الصف الأول الثانوي)

قاعدة :

$$\int a x^n dx = \frac{a x^{n+1}}{n+1} + c = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$$

إضافة (1) إلى القوة ثم القسمة على الناتج

إذا كان k ثابتاً، فإن: $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

$$1) \int 3 x^4 dx = 3 \frac{x^5}{5} + c = \frac{3}{5} x^5 + c$$

$$2) \int 7 x^{-8} dx = 7 \frac{x^{-7}}{-7} + c = -x^{-7} + c$$

$$3) \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c \quad : \frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$$

البسط + المقام
المقام

$$4) \int (3x^2 + 6x - 4) dx = 3 \frac{x^3}{3} + 6 \frac{x^2}{2} - 4x + c = x^3 + 3x^2 - 4x + c$$

$$5) \int \frac{3}{x^4} dx = \int 3x^{-4} dx = 3 \frac{x^{-3}}{-3} + c = -x^{-3} + c \quad : \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$6) \int \sqrt[4]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + c \quad : \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

$$7) \int \frac{8x + 3x^4}{2x} dx = \int \frac{8x}{2x} dx + \int \frac{3x^4}{2x} dx = 4x + \frac{3}{2} \frac{x^4}{4} + c$$

$$8) \int \frac{x^2 - 16}{x + 4} dx = \int \frac{(x-4)(x+4)}{x+4} dx = \int (x-4) dx = \frac{1}{2} x^2 - 4x + c$$

إذا كان a و b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$ ، فإن: $\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax + b)^{n+1} + C, n \neq -1$

$$9) \int (3x+4)^5 dx = \frac{(3x+4)^6}{6 \times 3} + c$$

$\frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$

$$10) \int \frac{3}{\sqrt[4]{8-7x}} dx = \int \frac{3}{(8-7x)^{\frac{1}{4}}} dx = \int 3(8-7x)^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{3(8-7x)^{\frac{3}{4}}}{-7 \times \frac{3}{4}} + c$$

تمارين

جد كلاً من التكاملات الآتية: a) $\int 9 dx$ b) $\int x^{-4} dx$ c) $\int \sqrt[6]{x} dx$

جد كلاً من التكاملين الآتيين: a) $\int (2x^4 + 3x^3 - 7x^2) dx$ b) $\int (5x^{\frac{3}{2}} + 3x^2) dx$

اجد كلاً من التكاملات الآتية: a) $\int \frac{2x^2 + 4}{x^2} dx$ b) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx$ c) $\int (2x+3)(x-1) dx$

جد كلاً من التكاملين الآتيين: a) $\int (x-4)^6 dx$ b) $\int \sqrt{x+1} dx$

جد كلاً من التكاملات الآتية: 5 $\int 6x dx$ 6 $\int (4x+2) dx$ 7 $\int 2x^4 dx$ 8 $\int \frac{5}{x^3} dx$

9 $\int \sqrt{x} dx$ 10 $\int 2x^{\frac{3}{2}} dx$ 11 $\int \frac{10}{\sqrt{x}} dx$ 12 $\int (6x^2 - 4x) dx$

13 $\int (2x^4 - 5x + 10) dx$ 14 $\int x^2 (x-8) dx$ 15 $\int (x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{x} + x^{-\frac{4}{3}}) dx$

جد كلاً من التكاملات الآتية: 16 $\int \frac{4x^3 - 2}{x^3} dx$ 17 $\int \frac{2x+8}{\sqrt{x}} dx$ 18 $\int \frac{x^2-1}{x-1} dx$ 19 $\int (\frac{x^2+1}{x^2})^2 dx$

20 $\int x\sqrt{x} dx$ 21 $\int (\frac{x^2+2x}{x})^3 dx$ 22 $\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}} dx$ 23 $\int (x-1)(x-3)(x+1) dx$

جد كلاً من التكاملات الآتية:

24 $\int (x+7)^4 dx$ 25 $\int \frac{3}{(10x+1)^2} dx$ 26 $\int 3\sqrt{4x-2} dx$ 27 $\int \frac{1}{\sqrt{10x+5}} dx$

التكامل المحدود

إذا كان الاقتران $f(x)$ متصلًا على الفترة $[a, b]$ ، و $F(x)$ يُمثّل أيّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ ، فإنّ التكامل المحدود للاقتران $f(x)$ من a إلى b هو: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

$$1 \quad \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} (1)^3\right) - \left(\frac{1}{3} (0)^3\right) = \frac{1}{3}$$

$$2 \quad \int_1^3 (x+2) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 + 2x\right) \Big|_1^3 = \left(\frac{1}{2} (3)^2 + 2(3)\right) - \left(\frac{1}{2} (1)^2 + 2(1)\right) = 8$$

جد كلاً من التكاملين الآتيين: $a) \int_{-1}^1 x^4 dx$ $b) \int_{-2}^3 (3x^2 - 4x + 1) dx$



قواعد
التكامل المحدود إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$ ، وكان k ثابتاً، فإنّ:

$$1 \quad \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$2 \quad \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$3 \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$4 \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$5 \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\int_{-2}^5 f(x) dx = 3, \int_{-2}^5 g(x) dx = -4, \int_3^5 f(x) dx = 7 \Rightarrow$$

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^5 f(x) dx - \int_3^5 f(x) dx = 3 - 7 = -4$$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$1 \quad \int_{-1}^3 3x^2 dx \quad 2 \quad \int_1^5 10x^{-2} dx \quad 3 \quad \int_0^2 (3x^2 + 4x + 3) dx \quad 4 \quad \int_2^5 3x(x+2) dx$$

إذا كان: $\int_1^2 f(x) dx = -4$ ، و $\int_1^5 f(x) dx = 6$ ، و $\int_1^5 g(x) dx = 8$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

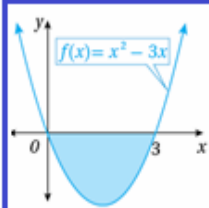
$$1 \quad \int_2^2 g(x) dx \quad 2 \quad \int_2^5 f(x) dx \quad 3 \quad \int_5^1 g(x) dx \quad 4 \quad \int_1^5 (4f(x) + g(x)) dx$$

المساحة

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران f والمحور (x) والمستقيمين $x = a$, $x = b$ تساوي $\int_a^b f(x) dx$ وإذا كانت المنطقة تحت المحور x (السينات) تكون المساحة معكوس ناتج التكامل (نأخذ القيمة المطلقة للناتج) وإذا كان هناك جزء من المنطقة فوق المحور (x) وجزء تحته : نجزي التكامل ونجد كل منطقة على حدة

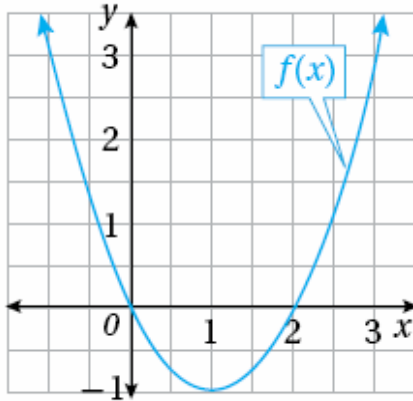
حالات المساحة

$A = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$	$A = -\int_a^b f(x) dx$	$A = \int_a^b f(x) dx$
جزء من المنطقة فوق وآخر تحت (x)	المنطقة المطلوبة تحت (x)	المنطقة المطلوبة فوق (x)



أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 3x$ والمحور x .

$$A = -\int_0^3 (x^2 - 3x) dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^3 = -\left(9 - \frac{27}{2}\right) - (0) = 4\frac{1}{2}$$



يُبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 2x$

1 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x .

2 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x ,

والمستقيم $x = 3$.

3 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x ,

والمستقيم $x = -1$.

4 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ والمحور x ,

والمستقيمين: $x = 0$ و $x = 2$.

5 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = a^2 - x^2$ والمحور x بدلالة الثابت a , حيث $a > 0$.

6 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى العلاقة: $y = (2x + 16)^{\frac{3}{4}}$ والمحورين الإحداثيين.



تكامل اقترانات خاصة

Integration of Special Functions

الدرس
1



$$e^0 = 1$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

تعلمت سابقاً أن التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق، وأن $\int f(x)dx$ يُسمى التكامل غير المحدود للاقتزان $f(x)$ ، كما في المخطط الآتي يُبين عناصر هذا النوع من التكامل.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

ثابت التكامل

متغير التكامل

اقتران أصلي للاقتزان $f(x)$

المُكامل

أما $\int_a^b f(x)dx$ فيُسمى التكامل المحدود للاقتزان $f(x)$ ، حيث a الحد السفلي للتكامل، و b الحد العلوي للتكامل.

يُمكن إيجاد قيمة $\int_a^b f(x)dx$ للاقتزان المتصل $f(x)$ على النحو الآتي:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

أستعمل هذا الرمز بعد الانتهاء من عملية التكامل.

حدود التكامل من a إلى b .

قيمة الاقتران الأصلي عند الحد السفلي.

قيمة الاقتران الأصلي عند الحد العلوي.

أُذَكِّر

إذا كان $F(x)$ اقتراناً أصلياً للاقتزان $f(x)$ ، فإن: $F'(x) = f(x)$ أي إنه يُمكن التحقق من صحة الحل بإيجاد مشتقة نتيجة التكامل. وفي هذه الحالة، يجب أن تكون المشتقة مساوية للمُكامل.

8

هناك عدة طرق للتكامل، منها: (1) الطريقة المباشرة من خلال البحث عن اقتران مشتقته تعطي الاقتران المُكامل. (2) من خلال التحليل إلى العوامل والاختصار (3) من خلال المتطابقات المثلثية (4) طريقة التكامل بالتعويض (5) طريقة الكسور الجزئية (6) طريقة التكامل بالأجزاء

(2) من خلال التحليل إلى العوامل والاختصار

(3) من خلال المتطابقات المثلثية

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

(4) طريقة التكامل بالتعويض

(5) طريقة الكسور الجزئية

(6) طريقة التكامل بالأجزاء

Hasanat

**** هناك عدة مفاهيم في الدرس الأول ، نستعرضها كما يأتي :**

(1) المفهوم الأول : صيغ تكاملات اقترانات أُسية

أُذَكِّر

- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(e^{ax+b}) = ae^{ax+b}$
- $\frac{d}{dx}(k^x) = k^x \times \ln k$
- $\frac{d}{dx}(k^{ax+b}) = k^{ax+b} \times \ln k \times a$ حيث $k > 0$ ، $k \neq 1$.

صيغ تكاملات اقترانات أُسية إذا كانت a, b, k أعداداً حقيقية، و $a \neq 0$ ، و $k > 0$ ، و $k \neq 1$ ، و e العدد النيبيري، فإن:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + C$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{k^{ax+b}}{a \ln k} + C$$

$$1) \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c \quad 2) \int 6 e^{4-5x} dx = 6 \frac{e^{4-5x}}{-5} + c \quad 3) \int 3^{2x} dx = \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} + c$$

$$4) \int_0^1 (2x + 8e^{2x}) dx = (x^2 + 4e^{2x}) \Big|_0^1 = (1 + 4e^2) - (0 + 4) = -3 + 4e^2$$

أنتحق من فهمي  أجد كلاً من التكاملات الآتية: $\int_0^{\ln 3} 8e^{4x} dx$ $\int (5x^2 - 3e^{7x}) dx$

c) $\int \sqrt{e^{1-x}} dx$ d) $\int (3^x + 2\sqrt{x}) dx$

a) $\int (5x^2 - 3e^{7x}) dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{7}e^{7x} + C$ أنتحق من فهمي صفحة 10

b) $\int_0^{\ln 3} 8e^{4x} dx = \frac{8}{4}e^{4x} \Big|_0^{\ln 3} = 2(e^{4 \ln 3} - e^0) = 2(e^{\ln 3^4} - e^0) = 2(81 - 1) = 160$

c) $\int \sqrt{e^{1-x}} dx = \int (e^{1-x})^{1/2} dx = \int e^{(1-x)/2} dx = -2e^{(1-x)/2} + C$

d) $\int (3^x + 2\sqrt{x}) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + 2\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + C = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{4}{3}x^{3/2} + C$

أنتدب وأحل المسائل  أجد كلاً من التكاملات الآتية: $\int (e^{2x-3} - \sqrt{x}) dx$ $\int \left(e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}}\right) dx$

5) $\int \left(\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}}\right)^2 dx$ 7) $\int (e^x + 1)^2 dx$ 11) $\int \frac{e^x + 1}{e^x} dx$ 33) $\int_0^3 (x - 5^x) dx$

1) $\int (e^{2x-3} - \sqrt{x}) dx = \int (e^{2x-3} - x^{1/2}) dx = \frac{1}{2}e^{2x-3} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

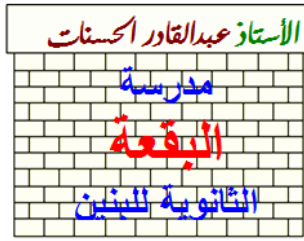
2) $\int \left(e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}}\right) dx = \int (e^{0.5x} - 3e^{-0.5x}) dx = 2e^{0.5x} + 6e^{-0.5x} + C$

5) $\int \left(\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}}\right)^2 dx = \int \left(e^x - 2 + \frac{1}{e^x}\right) dx = \int (e^x - 2 + e^{-x}) dx = e^x - 2x - e^{-x} + C$

7) $\int (e^x + 1)^2 dx = \int (e^{2x} + 2e^x + 1) dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C$

11) $\int \frac{e^x + 1}{e^x} dx = \int (1 + e^{-x}) dx = x - e^{-x} + C$

33) $\int_0^3 (x - 5^x) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5^x}{\ln 5}\right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2} - \frac{125}{\ln 5} - (0 - \frac{1}{\ln 5}) = \frac{9}{2} - \frac{124}{\ln 5}$



2) المفهوم الثاني: صيغ تكاملات اقترانات مثلثية

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$

صيغ تكاملات اقترانات مثلثية إذا كان a, b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$ ، فإن:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

$$\int \sin(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$$

$$\int \sec(ax + b) \tan(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sec(ax + b) + C$$

ملاحظة: لا يوجد قاعدة مباشرة لتكامل $(\tan x)$ لعدم وجود مقدار (حالياً) مشتقته $(\tan x)$

لذلك $\int \tan x \, dx = (\text{فيما بعد})$ ، $\int \cot x \, dx = (\text{فيما بعد})$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

ويجب عدم الخلط بينها وبين

التكامل والاشتقاق عمليتان عكسيتان :

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow \int (-\sin x) \, dx = \cos x + C \Rightarrow \int (\sin x) \, dx = -\cos x + C$$

تذكر :

أو : $\int \cos x \, dx$ يعني : ما هو المقدار الذي مشتقته $(\cos x)$ ؟ ، والجواب : (عدد ثابت + $\sin x$)

$$1) \int 4 \cos x \, dx = 4 \sin x + c$$

$$2) \int 3 \sin(5x - 1) \, dx = 3 \frac{-\cos(5x - 1)}{5} + c = -\frac{3}{5} \cos(5x - 1) + c$$

$$3) \int (\sec^2 x + 4x - 6e^{2x} + 7) \, dx = \tan x + 2x^2 - 3e^{2x} + 7x + c$$

$$4) \int \sec x \tan x \, dx = \sec x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = \sec \frac{\pi}{4} - \sec \frac{\pi}{3} = \sqrt{2} - 2$$

أتحقق من فهمي أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos(3x - \pi) dx$ b) $\int (\csc^2(5x) + e^{2x}) dx$ c) $\int_0^{\pi/3} (\sin 2x - \cos 4x) dx$

أتحقق من فهمي صفحة 12

a	$\int \cos(3x - \pi) dx = \frac{1}{3} \sin(3x - \pi) + C$
b	$\int (\csc^2(5x) + e^{2x}) dx = -\frac{1}{5} \cot 5x + \frac{1}{2} e^{2x} + C$
c	$\int_0^{\pi/3} (\sin 2x - \cos 4x) dx = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big _0^{\pi/3}$ $= \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{3} \right) - \left(-\frac{1}{2} \cos 0 - \frac{1}{4} \sin 0 \right)$ $= \left(-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) - \left(-\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{6 + \sqrt{3}}{8}$

أدرب وأحل المسائل أجد كلاً من التكاملات الآتية: 3 $\int (4 \sin 5x - 5 \cos 4x) dx$

6 $\int (\sin(5 - 3x) + 2 + 4x^2) dx$ 8 $\int (e^{4-x} + \sin(4-x) + \cos(4-x)) dx$

3	$\int (4 \sin 5x - 5 \cos 4x) dx = -\frac{4}{5} \cos 5x - \frac{5}{4} \sin 4x + C$
6	$\int (\sin(5 - 3x) + 2 + 4x^2) dx = \frac{1}{3} \cos(5 - 3x) + 2x + \frac{4}{3} x^3 + C$
8	$\int (e^{4-x} + \sin(4-x) + \cos(4-x)) dx$ $= -e^{4-x} + \cos(4-x) - \sin(4-x) + C$

1) $\int_0^1 (3x^2 + 6e^{2x}) dx = \dots 3e^2 - 2$

2) $\int_0^1 (4x + 2^{1-x} - 5) dx = \dots \frac{1}{\ln 2} - 3$

واجب

3) $\int_{\pi/2}^{\pi/4} \sin(\pi - x) dx = \dots -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\int_{\pi/3}^{\pi/4} \sec^2 x dx = \dots 1 - \sqrt{3}$

الأستاذ: عبدالقادر الحسنيات
078 531 88 77

3) المفهوم الثالث: المتطابقات المثلثية والتكامل



هناك اقترانات مثلثية لا يُمكن إيجاد تكاملها مباشرة، مثل: اقترانات الجيب، وجيب التمام، والظل، وظلّ التمام المرفوعة إلى أسّ (زوجي)، أو الاقترانات المثلثية التي تكون في صورة حاصل ضرب اقتراني جيب، أو اقتراني جيب تمام، أو اقتران جيب مضروب في اقتران جيب تمام، وغيرها من الاقترانات المثلثية. لذلك نستخدم المتطابقات المثلثية المناسبة، وأحيانا نضرب في المرافق.

والهدف دائما: تبسيط المُكامل إلى حدود جبرية منفصلة لعدم وجود قاعدة لإيجاد تكامل الضرب أو القسمة

أهم المتطابقات

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a - b) + \sin(a + b)) \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b)) \quad = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b)) \quad = 2 \cos^2 x - 1$$



$$1) \int \sin^2 4x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 8x) \, dx \quad : \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}(x - \frac{1}{8} \sin 8x) + c$$

$$2) \int \cos^2 3x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) \, dx \quad : \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}(x + \frac{1}{6} \sin 6x) + c$$

تكامل $\sin x$ أو $\cos x$ بقوى زوجية ... الحل عن طريق المتطابقات فقط

$$3) \int \sin 2x \cos 3x \, dx = \int \frac{1}{2}(\sin(-x) + \sin(5x)) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{-\cos(-x)}{-1} + \frac{-\cos 5x}{5}) + c = \frac{1}{2}(\cos x + \frac{1}{5} \cos 5x) + c$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a - b) + \sin(a + b))$$

$$4) \int \sin x \cos x \, dx = \int \frac{2}{2} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}(\frac{-1}{2} \cos 2x) + c \quad : \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$5) \int \tan^2 4x \, dx = \int (\sec^2 4x - 1) \, dx = \frac{1}{4} \tan 4x - x + c : \tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$6) \int (\sin^2 x - \cos^2 x) \, dx = -\int \cos 2x \, dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + c : \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned} 7) \int \frac{1}{1 + \sin x} \, dx &= \int \frac{1}{1 + \sin x} \times \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} \, dx = \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} \, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx = \int (\sec^2 x - \tan x \sec x) \, dx \\ &= \tan x - \sec x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \int (\sin x + \cos x)^2 \, dx &= \int (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) \, dx \\ &= \int (1 + \sin 2x) \, dx = x + \frac{1}{2} (-\cos 2x) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9) \int (\sin^4 x - \cos^4 x) \, dx &= \int (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx \\ &= \int (-\cos 2x)(1) \, dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10) \int \sin^4 x \, dx &= \int (\sin^2 x)(\sin^2 x) \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \times \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} (1 + \cos 4x)) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) \right) + c \end{aligned}$$

الأستاذ: عبدالقادر الحسنيات
078 531 88 77

أتحقق من فهمي أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos^4 x \, dx$

b) $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \sin x \, dx$

c) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$

تحقق من فهمي صفحة 14

$$\begin{aligned}
 \text{a } \int \cos^4 x \, dx &= (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x \\
 &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \\
 \int \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \sin x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} (\cos(3x - x) - \cos(3x + x)) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x - \cos 4x) \, dx = \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \\
 &= \left(\frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{6} - \frac{1}{8} \sin \frac{4\pi}{6} \right) - (0 - 0) = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c } \int \frac{dx}{1 + \cos x} &= \int \left(\frac{1}{1 + \cos x} \times \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} \right) dx \\
 &= \int \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \, dx = \int (\csc^2 x - \cot x \csc x) \, dx = -\cot x + \csc x + C
 \end{aligned}$$

$$15 \int \frac{1}{1 - \sin x} \, dx$$

أجِدْ كُلًّا مِنَ التَّكَامِلَاتِ الْآتِيَةِ: 

$$16 \int \sec^2 x (1 + e^x \cos^2 x) \, dx$$

$$18 \int \sin 3x \cos 2x \, dx$$

$$21 \int \left(\frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} + (\sin^2 x \csc x) \right) dx$$

$$25 \int (9 \cos^2 x - \sin^2 x - 6 \sin x \cos x) \, dx$$

$$22 \int (\sec x + \tan x)^2 \, dx$$

$$26 \int (\cos^4 x - \sin^4 x) \, dx$$

$$\begin{aligned}
 15 \int \frac{1}{1 - \sin x} \, dx &= \int \frac{1}{1 - \sin x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} \, dx = \int \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} \, dx \\
 &= \int \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} \, dx = \int (\sec^2 x + \tan x \sec x) \, dx = \tan x + \sec x + C
 \end{aligned}$$

$$16 \int \sec^2 x (1 + e^x \cos^2 x) \, dx = \int (\sec^2 x + e^x) \, dx = \tan x + e^x + C$$

$$18 \int \sin 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x + \sin x) \, dx = -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C$$

$$21 \quad \int \left(\frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} + \sin^2 x \csc x \right) dx = \int (\csc^2 x + \cot x \csc x + \sin x) dx$$

$$= -\cot x - \csc x - \cos x + C$$

$$22 \quad \int (\sec x + \tan x)^2 dx = \int (\sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \tan^2 x) dx$$

$$= \int (\sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int (2 \sec^2 x + 2 \sec x \tan x - 1) dx = 2 \tan x + 2 \sec x - x + C$$

$$25 \quad \int (9 \cos^2 x - \sin^2 x - 6 \sin x \cos x) dx$$

$$= \int (9 \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 6 \sin x \cos x) dx$$

$$= \int (10 \cos^2 x - 1 - 6 \sin x \cos x) dx$$

$$= \int \left(10 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) - 1 - 3 \sin 2x \right) dx = \int (5 + 5 \cos 2x - 1 - 3 \sin 2x) dx$$

$$= \int (4 + 5 \cos 2x - 3 \sin 2x) dx = 4x + \frac{5}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x + C$$

$$26 \quad \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) dx$$

$$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

27 $\int_0^{\pi} 2 \cos \frac{1}{2} x dx$

29 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} 3 \tan^2 x dx$

31 $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos x dx$

32 $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} dx$

27 $\int_0^{\pi} 2 \cos \frac{1}{2} x dx = 4 \sin \frac{1}{2} x \Big|_0^{\pi} = 4 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 4$

29 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} 3 \tan^2 x dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} 3(\sec^2 x - 1) dx = 3(\tan x - x) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3}$
 $= 3 \left(\tan \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) - 3 \left(\tan \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$

31 $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (\sin 4x + \sin 2x) dx$
 $= \left(-\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi/6} = -\frac{1}{8} \cos \frac{4\pi}{6} - \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{6} - \left(-\frac{1}{8} \cos 0 - \frac{1}{4} \cos 0 \right) = \frac{5}{16}$

32 $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot^2 x}{\csc^2 x} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 \csc^2 x} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)} dx$
 $= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/3} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/3}$
 $= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3} + \pi - 6}{24}$

41 إذا كان: $f(x) = \int \cos \left(\frac{1}{2} x + \pi \right) dx$ وكان: $f(\pi) = 3$ فأجد $f(0)$

42 إذا كان: $y = \int \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) dx$ وكان: $y = 1$ عندما $x = \frac{\pi}{4}$ ، فأثبت أنه يُمكن كتابة y في صورة: $y = \frac{1 + \sin 2x}{2}$

41 $f(x) = \int \cos \left(\frac{1}{2} x + \pi \right) dx = 2 \sin \left(\frac{1}{2} x + \pi \right) + C$
 $f(\pi) = 2 \sin \left(\frac{1}{2} \pi + \pi \right) + C \Rightarrow 3 = 2 \sin \frac{3\pi}{2} + C \Rightarrow 3 = -2 + C \Rightarrow C = 5$
 $\Rightarrow f(x) = 2 \sin \left(\frac{1}{2} x + \pi \right) + 5 \Rightarrow f(0) = 2 \sin \pi + 5 = 5$

42 $y = \int \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) dx = \frac{-\cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)}{-2} + C = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) + C$
 $y|_{x=\pi/4} = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow y = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1 + \sin 2x}{2}$

44 إذا كان: $\int_{\pi/9}^{\pi} (9 + \sin 3x) dx = a\pi + b$ ، فأجد قيمة الثابتين النسبيين: a ، و b .

$$\begin{aligned} 44 \quad \int_{\pi/9}^{\pi} (9 + \sin 3x) dx &= \left(9x - \frac{1}{3} \cos 3x \right) \Big|_{\pi/9}^{\pi} \\ &= 9\pi - \frac{1}{3} \cos 3\pi - \pi + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{3} = 8\pi + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 8\pi + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ونظرًا لأن a و b نسبتيان،
 $\Rightarrow 8\pi + \frac{1}{2} = a\pi + b$ فلا يوجد حل لهذه المعادلة سوى أن يكون: $a = 8$ ، $b = \frac{1}{2}$

58 تبرير: أثبت بطريقتين مختلفتين أن: $\int_0^{\pi/4} \cos x \cos 3x dx - \int_0^{\pi/4} \sin x \sin 3x dx = 0$

طريقة أولى:

$$\begin{aligned} 58 \quad \int_0^{\pi/4} \cos x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\cos 4x + \cos 2x) dx \\ &= \left(\frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi/4} = \left(\frac{1}{8} \sin \pi + \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} \right) - (0 + 0) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \sin x \sin 3x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\cos 2x - \cos 4x) dx = \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x \right) \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \left(\frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{8} \sin \pi \right) - (0 - 0) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

طريقة ثانية:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \cos x \cos 3x dx - \int_0^{\pi/4} \sin x \sin 3x dx \\ &= \int_0^{\pi/4} (\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x) dx = \int_0^{\pi/4} \cos(x + 3x) dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} (\sin \pi - \sin 0) = 0 \end{aligned}$$

59 تبرير: إذا كان: $\int_{\pi/4k}^{\pi/3k} (1 - \pi \sin kx) dx = \pi(7 - 6\sqrt{2})$ ، فأجد قيمة الثابت k ، مُبرراً إجابتي.

$$\begin{aligned} 59 \quad \int_{\pi/4k}^{\pi/3k} (1 - \pi \sin kx) dx &= \left(x + \frac{\pi}{k} \cos kx \right) \Big|_{\pi/4k}^{\pi/3k} \\ &= \frac{\pi}{3k} + \frac{\pi}{k} \cos \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4k} - \frac{\pi}{k} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{k} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{12k} (7 - 6\sqrt{2}) \Rightarrow \frac{\pi}{12k} (7 - 6\sqrt{2}) = \pi(7 - 6\sqrt{2}) \Rightarrow k = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

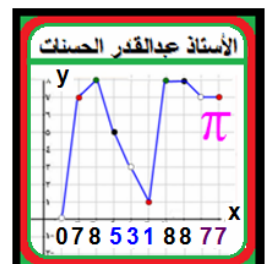
$$1) \int (\tan^2 2x + \sin^2 2x + \cos^2 2x) dx = \dots \frac{1}{2} \tan 2x + C$$

واجب

$$2) \int 8 \sin^2 2x \cos^2 2x dx = \dots x - \frac{1}{8} \sin 8x + C$$

$$3) \int 2 \sin 5x \cos 4x dx = \dots \sin x + \frac{1}{9} \sin 9x + C$$

$$4) \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} dx = \dots (x + \cos x) \Big|_0^{\pi} = \pi - 1$$





تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي

إذا كان a, b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$ ، وكان $f(x)$ اقترانًا قابلاً للاشتقاق، فإن:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C, x \neq -\frac{b}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C, f(x) \neq 0$$

باختصار : إذا كان البسط مشتقة للمقام ، فإن تكامل الكسر يساوي اللوغاريتم الطبيعي للمقام مضافاً إليه ثابت

$$1) \int \frac{4}{5x} dx = \frac{4}{5} \int \frac{1}{x} dx = \frac{4}{5} \ln |x| + c$$

$$2) \int \frac{5}{2x-3} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2}{2x-3} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2}{2x-3} dx = \frac{5}{2} \ln |2x-3| + c$$

$$3) \int \frac{4x+10}{x^2+5x-1} dx = \int \frac{2(2x+5)}{x^2+5x-1} dx = 2 \int \frac{2x+5}{x^2+5x-1} dx = 2 \ln |x^2+5x-1| + c$$

$$4) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln |e^x+1| \Big|_0^1 = \ln |e^1+1| - \ln |e^0+1| = \ln(e+1) - \ln 2$$

$$5) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{-1}{-1} \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{1}{-1} \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$6) \int \frac{x^3 + \sqrt{x} - 7x - 1}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{7x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \int \left(x + x^{-\frac{3}{2}} - \frac{7}{x} - x^{-2} \right) dx = \frac{1}{2} x^2 - 2x^{-\frac{1}{2}} - 7 \ln |x| + x^{-1} + c$$

$$7) \int \frac{7 \sin x}{5+2 \cos x} dx = \frac{7}{-2} \int \frac{-2 \sin x}{5+2 \cos x} dx = \frac{-7}{2} \ln |5+2 \cos x| + c$$

$$8) \int \sec x dx = \int \sec x \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \ln |\sec x + \tan x| + c$$

$$9) \int \frac{x^2 + x}{x-3} dx = \int (x + 4 + \frac{12}{x-3}) dx = \frac{1}{2} x^2 + 4x + 12 \ln|x-3| + c$$

$$\begin{array}{r} x+4 \\ x-3 \overline{) x^2 + x} \\ \underline{-x^2 + 3x} \\ 4x \\ \underline{-4x + 12} \\ 12 \end{array}$$

$$10) \int \frac{x^3 - 5x + 4}{x+2} dx = \int (x^2 - 2x - 1 + \frac{6}{x+2}) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 6 \ln|x+2| + c$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 1 \\ x+2 \overline{) x^3 - 5x + 4} \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ -2x^2 - 5x + 4 \\ \underline{-2x^2 + 4x} \\ -x + 4 \\ \underline{-x + 2} \\ 6 \end{array}$$

$$11) \int \frac{1 - \cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1 - \cos x}{\sin x} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} dx = \int \frac{\sin x}{(1 + \cos x)} dx = \int \frac{-1}{-1} \times \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = -\ln|1 + \cos x| + c$$

$$12) \int \frac{dx}{3 + \frac{x}{4}} = \int \frac{dx}{\frac{12+x}{4}} = \int \frac{4 dx}{12+x} = 4 \ln|12+x| + c$$



$$12) \int \frac{dx}{3 + \frac{x}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} \int \frac{\frac{1}{4} dx}{3 + \frac{1}{4}x} = 4 \ln|3 + \frac{1}{4}x| + c$$

أو

$$1) \int (2 + \tan x)^2 dx = \dots 3x - 4 \ln|\cos x| + \tan x + c$$

واجب

$$2) \int \frac{4x^3 - x + 3}{x-1} dx = \dots \frac{4}{3} x^3 + 2x^2 + 3x + 8 \ln|x-1| + C$$

$$3) \int \frac{4 \csc 2x}{\sin 2x + \cos 2x} dx = \dots -2 \ln|1 + \cot 2x| + C$$



$$4) \int \frac{e^{2x} + x}{e^{2x} + x^2} dx = \dots \ln(e^{2x} + x^2)^2 + C$$

أتحقق من فهمي  أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int \left(\sin x - \frac{5}{x} \right) dx$ b) $\int \frac{5}{3x+2} dx$ c) $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2} dx$

d) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx$ e) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} dx$ f) $\int \cot x dx$

g) $\int \frac{e^x}{e^x+7} dx$ h) $\int \csc x dx$

a	$\int \left(\sin x - \frac{5}{x} \right) dx = -\cos x - 5 \ln x + C$	أتحقق من فهمي صفحة 16
b	$\int \frac{5}{3x+2} dx = \frac{5}{3} \int \frac{3}{3x+2} dx = \frac{5}{3} \ln 3x+2 + C$	
c	$\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2} dx = \int \left(1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2} \right) dx = x - 7 \ln x - 2x^{-1} + C$	
d	$\int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx = \ln x^2+3x + C$	
e	$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2 \sin 2x}{1+\cos 2x} dx = -\frac{1}{2} \ln 1+\cos 2x + C = -\frac{1}{2} \ln(1+\cos 2x) + C$	

f	$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln \sin x + C$	
g	$\int \frac{e^x}{e^x+7} dx = \ln e^x+7 + C = \ln(e^x+7) + C$	
h	$\int \csc x dx = \int \csc x \times \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} dx$ $= \int \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} dx = -1 \int \frac{-\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} dx = -\ln \csc x + \cot x + C$	

أتحقق من فهمي 17  أجد: $\int \frac{x^2+x+1}{x+1} dx$

أتحقق من فهمي صفحة 17 $\int \frac{x^2+x+1}{x+1} dx = \int \left(x + \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} x^2 + \ln|x+1| + C$

أندرب وأحل المسائل أجد كلاً من التكاملات الآتية:

- 4 $\int \left(3 \sec x \tan x - \frac{2}{5x} \right) dx$ 9 $\int \frac{x^4 - 6}{2x} dx$ 10 $\int \left(3 \csc^2(3x + 2) + \frac{5}{x} \right) dx$
- 12 $\int \frac{e^x}{e^x + 4} dx$ 13 $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x + 4} dx$ 14 $\int \frac{dx}{5 - \frac{x}{3}}$
- 17 $\int \left(\frac{2}{x} - 2^x \right) dx$ 19 $\int \frac{2x + 3}{3x^2 + 9x - 1} dx$ 20 $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx$
- 23 $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ 24 $\int \frac{x^2}{x^3 - 3} dx$ 30 $\int_1^e \frac{8x}{x^2 + 1} dx$

4	$\int \left(3 \sec x \tan x - \frac{2}{5x} \right) dx = 3 \sec x - \frac{2}{5} \ln x + C$
9	$\int \frac{x^4 - 6}{2x} dx = \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{x} \right) dx = \frac{1}{4}x^2 - 3 \ln x + C$
10	$\int \left(3 \csc^2(3x + 2) + \frac{5}{x} \right) dx = -\cot(3x + 2) + 5 \ln x + C$
12	$\int \frac{e^x}{e^x + 4} dx = \ln e^x + 4 + C = \ln(e^x + 4) + C$
13	$\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x + 4} dx = \int \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x + 4} dx = \ln \left \frac{1}{2} \sin 2x + 4 \right + C$
14	$\int \frac{dx}{5 - \frac{x}{3}} = -3 \int \frac{-\frac{1}{3}}{5 - \frac{x}{3}} dx = -3 \ln \left 5 - \frac{x}{3} \right + C$
17	$\int \left(\frac{2}{x} - 2^x \right) dx = 2 \ln x - \frac{2^x}{\ln 2} + C$
19	$\int \frac{2x + 3}{3x^2 + 9x - 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{6x + 9}{3x^2 + 9x - 1} dx = \frac{1}{3} \ln 3x^2 + 9x - 1 + C$
20	$\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx = \int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \int \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx$ $= x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$
23	$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \ln(e^x + e^{-x}) + C$
24	$\int \frac{x^2}{x^3 - 3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3 - 3} dx = \frac{1}{3} \ln x^3 - 3 + C$
30	$\int_1^e \frac{8x}{x^2 + 1} dx = 4 \int_1^e \frac{2x}{x^2 + 1} dx = 4 \ln x^2 + 1 \Big _1^e = 4 \ln(e^2 + 1) - 4 \ln 2$

38 إذا كان: $\int_a^{3a} \frac{2x+1}{x} dx = \ln 12$ ، فأجد قيمة الثابت a ، حيث: $a > 0$.

39 أثبت أن: $\int_0^a \frac{x}{x^2+a^2} dx = \ln \sqrt{2}$ ، حيث: $a \neq 0$.

38 $\int_a^{3a} \frac{2x+1}{x} dx = \int_a^{3a} \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx = (2x + \ln|x|) \Big|_a^{3a} = 6a + \ln 3a - 2a - \ln a$
 $= 4a + \ln 3 \Rightarrow 4a + \ln 3 = \ln 12 \Rightarrow 4a = \ln 12 - \ln 3 = \ln \frac{12}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{4} \ln 4$

39 $\int_0^a \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{2x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) \Big|_0^a = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}$

54 $\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x} dx$ 55 $\int \frac{\cot x}{2 + \sin x} dx$ 56 $\int \frac{1}{x \ln x^3} dx$ نحل: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

54 $\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x} dx = \int \frac{\frac{\sec x}{\cos x}}{\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right)} dx$ نقسم البسط والمقام على $\cos x$
 $= \int \frac{\sec^2 x}{(\tan x - 1)} dx = \ln|\tan x - 1| + C$

55 $\int \frac{\cot x}{2 + \sin x} dx = \int \frac{\cot x \csc x}{2 \csc x + 1} dx$ نضرب البسط والمقام في $\csc x$
 $= -\frac{1}{2} \int \frac{-2 \cot x \csc x}{2 \csc x + 1} dx = -\frac{1}{2} \ln|2 \csc x + 1| + C = -\frac{1}{2} \ln|2 \csc x + 1| + C$

56 $\int \frac{1}{x \ln x^3} dx = \int \frac{1}{3x \ln x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \frac{1}{3} \ln|\ln x| + C$

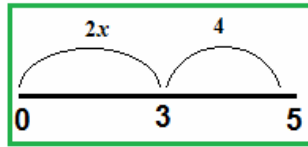
57 تبرير: إذا كان: $\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3}\right) dx = 0.5 \ln 5$ ، فأجد قيمة الثابت a ، حيث: $a > 0$.

57 $\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3}\right) dx = \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|2x+3|\right) \Big|_1^a$
 $= \left(\ln a - \frac{1}{2} \ln(2a+3)\right) - \left(-\frac{1}{2} \ln 5\right) = \ln a - \frac{1}{2} \ln(2a+3) + \frac{1}{2} \ln 5$
 $= \ln \frac{a}{\sqrt{2a+3}} + \frac{1}{2} \ln 5 \Rightarrow \ln \frac{a}{\sqrt{2a+3}} + \frac{1}{2} \ln 5 = 0.5 \ln 5 \Rightarrow \ln \frac{a}{\sqrt{2a+3}} = 0$
 $\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2a+3}} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{2a+3} \Rightarrow a^2 = 2a+3 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$
 $\Rightarrow (a-3)(a+1) = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a-3)(a+1) = 0$
 $\Rightarrow a = 3, a = -1$ مرفوضة لأن $a > 0$



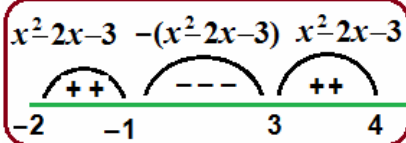
5) المفهوم الخامس: تكاملات الاقترانات المتشعبة

إذا كان $f(x)$ اقتراناً متصلًا على الفترة $[a, b]$ ، فإن: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$



(1) إذا كان $f(x) = \begin{cases} 4, & x \geq 3 \\ 2x, & x \leq 3 \end{cases}$ فجد $\int_0^5 f(x) dx$

$$\int_0^5 f(x) dx = \int_0^3 2x dx + \int_3^5 4 dx = x^2 \Big|_0^3 + 4x \Big|_3^5 = 9 - 0 + 20 - 12 = 17$$



(2) إذا كان $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ فجد $\int_{-2}^4 f(x) dx$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$$

$$\int_{-2}^4 f(x) dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3) dx + \int_{-1}^3 (3 + 2x - x^2) dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 3) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(3x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^3 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right) \Big|_3^4 = \frac{46}{3}$$

1) $\int_{-1}^3 f(x) dx$ فجد $f(x) = \begin{cases} 4x, & x \geq 2 \\ 2x+1, & x \leq 2 \end{cases}$ إذا كان 2) $\int_0^4 |2x - 3| dx = \dots \frac{17}{2}$ واجب

(الجواب : 12+10=28)

(a) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$ فأجد قيمة: $\int_{-1}^3 f(x) dx$ أتحقق من فهمي

(b) إذا كان: $f(x) = |1 - x|$ فأجد قيمة: $\int_{-2}^2 f(x) dx$ (c) إذا كان: $f(x) = |x^2 - 1|$ فأجد قيمة: $\int_{-4}^0 f(x) dx$

أتحقق من فهمي صفحة 19

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (1+x) dx + \int_1^3 2x dx \\ &= \left(x + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{-1}^1 + x^2 \Big|_1^3 = \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \left(-1 + \frac{1}{2} \right) + 9 - 1 = 10 \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$

$$= \int_{-2}^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{-2}^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \Big|_1^2 = 5$$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < -1 \\ 1 - x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$

$$\int_{-4}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^0 (1 - x^2) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_{-4}^{-1} + \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{56}{3}$$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

أَتَدَرَّبُ وَأُحِلُّ الْمَسَائِلَ



28 $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

34 $\int_0^4 |x^2 - 4x + 3| dx$

35 $\int_1^4 (3 - |x - 3|) dx$. $\int_{-1}^1 f(x) dx$ فأجد قيمة: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & , x < 0 \\ 4 - x & , x \geq 0 \end{cases}$ إذا كان: 36

28 $|\sin x| = \begin{cases} \sin x & , 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin x & , \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) + \cos 2\pi - \cos \pi = 4$$

34 $|x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & , x < 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & , 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 4x + 3 & , x > 3 \end{cases}$

$$\int_0^4 |x^2 - 4x + 3| dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{3} x^3 + 2x^2 - 3x \right) \Big|_1^3 + \left(\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 3x \right) \Big|_3^4$$

$$= \frac{1}{3} - 2 + 3 - 0 + (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) + \frac{64}{3} - 32 + 12 - (9 - 18 + 9) = 4$$

35 $|x - 3| = \begin{cases} 3 - x & , x \leq 3 \\ x - 3 & , x > 3 \end{cases}$

$$\int_1^4 (3 - |x - 3|) dx = \int_1^3 (3 - (3 - x)) dx + \int_3^4 (3 - (x - 3)) dx$$

$$= \int_1^3 x dx + \int_3^4 (6 - x) dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^3 + \left(6x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_3^4 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 24 - 8 - \left(18 - \frac{9}{2} \right) = \frac{13}{2}$$

36 $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^2 + 4) dx + \int_0^1 (4 - x) dx$

$$= \left(\frac{1}{3} x^3 + 4x \right) \Big|_{-1}^0 + \left(4x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^1 = 0 - \left(-\frac{1}{3} - 4 \right) + 4 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{47}{6}$$



6) المفهوم السادس : تطبيقات التكامل: الشرط الأولي

الشرط الأولي هو نقطة تُحقّق الاقتران الأصلي ، ويُمكن بتعويضها إيجاد قيمة الثابت C ، وبالتالي إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقّق شرط المسألة .

مثال 1) إذا كانت $f'(x) = 4x - 3$ ، فجد قاعدة الاقتران $f(x)$ علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (1,1)

$$f'(x) = 4x - 3 \Rightarrow \int f'(x) dx = \int (4x - 3) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 3x + c$$

$$\Rightarrow (1,1) : 2 - 3 + c = 1 \Rightarrow c = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 3x + 2$$



2) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران y هو $\frac{6}{x^2}$ ، فجد قاعدة الاقتران y علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (-2,1)

$$f'(x) = \frac{6}{x^2} = 6x^{-2} \Rightarrow \int f'(x) dx = \int 6x^{-2} dx$$

$$\Rightarrow f(x) = -6x^{-1} + c$$

$$\Rightarrow (-2,1) : -6(-2)^{-1} + c = 1 \Rightarrow \frac{-6}{-2} + c = 1 \Rightarrow c = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-6}{x} - 2$$

ميل المماس يعني المشتقة الأولى

(3)

مسألة اليوم

8

يُمثّل الاقتران $P(t)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يوماً من بدء دراستها في مجتمع بكتيري. إذا كان عدد هذه الخلايا عند بدء الدراسة هو 200000 خلية، فأجد عددها في المجتمع البكتيري بعد 12 يوماً من بدء الدراسة، علماً بأنها تتغيّر بمعدل: $P'(t) = 200e^{0.1t} + 150e^{-0.03t}$.

$$P(t) = \int (200e^{0.1t} + 150e^{-0.03t}) dt = \frac{200}{0.1} e^{0.1t} + \frac{150}{-0.03} e^{-0.03t} + C = 2000e^{0.1t} - 5000e^{-0.03t} + C$$

$$P(0) = 2000 - 5000 + C$$

$$200000 = -3000 + C \Rightarrow C = 203000 \Rightarrow P(t) = 2000e^{0.1t} - 5000e^{-0.03t} + 203000$$

$$P(12) = 2000e^{1.2} - 5000e^{-0.36} + 203000 \approx 206152$$

إن، سيكون عدد الخلايا بعد 12 يوماً 206152 خلية تقريباً.

أتحقق من فهمي

تلوث: تسرب نفط من ناقلة بحرية، مُكوّنًا بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، نصف قطرها $R(t)$ قدمًا بعد t دقيقة من بدء التسرب.

إذا كان نصف قطر الدائرة يزداد بمعدل: $R'(t) = \frac{21}{0.07t + 5}$ ، فأجد $R(t)$ ، علمًا بأن $R(0) = 0$.

43 يُمثل الاقتران: $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - 2e^{-x}$ ميل المماس لمنحنى الاقتران y .

أجد قاعدة الاقتران y إذا علمت أن منحناه يمرُّ بالنقطة $(0, 1)$.

45 يُمثل الاقتران: $f'(x) = \cos^2 x$ ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$.

أجد قاعدة الاقتران f إذا علمت أن منحناه يمرُّ بنقطة الأصل.

بيئة: في دراسة تناولت أحد أنواع الحيوانات المُهدّدة بالانقراض في غابة،

تبيّن أن عدد حيوانات هذا النوع $P(t)$ يتغيّر بمعدل:

$$P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$$

48 أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أيّ زمن t ، علمًا بأن عدد حيوانات هذا النوع عند بدء الدراسة هو 500 حيوان.

49 أجد عدد الحيوانات بعد 10 سنوات من بدء الدراسة، مُقرّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

طب: في تجربة لدواء جديد أُعطيَ لمرضى لديه ورم حميد، حجمه 30 cm^3 ،

تبيّن أن حجم الورم بعد t يومًا من بدء التجربة يتغيّر بمعدل: $P'(t) = 0.15 - 0.9e^{0.006t}$ مقيسًا بوحدة (cm^3/day) .

50 أجد قاعدة حجم الورم بعد t يومًا من بدء التجربة.

51 أجد حجم الورم بعد 10 أيام من بدء التجربة.

واجب

يتم ضخ الهواء داخل بالون كروي الشكل، فيصبح نصف قطره (y) سنتيمترا بعد (t) ثانية

إذا كان $\frac{dy}{dt} = 2t^{-\frac{2}{3}}$ ، وكان نصف قطر البالون بعد (4) ثوان من بدء النفخ يساوي (20) سنتيمترا، فجد قاعدة (y) بدلالة (t)

أنحقق من فهمي صفحة 20

$$R(t) = \int \frac{21}{0.07t + 5} dt$$

$$= \frac{21}{0.07} \int \frac{0.07}{0.07t + 5} dt = 300 \ln|0.07t + 5| + C$$

$$R(0) = 300 \ln 5 + C \Rightarrow 0 = 300 \ln 5 + C \Rightarrow C = -300 \ln 5$$

$$R(t) = 300 \ln|0.07t + 5| - 300 \ln 5 = 300 \ln \left| \frac{0.07t + 5}{5} \right| = 300 \ln|0.014t + 1|$$

43

$$y = \int (e^{2x} - 2e^{-x}) dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{-x} + C$$

$$y|_{x=0} = \frac{1}{2} + 2 + C \Rightarrow 1 = \frac{5}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{-x} - \frac{3}{2}$$

45

$$f(x) = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) + C \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x$$

48

$$P(t) = \int -0.51e^{-0.03t} dt = \frac{-0.51}{-0.03} e^{-0.03t} + C = 17e^{-0.03t} + C$$

$$P(0) = 17 + C \Rightarrow 500 = 17 + C \Rightarrow C = 483 \Rightarrow P(t) = 17e^{-0.03t} + 483$$

49

$$P(10) = 17e^{-0.3} + 483 \approx 496$$

50

$$P(t) = \int (0.15 - 0.9e^{0.006t}) dt = 0.15t - \frac{0.9}{0.006} e^{0.006t} + C = 0.15t - 150e^{0.006t} + C$$

$$P(0) = -150 + C \Rightarrow 30 = -150 + C \Rightarrow C = 180$$

$$P(t) = 0.15t - 150e^{0.006t} + 180$$

51

$$P(10) = 1.5 - 150e^{0.06} + 180 \approx 22.2 \text{ cm}^3$$



(7) المفهوم السابع : تطبيقات التكامل: الحركة في مسار مستقيم

الإزاحة هي: التغير في موقع الجسم ، فإذا كان $s(t)$ موقع جسم عند الزمن t ، فإن الإزاحة على الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي: $s(t_2) - s(t_1)$ ، وقد تكون قيمتها موجبة، أو سالبة، أو صفراً، حسب اتجاه حركة الجسم.

ملاحظة: المسافة هي طول المسار الذي يقطعه الجسم بصرف النظر عن الاتجاه، وقيمتها أكبر من أو تساوي الصفر.

الإزاحة إذا تحرك جسم في مسار مستقيم وفق اقتران الموقع $s(t)$ ، فإن سرعته المتجهة هي: $v(t) = s'(t)$ ، وإزاحته في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي: $s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$

الإزاحة = تكامل السرعة

أما إذا كان المطلوب إيجاد المسافة الكلية التي قطعها جسم خلال فترة زمنية فيجب تحديد الفترات الزمنية الجزئية التي تكون عندها السرعة سالبة (يتحرك الجسم إلى الجهة السالبة)، وتحديد الفترات الزمنية الجزئية التي تكون عندها السرعة موجبة (يتحرك الجسم إلى الجهة الموجبة). وفي الحالتين: المسافة = تكامل اقتران السرعة $|v(t)|$

المسافة الكلية المقطوعة

إذا تحرك جسم في مسار مستقيم وفق اقتران الموقع $s(t)$ ، فإن سرعته المتجهة هي: $v(t) = s'(t)$ ، والمسافة الكلية التي قطعها في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي: $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt$

المسافة = تكامل السرعة

مثال : يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 2 \sin t$ ،
(1) جد موقع الجسم بعد $(\frac{\pi}{4})$ ثانية علماً أنه تحرك من نقطة الأصل

$$s(t) = \int v(t) dt = \int 2 \sin t dt = -2 \cos t + c_1$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow -2 \cos 0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 2$$

$$\Rightarrow s(t) = -2 \cos t + 2 \Rightarrow s(\frac{\pi}{4}) = -2 \cos(\frac{\pi}{4}) + 2 = 2 - \sqrt{2}$$



(2) جد إزاحة الجسيم في الفترة: $[0, 3\pi]$

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

$$s(3\pi) - s(0) = \int_0^{3\pi} 2 \sin t dt = -2 \cos t \Big|_0^{3\pi} = -2(\cos 3\pi - \cos 0) = +4$$

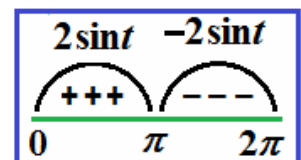
(3) جد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} |v(t)| dt = \int_0^{\pi} 2 \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-2 \sin t) dt$$

$$2 \sin t = 0$$

$$\Rightarrow t = 0, t = \pi, t = 2\pi$$

$$= -2 \cos t \Big|_0^{\pi} + 2 \cos t \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4 + 2 = 6$$



- أتحقق من فهمي يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 3 \cos t$ ، حيث t الزمن بالثواني، وسرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية: (a) إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجسيم بعد $\frac{\pi}{6}$ ثانية من بدء الحركة.
- (b) أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[0, 2\pi]$.
- (c) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0, 2\pi]$.

a $s(t) = \int v(t) dt = \int 3 \cos t dt = 3 \sin t + C$	أتحقق من فهمي صفحة 23 $s(0) = 3 \sin 0 + C \Rightarrow 0 = 3 \sin 0 + C \Rightarrow C = 0$ $s(t) = 3 \sin t \Rightarrow s\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.5 \text{ m}$
b $s(2\pi) - s(0) = 3 \sin(2\pi) - 3 \sin(0) = 0 \text{ m}$	c $ v(t) = 3 \cos t = \begin{cases} 3 \cos t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ -3 \cos t, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \\ 3 \cos t, & \frac{3\pi}{2} < t \leq 2\pi \end{cases}$ $\int_0^{2\pi} v(t) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -3 \cos t dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3 \cos t dx$ $= 3 \sin t \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - 3 \sin t \Big _{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + 3 \sin t \Big _{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = (3 - 0) - (-3 - 3) + (0 - (-3)) = 12 \text{ m}$



1) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = e^{t+1} + \frac{2}{t}$

إذا كانت إزاحة الجسم بعد ثانية واحدة تساوي $(e^2 \text{ m})$ ، فجد موقع الجسم بعد (5) ثوان

2) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالعلاقة: $a(t) = 12t - 6$

إذا كانت السرعة الابتدائية للجسيم تساوي 3 m/sec ، وإزاحته بعد ثانية واحدة تساوي (7 m) ،

فجد أ) سرعة الجسم بعد ثانيتين

ب) موقع الجسم بعد (3) ثوان

يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسيم هو 3 m، فأجد كلاً مما يأتي:

- 46 موقع الجُسيم بعد t ثانية. 47 موقع الجُسيم بعد 100 ثانية.

$$46 \quad s(t) = \int e^{-2t} dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C \Rightarrow s(0) = -\frac{1}{2} + C = 3 \Rightarrow C = \frac{7}{2}$$

$$3 = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{7}{2} \Rightarrow s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{7}{2}$$

$$47 \quad s(100) = -\frac{1}{2}e^{-200} + \frac{7}{2} \approx 3.5 \text{ m}$$

تحد: يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \begin{cases} 2t + 4, & 0 \leq t \leq 6 \\ 20 - (t - 8)^2, & 6 < t \leq 10 \end{cases}$

حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا بدأ الجُسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد كلاً مما يأتي:

- 60 موقع الجُسيم بعد 5 ثوانٍ من بدء الحركة. 61 موقع الجُسيم بعد 9 ثوانٍ من بدء الحركة.

$$60 \quad v(t) = \begin{cases} 2t + 4, & 0 \leq t \leq 6 \\ 16t - t^2 - 44, & 6 < t \leq 10 \end{cases} \Rightarrow s(t) = \int v(t) dt \quad : 0 \leq t \leq 6 \quad \text{عندما}$$

$$s(t) = \int (2t + 4) dt = t^2 + 4t + C_1 \Rightarrow s(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = t^2 + 4t, 0 \leq t \leq 6 \Rightarrow s(5) = 25 + 20 = 45 \text{ m}$$

$$61 \quad s(t) = \int (16t - t^2 - 44) dt = 8t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 44t + C_2 : 6 < t \leq 10 \quad \text{عندما}$$

لإيجاد قيمة C_2 نستعمل موقع الجسم عند $t = 6$ موقعاً ابتدائياً بالنسبة للفترة $[6, 10]$

$$s(6) = 8(6)^2 - \frac{1}{3}(6)^3 - 44(6) + C_2$$

ونحسب $s(6)$ من اقتران الموقع الذي وجدناه في السؤال السابق بالنسبة للفترة $[0, 6]$

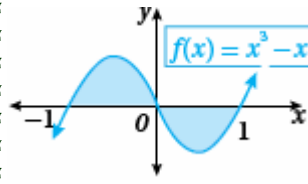
$$s(t) = t^2 + 4t, 0 \leq t \leq 6$$

$$s(6) = 6^2 + 4(6) = 60 \Rightarrow 60 = 8(6)^2 - \frac{1}{3}(6)^3 - 44(6) + C_2 \Rightarrow C_2 = 108$$

$$\Rightarrow s(t) = 8t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 44t + 108, 6 < t \leq 10 \Rightarrow s(9) = 117 \text{ m}$$

8) المفهوم الثامن : تطبيقات التكامل: المساحة

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران f والمحور (x) والمستقيمين $x = a$, $x = b$ تساوي $\int_a^b f(x) dx$ وإذا كانت المنطقة تحت محور السينات تكون المساحة معكوس ناتج التكامل



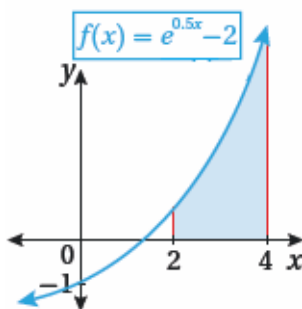
مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - x$ ، والمحور (x) الحل: جزء من المنحنى فوق المحور (x) وجزء تحته لذلك نجزي التكامل

$$A = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \left(-\int_0^1 (x^3 - x) dx\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x\right) \Big|_{-1}^0 - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x\right) \Big|_0^1 = ((0) - (-\frac{1}{4} - \frac{1}{2})) - ((\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) - (0)) = \frac{1}{2}$$



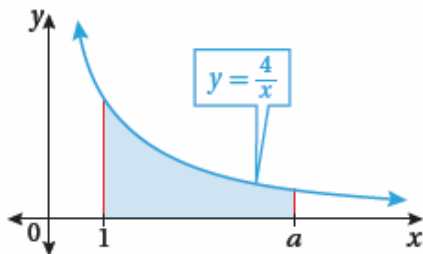
أثبت أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ والمحور (x) في الفترة $[0, \frac{\pi}{4}]$ تساوي مثلي المساحة المحصورة بين منحنى $g(x) = \sin x \cos x$ والمحور (x) في نفس الفترة



37 أجد مساحة المنطقة المظللة بين المحور x ومنحنى الاقتران:

$f(x) = e^{0.5x} - 2$ المُمثل في الشكل المجاور.

$$37 \quad A = \int_2^4 (e^{0.5x} - 2) dx = (2e^{0.5x} - 2x) \Big|_2^4 = 2e^2 - 8 - (2e - 4) = 2e^2 - 2e - 4$$



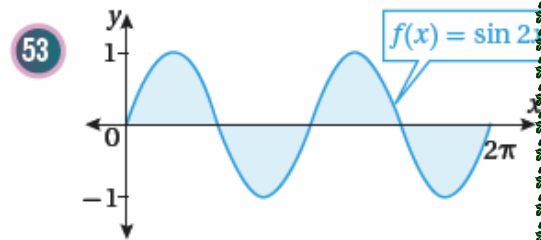
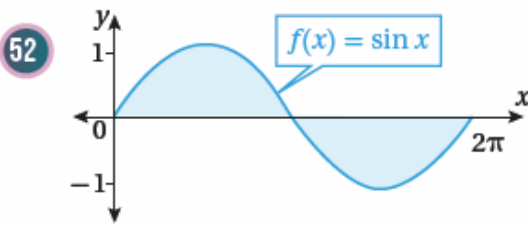
40 يُبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{4}{x}$. إذا كانت مساحة

المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ ، والمحور x ، والمستقيمين: $x = a$ و $x = 1$ هي 10 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت a .

$$40 \quad A = \int_1^a \frac{4}{x} dx = 4 \ln|x| \Big|_1^a = 4 \ln a - 4 \ln 1 = 4 \ln a$$

$$\Rightarrow 4 \ln a = 10 \Rightarrow \ln a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = e^{\frac{5}{2}}$$

مهارات التفكير العليا **تبرير:** أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتيين، مُبرراً إجابتي:



52 $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$

$$A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \left(-\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx\right) = (-\cos x)|_0^{\pi} + (\cos x)|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\cos \pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos \pi = 4$$

ملحوظة:

يمكن الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي:

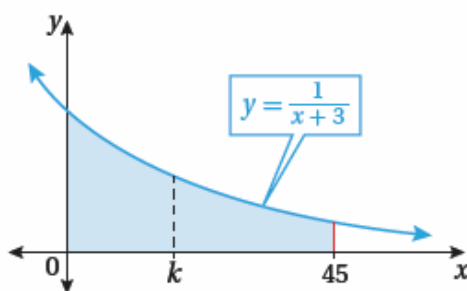
$$A = 2 \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2(-\cos x)|_0^{\pi} = 2(-\cos \pi + \cos 0) = 2(2) = 4$$

53 $\sin 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx + \left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x \, dx\right) + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2x \, dx + \left(-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin 2x \, dx\right)$$

والأسهل هو الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي:

$$A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx = -2 \cos 2x|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2(-1 - 1) = 4$$



62 **تحذ:** يُبين الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$y = \frac{1}{x+3}$ والمحور x ، والمستقيمين: $x = 0$ و $x = 45$.

أجد قيمة k التي تقسم المنطقة المظللة إلى منطقتين متساويتين في المساحة.

62 $A = \int_0^{45} \frac{1}{x+3} \, dx = \ln|x+3||_0^{45} = \ln 48 - \ln 3 = \ln 16$

$$\frac{1}{2}A = \int_0^k \frac{1}{x+3} \, dx = \ln|x+3||_0^k = \ln(k+3) - \ln 3 = \ln \frac{k+3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln 16 = \ln \frac{k+3}{3} \Rightarrow \ln 16^{1/2} = \ln \frac{k+3}{3} \Rightarrow 4 = \frac{k+3}{3} \Rightarrow k=9$$

من كتاب التمارين

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

- | | | |
|--|---|--|
| 1 $\int 4e^{-5x} dx$ | 2 $\int (\sin 2x - \cos 2x) dx$ | 3 $\int \cos^2 2x dx$ |
| 4 $\int \frac{e^x + 4}{e^{2x}} dx$ | 5 $\int \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2e^x \right) dx$ | 6 $\int (3 \cos 3x - \tan^2 x) dx$ |
| 7 $\int \cos x (1 + \csc^2 x) dx$ | 8 $\int \frac{x^2 + x - 4}{x + 2} dx$ | 9 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$ |
| 10 $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$ | 11 $\int \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2} dx$ | 12 $\int \ln e^{\cos x} dx$ |
| 13 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$ | 14 $\int \frac{3}{2x - 1} dx$ | 15 $\int \frac{3 - 2 \cos \frac{1}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x} dx$ |

1	$\int 4e^{-5x} dx = -\frac{4}{5}e^{-5x} + C$
2	$\int (\sin 2x - \cos 2x) dx = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$
3	$\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$
4	$\int \frac{e^x + 4}{e^{2x}} dx = \int (e^{-x} + 4e^{-2x}) dx = -e^{-x} - 2e^{-2x} + C$
5	$\int (\cot x \csc x - 2e^x) dx = -\csc x - 2e^x + C$
6	$\int (3 \cos 3x - \tan^2 x) dx = \int (3 \cos 3x - (\sec^2 x - 1)) dx$ $= \sin 3x - \tan x + x + C$
7	$\int \cos 3x (1 + \csc^2 x) dx = \int \cos x \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$ $= \int \cos x + \cot x \csc x dx = \sin x - \csc x + C$
8	$\int \frac{x^2 + x - 4}{x + 2} dx = \int \left(x - 1 - \frac{2}{x + 2} \right) dx$ $= \frac{1}{2}x^2 - x - 2 \ln x + 2 + C$
9	$\int \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx = \int e^{-\frac{1}{2}x} dx = -2e^{-\frac{1}{2}x} + C$
10	$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int (\sec^2 x + x^{-2}) dx = \tan x - \frac{1}{x} + C$
11	$\int \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2} dx = \frac{1}{3} \ln x^3 - 3x^2 + C$
12	$\int \ln e^{\cos x} dx = \int \cos x dx = \sin x + C$
13	$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$
14	$\int \frac{3}{2x - 1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2}{2x - 1} dx = \frac{3}{2} \ln 2x - 1 + C$
15	$\int \frac{3 - 2 \cos \frac{1}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x} dx = \int \left(3 \csc^2 \frac{1}{2}x - 2 \cot \frac{1}{2}x \csc \frac{1}{2}x \right) dx$ $= -6 \cot \frac{1}{2}x + 4 \csc \frac{1}{2}x + C$

أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

16 $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 4} dx$

17 $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$

18 $\int_0^{\pi/3} \sin x \cos x dx$

19 $\int_{-1}^1 |3x-2| dx$

20 $\int_0^{\pi/4} (\cos x + 3 \sin x)^2 dx$

21 $\int_0^{\pi/4} \tan x dx$

22 $\int_0^{\pi/16} (\cos^2 2x - 4 \sin^2 x \cos^2 x) dx$

23 $\int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} dx$

24 $\int_0^1 \frac{6x}{3x+2} dx$

16 $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 4} dx = \ln|e^x + 4| \Big|_0^1 = \ln(e + 4) - \ln 5 = \ln \frac{e + 4}{5}$

17 $\int_1^2 \frac{1}{3x-2} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{3}{3x-2} dx = \frac{1}{3} \ln|3x-2| \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \ln 4 - 0 = \frac{1}{3} \ln 4$

18 $\int_0^{\pi/3} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\pi/3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

19 $\int_{-1}^1 |3x-2| dx = \int_{-1}^{\frac{2}{3}} (2-3x) dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 (3x-2) dx$
 $= \left(2x - \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_{-1}^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x \right) \Big|_{\frac{2}{3}}^1 = \frac{13}{3}$

20 $\int_0^{\pi/4} (\cos x + 3 \sin x)^2 dx = \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x + 6 \sin x \cos x + 9 \sin^2 x) dx$
 $= \int_0^{\pi/4} (1 - \sin^2 x + 6 \sin x \cos x + 9 \sin^2 x) dx$
 $= \int_0^{\pi/4} (1 + 8 \sin^2 x + 3 \sin 2x) dx = \int_0^{\pi/4} (1 + 4(1 - \cos 2x) + 3 \sin 2x) dx$
 $= \int_0^{\pi/4} (5 - 4 \cos 2x + 3 \sin 2x) dx = \left(5x - 2 \sin 2x - \frac{3}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{5\pi - 2}{4}$

21 $\int_0^{\pi/4} \tan x dx = -\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| \Big|_0^{\pi/4} = -\ln \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{1}{2} \ln 2$

22 $\int_0^{\pi/16} (\cos^2 2x - 4 \sin^2 x \cos^2 x) dx = \int_0^{\pi/16} (\cos^2 2x - (2 \sin x \cos x)^2) dx$
 $= \int_0^{\pi/16} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) dx = \int_0^{\pi/16} \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\pi/16} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$

23 $\int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + 2 \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$
 $= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x + 2 \tan x \sec x + \tan^2 x) dx$
 $= \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x + 2 \tan x \sec x + \sec^2 x - 1) dx = \int_0^{\pi/4} (2 \sec^2 x + 2 \tan x \sec x - 1) dx = (2 \tan x + 2 \sec x - x) \Big|_0^{\pi/4}$
 $= 2 + 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} - 2 = 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$

24 $\int_0^1 \frac{6x}{3x+2} dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{4}{3x+2} \right) dx = \left(2x - \frac{4}{3} \ln|3x+2| \right) \Big|_0^1$
 $= 2 - \frac{4}{3} \ln 5 + \frac{4}{3} \ln 2 = 2 + \frac{4}{3} \ln \frac{2}{5}$

25 إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 3 \\ 10-x, & x > 3 \end{cases}$ ، فأجد قيمة: $\int_1^5 f(x) dx$

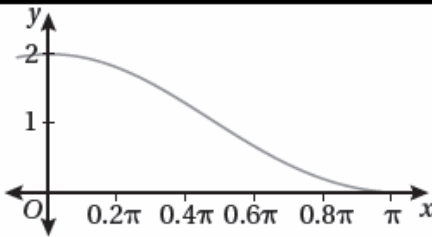
26 إذا كان: $\int_1^k \frac{4}{2x-1} dx = 1$ ، فأجد قيمة الثابت k ، حيث: $k > \frac{1}{2}$

27 إذا كان: $\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x}) dx = \frac{48}{7}$ ، فأجد قيمة الثابت a ، حيث: $a > 0$

25 $\int_1^5 f(x) dx = \int_1^3 (2x+1) dx + \int_3^5 (10-x) dx$
 $= (x^2 + x)|_1^3 + \left(10x - \frac{1}{2}x^2\right)|_3^5 = 12 - 2 + 50 - \frac{25}{2} - 30 + \frac{9}{2} = 22$

26 $\int_1^k \frac{4}{2x-1} dx = 1 \Rightarrow 2 \ln|2x-1| \Big|_1^k = 1 \Rightarrow 2 \ln|2k-1| = 1 \Rightarrow 2 \ln(2k-1) = 1$
 $\Rightarrow \ln(2k-1) = \frac{1}{2}, k > \frac{1}{2}$ لأن $\Rightarrow 2k-1 = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow k = \frac{e^{\frac{1}{2}} + 1}{2}$

27 $\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x}) dx = \frac{48}{7} \Rightarrow (e^x - e^{-x}) \Big|_0^{\ln a} = \frac{48}{7} \Rightarrow \left(a - \frac{1}{a}\right) - (1-1) = \frac{48}{7}$
 $\Rightarrow a - \frac{1}{a} - \frac{48}{7} = 0 \Rightarrow 7a^2 - 48a - 7 = 0 \Rightarrow (7a+1)(a-7) = 0$
 $\Rightarrow a = -\frac{1}{7}$ (تُرفض) ، $a = 7$



28 يُبين الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران: $f(x) = 2 \cos^2 0.5x$. أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحورين الإحداثيين الموجبين.

28 $A = \int_0^{\pi} 2 \cos^2 \frac{1}{2}x dx = \int_0^{\pi} (1 + \cos x) dx = (x + \sin x) \Big|_0^{\pi} = \pi$

في كلٍّ مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستخدم المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة

29 $f'(x) = e^{-x} + x^2$; $(0, 4)$

30 $f'(x) = \frac{3}{x} - 4$; $(1, 0)$ الاقتران $f(x)$:

29 $f(x) = \int (e^{-x} + x^2) dx = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C \Rightarrow f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$
 $f(0) = -1 + C \Rightarrow 4 = -1 + C \Rightarrow C = 5 \Rightarrow f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + 5$

30 $f(x) = \int \left(\frac{3}{x} - 4\right) dx = 3 \ln|x| - 4x + C \Rightarrow f(x) = 3 \ln|x| - 4x + C$
 $f(1) = -4 + C \Rightarrow 0 = -4 + C \Rightarrow C = 4 \Rightarrow f(x) = 3 \ln|x| - 4x + 4$

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = \frac{-t}{1+t^2}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتري لكل ثانية: 31 أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[0, 3]$. 32 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0, 3]$.

$$31 \quad s(3) - s(0) = \int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 \frac{-t}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \Big|_0^3 = -\frac{1}{2} \ln 10 \text{ m}$$

$$32 \quad d = \int_0^3 |v(t)| dt = \int_0^3 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \Big|_0^3 = \frac{1}{2} \ln 10 \text{ m}$$

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = 6 \sin 3t$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتري لكل ثانية: 33 أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$. 34 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

35 يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = \begin{cases} 8t - t^2, & 0 \leq t \leq 6 \\ 15 - \frac{1}{2}t, & t > 6 \end{cases}$ حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتري لكل ثانية. إذا انطلق الجسيم من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 40 ثانية من بدء الحركة.

$$33 \quad s\left(\frac{\pi}{2}\right) - s(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \sin 3t dt = -2 \cos 3t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \text{ m}$$

$$34 \quad 6 \sin 3t = 0 \Rightarrow 3t = 0, \pi \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{3}$$

$$d = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |v(t)| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |6 \sin 3t| dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 6 \sin 3t dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -6 \sin 3t dt$$

$$= -2 \cos 3t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + 2 \cos 3t \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 + 2 + 0 - 2(-1) = 6 \text{ m}$$

$$35 \quad s(t) = \int (8t - t^2) dt = 4t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C_1 \quad \text{عندما } 0 \leq t \leq 6$$

$$s(0) = 0 - 0 + C_1 \Rightarrow 0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow s(t) = 4t^2 - \frac{1}{3}t^3, \quad 0 \leq t \leq 6$$

$$s(t) = \int \left(15 - \frac{1}{2}t\right) dt = 15t - \frac{1}{4}t^2 + C_2 \quad \text{عندما } t > 6$$

الموقع الابتدائي للجسيم في هذه الفترة هو موقعه في نهاية الفترة الأولى أي $s(6)$

$$s(6) = 144 - \frac{216}{3} = 72 \text{ نحسب } s(6) \text{ من قاعدة الموقع السابقة}$$

$$s(6) = 90 - 9 + C_2 \Rightarrow 72 = 81 + C_2 \Rightarrow C_2 = -9$$

$$\Rightarrow s(t) = 15t - \frac{1}{4}t^2 - 9, \quad t > 6$$

$$\Rightarrow s(40) = 15(40) - \frac{1}{4}(1600) - 9 = 191 \text{ m}$$

$$35 \quad \text{حل آخر: } s(40) - s(0) = \int_0^{40} v(t) dt \Rightarrow s(40) = s(0) + \int_0^{40} v(t) dt$$

$$= 0 + \int_0^6 (8t - t^2) dt + \int_6^{40} \left(15 - \frac{1}{2}t\right) dt = \left(4t^2 - \frac{t^3}{3}\right) \Big|_0^6 + \left(15t - \frac{t^2}{4}\right) \Big|_6^{40} = 191 \text{ m}$$

وزارة علمي 2023 ف2

(1) قيمة: $\int_0^1 (2^e)^x dx$ هي: a) $\frac{2^e}{e \ln 2}$ b) $\frac{2^e-1}{\ln 2}$ c) $\frac{2^e-1}{e \ln 2}$ d) $\frac{1}{e \ln 2}$

(2) ناتج: $\int \left(\frac{1}{\sin^2(3x)} + \pi \right) dx$ هو: a) $-\frac{1}{3} \cot(3x) + \pi x + C$ b) $\frac{1}{3} \cot(3x) + \pi + C$ c) $-\frac{1}{3} \tan(3x) + \pi x + C$ d) $\frac{1}{3} \tan(3x) + \pi + C$

(3) ناتج: $\int \cot(-x) dx$ هو: a) $\ln |\csc x \cot x| + C$ b) $-\ln |\csc x \cot x| + C$ c) $\ln |\csc x| + C$ d) $-\ln |\csc x| + C$

(4) قيمة: $\int_3^4 |4 - 2x| dx$ هي: a) -3 b) 3 c) -2 d) 2

(5) إذا كان: $f'(x) = \frac{3x^3+1}{x}$ ، وكان: $f(1) = 6$ ، فإن قاعدة الاقتران f هي: a) $f(x) = 3x^2 + \ln|x| + 5$ b) $f(x) = x^3 + \ln|x| - 5$ c) $f(x) = x^3 + \ln|x| + 5$ d) $f(x) = x^3 - \ln|x| + 5$

(6) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتُعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{-3t}{t^2+2}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إزاحة الجسيم بالأمطار في الفترة $[0, 4]$ تساوي:

a) $-\frac{3}{2} \ln 3$ b) $-\frac{3}{2} \ln 9$ c) $\frac{3}{2} \ln 3$ d) $\frac{3}{2} \ln 9$

وزارة علمي 2023 ف2 تكميلي

(1) قيمة $\int_{-1}^1 3^x dx$ تساوي: a) $\frac{2}{3 \ln 3}$ b) $\frac{8}{3 \ln 3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{8}{3}$

(2) $\int \sin(5 - 3x) dx$ يساوي: a) $-\cos\left(5x - \frac{3}{2}x^2\right) + C$ b) $\cos(5 - 3x) + C$ c) $-\frac{\cos(5-3x)}{3} + C$ d) $\frac{\cos(5-3x)}{3} + C$

(3) $\int (\tan^2 2x - \sec^2 2x) dx$ يساوي: a) $x + C$ b) $-x + C$ c) $x - \tan 2x + C$ d) $\tan 2x - x + C$

4) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} (2-3x)^2 & , x < 1 \\ 3x^2 - 2x & , x \geq 1 \end{cases}$ ، فإن قيمة $\int_0^3 f(x) dx$ تساوي:

- a) 1 b) 17 c) 18  19

5) إذا كان: $f'(x) = e^x + e^{-x}$ يمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران f ، وكان منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0, -1)$ ، فإن قاعدة الاقتران f هي:

-  $f(x) = e^x - e^{-x} - 1$ c) $f(x) = e^x - e^{-x} + 1$
b) $f(x) = e^x + e^{-x} + 1$ d) $f(x) = e^x + e^{-x} - 1$

6) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتُعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 12t - 3t^2$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v السرعة المتجهة بالمتري لكل ثانية. فإن ازاحة الجسم في الفترة $[0, 6]$ تساوي:

- a) -36  0 c) 36 d) -24

وزارة صناعي 2023 ف2

14- قيمة: $\int \sin(2x - \pi) dx$ هي: c) $-2 \cos(2x - \pi) + c$ a) $2 \cos(2x - \pi) + c$

b) $\frac{1}{2} \cos(2x - \pi) + c$  d) $-\frac{1}{2} \cos(2x - \pi) + c$

15- قيمة: $\int_1^e (2x - \frac{1}{x}) dx$ هي: d) $\frac{1}{2}e^2 - 2$ c) $\frac{1}{2}e^2 - 1$ a) e^2  b) $e^2 - 2$

16- قيمة: $\int_{-1}^1 (2 - |x|) dx$ هي: d) 4 c) 0 a) -3  b) 3

17- قيمة: $\int_0^1 e^{-x} dx$ هي:  d) $1 - \frac{1}{e}$ c) $\frac{1}{e}$ b) $-\frac{1}{e}$ a) $\frac{1}{e} - 1$

18- قيمة: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ هي: d) $-\frac{\pi}{4}$  c) $\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{\pi}{2}$ a) $\frac{\pi}{2}$

b) إذا كان: $f'(x) = \sin 2x$ يمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران f ، فجد قاعدة الاقتران f الذي يمر منحناه بالنقطة $(\frac{\pi}{2}, 2)$ (8 علامات)

وزارة صناعي 2023 تكميلي ف2

14- ناتج: $\int 6e^{3x-1} dx$ هو:

a) $-3e^{3x-1} + c$

▼ $2e^{3x-1} + c$

b) $3e^{3x-1} + c$

d) $-2e^{3x-1} + c$

15- ناتج: $\int \cos(7 - 5x) dx$ هو:

▼ $-\frac{1}{5} \sin(7 - 5x) + c$

c) $\frac{1}{5} \sin(7 - 5x) + c$

b) $-\frac{1}{7} \sin(7 - 5x) + c$

d) $\frac{1}{7} \sin(7 - 5x) + c$

16- قيمة: $\int_0^{\pi} \tan^2 x dx$ هي:

a) $-1 - \frac{\pi}{4}$

b) $-1 + \frac{\pi}{4}$

c) $1 + \frac{\pi}{4}$

▼ $1 - \frac{\pi}{4}$

17- قيمة: $\int_0^e \frac{6x}{x^2 + 1} dx$ هي:

a) $6 \ln(e^2 + 1)$

c) $-3 \ln(e^2 + 1)$

b) $-6 \ln(e^2 + 1)$

▼ $3 \ln(e^2 + 1)$

18- قيمة: $\int_4^6 (5 + |3 - x|) dx$ هي:

▼ 14

b) 6

c) -14

d) -6

(c) إذا كان: $\int_a^{2a} \frac{1+4x}{x} dx = \ln 32$, $a > 0$, فجد قيمة الثابت a (8 علامات)

(b) إذا كان: $f'(x) = 3(2x - 7)^5$ يُمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران f , فجد قاعدة الاقتران f الذي يمر بمنحناه بالنقطة $(-1, 4)$. (8 علامات)



تمارين على الدرس الأول

السؤال الأول :

1) $\int 6 e^{2x} dx = a) 6 e^{2x} + c \quad b) 3 e^{2x} + c \quad c) 12 e^{2x} + c \quad d) 6 e^{3x} + c$

2) $\int_0^1 (3 + e^x) dx = a) 3 + e \quad b) 2 + e \quad c) e \quad d) 4 + e$

3) $\int \tan^2 x dx = a) \sec x + c \quad b) \sec^2 x + c \quad c) x - \tan x + c \quad d) \tan x - x + c$

4) $\int 4 \cos 2x dx = a) 8 \sin 2x + C \quad b) 2 \sin 2x + C$
 $c) -8 \sin 2x + C \quad d) -2 \sin 2x + C$

5) $\int 2(\sin x - \cos x)^2 dx = a) x + \sin 2x + C \quad b) 2x + \cos 2x + C$
 $c) x - \sin 2x + C \quad d) 2x - \cos 2x + C$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 12 \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) dx = a) 6\pi + 3 \quad b) \pi + 3 \quad c) \pi + 3\sqrt{3} \quad d) 6\pi$

7) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx = a) 2 \ln |\sin x| + C \quad b) \ln |\sin x| + C$
 $c) \frac{1}{2} \ln |\sin x| + C \quad d) \cot x + C$

8) $\int_0^3 (1 + |2x - 4|) dx = a) 8 \quad b) 7 \quad c) 6 \quad d) -1$

9) إذا تحرك جسم من نقطة الأصل في خط مستقيم بحيث تعطى سرعته المتجهة بالاقتران $v(t) = 4 \sin t$ ، فإن موقع الجسم بعد $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ثانية يساوي : $a) 6 \quad b) 2 - 2\sqrt{3} \quad c) 2 \quad d) \sqrt{3}$

10) إذا كان $f'(x) = \frac{4}{2x-1}$ فيُمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ الذي يمر بالنقطة (4, 1) فإن قاعدة الاقتران $f(x)$ هي : $a) \ln |2x - 1| + 4 \quad b) \ln |2x - 1|$
 $c) 2 \ln |2x - 1| + 4 \quad d) \ln |2x - 1| + 2$

11) $\int 4^{2x} dx = a) \frac{4^{2x}}{\ln 16} + c \quad b) \frac{4^{2x}}{\ln 4} + c \quad c) \frac{4^{2x}}{\ln 8} + c \quad d) 4^{2x} \ln 16 + c$

12) $\int \frac{\ln x^4}{2 \ln x} dx = a) 4 \ln x + c \quad b) 4x + c \quad c) 2x + c \quad d) 2$



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
b	b	d	b	b	b	a	a	c	c	a	c

إجابات الدوائر ←

ملاحظة مهمة : (نصيحة)

يجب حفظ قوانين اللوغاريتمات وفهم طريقة تحويل المقدار من شكل إلى آخر خصوصاً في الأسئلة الموضوعية

$$\ln(x y) = \ln x + \ln y$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\ln(x)^a = a \ln(x)$$



$$\ln 4 + \ln 5 = \ln (4 \times 5) = \ln 20$$

غير معرف: $\ln 0$

$$\ln e = 1$$

$$3 \ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln 3x^5 \neq 5 \ln 3x$$

$$\ln 4x^2 = \ln 4 + \ln x^2 = \ln 4 + 2 \ln x$$

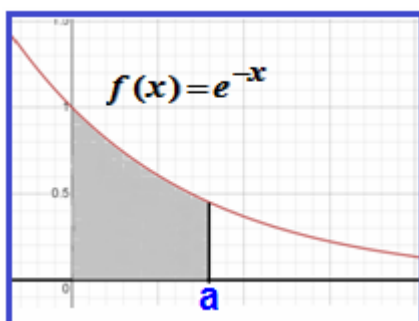
السؤال الثاني : جد قيمة التكاملات الآتية :

$$1) \int_1^2 \sqrt[3]{e^{6-3x}} dx \quad 2) \int 4^{2x-1} dx \quad 3) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x dx \quad 4) \int_0^1 \frac{e^{2x} - 3}{e^x - \sqrt{3}} dx$$

السؤال الثالث : إذا كانت $f'(x) = \frac{\sin 4x}{e + \sin^2 2x}$ ، وكان $f(0) = 1$ ، فجد قيمة $f(\frac{\pi}{4})$

السؤال الرابع : إذا كان معدل تغير مساحة صفيحة غير منتظمة يعطى بالعلاقة $\frac{dA}{dt} = e^{-\frac{t}{10}}$ سنتيمترا مربعا / ث ثوان وكانت مساحة الصفيحة تساوي (80 cm^2) عندما $(t=0)$ ، جد مساحة سطحها بعد (5) ثوان

السؤال الخامس : معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران $f(x) = e^{-x}$ ،



إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور (x)

في الفترة $[0, a]$ تساوي (0.5) وحدة مربعة ، فجد قيمة الثابت (a)





التكامل بالتعويض

Integration by Substitution

الدرس
2

✓ هناك عدة طرق للتكامل، منها: (1) الطريقة المباشرة من خلال البحث عن اقتران مشتقته تعطي الاقتران المُكامل.

✓ (2) من خلال التحليل إلى العوامل والاختصار

✓ (3) من خلال المتطابقات المثلثية

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

← (4) طريقة التكامل بالتعويض

— (5) طريقة الكسور الجزئية

— (6) طريقة التكامل بالأجزاء

Hasanat

التكامل بالتعويض للتكاملات غير المحدودة

إذا كان: $u = g(x)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، ومداه الفترة I ، وكان f اقتراناً متصلًا على I ،

$$\text{فإن: } \int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

تقوم طريقة التكامل بالتعويض على أساس تتضمن استعمال مُتغيّر جديد بدلاً من مُتغيّر التكامل (غالباً ما نختار u). عندها يجب أن يكون التكامل الجديد كله بدلالة المُتغيّر الجديد (حتى dx). وهناك خطوات أساسية لهذه العملية وهي:

(1) نحدد (u) : وهي غالباً ما تكون المقدار داخل الجذر، أو الزاوية في الاقتران المثلثي أو القوة في الأسّي

(2) نشتق (u) ، ثم نجد (dx) بدلالة (u) و (du)

(3) نكتب المُكامل الجديد في أبسط صورة بعد حذف المقادير المحتوية على (x)

(4) نجد التكامل الجديد بدلالة (u)

(5) نعيد قيمة (u) التي فرضناها ليصبح المقدار بدلالة (x)

والسؤال الأهم: متى نستخدم طريقة التعويض؟ وكيف نختارها دون غيرها؟

الجواب: هناك مسائل يمكن حلها بأكثر من طريقة، فتكون طريقة التعويض خياراً

وهناك مسائل حلها يتضمن استخدام أكثر من طريقة معاً، أحدها التعويض (وربما نبدأ بها)

ولكن هناك قواعد (شبه) ثابتة، يمكن اعتمادها، مثلاً

عند وجود مقدار ومشتقته في المسألة نستخدم التعويض $(\int e^{\sin x} \cos x dx)$

عند وجود اقتران مثلثي زاويته غير خطية، نبدأ بالتعويض بفرض الزاوية (u)

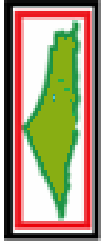
إذا كان فرض (u) واشتقاقها يؤدي إلى تخفيض قوة المقدار... نستخدم التعويض وهكذا...

ولكن، في معظم الحالات، يُمكن تجربة التعويض وملاحظ إن كان يؤدي إلى تعقيد المسألة أم تسهيلها

إذا كان المُكامل يتكون من مقدارين مختلفين في النوع (مثلثي و أسّي $(\int e^x \cos x dx)$) ... لا نستخدم التعويض

وهناك عدة حالات للتكامل بالتعويض، نستعرض معظمها فيما يأتي:

(1) عندما تكون مشتقة u موجودة بصورة مباشرة في المُكامل :



$$1) \int 6x(x^2 + 5)^7 dx \therefore u = x^2 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\Rightarrow \int 6x(u)^7 \frac{du}{2x} = 3 \int u^7 du = 3 \frac{u^8}{8} + c = \frac{3}{8}(x^2 + 5)^8 + C$$

$$2) \int \sec^2 3x e^{\tan 3x} dx \therefore u = \tan 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \sec^2 3x \Rightarrow dx = \frac{du}{3 \sec^2 3x}$$

$$\Rightarrow \int \sec^2 3x e^u \frac{du}{3 \sec^2 3x} = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{\tan 3x} + C$$

$$3) \int \frac{\ln 5x}{2x} dx \therefore u = \ln 5x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{5x} \Rightarrow dx = x du$$

$$\Rightarrow \int \frac{u}{2x} x du = \frac{1}{2} \int u du = \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{4} (\ln 5x)^2 + C$$

$$4) \int 4x^2 \sin(x^3 + 1) dx \therefore u = x^3 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\Rightarrow \int 4x^2 \sin(u) \frac{du}{3x^2} = \frac{4}{3} \int \sin u du = \frac{-4}{3} \cos u + C = \frac{-4}{3} \cos(x^3 + 1) + C$$

$$5) \int \sin x \cos x dx \therefore u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \int u \cos x \frac{du}{\cos x} = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

تذكر : قمنا بحل هذا السؤال من قبل ، عن طريق المتطابقات ، والاختلاف في الناتج سببه اختلاف الثابت C

$$5+) \int \sin x \cos x dx = \int \frac{1}{2} \times dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cos x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \cos 2x \right) + c \quad : \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$6) \int \frac{2^{\frac{3}{x}}}{x^2} dx \therefore u = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{-3}{x^2} \Rightarrow dx = \frac{x^2 du}{-3}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2^u}{x^2} \frac{x^2 du}{-3} = \frac{-1}{3} \int 2^u du = \frac{-1}{3 \ln 2} 2^u + C = \frac{-1}{3 \ln 2} 2^{\frac{3}{x}} + C$$



أتحقق من فهمي أجد كلاً من التكاملات الآتية: 32

a) $\int 4x^2 \sqrt{x^3 - 5} dx$

b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

c) $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$

d) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

e) $\int \cos^4 5x \sin 5x dx$

f) $\int x 2^{x^2} dx$

a) $u = x^3 - 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$

أتحقق من فهمي صفحة 32

$$\int 4x^2 \sqrt{x^3 - 5} dx = \int 4x^2 \sqrt{u} \times \frac{du}{3x^2} = \int \frac{4}{3} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{8}{9} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{8}{9} \sqrt{(x^3 - 5)^3} + C$$

b) $u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^u \times 2\sqrt{x} du = \int e^u du = e^u + C = e^{\sqrt{x}} + C$$

c) $u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du$

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \int \frac{u^3}{x} \times x du = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C$$

d) $u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \frac{\cos u}{x} \times x du = \int \cos u du = \sin u + C = \sin(\ln x) + C$$

e) $u = \cos 5x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -5 \sin 5x \Rightarrow dx = \frac{du}{-5 \sin 5x}$

$$\int \cos^4 5x \sin 5x dx = \int u^4 \sin 5x \times \frac{du}{-5 \sin 5x} = \int -\frac{1}{5} u^4 du = -\frac{1}{25} u^5 + C = -\frac{1}{25} \cos^5 5x + C$$

f) $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$$\int x 2^{x^2} dx = \int x 2^u \times \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2} 2^u du = \frac{1}{2 \ln 2} 2^u + C = \frac{1}{2 \ln 2} 2^{x^2} + C$$

$$1) \int \frac{6x^2}{(x^3 + 5)^4} dx = \dots \frac{-2}{3(x^3 + 5)^3} + C$$

$$2) \int \sec x \tan x e^{\sec x} dx = \dots e^{\sec x} + C$$

$$3) \int \cot x \ln(\sin x) dx = \dots \frac{1}{2} (\ln(\sin x))^2 + C$$



Abdulkadir Hasanat

Abdulkadir Hasanat

078 531 88 77



أَتَدَرَّبُ وَأَحُلُّ الْمَسَائِلَ

1 أجد كلاً من التكاملات الآتية: $\int x^2 (2x^3 + 5)^4 dx$

5 $\int e^{\sin x} \cos x dx$

7 $\int \sec^4 x dx$

8 $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

9 $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

10 $\int \sin 2x (4 + \sin^2 x)^3 dx$

11 $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx$

1 $u = 2x^3 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$

$$\int x^2 (2x^3 + 5)^4 dx = \int x^2 u^4 \times \frac{du}{6x^2} = \int \frac{1}{6} u^4 du = \frac{1}{30} u^5 + C = \frac{1}{30} (2x^3 + 5)^5 + C$$

5 $u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^u \cos x \frac{du}{\cos x} = \int e^u du = e^u + C = e^{\sin x} + C$$

7 $\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x \times \sec^2 x dx = \int \sec^2 x (1 + \tan^2 x) dx$

$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$$= \int \sec^2 x (1 + u^2) \times \frac{du}{\sec^2 x} = \int (1 + u^2) du = u + \frac{1}{3} u^3 + C = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

8 $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \sec^2 x dx$: $u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int u \sec^2 x \times \frac{du}{\sec^2 x} = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} \tan^2 x + C$$

9 $u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \frac{\sin u}{x} \times x du = \int \sin u du = -\cos u + C = -\cos(\ln x) + C$$

10 $u = 4 + \sin^2 x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sin 2x}$

$$= \int \sin 2x \times u^3 \times \frac{du}{\sin 2x} = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(4 + \sin^2 x)^4}{4} + C$$

11 $u = e^x + e^{-x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x - e^{-x} \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x - e^{-x}}$

$$\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx = \int \frac{2(e^x - e^{-x})}{u^2} \times \frac{du}{e^x - e^{-x}} = \int 2u^{-2} du = -2u^{-1} + C = -\frac{2}{e^x + e^{-x}} + C$$

(2) عندما تكون مشتقة u موجودة بصورة مباشرة في المُكامل ولكن بعد الاختصار لا تختفي (x) ، عندها يجب أن نكتب (x) المتبقية بدلالة (u) :

$$1) \int 3x \sqrt[5]{7x-1} dx \therefore u = 7x-1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 7 \Rightarrow dx = \frac{du}{7} \rightarrow x = \frac{1}{7}(1-u)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int 3x \sqrt[5]{u} \frac{du}{7} &= \frac{3}{7} \int (1-u) u^{\frac{1}{5}} du = \frac{3}{7} \int (u^{\frac{1}{5}} - u^{\frac{6}{5}}) du \\ &= \frac{3}{7} \left(\frac{u^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} - \frac{u^{\frac{11}{5}}}{\frac{11}{5}} \right) + C = \frac{3}{7} \left(\frac{5}{6} (7x-1)^{\frac{6}{5}} - \frac{5}{11} (7x-1)^{\frac{11}{5}} \right) + C \\ &= \frac{5}{14} \sqrt[5]{(7x-1)^6} - \frac{15}{77} \sqrt[5]{(7x-1)^{11}} + C \end{aligned}$$



$$2) \int 2x^3 (x^2+2)^4 dx \therefore u = x^2+2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \rightarrow x^2 = u-2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int 2x^3 (u)^4 \frac{du}{2x} &= \int x^2 (u)^4 du = \int (u-2)(u)^4 du = \int (u^5 - 2u^4) du \\ &= \frac{u^6}{6} - \frac{2u^5}{5} + C = \frac{1}{6} (x^2+2)^6 - \frac{2}{5} (x^2+2)^5 + C \end{aligned}$$

$$3) \int \frac{e^{3x}}{e^x-1} dx \therefore u = e^x-1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} \rightarrow e^x = u-1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{e^x e^{2x}}{u} \frac{du}{e^x} &= \int \frac{(e^x)^2}{u} du = \int \frac{(u-1)^2}{u} du = \int \frac{u^2 - 2u + 1}{u} du \\ &= \int \left(\frac{u^2}{u} - \frac{2u}{u} + \frac{1}{u} \right) du = \int (u-2 + \frac{1}{u}) du = \frac{u^2}{2} - 2u + \ln u + C \\ &= \frac{(e^x-1)^2}{2} - 2(e^x-1) + \ln|e^x-1| + C \end{aligned}$$

$$1) \int 4e^{2x} (e^x+3)^2 dx = \dots (e^x+3)^4 - 4(e^x+3)^3 + C$$



$$2) \int 30x^3 \sqrt{x^2+1} dx = \dots 6 \sqrt{(x^2+1)^5} - 30 \sqrt{(x^2+1)^3} + C$$

$$3) \int \frac{2x^3}{x^2+1} dx = \dots x^2 + 1 - \ln(x^2+1) + C$$

Abdulkadir Hasanat

Abdulkadir Hasanat

أتحقق من فهمي أجد كلاً من التكاملات الآتية: 34

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$

b) $\int x^7 (x^4 - 8)^3 dx$

c) $\int \frac{e^{3x}}{(1-e^x)^2} dx$

a) $u = 1 + 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}, x = \frac{u-1}{2}$ أتحقق من فهمي صفحة 34

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(u-1)}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2} = \frac{1}{4} \int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}} \right) du = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{6} (1+2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} (1+2x)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{6} \sqrt{(1+2x)^3} - \frac{1}{2} \sqrt{1+2x} + C$$

b) $u = x^4 - 8 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3 \Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3}, x^4 = u + 8$

$$\int x^7 (x^4 - 8)^3 dx = \int x^7 u^3 \times \frac{du}{4x^3} = \frac{1}{4} \int x^4 u^3 du = \frac{1}{4} \int (u+8) u^3 du$$

$$= \frac{1}{4} \int (u^4 + 8u^3) du = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} u^5 + 2u^4 \right) + C = \frac{1}{20} (x^4 - 8)^5 + \frac{1}{2} (x^4 - 8)^4 + C$$

c) $u = 1 - e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{-e^x}, e^x = 1 - u$

$$= \int \frac{e^{3x}}{u^2} \frac{du}{-e^x} = \int -\frac{e^{2x}}{u^2} du = \int \frac{-(1-u)^2}{u^2} du = \int \frac{-1+2u-u^2}{u^2} du = \int \left(-u^{-2} + \frac{2}{u} - 1 \right) du$$

$$= (u^{-1} + 2 \ln|u| - u) + C = \frac{1}{1-e^x} + 2 \ln|1-e^x| - 1 + e^x + C$$

2 $\int x^2 \sqrt{x+3} dx$

3 $\int x(x+2)^3 dx$

4 $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx$

2 $u = x + 3 \Rightarrow dx = du, x = u - 3$

$$\int x^2 \sqrt{x+3} dx = \int x^2 \sqrt{u} du = \int (u-3)^2 \sqrt{u} du = \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}} \right) du$$

$$= \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5} u^{\frac{5}{2}} + 6u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7} (x+3)^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5} (x+3)^{\frac{5}{2}} + 6(x+3)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{7} \sqrt{(x+3)^7} - \frac{12}{5} \sqrt{(x+3)^5} + 6\sqrt{(x+3)^3} + C$$

3 $u = x + 2 \Rightarrow dx = du, x = u - 2$

$$\int x(x+2)^3 dx = \int x u^3 du = \int (u-2) u^3 du = \int (u^4 - 2u^3) du$$

$$= \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{2} u^4 + C = \frac{1}{5} (x+2)^5 - \frac{1}{2} (x+2)^4 + C$$

4 $u = x + 4 \Rightarrow dx = du, x = u - 4$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} du = \int \frac{u-4}{\sqrt{u}} du = \int \left(u^{\frac{1}{2}} - 4u^{-\frac{1}{2}} \right) du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 8u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} (x+4)^{\frac{3}{2}} - 8(x+4)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(x+4)^3} - 8\sqrt{x+4} + C$$

$$6 \int \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx$$

$$12 \int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}} dx$$

$$13 \int x \sqrt[3]{x+10} dx$$

$$6 \quad u = e^x + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}, e^x = u - 1$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^{3x}}{u} \times \frac{du}{e^x} = \int \frac{e^{2x}}{u} du = \int \frac{(u-1)^2}{u} du = \int \left(u - 2 + \frac{1}{u} \right) du$$

$$= \frac{1}{2} u^2 - 2u + \ln|u| + C = \frac{1}{2} (e^x + 1)^2 - 2(e^x + 1) + \ln(e^x + 1) + C$$

$$12 \quad u = x + 1 \Rightarrow dx = du, x = u - 1$$

$$\int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{1-u}{u\sqrt{u}} du = \int \frac{1-u}{u^{\frac{3}{2}}} du = \int \left(u^{-\frac{3}{2}} - u^{-\frac{1}{2}} \right) du$$

$$= -2u^{-\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C = -2(x+1)^{-\frac{1}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{-2}{\sqrt{x+1}} - 2\sqrt{x+1} + C$$

$$13 \quad u = x + 10 \Rightarrow dx = du, x = u - 10$$

$$\int x \sqrt[3]{x+10} dx = \int (u-10)u^{\frac{1}{3}} du = \int \left(u^{\frac{4}{3}} - 10u^{\frac{1}{3}} \right) du$$

$$= \frac{3}{7} u^{\frac{7}{3}} - \frac{15}{2} u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{7} (x+10)^{\frac{7}{3}} - \frac{15}{2} (x+10)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{7} \sqrt[3]{(x+10)^7} - \frac{15}{2} \sqrt[3]{(x+10)^4} + C$$

(3) التكامل بالتعويض لتكاملات تحوي جذور (قد تكون غير تربيعية)

$$1) \int x \sqrt[4]{x+1} dx \therefore u = \sqrt[4]{x+1} \Rightarrow u^4 = x+1 \Rightarrow 4u^3 du = dx \rightarrow u^4 - 1 = x$$

$$\Rightarrow \int (u^4 - 1)(u)(4u) du = 4 \int (u^8 - u^5) du = 4 \left(\frac{u^9}{9} - \frac{u^5}{5} \right) + C$$

$$= 4 \left(\frac{\sqrt[4]{(x+1)^9}}{9} - \frac{\sqrt[4]{(x+1)^5}}{5} \right) + C$$

$$2) \int \frac{\sqrt{x} - x + 2}{\sqrt{x} + x} dx \therefore u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow 2u du = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{u - u^2 + 2}{u + u^2} (2u) du = \int \frac{u - u^2 + 2}{u(1+u)} (2u) du = -2 \int \frac{u^2 - u - 2}{(1+u)} du$$

$$= -2 \int \frac{(u-2)(u+1)}{(1+u)} du = -2 \int (u-2) du = -2 \left(\frac{u^2}{2} - 2u \right) + C$$

$$= -u^2 + 4u + C = 4\sqrt{x} - x + C$$

$$3) \int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-3}} dx \therefore u = \sqrt[3]{x-3} \Rightarrow u^3 = x-3 \Rightarrow 3u^2 du = dx \rightarrow x = u^3 + 3$$

$$\Rightarrow \int \frac{u^3 + 3 + 2}{u} 3u^2 du = 3 \int (u^4 + 5u) du = 3 \left(\frac{u^5}{5} + \frac{u^2}{2} \right) + C$$

$$= 3 \left(\frac{\sqrt[3]{(x-3)^5}}{5} + \frac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{2} \right) + C$$

$$4) \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}} dx \dots (\text{نضرب في مرافق البسط})$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}} dx = \int \frac{2x}{2 + 2\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\therefore u = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow u^2 = 1-x^2 \Rightarrow 2u du = -2x dx$$

$$\Rightarrow -\int \frac{2u du}{2+2u} = \int \left(1 + \frac{-1}{1+u} \right) du = -u + \ln|1+u| + C$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + \ln|1+\sqrt{1-x^2}| + C$$

$$5) \int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} \sqrt{\frac{x+3}{x-1}} dx \because u = \frac{x+3}{x-1} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{-4}{(x-1)^2} \Rightarrow dx = \frac{-(x-1)^2}{4} du$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x+3)(x-1)} \sqrt{u} \frac{(x-1)^2}{-4} du = \int \frac{1}{(x+3)} \sqrt{u} \frac{(x-1)}{-4} du = \frac{-1}{4} \int \frac{(x-1)}{(x+3)} \sqrt{u} du$$

$$= \frac{-1}{4} \int \frac{1}{u} \sqrt{u} du = \frac{-1}{4} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{-1}{4} (2u^{\frac{1}{2}}) + C = \frac{-1}{2} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} + C$$

أتحقق من فهمي أجد كلاً من التكاملين الآتيين 35

a) $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}}$ b) $\int x \sqrt[3]{(1-x)^2} dx$

a) $u = \sqrt[3]{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow dx = 3x^{\frac{2}{3}} du, \quad x = u^3$ 35

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{3x^{\frac{2}{3}} du}{u^3 + u} = \int \frac{3u^2}{u^3 + u} du = \int \frac{3u}{u^2 + 1} du = \frac{3}{2} \int \frac{2u}{u^2 + 1} du$$

$$= \frac{3}{2} \ln(u^2 + 1) + C = \frac{3}{2} \ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) + C$$

b) $u = 1 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du, \quad x = 1 - u$

$$\int x \sqrt[3]{(1-x)^2} dx = \int x \sqrt[3]{u^2} \times -du = \int -(1-u) \sqrt[3]{u^2} du = \int -(1-u) u^{\frac{2}{3}} du$$

$$= \int \left(-u^{\frac{2}{3}} + u^{\frac{5}{3}}\right) du = -\frac{3}{5} u^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{8} u^{\frac{8}{3}} + C = -\frac{3}{5} (1-x)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{8} (1-x)^{\frac{8}{3}} + C$$

$$= -\frac{3}{5} \sqrt[3]{(1-x)^5} + \frac{3}{8} \sqrt[3]{(1-x)^8} + C$$

$$1) \int \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx = \dots = 3(1 + \sqrt[3]{x}) - \ln|1 + \sqrt[3]{x}| + C$$



$$2) \int \frac{3}{\sqrt{x} + x} dx \dots = 6 \ln|1 + \sqrt{x}| + C$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} dx \dots = (\sqrt{x} - 2)^2 + 8(\sqrt{x} - 2) + 8 \ln|\sqrt{x} - 2| + C$$

(4) عند وجود اقتراني الجيب وجيب التمام المرفوعين إلى أس فردي

$$1) \int \cos^5 x \, dx = \int \cos x \times \cos^2 x \times \cos^2 x \, dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x)(1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$\therefore u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow \frac{du}{\cos x} = dx$$

$$\Rightarrow \int \cos x (1 - u^2)(1 - u^2) \frac{du}{\cos x} = \int (1 - u^2)(1 - u^2) du = \int (1 - 2u^2 + u^4) du$$

$$= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

$$2) \int \cos^2 x \sin^3 x \, dx \therefore u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow \frac{du}{-\sin x} = dx$$

$$= \int u^2 \sin^3 x \frac{du}{-\sin x} = -\int u^2 (1 - \cos^2 x) du = -\int u^2 (1 - u^2) du$$

$$= -\int (u^2 - u^4) du = \frac{u^3}{-3} + \frac{u^5}{5} + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

مهم جداً : عند وجود اقتراني الجيب وجيب التمام مرفوعين إلى أس زوجي: لا حل لهما إلا عن طريق المتطابقات

أتحقق من فهمي أجد كلاً من التكاملين الآتيين: 39 a) $\int \sin^3 x \, dx$ b) $\int \cos^5 x \sin^2 x \, dx$

a) $\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x \sin^2 x \, dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx$ **أتحقق من فهمي صفحة 39**

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x (1 - u^2) \frac{du}{-\sin x} = \int (u^2 - 1) du = \frac{1}{3}u^3 - u + C = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

b) $u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$$\int \cos^5 x \sin^2 x \, dx = \int \cos^5 x u^2 \frac{du}{\cos x} = \int \cos^4 x u^2 du = \int (1 - \sin^2 x)^2 u^2 du$$

$$= \int (1 - u^2)^2 u^2 du = \int (u^2 - 2u^4 + u^6) du = \frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + C$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$



$$1) \int \cos 2x \sin^3 2x \, dx = \dots \frac{1}{8} \sin^4 2x + C$$

$$2) \int \cos^3 x \sin^3 x \, dx = \dots \frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + C$$

$$3) \int \cos x \csc^3 x \, dx = \dots \frac{-1}{2} \csc^2 x + C$$

$$4) \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \dots \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

$$5) \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} \, dx = \dots 2\sqrt{\sin x} - \frac{2}{5} \sqrt{\sin^5 x} + C$$



16 $\int (1 + \sqrt[3]{\sin x}) \cos^3 x \, dx$

17 $\int \sin x \sec^5 x \, dx$



أَتَدْرَبْ وَأُحِلُّ الْمَسَائِل



16 $u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$$\int (1 + \sqrt[3]{\sin x}) \cos^3 x \, dx = \int \left(1 + u^{\frac{1}{3}}\right) \cos^3 x \frac{du}{\cos x} = \int \left(1 + u^{\frac{1}{3}}\right) \cos^2 x \, du$$

$$= \int \left(1 + u^{\frac{1}{3}}\right) (1 - \sin^2 x) \, du = \int \left(1 + u^{\frac{1}{3}}\right) (1 - u^2) \, du$$

$$= \int \left(1 + u^{\frac{1}{3}}\right) (1 - u^2) \, du = \int \left(1 - u^2 + u^{\frac{1}{3}} - u^{\frac{7}{3}}\right) \, du$$

$$= u - \frac{1}{3} u^3 + \frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{10} u^{\frac{10}{3}} + C = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{3}{4} \sin^{\frac{4}{3}} x - \frac{3}{10} \sin^{\frac{10}{3}} x + C$$

17 $\int \sin x \sec^5 x \, dx = \int \sin x \cos^{-5} x \, dx$

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \sin x \sec^5 x \, dx = \int \sin x u^{-5} \times \frac{du}{-\sin x}$$

$$= -\int u^{-5} \, du = \frac{1}{4} u^{-4} + C = \frac{1}{4} \cos^{-4} x + C = \frac{1}{4} \sec^4 x + C$$



(5) عند وجود اقترانات تتضمن الظل، أو ظل التمام، أو القاطع، أو قاطع التمام

$$1) \int \cot^3 x \, dx = \int \cot^2 x \cot x \, dx = \int (1 - \csc^2 x) \cot x \, dx$$

$$\therefore u = \csc x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc x \cot x = -u \cot x \Rightarrow \frac{du}{-u \cot x} = dx$$

$$= \int (1 - u^2) \cot x \frac{du}{-u \cot x} = \int \left(\frac{1}{-u} + u \right) du = \frac{1}{2} u^2 - \ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2} \csc^2 x - \ln|\csc x| + C = \frac{1}{2} \csc^2 x + \ln|\sin x| + C$$

$$2) \int \tan^6 x \, dx = \int \tan^4 x \tan^2 x \, dx = \int \tan^4 x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int \tan^4 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^4 x \, dx$$

$$= \int \tan^4 x \sec^2 x \, dx - \int (\tan^2 x (\sec^2 x - 1)) \, dx$$

$$= \int \tan^4 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx$$

$$= \int \tan^4 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int (1 - \sec^2 x) \, dx$$

$$= \int \tan^4 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int dx + \int \sec^2 x \, dx$$

$$\therefore u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow \frac{du}{\sec^2 x} = dx$$

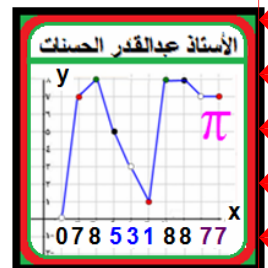
$$= \int u^4 \sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x} - \int u^2 \sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x} - \int dx + \int \sec^2 x \, dx$$

$$= \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{3} u^3 - x + \tan x + C = \frac{1}{5} \tan^5 x - \frac{1}{3} \tan^3 x - x + \tan x + C$$

$$3) \int \cot^3 x \csc^3 x \, dx \therefore u = \csc x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc x \cot x \Rightarrow \frac{du}{-\cot x u} = dx$$

$$\Rightarrow \int \cot^3 x (u^3) \frac{du}{-\cot x u} = - \int \cot^2 x (u^2) du = - \int (u^2 - 1) u^2 du$$

$$= \int (u^2 - u^4) du = \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 + C = \frac{1}{3} \csc^3 x - \frac{1}{5} \csc^5 x + C$$



أتحقق من فهمي 41

أجد كلاً من التكاملات الآتية: a) $\int \tan^4 x \, dx$ b) $\int \cot^5 x \, dx$ c) $\int \sec^4 x \tan^6 x \, dx$

a) $\int \tan^4 x \, dx = \int \tan^2 x \tan^2 x \, dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) \, dx$ أتحقق من فهمي صفحة 41

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int (\sec^2 x - 1) \, dx \quad u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\Rightarrow \int \tan^4 x \, dx = \int u^2 \sec^2 x \times \frac{du}{\sec^2 x} - \int (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int u^2 \, du - \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \int u^2 \, du - \int (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \frac{1}{3} u^3 - \tan x + x + C = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C$$

b) $\int \cot^5 x \, dx = \int \cot^3 x \cot^2 x \, dx = \int \cot^3 x (\csc^2 x - 1) \, dx$ الحل الأول

$$= \int \cot^3 x \csc^2 x \, dx - \int \cot^3 x \, dx = \int \cot^3 x \csc^2 x \, dx - \int \cot x \cot^2 x \, dx$$

$$= \int \cot^3 x \csc^2 x \, dx - \int \cot x (\csc^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int (\cot^3 x - \cot x) \csc^2 x \, dx + \int \cot x \, dx$$

في التكامل الأول افرض $u = \cot x$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$\int \cot^5 x \, dx = \int (u^3 - u) \csc^2 x \frac{du}{-\csc^2 x} + \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int (u - u^3) \, du + \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{4} u^4 + \ln|\sin x| + C = \frac{1}{2} \cot^2 x - \frac{1}{4} \cot^4 x + \ln|\sin x| + C$$

b) $\int \cot^5 x \, dx = \int \cot x \cot^4 x \, dx = \int \cot x (\cot^2 x)^2 \, dx = \int \cot x (\csc^2 x - 1)^2 \, dx$ الحل الثاني

$$u = \csc x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc x \cot x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc x \cot x}$$

$$\Rightarrow \int \cot^5 x \, dx = \int \cot x (u^2 - 1)^2 \times \frac{du}{-\csc x \cot x} = \int (u^2 - 1)^2 \frac{du}{-u}$$

$$= \int \frac{u^4 - 2u^2 + 1}{-u} \, du = \int \left(-u^3 + 2u - \frac{1}{u} \right) \, du = -\frac{1}{4} u^4 + u^2 - \ln|u| + C$$

$$= -\frac{1}{4} \csc^4 x + \csc^2 x - \ln|\csc x| + C$$

c) $u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$$\int \sec^4 x \tan^6 x \, dx = \int \sec^4 x u^6 \times \frac{du}{\sec^2 x} = \int \sec^2 x u^6 \, du = \int (1 + \tan^2 x) u^6 \, du$$

$$= \int (1 + u^2) u^6 \, du = \int (u^6 + u^8) \, du = \frac{1}{7} u^7 + \frac{1}{9} u^9 + C = \frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{9} \tan^9 x + C$$



واجب

$$1) \int \tan^5 x \, dx = \dots \frac{1}{4} \tan^3 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\sec x| + C$$

$$2) \int \tan^3 x \sec^2 x \, dx = \dots \frac{1}{4} \tan^4 x + C$$

$$3) \int \tan^3 x \, dx = \dots \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C$$



أَتَدَرَّبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ



$$14 \int \left(\sec^2 \frac{x}{2} \tan^7 \frac{x}{2} \right) dx$$

$$15 \int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x} dx$$

$$18 \int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x} dx$$

$$14 \quad u = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2 du}{\sec^2 \frac{x}{2}}$$

$$\int \sec^2 \frac{x}{2} \tan^7 \frac{x}{2} dx = \int \sec^2 \frac{x}{2} u^7 \times \frac{2 du}{\sec^2 \frac{x}{2}} = 2 \int u^7 du = \frac{1}{4} u^8 + C = \frac{1}{4} \tan^8 \frac{x}{2} + C$$

$$15 \int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x} dx = \int (\sec^2 x + \cos x e^{\sin x}) dx = \int \sec^2 x dx + \int \cos x e^{\sin x} dx$$

$$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x} dx = \int \sec^2 x dx + \int \cos x e^u \times \frac{du}{\cos x}$$

$$= \tan x + \int e^u du = \tan x + e^u + C = \tan x + e^{\sin x} + C$$

$$18 \int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x} dx = \int (\tan x \sec^2 x + \tan x \sec^3 x) dx$$

$$= \int \tan x \sec x (\sec x + \sec^2 x) dx$$

$$\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x} dx = \int \tan x \sec x (u + u^2) \frac{du}{\tan x \sec x}$$

$$= \int (u + u^2) du = \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{2} \sec^2 x + \frac{1}{3} \sec^3 x + C$$

$$\begin{aligned} u &= \sec x \\ \Rightarrow \frac{du}{dx} &= \tan x \sec x \\ \Rightarrow dx &= \frac{du}{\tan x \sec x} \end{aligned}$$

(6) التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة : هناك طريقتان لإيجاد قيمة تكامل محدود بالتعويض، هما:

(1) إيجاد التكامل أولاً بدلالة المتغير الأصلي، ثم تعويض حدود التكامل

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

(2) تغيير حدود التكامل عند تغيير متغير التكامل .

لا يجوز أن تحتوي فترة حدود التكامل على أي صفر من أصفار المقام

$$1) \int_1^2 2x e^{x^2-1} dx \therefore u = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\therefore x = 1 \Rightarrow u = 0, \quad x = 2 \Rightarrow u = 3$$

$$\int_0^3 2x e^u \frac{du}{2x} = \int_0^3 e^u du = e^u \Big|_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1$$

$$1^+) \int_1^2 2x e^{x^2-1} dx \therefore u = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int 2x e^u \frac{du}{2x} = \int e^u du = e^u + C$$

$$\Rightarrow e^{x^2-1} \Big|_1^2 = e^3 - e^0 = e^3 - 1$$

$$2) f(10) = -5, \quad f(2) = -1 \Rightarrow \int_{-1}^3 2x f'(x^2+1) dx = ?$$

$$\therefore u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\therefore x = -1 \Rightarrow u = 2, \quad x = 3 \Rightarrow u = 10$$

$$\int_2^{10} 2x f'(u) \frac{du}{2x} = f(u) \Big|_2^{10} = f(10) - f(2) = -5 - (-1) = -4$$

$$1) \int_0^2 9x^2 \sqrt{x^3+1} dx = \dots 25$$

$$2) \int_{-1}^2 (x+1)(2x+x^2)^4 dx = \dots \frac{33}{10}$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{3}} 8 \sin 2x \cos 2x dx = \dots 2$$



أتحقق من فهمي 43 أجد قيمة كل من التكاملين الآتين:

a) $\int_0^2 x(x+1)^3 dx$

b) $\int_0^{\pi/3} \sec x \tan x \sqrt{\sec x + 2} dx$

a) $u = x + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du, x = u - 1$ التحقق من فهمي صفحة 43
 $x = 0 \Rightarrow u = 1$
 $x = 2 \Rightarrow u = 3$
 $\int_0^2 x(x+1)^3 dx = \int_1^3 (u-1)u^3 du = \int_1^3 (u^4 - u^3) du$
 $= \left(\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{4}u^4 \right) \Big|_1^3 = \frac{1}{5}(3)^5 - \frac{1}{4}(3)^4 - \left(\frac{1}{5}(1)^5 - \frac{1}{4}(1)^4 \right) = \frac{142}{5} = 28.4$

b) $u = \sec x + 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec x \tan x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec x \tan x}$ $x = 0 \Rightarrow u = 3$
 $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = 4$
 $\int_0^{\pi/3} \sec x \tan x \sqrt{\sec x + 2} dx = \int_3^4 \sec x \tan x \sqrt{u} \frac{du}{\sec x \tan x}$
 $= \int_3^4 \sqrt{u} du = \frac{2}{3}u^{3/2} \Big|_3^4 = \frac{2}{3}(8 - 3\sqrt{3}) \approx 1.87$

أتحقق من فهمي 43 أجد كلاً من التكاملات الآتية:

19 $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin(\pi \ln x)}{x} dx$

20 $\int_0^{\pi/2} x \sin x^2 dx$

21 $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

22 $\int_0^{\pi/3} \sec^2 x \tan^5 x dx$

23 $\int_0^2 (x-1)e^{(x-1)^2} dx$

24 $\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

25 $\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2} dx$

26 $\int_0^{\pi/6} 2^{\cos x} \sin x dx$

27 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x \cot^5 x dx$

19 $u = \pi \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow dx = \frac{x du}{\pi}$ $x = 1 \Rightarrow u = \pi \ln 1 = 0$

$x = \sqrt{e} \Rightarrow u = \pi \ln \sqrt{e} = \pi \times \frac{1}{2} \ln e = \frac{\pi}{2}$

$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin(\pi \ln x)}{x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin u}{x} \times \frac{x du}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin u du$
 $= \frac{-1}{\pi} \cos u \Big|_0^{\pi/2} = \frac{-1}{\pi} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{-1}{\pi} (0 - 1) = \frac{1}{\pi}$

20 $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \frac{\pi^2}{4}$
 $x = 0 \Rightarrow u = 0$

$\int_0^{\pi/2} x \sin x^2 dx = \int_0^{\pi^2/4} x \sin u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi^2/4} \sin u du$
 $= -\frac{1}{2} \cos u \Big|_0^{\pi^2/4} = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi^2}{4} - 1 \right) \approx 0.891$

21 $u = 1 + x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}, x^2 = u - 1$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$
 $x = 1 \Rightarrow u = 2$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{u-1}{\sqrt{u}} du$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}} \right) du = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} (2)^{\frac{3}{2}} - 2(2)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{3} (1) - 2(1) \right) \right) = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

22 $u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ $x = 0 \Rightarrow u = 0$
 $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \sqrt{3}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x \tan^5 x dx = \int_0^{\sqrt{3}} \sec^2 x u^5 \frac{du}{\sec^2 x} = \int_0^{\sqrt{3}} u^5 du = \frac{1}{6} u^6 \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{9}{2}$$

23 $u = (x-1)^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2(x-1) \Rightarrow dx = \frac{du}{2(x-1)}$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$
 $x = 2 \Rightarrow u = 1$

$$\int_0^2 (x-1) e^{(x-1)^2} dx = \int_1^1 (x-1) e^u \frac{du}{2(x-1)} = 0$$

24 $u = 2 + \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$ $x = 1 \Rightarrow u = 3$
 $x = 4 \Rightarrow u = 4$

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_3^4 \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x} du = \int_3^4 2\sqrt{u} du = \frac{4}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_3^4 = \frac{4(8-3\sqrt{3})}{3}$$

25 $u = 1 + x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{2}{3} \frac{du}{x^{\frac{1}{2}}}$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$
 $x = 1 \Rightarrow u = 2$

$$\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2} dx = \int_1^2 \frac{10\sqrt{x}}{u^2} \frac{2}{3} \frac{du}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{20}{3} \int_1^2 u^{-2} du = -\frac{20}{3} u^{-1} \Big|_1^2 = \frac{10}{3}$$

26 $u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $x = 0 \Rightarrow u = 1$
 $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2^{\cos x} \sin x dx = \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2^u \sin x \frac{du}{-\sin x} = -\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2^u du = -\frac{2^u}{\ln 2} \Big|_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\ln 2} \left(2^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 2 \right) \approx 0.256$$

27 $u = \cot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$ $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$
 $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \cot^5 x dx = \int_1^0 \csc^2 x u^5 \frac{du}{-\csc^2 x} = \int_1^0 u^5 du = -\frac{1}{6} u^6 \Big|_1^0 = \frac{1}{6}$$

(7) متفرقات :

ملاحظة: مسائل المساحة أو المسائل المتعلقة بحركة جسيم في خط مستقيم أو الشرط الأولي ، ... لا جديد فيها سوى أنه يتم إيجاد التكامل بطريقة التعويض

أتحقق من فهمي 37 أسعار: يُمثّل الاقتران $p(x)$ سعر قطعة (بالدينار) تُستعمل في أجهزة الحاسوب، حيث x عدد القطع المبيعة منها بالمئات. إذا كان: $p'(x) = \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو مُعدّل تغيّر سعر هذه القطعة، فأجد $p(x)$ ، علماً بأنّ سعر القطعة الواحدة هو 30 JD عندما يكون عدد القطع المبيعة منها 400 قطعة.

أتحقق من فهمي صفحة 37

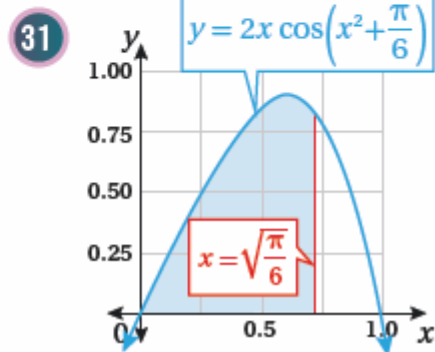
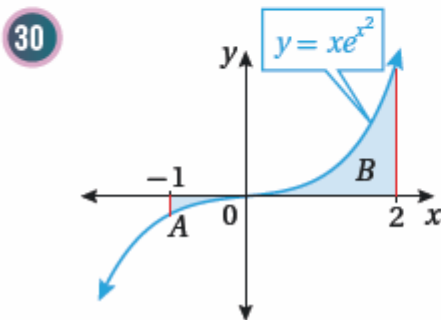
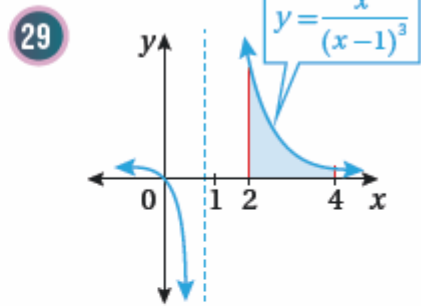
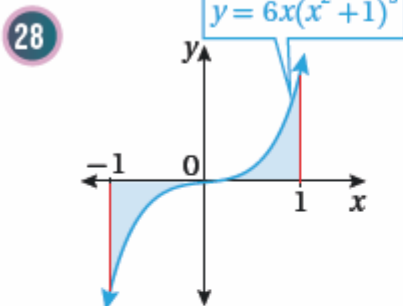
$$p(x) = \int \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}} dx \quad u = 9+x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$p(x) = \int \frac{-135x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x} = \frac{-135}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = -135u^{\frac{1}{2}} + C = -135\sqrt{9+x^2} + C$$

$$p(4) = -135\sqrt{9+16} + C = -135(5) + C \Rightarrow 30 = -675 + C \Rightarrow C = 705$$

$$p(x) = 705 - 135\sqrt{9+x^2}$$

أدرب وأحلّ المسائل أجد مساحة المنطقة المُظلّلة في كلّ من التمثيلات البيانية الآتية:



28

$$A = - \int_{-1}^0 6x(x^2 + 1)^3 dx + \int_0^1 6x(x^2 + 1)^3 dx$$

$$A = - \int_2^1 6xu^3 \frac{du}{2x} + \int_1^2 6xu^3 \frac{du}{2x}$$

$$= \int_1^2 3u^3 du + \int_1^2 3u^3 du = \int_1^2 6u^3 du = \frac{6}{4} u^4 \Big|_1^2 = \frac{45}{2}$$

$$u = x^2 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$x = -1 \Rightarrow u = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 2$$

$$29 \quad A = \int_2^4 \frac{x}{(x-1)^3} dx \quad \begin{array}{l} u = x - 1 \Rightarrow dx = du, \quad x = u + 1 \\ x = 2 \Rightarrow u = 1 \quad x = 4 \Rightarrow u = 3 \end{array}$$

$$A = \int_2^4 \frac{x}{(x-1)^3} dx = \int_1^3 \frac{u+1}{u^3} du = \int_1^3 (u^{-2} + u^{-3}) du = \left(-u^{-1} - \frac{1}{2} u^{-2} \right) \Big|_1^3$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \right) + 1 + \frac{1}{2} = \frac{10}{9}$$

$$30 \quad u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \quad \begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow u = 1 \\ x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x = 2 \Rightarrow u = 4 \end{array}$$

$$A = - \int_{-1}^0 x e^{x^2} dx + \int_0^2 x e^{x^2} dx = - \int_1^0 x e^u \frac{du}{2x} + \int_0^4 x e^u \frac{du}{2x}$$

$$= - \int_1^0 \frac{1}{2} e^u du + \int_0^4 \frac{1}{2} e^u du = - \frac{1}{2} e^u \Big|_1^0 + \frac{1}{2} e^u \Big|_0^4 = - \frac{1}{2} e^0 + \frac{1}{2} e^1 + \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} (e^4 + e) - 1$$

$$31 \quad u = x^2 + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \quad \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{6} \\ x = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \Rightarrow u = \frac{\pi}{3} \end{array}$$

$$A = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}} 2x \cos \left(x^2 + \frac{\pi}{6} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2x \cos u \frac{du}{2x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos u du$$

$$= \sin u \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \approx 0.366$$

في كلٍّ مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستمعمل المعلومات المعطاة لإيجاد

32 $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2$; $(2, 10)$ 33 قاعدة الاقتران $f(x)$: $(0, \frac{3}{2})$; $f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3}$

$$32 \quad f(x) = \int f'(x) dx = \int 2x(4x^2 - 10)^2 dx \quad \begin{array}{l} u = 4x^2 - 10 \Rightarrow \\ \frac{du}{dx} = 8x \Rightarrow dx = \frac{du}{8x} \end{array}$$

$$f(x) = \int 2x u^2 \frac{du}{8x} = \int u^2 \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int u^2 du = \frac{1}{12} u^3 + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{12} (4x^2 - 10)^3 + C$$

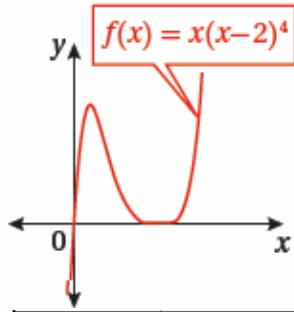
$$f(2) = \frac{1}{12} (216) + C = 10 \Rightarrow C = -8 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{12} (4x^2 - 10)^3 - 8$$

$$33 \quad f(x) = \int f'(x) dx = \int x^2 e^{-0.2x^3} dx \quad \begin{array}{l} u = -0.2x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -0.6x^2 \\ \Rightarrow dx = \frac{du}{-0.6x^2} \end{array}$$

$$f(x) = \int x^2 e^u \frac{du}{-0.6x^2} = -\frac{10}{6} \int e^u du = -\frac{5}{3} e^u + C$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{5}{3} e^{-0.2x^3} + C$$

$$f(0) = -\frac{5}{3} + C \Rightarrow \frac{3}{2} = -\frac{5}{3} + C \Rightarrow C = \frac{19}{6} \Rightarrow f(x) = -\frac{5}{3} e^{-0.2x^3} + \frac{19}{6}$$



يُبين الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران: $f(x) = x(x-2)^4$

34 أجد إحداثيي نقطة تماس الاقتران مع المحور x .

35 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x .

34 نجد أصفار الاقتران بحل المعادلة $f(x) = 0$ $x(x-2)^4 = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$
 نقطة التقاطع $(0,0)$ ، فتكون نقطة التماس $(2,0)$
 ويمكن التحقق بحساب $f'(x) = (x-2)^4 + 4x(x-2)^3$: $f'(2) = 0$
 $f'(2) = (2-2)^4 + 4(2)(2-2)^3 = 0$

35 $A = \int_0^2 x(x-2)^4 dx$ $u = x-2 \Rightarrow dx = du$, $x = u+2$
 $x = 0 \Rightarrow u = -2$, $x = 2 \Rightarrow u = 0$
 $A = \int_0^2 x(x-2)^4 dx = \int_{-2}^0 (u+2)u^4 du$
 $= \int_{-2}^0 (u^5 + 2u^4) du = \left(\frac{1}{6}u^6 + \frac{2}{5}u^5 \right) \Big|_{-2}^0 = 0 - \left(\frac{1}{6}(-2)^6 + \frac{2}{5}(-2)^5 \right) = \frac{32}{15}$

36 يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \sin \omega t \cos^2 \omega t$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية، و ω ثابت. إذا انطلق الجُسيم من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

36 $s(t) = \int \sin \omega t \cos^2 \omega t dt$ $u = \cos \omega t \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\omega \sin \omega t \Rightarrow dt = \frac{du}{-\omega \sin \omega t}$
 $s(t) = \int \sin \omega t u^2 \frac{du}{-\omega \sin \omega t} = -\frac{1}{\omega} \int u^2 du = -\frac{1}{3\omega} u^3 + C =$
 $\Rightarrow s(t) = -\frac{1}{3\omega} \cos^3 \omega t + C$ لكن $s(0) = 0$ لأن الجسيم انطلق من نقطة الأصل.
 $s(0) = -\frac{1}{3\omega} + C \Rightarrow 0 = -\frac{1}{3\omega} + C \Rightarrow C = \frac{1}{3\omega} \Rightarrow s(t) = -\frac{1}{3\omega} \cos^3 \omega t + \frac{1}{3\omega}$



طب: يُمثل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t دقيقة من حقنه في جسم مريض، حيث C مقيسة بالمليغرام لكل سنتيمتر مكعب (mg/cm^3). إذا كان تركيز الدواء لحظة حقنه في جسم المريض $0.5 \text{ mg}/\text{cm}^3$ ، وأخذ يتغير بمعدل

$$C'(t) = \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1 + e^{-0.01t})^2}, \text{ فأجد } C(t).$$

$$\begin{aligned} 37 \quad C(t) &= \int C'(t) dt = \int \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1 + e^{-0.01t})^2} dt \\ C(t) &= \int \frac{-0.01e^{-0.01t}}{u^2} \times \frac{du}{-0.01e^{-0.01t}} = \int u^{-2} du = -u^{-1} + K \\ &\Rightarrow C(t) = -(1 + e^{-0.01t})^{-1} + K \Rightarrow C(0) = -(2)^{-1} + K = \frac{1}{2} \Rightarrow K = 1 \\ &\Rightarrow C(t) = -(1 + e^{-0.01t})^{-1} + 1 = \frac{-1}{1 + e^{-0.01t}} + 1 \end{aligned}$$



أجد قيمة: $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^x - 2} dx$ ثم أكتب الإجابة بالصيغة الآتية: $\frac{a}{b} + c \ln d$ ، حيث: a ، b ، c ، و d ثوابت صحيحة. 38

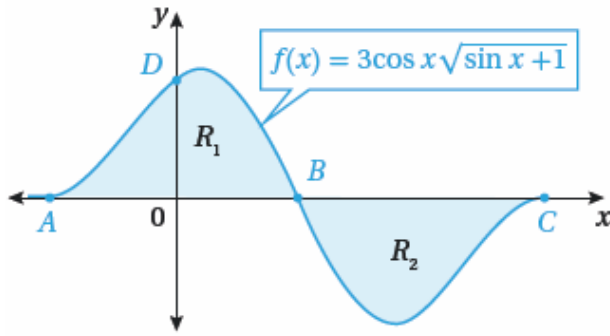
إذا كان: $f'(x) = \tan x$ ، وكان: $f(3) = 5$ ، فأثبت أن: $f(x) = \ln \left| \frac{\cos 3}{\cos x} \right| + 5$. 39

$$\begin{aligned} 38 \quad u &= e^x - 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} \\ e^x &= u + 2 \\ x &= \ln 3 \Rightarrow u = e^{\ln 3} - 2 = 3 - 2 = 1 \\ x &= \ln 4 \Rightarrow u = e^{\ln 4} - 2 = 4 - 2 = 2 \\ \int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^x - 2} dx &= \int_1^2 \frac{e^{4x}}{u} \frac{du}{e^x} = \int_1^2 \frac{e^{3x}}{u} du \\ &= \int_1^2 \frac{(u + 2)^3}{u} du = \int_1^2 \frac{u^3 + 6u^2 + 12u + 8}{u} du = \int_1^2 \left(u^2 + 6u + 12 + \frac{8}{u} \right) du \\ &= \left(\frac{1}{3}u^3 + 3u^2 + 12u + 8 \ln |u| \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{3}(2)^3 + 3(2)^2 + 12(2) + 8 \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 3(1)^2 + 12(1) + 8 \ln 1 \right) = \frac{70}{3} + 8 \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 39 \quad f(x) &= \int \tan x dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + C \\ f(3) &= -\ln |\cos 3| + C \\ 5 &= -\ln |\cos 3| + C \Rightarrow C = 5 + \ln |\cos 3| \\ f(x) &= -\ln |\cos x| + 5 + \ln |\cos 3| = \ln \left| \frac{\cos 3}{\cos x} \right| + 5 \end{aligned}$$

تبرير: إذا كان الشكل المجاور يُمثل منحنى الاقتران:

$f(x) = 3 \cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجب عن الأسئلة الآتية تباعاً:



40 أجد إحداثيي كلٍّ من النقاط: A ، B ، C ، و D .

41 أجد مساحة المنطقة المظللة.

42 أثبت أن للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

40 $f(x) = 0 \Rightarrow 3 \cos x \sqrt{1 + \sin x} = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، ونريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي x للنقطتين

C, B) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A)

$\Rightarrow B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), C\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ أصغر حلين موجبين هما: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ بوضع $n = 0$

$\Rightarrow A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ أكبر حل سالب هو: $x = -\frac{\pi}{2}$ بوضع $n = -1$

أما النقطة D فإحداثياها هما: $D(0, f(0)) = (0, 3)$

41 $A = A_1 + A_2 = A(R_1) + A(R_2)$

$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos x \sqrt{1 + \sin x}) dx + \left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (3 \cos x \sqrt{1 + \sin x}) dx\right)$

$u = 1 + \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$A = 3 \int_0^2 \cos x \sqrt{u} \frac{du}{\cos x} + \left(-3 \int_2^0 \cos x \sqrt{u} \frac{du}{\cos x}\right)$

$= 3 \int_0^2 \sqrt{u} du + 3 \int_0^2 \sqrt{u} du$

$= 6 \int_0^2 \sqrt{u} du = 4u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = 4(2\sqrt{2} - 0) = 8\sqrt{2}$

$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 2$

$x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow u = 0$

42 من حل السؤال السابق نجد أن: $A(R_1) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos x \sqrt{1 + \sin x}) dx = \int_0^2 3\sqrt{u} du = 4\sqrt{2}$

$A(R_2) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (3 \cos x \sqrt{1 + \sin x}) dx = -\int_2^0 3\sqrt{u} du = 4\sqrt{2} \Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$

43 تحدد: أجد قيمة: $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx$. إرشاد: أفترض أن $u = 1 + x^{3/4}$ ، أو أن $u = x^{1/4}$.

44 تبرير: إذا كان f اقتراناً متصلًا، فأثبت أن: $\int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$

45 تبرير: إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن: $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$

43 $u = 1 + x^{3/4} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3}{4} x^{-1/4} \Rightarrow dx = \frac{4}{3} x^{1/4} du, \quad x^{3/4} = u - 1$ $x = 1 \Rightarrow u = 2$
 $x = 16 \Rightarrow u = 9$

$$\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx = \int_2^9 \frac{x^{1/2}}{u} \cdot \frac{4}{3} x^{1/4} du = \frac{4}{3} \int_2^9 \frac{x^{3/4}}{u} du = \frac{4}{3} \int_2^9 \frac{u-1}{u} du$$

$$= \frac{4}{3} \int_2^9 \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \frac{4}{3} (u - \ln|u|) \Big|_2^9 = \frac{4}{3} \left(7 - \ln \frac{9}{2}\right)$$

44 $\int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx$ $u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -du$
 $x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$
 $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx = \int_{\pi/2}^0 -f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$$

45 $u = 1 - x \Rightarrow dx = -du, \quad x = 1 - u \quad x = 0 \Rightarrow u = 1 \quad x = 1 \Rightarrow u = 0$

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_1^0 -(1-u)^a u^b du = \int_0^1 u^b (1-u)^a du = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$$

46 $u = \ln(\ln x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x} \Rightarrow dx = x \ln x du$

$$\int \frac{dx}{x \ln x (\ln(\ln x))} = \int \frac{x \ln x du}{u x \ln x} = \ln|u| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C$$

تحدّد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

46 $\int \frac{dx}{x \ln x (\ln(\ln x))}$

47 $\int \sin 2x (1 + \sin x)^3 dx$

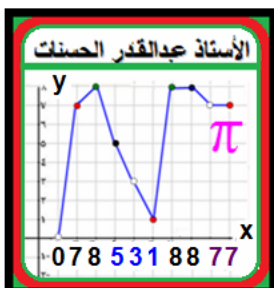
48 $\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$

إرشاد للسؤال 48: ما المضاعف المشترك الأصغر لدليلي الجذرين؟

46 $u = \ln(\ln x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x} \Rightarrow dx = x \ln x du$
 $\int \frac{dx}{x \ln x (\ln(\ln x))} = \int \frac{x \ln x du}{u x \ln x} = \ln|u| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C$

47 $u = 1 + \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}, \sin x = u - 1$
 $\int \sin 2x (1 + \sin x)^3 dx = \int 2 \sin x \cos x u^3 \frac{du}{\cos x} = \int 2(u-1)u^3 du$
 $= \int (2u^4 - 2u^3) du = \frac{2}{5}u^5 - \frac{1}{2}u^4 + C = \frac{2}{5}(1 + \sin x)^5 - \frac{1}{2}(1 + \sin x)^4 + C$

48 المضاعف المشترك الأصغر لدليلي الجذرين هو 6، ولذلك نوحد دليلي الجذرين إلى 6
 $\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[6]{x^3} - \sqrt[6]{x^2}} dx = \int \frac{1}{(\sqrt[6]{x})^3 - (\sqrt[6]{x})^2} dx$
 $\sqrt[6]{x} = u \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{6}x^{-5/6} \Rightarrow dx = 6x^{5/6} du = 6(\sqrt[6]{x})^5 du = 6u^5 du$
 $\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{1}{(\sqrt[6]{x})^3 - (\sqrt[6]{x})^2} dx = \int \frac{6u^5}{u^3 - u^2} du$
 $= \int \frac{6u^5}{u^2(u-1)} du = \int \frac{6u^3}{u-1} du = \int \left(6u^2 + 6u + 6 + \frac{6}{u-1} \right) du$
 $= 2u^3 + 3u^2 + 6u + 6 \ln|u-1| + C$
 $= 2(\sqrt[6]{x})^3 + 3(\sqrt[6]{x})^2 + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C$
 $= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C$



Alhasanah



أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$

2 $\int \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)^2 \sin \frac{x}{2} dx$

3 $\int \csc^5 x \cos^3 x dx$

4 $\int x \sin x^2 dx$

5 $\int x^3 (x+2)^7 dx$

6 $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx$

7 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

8 $\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x} dx$

9 $\int \sec^2 x \cos^3(\tan x) dx$

1 $u = x^2 + 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+4} + C$$

2 $u = 1 - \cos \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2}{\sin \frac{x}{2}} du$

$$= \int u^2 \sin \frac{x}{2} \frac{2}{\sin \frac{x}{2}} du = \int 2u^2 du = \frac{2}{3} u^3 + C = \frac{2}{3} \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)^3 + C$$

3 $\int \csc^5 x \cos^3 x dx = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx = \int \cot^3 x \csc^2 x dx$

$$u = \cot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$= \int \cot^3 x \csc^2 x dx = \int u^3 \csc^2 x \frac{du}{-\csc^2 x} = \int -u^3 du = -\frac{1}{4} u^4 + C = -\frac{1}{4} \cot^4 x + C$$

4 $u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$$\int x \sin x^2 dx = \int \frac{1}{2} \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$$

5 $u = x + 2 \Rightarrow dx = du, \quad x = u - 2$

$$\int x^3 (x+2)^7 dx = \int (u-2)^3 u^7 du = \int (u^{10} - 6u^9 + 12u^8 - 8u^7) du$$

$$= \frac{1}{11} u^{11} - \frac{3}{5} u^{10} + \frac{4}{3} u^9 - u^8 + C$$

$$= \frac{1}{11} (x+2)^{11} - \frac{3}{5} (x+2)^{10} + \frac{4}{3} (x+2)^9 - (x+2)^8 + C$$

6	$\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\frac{1}{2} \ln x}{x} dx \Rightarrow u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du$ $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\frac{1}{2} \ln x}{x} dx = \int \frac{1}{2} u du = \frac{1}{4} u^2 + C = \frac{1}{4} (\ln x)^2 + C$
7	$u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^u}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} du = 2 \int e^u du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$

8	$\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x} dx \Rightarrow u = \ln 4x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{8x}{4x^2} = \frac{2}{x} \Rightarrow dx = \frac{x}{2} du$ $= \int \frac{\sin u}{x} \times \frac{x}{2} du = \frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos(\ln 4x^2) + C$
---	--

9	$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x dx = du$ $\int \sec^2 x \cos^3(\tan x) dx = \int \cos^3 u du = \int \cos u \cos^2 u du = \int \cos u (1 - \sin^2 u) du$ $v = \sin u \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \cos u \Rightarrow \cos u dx = dv$ $\int \cos u (1 - \sin^2 u) du = \int (1 - v^2) dv = v - \frac{1}{3} v^3 + C$ $= \sin u - \frac{1}{3} \sin^3 u + C = \sin(\tan x) - \frac{1}{3} \sin^3(\tan x) + C$ ملحوظة: يمكن إيجاد هذا التكامل بإعادة كتابته على الصورة: $\int \sec^2 x \cos(\tan x) (1 - \sin^2(\tan x)) dx$ وبتعويض واحد فقط هو $u = \sin(\tan x)$.
---	---

أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

10 $\int_6^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}} dx$

11 $\int_2^5 \frac{1}{1+\sqrt{x-1}} dx$

12 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos x} dx$

13 $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx$

14 $\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

15 $\int_0^{\pi/3} \cos^2 x \sin^3 x dx$

10 $u = 4x + 1 \Rightarrow 4dx = du$, $4x = u - 1$ $x = 20 \Rightarrow u = 81$
 $x = 6 \Rightarrow u = 25$
 $\int_6^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}} dx = \int_{25}^{81} \frac{u-1}{2\sqrt{u}} du = \int_{25}^{81} \left(\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \right) du$
 $= \left(\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{25}^{81} = (243 - 9) - \left(\frac{125}{3} - 5 \right) = \frac{592}{3}$

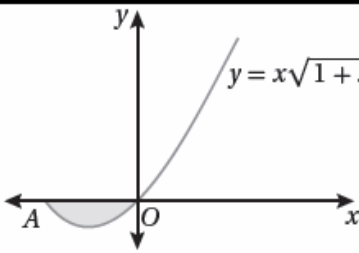
11 $u = \sqrt{x-1} \Rightarrow u^2 = x-1 \Rightarrow 2udu = dx$ $x = 5 \Rightarrow u = 2$
 $x = 2 \Rightarrow u = 1$
 $\int_2^5 \frac{1}{1+\sqrt{x-1}} dx = \int_1^2 \frac{2u}{1+u} du = \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{u+1} \right) du$
 $= (2u - 2 \ln|u+1|) \Big|_1^2 = (4 - 2 \ln 3) - (2 - 2 \ln 2) = 2 - 2 \ln \frac{2}{3}$

12 $u = 1 + \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$
 $x = 0 \Rightarrow u = 2$
 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos x} dx = \int_2^1 \frac{2 \sin x \cos x}{u} \times \frac{du}{-\sin x} = \int_2^1 -\frac{2(u-1)}{u} du$
 $= \int_2^1 \frac{2-2u}{u} du = \int_1^2 \frac{2u-2}{u} du = \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{u} \right) du$
 $= (2u - 2 \ln|u|) \Big|_1^2 = (4 - 2 \ln 2) - (2 - 0) = 2 - 2 \ln 2$

13 $u = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$ $x = 4 \Rightarrow u = 3$
 $x = 1 \Rightarrow u = 2$
 $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx = \int_2^3 \frac{u^3}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} du = \int_2^3 2u^3 du = \frac{1}{2} u^4 \Big|_2^3 = \frac{81}{2} - \frac{16}{2} = \frac{65}{2}$

14 $u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x} = \cos^2 x du$ $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$
 $x = 0 \Rightarrow u = 0$
 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int_0^1 \frac{e^u}{\cos^2 x} \times \cos^2 x du = \int_0^1 e^u du = e^u \Big|_0^1 = e - 1$

15 $u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$ $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$
 $x = 0 \Rightarrow u = 1$
 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin^3 x dx = \int_1^{\frac{1}{2}} u^2 \sin^3 x \times \frac{du}{-\sin x} = \int_{\frac{1}{2}}^1 u^2 (1-u^2) du$
 $= \int_{\frac{1}{2}}^1 (u^2 - u^4) du = \left(\frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{160} \right) = \frac{47}{480}$



16 يُبين الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران: $f(x) = x\sqrt{x+1}$. أجد مساحة المنطقة المظللة في هذا الشكل.

في كلٍّ مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستخدم المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة

17 $f'(x) = 16 \sin x \cos^3 x$; $(\frac{\pi}{4}, 0)$

18 $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$; $(2, 1)$: $f(x)$ الاقتران

19 يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^{3/2}}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتري لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسيم هو 4 m، فأجد موقع الجُسيم بعد t ثانية.

16 $x\sqrt{1+x} = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$

$$A = - \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 -x\sqrt{1+x} dx$$

$$u = 1+x \Rightarrow dx = du$$

$$x = u-1 \quad x=0 \Rightarrow u=1$$

$$x=-1 \Rightarrow u=0$$

$$A = \int_{-1}^0 -x\sqrt{1+x} dx = \int_0^1 -x\sqrt{u} du = \int_0^1 (1-u)\sqrt{u} du$$

$$= \int_0^1 \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}} \right) du = \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

17 $f(x) = \int 16 \sin x \cos^3 x dx$ $u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$$f(x) = \int 16 \sin x u^3 \frac{du}{-\sin x} = \int -16 u^3 du = -4u^4 + C = -4\cos^4 x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + C \Rightarrow 0 = -1 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = -4\cos^4 x + 1$$

18 $u = x^2 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$$f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2 + 5} + C$$

$$f(2) = 3 + C \Rightarrow 1 = 3 + C \Rightarrow C = -2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 5} - 2$$

19 $u = 1 + t^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t \Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$

$$s(t) = \int \frac{-2t}{u^{\frac{3}{2}}} \times \frac{du}{2t} = \int -u^{-\frac{3}{2}} du = 2u^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C$$

$$s(0) = 2 + C \Rightarrow 4 = 2 + C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + 2$$

وزارة علمي 2023

(7) ناتج: $\int \frac{(\ln x)^4}{x} dx$ هو:

a) $\frac{1}{6} \ln x^6 + C$ c) $\frac{1}{6} (\ln x)^6 + C$

b) $\frac{1}{5} \ln x^5 + C$ d) $\frac{1}{5} (\ln x)^5 + C$

(8) ناتج: $\int \sin^3 x dx$ هو:

a) $\cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C$ c) $\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$

b) $\frac{1}{3} \sin^3 x - \sin x + C$ d) $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$

(a) جد كلاً من التكاملات الآتية: 1) $\int \sec^2 x \tan x \sqrt{1 + \tan x} dx$ (10 علامات)

وزارة صناعي 2023

(a) جد كلاً من التكاملات الآتية: 1) $\int_1^9 \frac{3x}{\sqrt{3x-2}} dx$ (8 علامات)

وزارة علمي 2023 تكميلي

(7) $\int (1-2x) \sqrt[3]{x^2-x} dx$ يساوي:

a) $\frac{3 \sqrt[3]{(x^2-x)^4}}{4} + C$ b) $-\frac{3 \sqrt[3]{(x^2-x)^4}}{4} + C$

c) $-\frac{3 \sqrt[3]{(x^2-x)^4}}{4} + C$ d) $\frac{3 \sqrt[3]{(x^2-x)^3}}{4} + C$

(8) $\int \sin^2 x \sin 2x dx$ يساوي:

a) $-\frac{\sin^4 x}{2} + C$ b) $-\frac{\cos^3 x}{3} + C$

c) $\frac{\cos^4 x}{2} + C$ d) $-\frac{\sin^4 x}{2} + C$

(a) جد كلاً من التكاملات الآتية: 1) $\int (\sec x \tan x)^4 dx$ (10 علامات)

وزارة صناعي 2023 تكميلي

(a) جد كلاً من التكاملات الآتية: 1) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ (8 علامات)



تمارين إضافية على الدرس الثاني :

السؤال الأول : حدد رمز الإجابة الصحيحة فيم يأتي :

$$1) \int \frac{6(Lnx)^2}{x} dx = a) 2(Lnx)^3 + c \quad b) 2Lnx^3 + c$$

$$c) 3Lnx + c \quad d) 3(Lnx)^2 + c$$

$$2) \int 3 \cos^3 x dx = a) 9 \cos^2 x \sin x + c \quad b) 3 \sin x - \sin^3 x + c$$

$$c) \frac{3}{4} \cos^4 x + c \quad d) \sin^3 x - 3 \sin x + c$$

$$3) \int \sec^2 x e^{\tan x} dx = a) e^{\tan x} + c \quad b) e^{\sec x} + c$$

$$c) \tan x e^{\sec^2 x} + c \quad d) \tan x e^{\sec x} + c$$

$$4) \int \frac{\tan^2(Lnx)}{x} dx = a) \tan^2(Lnx) + c \quad b) \tan^2(Lnx) - Lnx + c$$

$$c) \tan^2(Lnx) + Lnx + c \quad d) \sec(Lnx) + c$$

$$5) \int \csc^4 x dx = a) \frac{1}{5} \cot^5 x + c \quad b) \cot x + c$$

$$c) \frac{1}{3} \cot^3 x - \cot x + c \quad d) \frac{1}{3} \cot^3 x + \cot x + c$$

$$6) \int 4x e^{x^2} dx = a) 2x^2 e^{x^3} + c \quad b) 4x e^{x^2} + c$$

$$c) 2e^{x^2} + c \quad d) 2x^2 e^{x^2} + c$$

$$7) \int 3 \sin 2x \sin 4x dx = a) 24 \cos 2x \cos 4x + c \quad b) \frac{3}{8} \cos 2x \cos 4x + c$$

$$c) -\sin^3 2x + c \quad d) \sin^3 2x + c$$

$$8) \int \frac{e^{2x}}{e^x - 2} dx = a) e^x - 2 + Ln(e^x - 2) + c \quad b) e^x - 2 + Ln(e^x - 2)^2 + c$$

$$c) x - e^x + c \quad d) Ln(e^{2x} - 2) + c$$

9) $\int_1^e x f(x) dx = 5 \Rightarrow \int_0^2 e^x f(\sqrt{e^x}) dx =$

- a) 10 b) 2.5 c) 20 d) $e - 1$

10) $f(-8) = 4$, $f(1) = -6 \Rightarrow \int_{-2}^1 3x^2 f'(x^3) dx =$

- a) 10 b) -2 c) -10 d) 2

11) $\int_8^1 f(x) dx = 6 \Rightarrow \int_1^2 6x^2 f(x^3) dx =$

- a) -3 b) 3 c) 12 d) -12

12) $\int 16(x^5 + x)^3 dx =$ a) $4(x^4 + x)^4 + c$ b) $(x^5 + x)^5 + c$
c) $(x^5 + 1)^4 + c$ d) $(x^4 + 1)^4 + c$

13) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 6 \frac{\sin^2 x}{\sec x} dx =$ a) $\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{4}$
c) $3 - \sqrt{6}$ d) $\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$

14) $\int_1^e \frac{\ln(x^2)}{x} dx =$ a) e b) 1 c) -1 d) 2

15)

إذا كان $f(x) = a x(x-1)^3$ فإن قيمة الثابت (a) التي تجعل مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران f(x) والمحور (x) تساوي وحدة مربعة واحدة هي :

- a) 10 b) 20 c) -20 d) 2



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	b	a	b	c	c	d	b	a	c	d	d	a	b	b



السؤال الثاني : جد قيمة التكاملات الآتية :

$$1) \int \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2} dx$$

$$6) \int (\tan 2x + \cot 2x)^2 dx$$

$$2) \int \sin 2x e^{\sin^2 x} dx$$

$$7) \int \cos^3 \theta \sin \theta d\theta$$

$$3) \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{x^4} dx$$

$$8) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos^4 t} dt$$

$$4) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$9) \int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

$$5) \int \sqrt{x} \sqrt{x\sqrt{x}+1} dx$$

$$10) \int \ln(\cos^2 x) \tan x dx$$



التكامل بالكسور الجزئية

Integration by Partial Fractions

الدرس
3

- هناك عدة طرق للتكامل، منها: (1) الطريقة المباشرة من خلال البحث عن اقتران مشتقته تعطي الاقتران المكامل. (2) من خلال التحليل إلى العوامل والاختصار (3) من خلال المتطابقات المثلثية (4) طريقة التكامل بالتعويض (5) طريقة الكسور الجزئية (6) طريقة التكامل بالأجزاء
- Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77
- Hasanat

تقوم طريقة التكامل بالكسور الجزئية على تحويل الاقتران النسبي إلى مجموع اقترانات نسبية أبسط ،

$$\int \frac{8x+2}{x^2+2x-8} dx = ? \dots \Rightarrow \frac{8x+2}{x^2+2x-8} = \frac{3}{x-2} + \frac{5}{x+4}$$

فيكون تكاملها أسهل :

عادة نستخدم هذه الطريقة ، (الكسور الجزئية) ، عندما نريد مكاملة مقداراً نسبياً (كل من بسطه ومقامه كثير حدود) وأحدهما ليس مشتقة للآخر ، ودرجة البسط أصغر من درجة المقام ، وإلا فالخوارزمية أولاً

$$*) \int \frac{x-1}{x^2-2x-24} dx : \text{ (كسور جزئية) } \& \int \frac{x}{x^2-8x-20} dx : \text{ (تعويض أو كسور) } ...$$

وهناك عدة حالات للتكامل بالكسور الجزئية (حسب نوع عوامل المقام ودرجته هو والبسط) ، نستعرض منها ما يأتي:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \frac{A_3}{a_3x+b_3} + \dots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

(1) عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة

$$1) \int \frac{x+4}{x^2-2x-3} dx = \int \frac{x+4}{(x-3)(x+1)} dx = \int \frac{a}{x-3} dx + \int \frac{b}{x+1} dx$$

$$x+4 = a(x+1) + b(x-3)$$

$$x=3 \Rightarrow 7 = a(3+1) + b(3-3) \Rightarrow a = \frac{7}{4}$$

$$x=-1 \Rightarrow 3 = a(-1+1) + b(-1-3) \Rightarrow b = \frac{-3}{4}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x+4}{x^2-2x-3} dx = \int \frac{\frac{7}{4}}{x-3} dx + \int \frac{\frac{-3}{4}}{x+1} dx = \frac{7}{4} \ln|x-3| + \frac{-3}{4} \ln|x+1| + c$$

$$2) \int \frac{x+1}{x^2-x} dx = \int \frac{x+1}{x(x-1)} dx = \int \frac{a}{x} dx + \int \frac{b}{x-1} dx$$

$$x+1 = a(x-1) + b(x)$$

$$x=1 \Rightarrow 2 = a(1-1) + b(1) \Rightarrow b=2$$

$$x=0 \Rightarrow 1 = a(-1) + b(0) \Rightarrow a=-1$$

$$\Rightarrow \int \frac{x+1}{x^2-x} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{2}{x-1} dx = -\ln|x| + 2\ln|x-1| + c$$

$$= \ln(x-1)^2 - \ln|x| + c = \ln \left| \frac{(x-1)^2}{x} \right| + c$$

$$3) \int \frac{x^2+2x+2}{x^3-3x^2+2x} dx = \int \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-1} \right) dx$$

$$x^2+2x+2 = a(x-2)(x-1) + b(x)(x-1) + c(x)(x-2)$$

$$x=0 \Rightarrow 2 = a(-2)(-1) \Rightarrow a=1$$

$$x=2 \Rightarrow 10 = b(2)(1) \Rightarrow b=5$$

$$x=1 \Rightarrow 5 = c(1)(-1) \Rightarrow c=-5$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+2x+2}{x^3-3x^2+2x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{5}{x-2} + \frac{-5}{x-1} \right) dx$$

$$= -\ln|x| + 5\ln|x-2| - 5\ln|x-1| + c = \ln \left| \frac{x(x-2)^5}{(x-1)^5} \right| + c$$

$$\ln|a| + \ln|b| = \ln|ab|$$

$$\ln|a| - \ln|b| = \ln \left| \frac{a}{b} \right|$$

$$\ln a^2 = 2\ln|a|$$



أتحقق من فهمي 49 أجد كلاً من التكاملين الآتيين: a) $\int \frac{x-7}{x^2-x-6} dx$ b) $\int \frac{3x-1}{x^2-1} dx$

أندرب وأحل المسائل 57 أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$1) \int \frac{x-10}{x(x+5)} dx$$

$$2) \int \frac{2}{1-x^2} dx$$

$$3) \int \frac{4}{(x-2)(x-4)} dx$$

$$4) \int \frac{3x+4}{x^2+x} dx$$

$$6) \int \frac{3x-6}{x^2+x-2} dx$$

$$7) \int \frac{4x+10}{4x^2-4x-3} dx$$

$$8) \int \frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6} dx$$

$$9) \int \frac{4x}{x^2-2x-3} dx$$

$$16) \int \frac{3-x}{2-5x-12x^2} dx$$

$$1) \int \frac{12x+25}{x^2-x-6} dx = \dots \frac{61}{5} \ln|x-3| + \frac{-1}{5} \ln|x+2| + c$$

$$2) \int \frac{12}{x^2-9} dx = \dots 2\ln|x-3| - 2\ln|x+3| + c$$

$$3) \int \frac{5x-3}{(x^2-1)(x+3)} dx = \dots \frac{1}{4} \ln|x-1| + 2\ln|x+1| - \frac{9}{4} \ln|x+3| + c$$

$$4) \int \frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x} dx = \dots -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x+2| + \frac{5}{6} \ln|3x-2| + c$$



Abdulkadir Hasanat
Abdulkadir Hasanat

078 531 88 77

التحقق من فهمي صفحة 49

a
$$\frac{x-7}{x^2-x-6} = \frac{x-7}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$\Rightarrow x-7 = A(x+2) + B(x-3) \Rightarrow x=3 \Rightarrow A = -\frac{4}{5} \Rightarrow x=-2 \Rightarrow B = \frac{9}{5}$$

$$\int \frac{x-7}{x^2-x-6} dx = \int \left(\frac{-\frac{4}{5}}{x-3} + \frac{\frac{9}{5}}{x+2} \right) dx = -\frac{4}{5} \ln|x-3| + \frac{9}{5} \ln|x+2| + C$$

b
$$\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\Rightarrow 3x-1 = A(x+1) + B(x-1) \Rightarrow x=1 \Rightarrow A=1 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow B=2$$

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} \right) dx = \ln|x-1| + 2 \ln|x+1| + C$$

1
$$\frac{x-10}{x(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} \Rightarrow x-10 = A(x+5) + Bx$$

$$\Rightarrow x=0 \Rightarrow A=-2$$

$$\Rightarrow x=-5 \Rightarrow B=3$$

$$\int \frac{x-10}{x(x+5)} dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{3}{x+5} \right) dx = -2 \ln|x| + 3 \ln|x+5| + C$$

2
$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \Rightarrow 2 = A(1+x) + B(1-x)$$

$$x=1 \Rightarrow A=1 \quad x=-1 \Rightarrow B=1$$

$$\int \frac{2}{1-x^2} dx = \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = -\ln|1-x| + \ln|1+x| + C = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

3
$$\frac{4}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} \Rightarrow 4 = A(x-4) + B(x-2)$$

$$x=2 \Rightarrow A=-2$$

$$x=4 \Rightarrow B=2$$

$$\int \frac{4}{(x-2)(x-4)} dx = \int \left(\frac{-2}{x-2} + \frac{2}{x-4} \right) dx = -2 \ln|x-2| + 2 \ln|x-4| + C = 2 \ln \left| \frac{x-4}{x-2} \right| + C$$

4
$$\frac{3x+4}{x^2+x} = \frac{3x+4}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow 3x+4 = A(x+1) + Bx$$

$$x=0 \Rightarrow A=4$$

$$x=-1 \Rightarrow B=-1$$

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x} dx = \int \left(\frac{4}{x} + \frac{-1}{x+1} \right) dx = 4 \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

$$6 \quad \frac{3x-6}{x^2+x-2} = \frac{3x-6}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow 3x-6 = A(x-1) + B(x+2)$$

$$\int \frac{3x-6}{x^2+x-2} dx = \int \left(\frac{4}{x+2} + \frac{-1}{x-1} \right) dx$$

$$= 4 \ln|x+2| - \ln|x-1| + C$$

$x = -2 \Rightarrow A = 4$
 $x = 1 \Rightarrow B = -1$

$$7 \quad \frac{4x+10}{4x^2-4x-3} = \frac{4x+10}{(2x-3)(2x+1)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{2x+1}$$

$$\Rightarrow 4x+10 = A(2x+1) + B(2x-3)$$

$$\int \frac{4x+10}{4x^2-4x-3} dx = \int \left(\frac{4}{2x-3} + \frac{-2}{2x+1} \right) dx = 2 \ln|2x-3| - \ln|2x+1| + C$$

$x = \frac{3}{2} \Rightarrow A = 4$ $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = -2$

$$8 \quad \frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6} = \frac{2x^2+9x-11}{(x-2)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

$$\Rightarrow 2x^2+9x-11 = A(x+1)(x+3) + B(x-2)(x+3) + C(x-2)(x+1)$$

$$\int \frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+1} + \frac{-2}{x+3} \right) dx$$

$$= \ln|x-2| + 3 \ln|x+1| - 2 \ln|x+3| + C$$

$x = 2 \Rightarrow A = 1$ $x = -1 \Rightarrow B = 3$ $x = -3 \Rightarrow C = -2$

$$9 \quad \frac{4x}{x^2-2x-3} = \frac{4x}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow 4x = A(x+1) + B(x-3)$$

$$\int \frac{4x}{x^2-2x-3} dx = \int \left(\frac{3}{x-3} + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= 3 \ln|x-3| + \ln|x+1| + C$$

$x = 3 \Rightarrow A = 3$
 $x = -1 \Rightarrow B = 1$

$$16 \quad \frac{3-x}{2-5x-12x^2} = \frac{x-3}{12x^2+5x-2} = \frac{x-3}{(4x-1)(3x+2)} = \frac{A}{4x-1} + \frac{B}{3x+2}$$

$$\Rightarrow x-3 = A(3x+2) + B(4x-1)$$

$$\int \frac{3-x}{2-5x-12x^2} dx = \int \left(\frac{-1}{4x-1} + \frac{1}{3x+2} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{4} \ln|4x-1| + \frac{1}{3} \ln|3x+2| + C$$

$x = \frac{1}{4} \Rightarrow A = -1$
 $x = -\frac{2}{3} \Rightarrow B = 1$

2) عوامل المقام كثيرات حدود خطية، أحدها مُكرّر.

ملاحظة : عند وجود جذر مكرر ، نكتب بهذه الطريقة : $\frac{3x}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}$

$$\frac{A_1}{(ax+b)^1} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$



$$1) \int \frac{3x}{(x-1)(x-2)^2} dx = \int \left(\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2} \right) dx$$

$$3x = a(x-2)^2 + b(x-1)(x-2) + c(x-1)$$

$$x=1 \Rightarrow 3 = a(-1)^2 + 0 + 0 \Rightarrow a=3$$

$$x=2 \Rightarrow 6 = 0 + 0 + c(1) \Rightarrow c=6$$

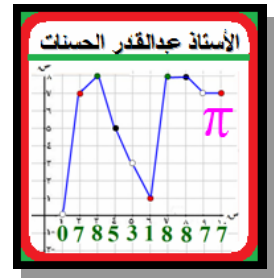
$$x=0 \Rightarrow 0 = a(-2)^2 + b(-1)(-2) + c(-1)$$

$$\Rightarrow 0 = 4a + 2b - c \Rightarrow 0 = 12 + 2b - 6 \Rightarrow b = -3$$

$$= \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{-3}{x-2} + \frac{6}{(x-2)^2} \right) dx$$

$$= 3 \ln|x-1| - 3 \ln|x-2| - 6 \ln(x-2)^{-1} + c$$

لإيجاد قيمة b :
لا نعوض : $x=1$ أو $x=2$ في المعادلة
لأن ذلك سيحذف قيمة b المطلوب إيجادها،
وإنما نعوض أي عدد حقيقي آخر، مثلاً : $x=0$



$$2) \int \frac{x+7}{x^2(x+2)} dx = \int \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+2} \right) dx$$

$$= \frac{-5}{4} \ln|x| - \frac{7}{2} x^{-1} + \frac{5}{4} \ln|x+2| + c$$

Alhasanah
Alhasanah

$$3) \int \frac{3x^2+1}{(x+1)(x-5)^2} dx = \int \left(\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-5} + \frac{c}{(x-5)^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{9} \ln|x+1| + \frac{26}{9} \ln|x-5| - \frac{38}{3} (x-5)^{-1} + c$$

$$4) \int \frac{18}{x^2(x-3)} dx = \int \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-3} \right) dx$$

$$= -2 \ln|x| - \frac{6}{x} - 2 \ln|x-3| + c$$

أتحقق من فهمي 51 أجد كلاً من التكاملين الآتيين: $\int \frac{x^2 - 2x - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$ b) $\int \frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2} dx$ a)

أدرب وأحل المسائل أجد كلاً من التكاملات الآتية: $\int \frac{5x-2}{(x-2)^2} dx$ 18 $\int \frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2} dx$ 10

1) $\int \frac{4x-11}{x^2(x-9)} dx = \dots -\frac{25}{81} \ln|x| - \frac{11}{9x} + \frac{25}{81} \ln|x-9| + c$



2) $\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} dx = \dots \frac{11}{4} \ln|x+1| - \frac{5}{2}(x+1)^{-1} - \frac{11}{4} \ln|x+3| + c$

أتحقق من فهمي صفحة 51

a) $\frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

$\Rightarrow x+4 = A(x-1)^2 + B(2x-1)(x-1) + C(2x-1)$

$\int \frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2} dx = \int \left(\frac{18}{2x-1} + \frac{-9}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} \right) dx$

$= \frac{18}{2} \ln|2x-1| - 9 \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C = 9 \ln|2x-1| - 9 \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 18$
 $x = 1 \Rightarrow C = 5$
 $x = 0 \Rightarrow 4 = A + B - C \Rightarrow B = -9$

b) $\frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x} = \frac{x^2-2x-4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x}$

$\Rightarrow x^2-2x-4 = Ax(x-2) + Bx + C(x-2)^2$

$\int \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x} dx = \int \left(\frac{2}{x-2} + \frac{-2}{(x-2)^2} + \frac{-1}{x} \right) dx = 2 \ln|x-2| + \frac{2}{x-2} - \ln|x| + C$

$x=2 \Rightarrow B=-2$
 $x=0 \Rightarrow C=-1$
 $x=1 \Rightarrow -5 = -A+B+C \Rightarrow A=2$

10 $\frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$

$\Rightarrow 8x^2-19x+1 = A(x-2)^2 + B(2x+1)(x-2) + C(2x+1)$

$\int \frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2} dx = \int \left(\frac{2}{2x+1} + \frac{3}{x-2} + \frac{-1}{(x-2)^2} \right) dx = \ln|2x+1| + 3 \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + C$

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 2$
 $x = 2 \Rightarrow C = -1$
 $x = 0 \Rightarrow B = 3$

18 $\frac{5x-2}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$

$\Rightarrow 5x-2 = A(x-2) + B$

$x = 2 \Rightarrow B = 8$
 $x = 0 \Rightarrow -2 = -2A + B \Rightarrow A = 5$

$\int \frac{5x-2}{(x-2)^2} dx = \int \left(\frac{5}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2} \right) dx$

$= 5 \ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + C$

ملاحظة: يمكن حل هذا التكامل بالتعويض $u = x-2$
 كما يمكن حله بالأجزاء حيث: $u = 5x-2, dv = (x-2)^{-2}$

(3) عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير قابل للتحليل، (مميزه سالب)، وغير مكرر.



عند تحليل مقام المقدار النسبي الذي يحوي عاملاً تربيعياً غير مكرر، ولا يمكن تحليله،
ينتج من العامل التربيعي كسر جزئي، بسطه كثير حدود خطي في صورة: $ax+b$ ،
ومقامه العامل التربيعي نفسه.

$$1) \int \frac{7x^2 + 4x + 12}{(x+1)(x^2+4)} dx = \int \left(\frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+4} \right) dx$$

$$7x^2 + 4x + 12 = a(x^2+4) + (bx+c)(x+1)$$

$$= (a+b)x^2 + (b+c)x + (4a+c)$$

$$\Rightarrow a+b=7, \quad b+c=4, \quad 4a+c=12$$

$$\Rightarrow a=3, \quad b=4, \quad c=0$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{4x+0}{x^2+4} \right) dx = 3 \ln|x+1| + 2 \ln|x^2+4| + c$$

$$2) \int \frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)} dx = \int \left(\frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1} \right) dx$$

$$x+1 = c(x^2+1) + (ax+b)(x-1)$$

$$= (a+c)x^2 + (b-a)x + (c-b)$$

$$\Rightarrow a+c=0, \quad b-a=1, \quad c-b=1$$

$$\Rightarrow a=-1, \quad b=0, \quad c=1$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{-x}{x^2+1} + \frac{1}{x-1} \right) dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x-1| + c$$

$$3) \int \frac{-7x-7}{(x-3)(x^2+x+2)} dx = \int \left(\frac{a}{x-3} + \frac{bx+c}{x^2+x+2} \right) dx$$

$$-7x-7 = a(x^2+x+2) + (bx+c)(x-3)$$

$$= (a+b)x^2 + (a-3b+c)x + (2a-3c)$$

$$\Rightarrow a+b=0, \quad a-3b+c=-7, \quad 2a-3c=-7$$

$$\Rightarrow a=-2, \quad b=2, \quad c=1$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{-2}{x-3} + \frac{2x+1}{x^2+x+2} \right) dx = -2 \ln|x-3| + \ln|x^2+x+2| + c$$

أتحقق من فهمي 52 أجد كلاً من التكاملين الآتيين:
$$\text{a) } \int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} dx \quad \text{b) } \int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1} dx$$

أدرب وأحل المسائل أجد كلاً من التكاملات الآتية:
$$\text{14) } \int \frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)} dx \quad \text{17) } \int \frac{3x^3-x^2+12x-6}{x^4+6x^2} dx$$

1)
$$\int \frac{x^2+4x+12}{(x-2)(x^2+4)} dx = \dots - 3 \ln|x-2| - \ln|x^2+4| + c$$



2)
$$\int \frac{x^2+x-3}{(x+1)(x^2-2x+3)} dx = \dots - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{4} \ln|x^2-2x+3| + c$$

3)
$$\int \frac{5x^3-6x^2+5x-2}{(x-1)^2(x^2+1)} dx = \dots 3 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln|x^2+1| + c$$

أتحقق من فهمي صفحة 52

a)
$$\frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow 3x+4 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-3)$$

$$x=3 \Rightarrow A=1$$

$$x=0 \Rightarrow 4=4A-3C \Rightarrow C=0$$

$$x=1 \Rightarrow 7=5A-2B-2C \Rightarrow B=-1$$

$$\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{x}{x^2+4} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+4} \right) dx = \ln|x-3| - \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + C$$

b)
$$\frac{7x^2-x+1}{x^3+1} = \frac{7x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow 7x^2-x+1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$x=-1 \Rightarrow A=3$$

$$x=0 \Rightarrow 1=A+C \Rightarrow C=-2$$

$$x=1 \Rightarrow 7=A+2B+2C \Rightarrow B=4$$

$$\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1} dx = \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{4x-2}{x^2-x+1} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{x+1} + 2 \times \frac{2x-1}{x^2-x+1} \right) dx = 3 \ln|x+1| + 2 \ln|x^2-x+1| + C$$

$$14 \quad \frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \Rightarrow 2x-4 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x+2)$$

$$x = -2 \Rightarrow A = -1$$

$$x = 0 \Rightarrow -4 = 4A + 2C \Rightarrow C = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow -2 = 5A + 3B + 3C \Rightarrow B = 1$$

$$\int \frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)} dx = \int \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{x}{x^2+4} \right) dx$$

$$= -\ln|x+2| + \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + C$$

$$17 \quad \frac{3x^3 - x^2 + 12x - 6}{x^4 + 6x^2} = \frac{3x^3 - x^2 + 12x - 6}{x^2(x^2 + 6)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 6}$$

$$\Rightarrow 3x^3 - x^2 + 12x - 6 = Ax(x^2 + 6) + B(x^2 + 6) + (Cx + D)(x^2)$$

$$x = 0 \Rightarrow B = -1 \quad x = 1 \Rightarrow 8 = 7A + 7B + C + D \dots (1)$$

$$x = -1 \Rightarrow -22 = -7A + 7B - C + D \dots (2)$$

$$x = 2 \Rightarrow 38 = 20A + 10B + 8C + 4D \dots (3)$$

بجمع (1) ، و (2) ينتج أن: $14B + 2D = -14$ ، وبتعويض $B = -1$ ، نجد أن $D = 0$

وبطرح (2) من (1) ينتج أن: $14A + 2C = 30$ أي أن $C = 15 - 7A$

وبالتعويض في (3) ينتج أن: $20A - 10 + 8(15 - 7A) = 38$

$$-36A = -72 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow C = 15 - 7(2) = 1$$

$$\int \frac{3x^3 - x^2 + 12x - 6}{x^4 + 6x^2} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{x}{x^2 + 6} \right) dx = 2 \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 6| + C$$

(4) درجة كثير الحدود في البسط مساوية لدرجة كثير الحدود في المقام، أو أكبر منها
في هذه الحالة نستخدم القسمة الخوارزمية أولاً ، ثم حسب الحالة الناتجة...

$$1) \int \frac{x^2-1}{x^2-16} dx = \int \left(1 + \frac{15}{(x-4)(x+4)}\right) dx = x + \int \left(\frac{a}{(x-4)} + \frac{b}{(x+4)}\right) dx$$

$$= x + \int \left(\frac{15}{8(x-4)} + \frac{-15}{8(x+4)}\right) dx = x + \frac{15}{8} \ln|x-4| - \frac{15}{8} \ln|x+4| + c$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2-16 \overline{) x^2-1} \\ \underline{x^2-16} \\ 15 \end{array}$$

$$2) \int \frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^2+x-2} dx = \int \left(x^2+3 + \frac{7-3x}{(x+2)(x-1)}\right) dx$$

$$= \int \left(x^2+3 + \frac{a}{(x+2)} + \frac{b}{(x-1)}\right) dx = \int \left(x^2+3 + \frac{-13}{3(x+2)} + \frac{13}{3(x-1)}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 3x - \frac{13}{3} \ln|x+2| + \frac{4}{3} \ln|x-1| + c$$

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^3-3x^2 \overline{) x^4-5x^3+6x^2-18} \\ \underline{-(x^4-3x^3)} \\ -2x^3+6x^2-18 \\ \underline{-(-2x^3+6x^2)} \\ -18 \end{array}$$

$$3) \int \frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2} dx = \int \left(x-2 - \frac{18}{x^2(x-3)}\right) dx$$

$$= \int \left(x-2 - \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} + \frac{c}{(x-3)}\right) dx = \int \left(x-2 - \frac{-2}{x} - \frac{-6}{x^2} + \frac{2}{(x-3)}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \ln|x| - \frac{6}{x} + 2 \ln|x-3| + c$$

أتحقق من فهمي 53 أجد كلاً من التكاملين الآتيين: a) $\int \frac{4x^3-5}{2x^2-x-1} dx$ b) $\int \frac{x^2+x-1}{x^2-x} dx$

5 $\int \frac{x^2}{x^2-4} dx$

11 $\int \frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4} dx$ أجد كلاً من التكاملات الآتية:

أندرب وأحل المسائل

12 $\int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x} dx$

13 $\int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2} dx$

15 $\int \frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2} dx$



$$1) \int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx = \dots x - 5 \ln|x - 2| + 10 \ln|x - 3| + c$$

$$2) \int \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} dx = \dots \frac{1}{2} x^2 + 2x + 3 \ln|x + 1| + c$$

$$3) \int \frac{x - 3}{x + 2} dx = \dots x - 5 \ln|x + 2| + c$$

$$4) \int \frac{x^3}{x^2 - x - 20} dx = \dots x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{125}{9} \ln|x - 5| + \frac{64}{9} \ln|x + 4| + c$$

$$5) \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \int \left(x + 1 + \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + x + \ln|x - 1| - \frac{2}{x - 1} - \ln|x + 1| + c$$



اتحقق من فهمي صفحة 53

$$a) \int \frac{4x^3 - 5}{2x^2 - x - 1} dx = \int \left(2x + 1 + \frac{3x - 4}{2x^2 - x - 1} \right) dx$$

$$\frac{3x - 4}{2x^2 - x - 1} = \frac{3x - 4}{(2x + 1)(x - 1)} = \frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{x - 1}$$

$$b) \int \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x} dx = \int \left(1 + \frac{2x - 1}{x^2 - x} \right) dx = x + \ln|x^2 - x| + C$$

$$\int \frac{4x^3 - 5}{2x^2 - x - 1} dx = \int \left(2x + 1 + \frac{3}{2x + 1} + \frac{-3}{x - 1} \right) dx = x^2 + x + \frac{11}{6} \ln|2x + 1| - \frac{1}{3} \ln|x - 1| + C$$

$$5) \int \frac{x^2}{x^2 - 4} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2 - 4} \right) dx$$

$$\frac{4}{x^2 - 4} = \frac{4}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} \Rightarrow 4 = A(x + 2) + B(x - 2)$$

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 4} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x - 2} + \frac{-1}{x + 2} \right) dx = x + \ln|x - 2| - \ln|x + 2| + C = x + \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + C$$

$$x = 2 \Rightarrow A = 1$$

$$x = -2 \Rightarrow B = -1$$

11 $\int \frac{9x^2 - 3x + 2}{9x^2 - 4} dx = \int \left(1 + \frac{6 - 3x}{9x^2 - 4} \right) dx$

$\frac{6 - 3x}{9x^2 - 4} = \frac{6 - 3x}{(3x - 2)(3x + 2)} = \frac{A}{3x - 2} + \frac{B}{3x + 2}$

$\Rightarrow 6 - 3x = A(3x + 2) + B(3x - 2)$

$\int \frac{9x^2 - 3x + 2}{9x^2 - 4} dx = \int \left(1 + \frac{1}{3x - 2} + \frac{-2}{3x + 2} \right) dx = x + \frac{1}{3} \ln|3x - 2| - \frac{2}{3} \ln|3x + 2| + C$

$x = \frac{2}{3} \Rightarrow A = 1$
 $x = -\frac{2}{3} \Rightarrow B = -2$

12 $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 2}{x^2 + x} dx = \int \left(x + 1 + \frac{2 - x}{x^2 + x} \right) dx$

$\frac{2 - x}{x^2 + x} = \frac{2 - x}{x(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} \Rightarrow 2 - x = A(x + 1) + Bx$

$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 2}{x^2 + x} dx = \int \left(x + 1 + \frac{2}{x} + \frac{-3}{x + 1} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + 2 \ln|x| - 3 \ln|x + 1| + C$

$x = 0 \Rightarrow A = 2$
 $x = -1 \Rightarrow B = -3$

13 $\int \frac{x^2 + x + 2}{3 - 2x - x^2} dx = \int \left(-1 + \frac{5 - x}{-x^2 - 2x + 3} \right) dx$

$\frac{5 - x}{-x^2 - 2x + 3} = \frac{x - 5}{(x + 3)(x - 1)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 1} \Rightarrow x - 5 = A(x - 1) + B(x + 3)$

$\int \frac{x^2 + x + 2}{3 - 2x - x^2} dx = \int \left(-1 + \frac{2}{x + 3} + \frac{-1}{x - 1} \right) dx = -x + 2 \ln|x + 3| - \ln|x - 1| + C$

$x = -3 \Rightarrow A = 2$
 $x = 1 \Rightarrow B = -1$

15 $\int \frac{x^3 - 4x^2 - 2}{x^3 + x^2} dx = \int \left(1 + \frac{-5x^2 - 2}{x^3 + x^2} \right) dx$

$\frac{-5x^2 - 2}{x^3 + x^2} = \frac{-5x^2 - 2}{x^2(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x + 1} \Rightarrow -5x^2 - 2 = Ax(x + 1) + B(x + 1) + Cx^2$

$\int \frac{x^3 - 4x^2 - 2}{x^3 + x^2} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{-7}{x + 1} \right) dx$

$= x + 2 \ln|x| + \frac{2}{x} - 7 \ln|x + 1| + C$

$x = 0 \Rightarrow B = -2$
 $x = -1 \Rightarrow C = -7$
 $x = 1 \Rightarrow -7 = 2A + 2B + C \Rightarrow A = 2$

5) التكامل بالكسور الجزئية لتكاملات محدودة: لا جديد ، فقط نعوض الحدود بعد إجراء التكامل

$$1) \int_2^4 \frac{6}{x^2-1} dx = \int_2^4 \left(\frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x+1)} \right) dx = \int_2^4 \left(\frac{3}{(x-1)} + \frac{-3}{(x+1)} \right) dx$$

$$= (3 \ln|x-1| - 3 \ln|x+1|) \Big|_2^4$$

$$= (3 \ln|3| - 3 \ln|5|) - (3 \ln|1| - 3 \ln|3|) = -3 \ln|5|$$

$$2) \int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)^2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$$

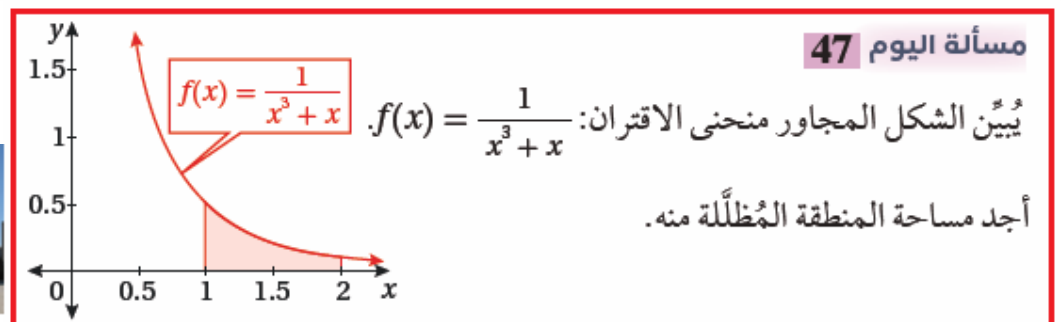
$$= \left(2 \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} \right) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 + \frac{1}{2}$$

$$3) \int_1^3 \frac{x^3}{x^2-4} dx = \int_1^3 \left(x + \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} \right) dx = \int_1^3 \left(x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} x^2 + 2 \ln|x-2| + 2 \ln|x+2| \right) \Big|_1^3 = 4 + 2 \ln 5 + 2 \ln 3$$

a) $\int_3^4 \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 4}{x^2 - 4} dx$

b) $\int_5^6 \frac{3x-10}{x^2-7x+12} dx$ أجد قيمة كل من التكاملين الآتيين: 54 أتدرب وأحل المسائل



أجد قيمة كل من التكاملات الآتية: أجد قيمة كل من التكاملات الآتية: أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

19) $\int_2^4 \frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2} dx$

20) $\int_{-1/3}^{1/3} \frac{9x^2+4}{9x^2-4} dx$

21) $\int_0^1 \frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2} dx$

22) $\int_1^4 \frac{4}{16x^2+8x-3} dx$

23) $\int_3^4 \frac{5x+5}{x^2+x-6} dx$

24) $\int_3^4 \frac{4}{x^3-4x^2+4x} dx$

35) تبرير: أثبت أن: $\int_4^9 \frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2} dx = \ln\left(\frac{32}{3}\right) - \frac{5}{24}$

37) تبرير: أثبت أن: $\int_0^1 \frac{4x^2+9x+4}{2x^2+5x+3} dx = 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{12}$

$$1) \int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3} dx = \dots 3 \ln 3 - \ln 2$$



$$2) \int_1^2 \frac{x^2+3x+8}{x^2+4x+3} dx = \left(2 \ln|x| - \ln|x+2| + \frac{3}{x+2} \right) \Big|_1^2 = \ln 3 - \frac{1}{4}$$

تحقق من فهمي صفحة 54

$$a) \int_3^4 \frac{2x^3+x^2-2x-4}{x^2-4} dx = \int_3^4 \left(2x+1 + \frac{6x}{x^2-4} \right) dx$$

$$= (x^2+x+3 \ln|x^2-4|) \Big|_3^4 = (20+3 \ln 12) - (12+3 \ln 5) = 8+3 \ln \frac{12}{5}$$

b) $\frac{3x-10}{x^2-7x+12} = \frac{3x-10}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4} \Rightarrow 3x-10=A(x-4)+B(x-3)$

$x=3 \Rightarrow A=1$
 $x=4 \Rightarrow B=2$

$$\int_5^6 \frac{3x-10}{x^2-7x+12} dx = \int_5^6 \left(\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-4} \right) dx = (\ln|x-3|+2 \ln|x-4|) \Big|_5^6 = \ln 6$$

مسألة اليوم صفحة 47

لإيجاد قيمة هذا التكامل نجزي المقدار $\frac{1}{x^3+x}$ إلى كسور جزئية يمكن إيجاد تكاملاتها بسهولة كما يأتي:

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^3+x} dx$$

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x)$$

$x=0 \Rightarrow A=1$

$x=1 \Rightarrow 1=2A+B+C \Rightarrow 1=2+B+C$

$x=-1 \Rightarrow 1=2A+B-C \Rightarrow 1=2+B-C$

بحل هاتين المعادلتين نجد أن: $B=-1$ ، $C=0$

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^3+x} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \Big|_1^2$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$$

19 $\frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2} = \frac{6+3x-x^2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}$

$$\Rightarrow 6+3x-x^2 = Ax(x+2)+B(x+2)+C(x^2)$$

$x=0 \Rightarrow B=3$
 $x=-2 \Rightarrow C=-1$
 $x=1 \Rightarrow 8=3A+3B+C \Rightarrow A=0$

$$\int_2^4 \frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2} dx = \int_2^4 \left(\frac{3}{x^2} + \frac{-1}{x+2} \right) dx$$

$$= \left(-\frac{3}{x} - \ln|x+2| \right) \Big|_2^4 = -\frac{3}{4} - \ln 6 + \frac{3}{2} + \ln 4 = \frac{3}{4} + \ln \frac{2}{3}$$

20 $\frac{9x^2 + 4}{9x^2 - 4} = 1 + \frac{8}{9x^2 - 4}$

$\frac{8}{9x^2 - 4} = \frac{8}{(3x - 2)(3x + 2)} = \frac{A}{3x - 2} + \frac{B}{3x + 2}$

$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{9x^2 + 4}{9x^2 - 4} dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{2}{3x - 2} + \frac{-2}{3x + 2} \right) dx$

$= \left(x + \frac{2}{3} \ln|3x - 2| - \frac{2}{3} \ln|3x + 2| \right) \Big|_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = \left(x + \frac{2}{3} \ln \left| \frac{3x - 2}{3x + 2} \right| \right) \Big|_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \ln \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \ln 3 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \ln 3$

$8 - A(3x + 2) + B(3x - 2)$
 $x = \frac{2}{3} \Rightarrow A = 2$
 $x = -\frac{2}{3} \Rightarrow B = -2$

21 $\frac{17 - 5x}{(2x + 3)(2 - x)^2} = \frac{A}{2x + 3} + \frac{B}{2 - x} + \frac{C}{(2 - x)^2}$

$\Rightarrow 17 - 5x = A(2 - x)^2 + B(2 - x)(2x + 3) + C(2x + 3)$

$x = -\frac{3}{2} \Rightarrow A = 2$
 $x = 2 \Rightarrow C = 1$
 $x = 0 \Rightarrow 17 = 4A + 6B + 3C \Rightarrow B = 1$

$\int_0^1 \frac{17 - 5x}{(2x + 3)(2 - x)^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{2x + 3} + \frac{1}{2 - x} + \frac{1}{(2 - x)^2} \right) dx = \left(\ln|2x + 3| - \ln|2 - x| + \frac{1}{2 - x} \right) \Big|_0^1$

$= \ln 5 + 1 - \ln 3 + \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \ln \frac{10}{3}$

22 $\frac{4}{16x^2 + 8x - 3} = \frac{4}{(4x - 1)(4x + 3)} = \frac{A}{4x - 1} + \frac{B}{4x + 3}$

$\Rightarrow 4 = A(4x + 3) + B(4x - 1)$

$x = \frac{1}{4} \Rightarrow A = 1$
 $x = -\frac{3}{4} \Rightarrow B = -1$

$\int_1^4 \frac{4}{16x^2 + 8x - 3} dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{4x - 1} + \frac{-1}{4x + 3} \right) dx$

$= \left(\frac{1}{4} \ln|4x - 1| - \frac{1}{4} \ln|4x + 3| \right) \Big|_1^4 = \left(\frac{1}{4} \ln \left| \frac{4x - 1}{4x + 3} \right| \right) \Big|_1^4 = \frac{1}{4} \ln \frac{35}{19}$

23 $\frac{5x + 5}{x^2 + x - 6} = \frac{5x + 5}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 3}$

$\Rightarrow 5x + 5 = A(x + 3) + B(x - 2)$

$x = 2 \Rightarrow A = 3$
 $x = -3 \Rightarrow B = 2$

$\int_3^4 \frac{5x + 5}{x^2 + x - 6} dx = \int_3^4 \left(\frac{3}{x - 2} + \frac{2}{x + 3} \right) dx$

$= (3 \ln|x - 2| + 2 \ln|x + 3|) \Big|_3^4 = 3 \ln 2 + 2 \ln 7 - 2 \ln 6 = \ln \frac{98}{9}$

24

$$\frac{4}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \Rightarrow 4 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$

$$A = \int_3^4 \frac{4}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} \right) dx$$

$$= \left(\ln|x| - \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} \right) \Big|_3^4 = \left(\ln \left| \frac{x}{x-2} \right| - \frac{2}{x-2} \right) \Big|_3^4$$

$$= \ln 2 - 1 - \ln 3 + 2 = 1 + \ln \frac{2}{3}$$

$$x = 0 \Rightarrow A = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow C = 2$$

$$x = 1$$

$$\Rightarrow 4 = A - B + C$$

$$\Rightarrow B = -1$$

35

$$\frac{5x^2 - 8x + 1}{2x(x-1)^2} = \frac{A}{2x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 8x + 1 = A(x-1)^2 + B(2x)(x-1) + C(2x)$$

$$\int_4^9 \frac{5x^2 - 8x + 1}{2x(x-1)^2} dx = \int_4^9 \left(\frac{1}{2x} + \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} \ln|x| + 2 \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} \right) \Big|_4^9$$

$$= \frac{1}{2} \ln 9 + 2 \ln 8 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \ln 4 - 2 \ln 3 - \frac{1}{3}$$

$$= \ln 3 + \ln 64 + \frac{1}{8} - \ln 2 - \ln 9 - \frac{1}{3} = \ln \frac{3(64)}{2(9)} - \frac{5}{24} = \ln \frac{32}{3} - \frac{5}{24}$$

$$x = 0 \Rightarrow A = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow C = -1$$

$$x = -1$$

$$\Rightarrow 14 = 4A + 4B - 2C$$

$$\Rightarrow B = 2$$

37

$$\frac{4x^2 + 9x + 4}{2x^2 + 5x + 3} = 2 - \frac{x+2}{2x^2 + 5x + 3}$$

$$\frac{x+2}{2x^2 + 5x + 3} = \frac{x+2}{(x+1)(2x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+3} \Rightarrow x+2 = A(2x+3) + B(x+1)$$

$$\int_0^1 \frac{4x^2 + 9x + 4}{2x^2 + 5x + 3} dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+3} \right) dx$$

$$= \left(2x - \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|2x+3| \right) \Big|_0^1 = 2 - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 5 - 0 + \ln 1 - \frac{1}{2} \ln 3$$

$$= 2 - \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 3 = 2 + \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 4 - \ln 3) = 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{12}$$

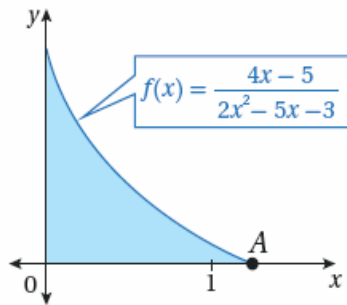
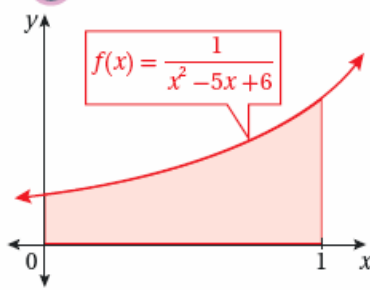
$$x = -1 \Rightarrow A = 1$$

$$x = -\frac{3}{2} \Rightarrow B = -1$$

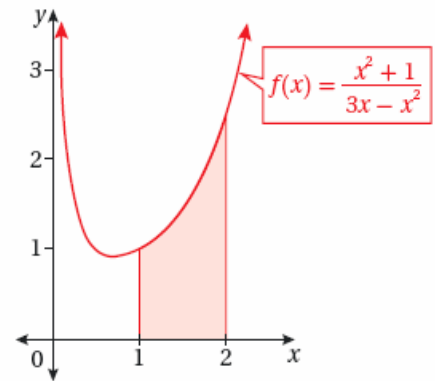
(6) مسائل المساحة المتعلقة بالكسور الجزئية : أيضا لا جديد ، فقط التكامل يُحل عن طرق الكسور الجزئية

أجد مساحة المنطقة المُظَلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

25



26



يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{4x - 5}{2x^2 - 5x - 3}$

27 أجد إحداثيي النقطة A.

28 أجد مساحة المنطقة المُظَلَّلة.

25

$$A = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x - 2) + B(x - 3)$$

$$A = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x - 3} + \frac{-1}{x - 2} \right) dx$$

$$x = 3 \Rightarrow A = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow B = -1$$

$$= (\ln|x - 3| - \ln|x - 2|) \Big|_0^1 = \ln \left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{4}{3}$$

26

$$A = \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{3x - x^2} dx \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{3x - x^2} = -1 + \frac{3x + 1}{3x - x^2} \Rightarrow \frac{3x + 1}{3x - x^2} = \frac{3x + 1}{x(3 - x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3 - x}$$

$$A = \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{3x - x^2} dx = \int_1^2 \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{\frac{10}{3}}{3 - x} \right) dx$$

$$\Rightarrow 3x + 1 = A(3 - x) + Bx$$

$$x = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$x = 3 \Rightarrow B = \frac{10}{3}$$

$$= \left(-x + \frac{1}{3} \ln|x| - \frac{10}{3} \ln|3 - x| \right) \Big|_1^2$$

$$= -2 + \frac{1}{3} \ln 2 + 1 + \frac{10}{3} \ln 3 = -1 + \frac{11}{3} \ln 2$$

27

$$f(x) = 0 \Rightarrow 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \Rightarrow A \left(\frac{5}{4}, 0 \right)$$

28

$$A = \int_0^{\frac{5}{4}} \frac{4x - 5}{2x^2 - 5x - 3} dx = \ln|2x^2 - 5x - 3| \Big|_0^{\frac{5}{4}} = \ln \frac{49}{8} - \ln 3 = \ln \frac{49}{24}$$

ملاحظة: البسط هو مشتقة المقام، فلا داعي لتجزئة الكسر.

(7) التكامل بالكسور الجزئية، والتكامل بالتعويض

طريقة التكامل بالتعويض في بعض المسائل قد تُفضي إلى اقتران نسبي يُمكن حلُّه باستعمال الكسور الجزئية.

$$1) \int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx :: u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} \rightarrow e^{2x} = u^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^x}{u^2 - 3u + 2} \frac{du}{e^x} = \int \frac{1}{(u-2)(u-1)} du = \int \left(\frac{a}{u-2} + \frac{b}{u-1} \right) du$$

$$= \int \left(\frac{1}{u-2} + \frac{-1}{u-1} \right) du = \ln|u-2| - \ln|u-1| + c : \begin{cases} 1 = a(u-2) + b(u-1) \\ u=2 \Rightarrow b=1 \\ u=1 \Rightarrow a=-1 \end{cases}$$

$$= \ln|e^x - 2| + \ln|e^x - 1| + c = \ln \left| \frac{e^x - 2}{e^x - 1} \right| + c$$

$$2) \int \frac{\sin 2x}{2 - \cos x - \cos^2 x} dx :: u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2 \sin x \cos x}{2 - u - u^2} \frac{du}{-\sin x} = \int \frac{2u}{u^2 + u - 2} du = \int \frac{2u}{(u+2)(u-1)} du = \int \left(\frac{a}{u+2} + \frac{b}{u-1} \right) du$$

$$= \int \left(\frac{\frac{4}{3}}{u+2} + \frac{-\frac{2}{3}}{u-1} \right) du = \frac{4}{3} \ln|u+2| - \frac{2}{3} \ln|u-1| + c : \begin{cases} 2u = a(u-1) + b(u+2) \\ u=-2 \Rightarrow a=\frac{4}{3}, u=1 \Rightarrow b=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$= \frac{4}{3} \ln|\cos x + 2| - \frac{2}{3} \ln|\sin x - 1| + c$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx :: u = \sqrt{x+4} \Rightarrow u^2 = x+4 \Rightarrow 2u du = dx$$

$$= \int \frac{u^2}{u^2 - 4} 2u du = \int \frac{2u^2}{u^2 - 4} du = \int \left(2 + \frac{8}{u^2 - 4} \right) du$$

$$\Rightarrow \int \left(2 + \frac{a}{u-2} + \frac{b}{u+2} \right) du \quad \begin{cases} 8 = a(u+2) + b(u-2) \\ u=2 \Rightarrow a=2, u=-2 \Rightarrow b=-2 \end{cases}$$

$$= \int \left(2 + \frac{2}{u-2} + \frac{-2}{u+2} \right) du = 2u + 2 \ln|u-2| + 2 \ln|u+2| + c$$

$$= 2\sqrt{x+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2} \right| + c$$

$$4) \int \sec x \, dx = \int \frac{1}{\cos x} \, dx = \int \frac{1}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\cos x} \, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} \, dx \quad \because u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

يمكن حل هذا السؤال عن طريق المتطابقات أيضاً

$$\Rightarrow \int \frac{\cos x}{1 - u^2} \frac{du}{\cos x} = \int \frac{1}{(1+u)(1-u)} \, du = \int \left(\frac{a}{1+u} + \frac{b}{1-u} \right) \, du$$

$$1 = a(1-u) + b(1+u)$$

$$u = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}, u = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1+u} + \frac{\frac{1}{2}}{1-u} \right) \, du = \frac{1}{2} \ln|1+u| + \frac{1}{2} \ln|1-u| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1 - \sin x| + \frac{1}{2} \ln|1 + \sin x| + c = -\frac{1}{2} \ln|\sin x - 1| + \frac{1}{2} \ln|\sin x + 1| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + c$$

أتحقق من فهمي 57 أجد كلاً من التكاملين الآتيين: $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x - 1} \, dx$ $\int \frac{e^x}{(e^x - 1)(e^x + 4)} \, dx$

أدرب وأحل المسائل $\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x} \, dx$ أجد كلاً من التكاملات الآتية:

30 $\int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}} \, dx$ 31 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2} \, dx$ 32 $\int \frac{\cos x}{\sin x(\sin^2 x - 4)} \, dx$

مهارات التفكير العليا تبرير: أحل السؤالين الآتيين تباعاً:

33 أجد: $\int \frac{dx}{1 + e^x}$ بطريقتين مختلفتين، إحداهما الكسور الجزئية، مبرراً إجابتي.

34 أجد: $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + e^x} \, dx$

36 تبرير: أثبت أن: $\int_9^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x-4} \, dx = 4 \left(1 + \ln \left(\frac{5}{3} \right) \right)$

تحد: أجد كلاً من التكاملين الآتيين: 59 $\int \frac{x}{16x^4 - 1} \, dx$ 38 $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{x} \, dx$

اتحقق من فهمي صفحة 57

a $u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x - 1} dx = \int \frac{\sec^2 x}{u^2 - 1} \frac{du}{\sec^2 x} = \int \frac{1}{u^2 - 1} du$$

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{1}{(u - 1)(u + 1)} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + 1} \Rightarrow 1 = A(u + 1) + B(u - 1)$$

$$\int \frac{1}{u^2 - 1} du = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{u - 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{u + 1} \right) du = \frac{1}{2} \ln|u - 1| - \frac{1}{2} \ln|u + 1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} \right| + C$$

$$u = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$u = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

b $u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$

$$\int \frac{e^x}{(e^x - 1)(e^x + 4)} dx = \int \frac{e^x}{(u - 1)(u + 4)} \frac{du}{e^x} = \int \frac{1}{(u - 1)(u + 4)} du$$

$$\frac{1}{(u - 1)(u + 4)} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + 4} \Rightarrow 1 = A(u + 4) + B(u - 1)$$

$$\int \frac{1}{(u - 1)(u + 4)} du = \int \left(\frac{\frac{1}{5}}{u - 1} + \frac{-\frac{1}{5}}{u + 4} \right) du$$

$$= \frac{1}{5} \ln|u - 1| - \frac{1}{5} \ln|u + 4| + C = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{u - 1}{u + 4} \right| + C = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 4} \right| + C$$

$$u = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

$$u = -4 \Rightarrow B = -\frac{1}{5}$$

29 $u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{u + u^2} \times \frac{du}{-\sin x} = \int \frac{-1}{u + u^2} du$$

$$\frac{-1}{u + u^2} = \frac{-1}{u(1 + u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1 + u} \Rightarrow -1 = A(1 + u) + Bu$$

$$\int \frac{-1}{u + u^2} du = \int \left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{1 + u} \right) du = -\ln|u| + \ln|1 + u| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x} dx = -\ln|\cos x| + \ln|1 + \cos x| + C = \ln|1 + \sec x| + C$$

$$u = 0 \Rightarrow A = -1$$

$$u = -1 \Rightarrow B = 1$$

30 $u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow dx = 2u du$

$$\int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{u^4 + u^3} 2u du = \int \frac{2}{u^3 + u^2} du$$

$$\frac{2}{u^3 + u^2} = \frac{2}{u^2(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+1} \Rightarrow 2 = Au(u+1) + B(u+1) + Cu^2$$

$$\begin{aligned} u=0 &\Rightarrow B=2 \\ u=-1 &\Rightarrow C=2 \\ u=1 &\Rightarrow 2=2A+2B+C \\ &\Rightarrow A=-2 \end{aligned}$$

$$\int \frac{2}{u^3 + u^2} du = \int \left(\frac{-2}{u} + \frac{2}{u^2} + \frac{2}{u+1} \right) du$$

$$= -2 \ln|u| - \frac{2}{u} + 2 \ln|u+1| + C = 2 \ln \left| \frac{u+1}{u} \right| - \frac{2}{u} + C = 2 \ln \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

31 $u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x = u \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$

$$\begin{aligned} u=-1 &\Rightarrow A=-1 \\ u=-2 &\Rightarrow B=2 \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx = \int \frac{u^2}{u^2 + 3u + 2} \times \frac{du}{u} = \int \frac{u}{u^2 + 3u + 2} du$$

$$\frac{u}{u^2 + 3u + 2} = \frac{u}{(u+1)(u+2)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+2} \Rightarrow u = A(u+2) + B(u+1)$$

$$\int \frac{u}{u^2 + 3u + 2} du = \int \left(\frac{-1}{u+1} + \frac{2}{u+2} \right) du = -\ln|u+1| + 2 \ln|u+2| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx = -\ln(e^x + 1) + 2 \ln(e^x + 2) + C$$

32 $u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x (\sin^2 x - 4)} dx = \int \frac{\cos x}{u(u^2 - 4)} \times \frac{du}{\cos x} = \int \frac{1}{u(u^2 - 4)} du$$

$$\frac{1}{u(u^2 - 4)} = \frac{1}{u(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} + \frac{C}{u+2}$$

$$\Rightarrow 1 = A(u-2)(u+2) + Bu(u+2) + Cu(u-2)$$

$$\begin{aligned} u=0 &\Rightarrow A=-\frac{1}{4} \\ u=2 &\Rightarrow B=\frac{1}{8} \\ u=-2 &\Rightarrow C=\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{u(u^2 - 4)} du = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{u} + \frac{\frac{1}{8}}{u-2} + \frac{\frac{1}{8}}{u+2} \right) du$$

$$= -\frac{1}{4} \ln|u| + \frac{1}{8} \ln|u-2| + \frac{1}{8} \ln|u+2| + C = -\frac{1}{4} \ln|\sin x| + \frac{1}{8} \ln|\sin x - 2| + \frac{1}{8} \ln|\sin x + 2| + C$$

33

الحل الأول بضرب كل من البسط والمقام بـ e^{-x}

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = - \int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = -\ln(e^{-x}+1) + C$$

الحل الثاني بالتعويض:

$$u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x = u \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+u} \times \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u(1+u)} du \Rightarrow$$

$$\frac{1}{u(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}$$

$$u=0 \Rightarrow A=1$$

$$u=-1 \Rightarrow B=-1$$

$$\Rightarrow 1 = A(1+u) + Bu$$

$$\int \frac{1}{u(1+u)} du = \int \left(\frac{1}{u} + \frac{-1}{u+1} \right) du = \ln|u| - \ln|u+1| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+e^x} dx = \ln e^x - \ln(e^x + 1) + C = \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x} \right)^{-1} + C = -\ln(e^{-x} + 1) + C$$

34

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x} dx = \ln e^x - \ln(e^x + 1) \Big|_0^{\ln 2}$$

$$= \ln e^{\ln 2} - \ln(e^{\ln 2} + 1) - (\ln e^0 - \ln(e^0 + 1)) = \ln 2 - \ln 3 - 0 + \ln 2 = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$$

36

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow dx = 2u du \Rightarrow x=9 \Rightarrow u=3 \Rightarrow x=16 \Rightarrow u=4$$

$$\int_9^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x-4} dx = \int_3^4 \frac{2u}{u^2-4} 2u du = \int_3^4 \frac{4u^2}{u^2-4} du = \int_3^4 \left(4 + \frac{16}{u^2-4} \right) du$$

$$\frac{16}{u^2-4} = \frac{16}{(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2} \Rightarrow 16 = A(u+2) + B(u-2)$$

$$\int_3^4 \left(4 + \frac{16}{u^2-4} \right) du = \int_3^4 \left(4 + \frac{4}{u-2} + \frac{-4}{u+2} \right) du$$

$$u=2 \Rightarrow A=4$$

$$u=-2 \Rightarrow B=-4$$

$$= (4u + 4 \ln|u-2| - 4 \ln|u+2|) \Big|_3^4 = 16 + 4 \ln 2 - 4 \ln 6 - 12 - 4 \ln 1 + 4 \ln 5$$

$$= 4 + 4 \ln \frac{5}{3} = 4 \left(1 + \ln \frac{5}{3} \right) \Rightarrow \int_9^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x-4} dx = 4 \left(1 + \ln \frac{5}{3} \right)$$

38 $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x} dx \Rightarrow u = \sqrt{1+\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$, $1+\sqrt{x}=u^2 \Rightarrow \sqrt{x}=u^2-1$
 $\Rightarrow dx = 4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}du = 4u(u^2-1)du$
 $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x} dx = \int \frac{u}{(u^2-1)^2} 4u(u^2-1)du = \int \frac{4u^2}{u^2-1} du$
 $\frac{4}{u^2-1} = \frac{4}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$
 $\Rightarrow 4 = A(u+1) + B(u-1)$
 $\int \frac{4u^2}{u^2-1} du = \int \left(4 + \frac{2}{u-1} + \frac{-2}{u+1} \right) du$
 $= 4u + 2\ln|u-1| - 2\ln|u+1| + C = 4u + 2\ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C$
 $\Rightarrow \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x} dx = 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + 2\ln \left| \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}+1} \right| + C$

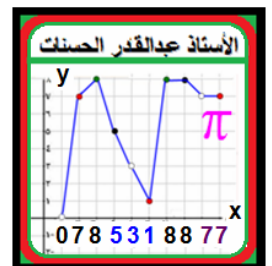
$\frac{4u^2}{u^2-1} = 4 + \frac{4}{u^2-1}$

$u=1 \Rightarrow A=2$
 $u=-1 \Rightarrow B=-2$

39 $\frac{x}{16x^4-1} = \frac{x}{(4x^2+1)(2x-1)(2x+1)} = \frac{Ax+B}{4x^2+1} + \frac{C}{2x-1} + \frac{D}{2x+1}$
 $\Rightarrow x = (Ax+B)(2x-1)(2x+1) + C(4x^2+1)(2x+1) + D(4x^2+1)(2x-1)$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{8}$
 $x = 0 \Rightarrow 0 = -B + C - D \Rightarrow B = 0$
 $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow D = \frac{1}{8}$
 $x = 1 \Rightarrow 1 = 3A + 3B + 15C + 5D \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$\int \frac{x}{16x^4-1} dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}x}{4x^2+1} + \frac{\frac{1}{8}}{2x-1} + \frac{\frac{1}{8}}{2x+1} \right) dx$
 $= -\frac{1}{16} \ln(4x^2+1) + \frac{1}{16} \ln|2x-1| + \frac{1}{16} \ln|2x+1| + C = \frac{1}{16} \ln \left| \frac{4x^2-1}{4x^2+1} \right| + C$



من كتاب التمارين

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1 $\int \frac{4}{x^2 + 4x} dx$

2 $\int \frac{6}{x^2 - 9} dx$

3 $\int \frac{x^2 - 3x + 8}{x^3 - 3x - 2} dx$

4 $\int \frac{x - 10}{x^2 - 2x - 8} dx$

5 $\int \frac{2x^2 + 6x - 2}{2x^2 + x - 1} dx$

6 $\int \frac{2x^2 - x + 6}{(x^2 + 2)(x + 1)} dx$

7 $\int \frac{8x + 24}{(x + 1)(x - 3)^2} dx$

8 $\int \frac{8x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$

9 $\int \frac{4}{x^3 - 2x^2} dx$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

10 $\int_1^5 \frac{x - 1}{x^2(x + 1)} dx$

11 $\int_7^{12} \frac{4 - x}{(x - 2)^2} dx$

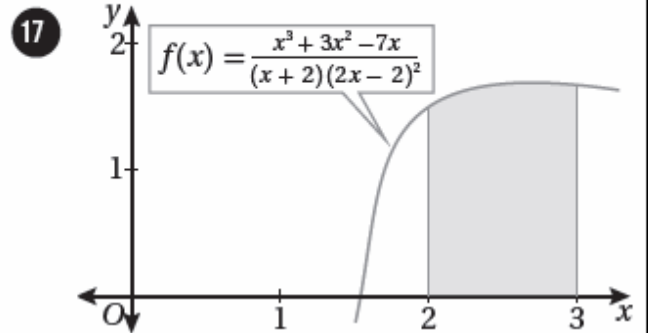
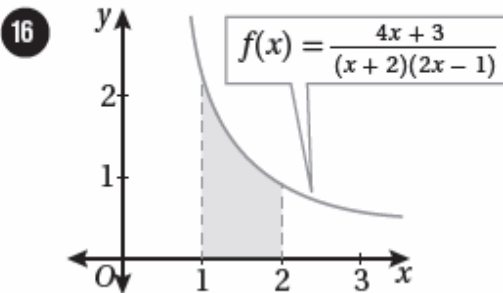
12 $\int_1^2 \frac{4}{x^2 + 8x + 15} dx$

13 $\int_1^2 \frac{10x^2 - 26x + 10}{2x^2 - 5x} dx$

14 $\int_2^5 \frac{25}{(x + 1)(2x - 3)^2} dx$

15 $\int_0^2 \frac{x^2 - 3x + 10}{x^2 - x - 6} dx$

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتيين:



أجد كلاً من التكاملات الآتية:

18 $\int \frac{e^{2x} + e^x}{(e^{2x} + 1)(e^x - 1)} dx$

19 $\int \frac{5 \cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x - 4} dx$

20 $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5 \tan x + 6} dx$

21 أثبت أن: $\int_0^1 \frac{4x}{x^2 - 2x - 3} dx = \ln\left(\frac{16}{27}\right)$ 22 أثبت أن: $\int_1^p \frac{1}{2x^2 + x - 1} dx = \frac{1}{3} \ln \frac{4p - 2}{p + 1}$ حيث: $p > 1$

1	$\frac{4}{x^2 + 4x} = \frac{4}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4}$ $A(x+4) + B(x) = 4$ $= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} \right) dx = \ln x - \ln x+4 + C = \ln \left \frac{x}{x+4} \right + C$	$x=0 \Rightarrow A=1$ $x=-4 \Rightarrow B=-1$
2	$\frac{6}{x^2 - 9} = \frac{6}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$ $A(x+3) + B(x-3) = 6$ $= \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \ln x-3 - \ln x+3 + C = \ln \left \frac{x-3}{x+3} \right + C$	$x=3 \Rightarrow A=1$ $x=-3 \Rightarrow B=-1$

3	$\frac{x^2 - 3x + 8}{x^3 - 3x - 2} = \frac{x^2 - 3x + 8}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ $A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2) = x^2 - 3x + 8$ $x=0 \Rightarrow A - 2B - 2C = 8 \Rightarrow \frac{2}{3} - 2B + 8 = 8 \Rightarrow B = \frac{1}{3}$ $= \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} \right) dx = \frac{2}{3} \ln x-2 + \frac{1}{3} \ln x+1 + \frac{4}{x+1} + C$	$x=2 \Rightarrow A = \frac{2}{3}$ $x=-1 \Rightarrow C=-4$
---	--	--

4	$\frac{x-10}{x^2 - 2x - 8} = \frac{x-10}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$ $A(x+2) + B(x-4) = x-10$ $= \int \left(-\frac{1}{x-4} + \frac{2}{x+2} \right) dx = -\ln x-4 + 2\ln x+2 + C$	$x=4 \Rightarrow A=-1$ $x=-2 \Rightarrow B=2$
---	--	--

5	$\frac{2x^2 + 6x - 2}{2x^2 + x - 1} = 1 + \frac{5x-1}{2x^2 + x - 1} = 1 + \frac{5x-1}{(x+1)(2x-1)} = 1 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1}$ $A(2x-1) + B(x+1) = 5x-1$ $= \int \left(1 + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2x-1} \right) dx = x + 2\ln x+1 + \frac{1}{2}\ln 2x-1 + C$	$x=-1 \Rightarrow A=2$ $x=\frac{1}{2} \Rightarrow B=1$
---	---	---

$$6 \quad \frac{2x^2 - x + 6}{(x^2 + 2)(x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2}$$

$$A(x^2 + 2) + (Bx + C)(x + 1) = 2x^2 - x + 6$$

$$x = -1 \Rightarrow A = 3$$

$$x = 0 \Rightarrow 2A + C = 6 \Rightarrow 6 + C = 6 \Rightarrow C = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 3A + 2B + 2C = 7 \Rightarrow 9 + 2B = 7 \Rightarrow B = -1$$

$$= \int \left(\frac{3}{x + 1} + \frac{-x}{x^2 + 2} \right) dx = 3 \ln|x + 1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + C$$

$$7 \quad \frac{8x + 24}{(x + 1)(x - 3)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2}$$

$$A(x - 3)^2 + B(x + 1)(x - 3) + C(x + 1) = 8x + 24$$

$$x = 0 \Rightarrow 9A - 3B + C = 24 \Rightarrow 9 - 3B + 12 = 24 \Rightarrow B = -1$$

$$x = -1 \Rightarrow A = 1$$

$$x = 3 \Rightarrow C = 12$$

$$= \int \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{-1}{x - 3} + \frac{12}{(x - 3)^2} \right) dx = \ln|x + 1| - \ln|x - 3| - \frac{12}{x - 3} + C$$

$$8 \quad \frac{8x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{8x}{x^2(x + 1) - (x + 1)} = \frac{8x}{(x^2 - 1)(x + 1)} = \frac{8x}{(x - 1)(x + 1)^2}$$

$$= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x - 1}$$

$$A(x + 1)(x - 1) + B(x - 1) + C(x + 1)^2 = 8x$$

$$x = 0 \Rightarrow -A - B + C = 0 \Rightarrow -A - 4 + 2 = 0 \Rightarrow A = -2$$

$$x = -1 \Rightarrow B = 4$$

$$x = 1 \Rightarrow C = 2$$

$$\int \frac{8x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx = \int \left(\frac{-2}{x + 1} + \frac{4}{(x + 1)^2} + \frac{2}{x - 1} \right) dx$$

$$= -2 \ln|x + 1| - \frac{4}{x + 1} + 2 \ln|x - 1| + C = 2 \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| - \frac{4}{x + 1} + C$$

$$9 \quad \frac{4}{x^3 - 2x^2} = \frac{4}{x^2(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 2}$$

$$A(x)(x - 2) + B(x - 2) + C(x^2) = 4$$

$$x = 1 \Rightarrow -A - B + C = 4 \Rightarrow -A + 2 + 1 = 4 \Rightarrow A = -1$$

$$x = 0 \Rightarrow B = -2$$

$$x = 2 \Rightarrow C = 1$$

$$= \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x - 2} \right) dx = -\ln|x| + \frac{2}{x} + \ln|x - 2| + C = \ln \left| \frac{x - 2}{x} \right| + \frac{2}{x} + C$$

10 $\frac{x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$ $A(x)(x+1) + B(x+1) + C(x^2) = x-1$

$x=0 \Rightarrow B=-1$
 $x=-1 \Rightarrow C=-2$ $x=1 \Rightarrow 2A+2B+C=0 \Rightarrow 2A-2-2=0 \Rightarrow A=2$

$\int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)} dx = \int_1^5 \left(\frac{2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-2}{x+1} \right) dx$

$= \left(2 \ln|x| + \frac{1}{x} - 2 \ln|x+1| \right) \Big|_1^5 = \left(\frac{1}{x} + 2 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \right) \Big|_1^5 = 2 \ln \frac{5}{3} - \frac{4}{5}$

11 $\frac{4-x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$

$A(x-2) + B = 4-x$ $x=2 \Rightarrow B=2$
 $x=0 \Rightarrow -2A+B=4 \Rightarrow -2A+2=4 \Rightarrow A=-1$

$\int_7^{12} \frac{4-x}{(x-2)^2} dx = \int_7^{12} \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} \right) dx$

$= \left(-\ln|x-2| - \frac{2}{x-2} \right) \Big|_7^{12} = -\ln 10 - \frac{1}{5} + \ln 5 + \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \ln \frac{1}{2}$

12 $\frac{4}{x^2+8x+15} = \frac{A}{(x+5)(x+3)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x+3}$ $x=-5 \Rightarrow A=-2$
 $x=-3 \Rightarrow B=2$

$A(x+3) + B(x+5) = 4$

$\int_1^2 \frac{4}{x^2+8x+15} dx = \int_1^2 \left(\frac{-2}{x+5} + \frac{2}{x+3} \right) dx$

$= (-2 \ln|x+5| + 2 \ln|x+3|) \Big|_1^2 = \left(2 \ln \left| \frac{x+3}{x+5} \right| \right) \Big|_1^2 = 2 \ln \frac{5}{7} - 2 \ln \frac{2}{3} = 2 \ln \frac{15}{14}$

13 $\frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x} = 5 + \frac{-x+10}{2x^2-5x} = 5 + \frac{10-x}{x(2x-5)} = 5 + \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-5}$

$A(2x-5) + B(x) = 10-x$ $x=0 \Rightarrow A=-2$ $x=\frac{5}{2} \Rightarrow B=3$

$\int_1^2 \frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x} dx = \int_1^2 \left(5 + \frac{-2}{x} + \frac{3}{2x-5} \right) dx$

$= \left(5x - 2 \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|2x-5| \right) \Big|_1^2 = 10 - 2 \ln 2 - 5 - \frac{3}{2} \ln 3 = 5 - \ln 12\sqrt{3}$

14
$$\frac{25}{(x+1)(2x-3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-3} + \frac{C}{(2x-3)^2}$$

$$x = -1 \Rightarrow A = 1$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow C = 10$$

$$A(2x-3)^2 + B(x+1)(2x-3) + C(x+1) = 25$$

$$x = 0 \Rightarrow 9A - 3B + C = 25 \Rightarrow 9 - 3B + 10 = 25 \Rightarrow B = -2$$

$$\int_2^5 \frac{25}{(x+1)(2x-3)^2} dx = \int_2^5 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-2}{2x-3} + \frac{10}{(2x-3)^2} \right) dx$$

$$= \left(\ln|x+1| - \ln|2x-3| - \frac{5}{2x-3} \right) \Big|_2^5 = \left(\ln \left| \frac{x+1}{2x-3} \right| - \frac{5}{2x-3} \right) \Big|_2^5$$

$$= \left(\ln \frac{6}{7} - \frac{5}{7} \right) - (\ln 3 - 5) = \frac{30}{7} + \ln \frac{2}{7}$$

15
$$\frac{x^2 - 3x + 10}{x^2 - x - 6} = 1 + \frac{16 - 2x}{x^2 - x - 6} = 1 + \frac{16 - 2x}{(x-3)(x+2)} = 1 + \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$x = 3 \Rightarrow A = 2$$

$$x = -2 \Rightarrow B = -4$$

$$A(x+2) + B(x-3) = 16 - 2x$$

$$\int_0^2 \frac{x^2 - 3x + 10}{x^2 - x - 6} dx = \int_0^2 \left(1 + \frac{2}{x-3} + \frac{-4}{x+2} \right) dx$$

$$= (x + 2 \ln|x-3| - 4 \ln|x+2|) \Big|_0^2$$

$$= 2 - 4 \ln 4 - 2 \ln 3 + 4 \ln 2 = 2 - 2 \ln 12$$

16
$$A = \int_1^2 \frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)} dx \Rightarrow \frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-1}$$

$$x = -2 \Rightarrow A = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 2$$

$$A(2x-1) + B(x+2) = 4x+3$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+2} + \frac{2}{2x-1} \right) dx = (\ln|x+2| + \ln|2x-1|) \Big|_1^2$$

$$= (\ln 4 + \ln 3) - (\ln 3 + 0) = \ln 4$$

17 $A = \int_2^3 \frac{x^3 + 3x^2 - 7x}{(x+2)(2x-2)^2} dx$

$x = -2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$
 $x = 1 \Rightarrow C = -1$

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 7x}{(x+2)(2x-2)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 - 7x}{4x^3 - 12x + 8} = \frac{1}{4} + \frac{3x^2 - 4x - 2}{4x^3 - 12x + 8}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3x^2 - 4x - 2}{(x+2)(2x-2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-2} + \frac{C}{(2x-2)^2}$$

$$A(2x-2)^2 + B(x+2)(2x-2) + C(x+2) = 3x^2 - 4x - 2$$

$$x = 0 \Rightarrow 4A - 4B + 2C = -2 \Rightarrow 2 - 4B - 2 = -2 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$A = \int_2^3 \frac{x^3 + 3x^2 - 7x}{(x+2)(2x-2)^2} dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-2} + \frac{-1}{(2x-2)^2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \ln|x+2| + \frac{1}{4} \ln|2x-2| + \frac{1}{2(2x-2)} \right) \Big|_2^3$$

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{4} \ln 4 + \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \ln \frac{25}{8}$$

18 $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$

$$\int \frac{e^{2x} + e^x}{(e^{2x} + 1)(e^x - 1)} dx = \int \frac{e^x(u+1)}{(u^2+1)(u-1)} \times \frac{du}{e^x} = \int \frac{u+1}{(u^2+1)(u-1)} du$$

$$\frac{u+1}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{C}{u-1}$$

$$(Au+B)(u-1) + C(u^2+1) = u+1$$

$$u = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$u = 0 \Rightarrow -B + C = 1 \Rightarrow -B + 1 = 1 \Rightarrow B = 0$$

$$u = -1 \Rightarrow 2A - 2B + 2C = 0 \Rightarrow 2A + 2 = 0 \Rightarrow A = -1$$

$$\int \frac{e^{2x} + e^x}{(e^{2x} + 1)(e^x - 1)} dx = \int \left(\frac{-u}{u^2+1} + \frac{1}{u-1} \right) du$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(u^2+1) + \ln|u-1| + C = -\frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1) + \ln|e^x-1| + C$$

19 $u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$$\int \frac{5 \cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x - 4} dx = \int \frac{5 \cos x}{u^2 + 3u - 4} \times \frac{du}{\cos x} = \int \frac{5}{u^2 + 3u - 4} du$$

$$\frac{5}{u^2 + 3u - 4} = \frac{5}{(u+4)(u-1)} = \frac{A}{u+4} + \frac{B}{u-1}$$

$u = 1 \Rightarrow B = 1$
 $u = -4 \Rightarrow A = -1$

$$A(u-1) + B(u+4) = 5$$

$$\int \frac{5}{u^2 + 3u - 4} du = \int \left(\frac{-1}{u+4} + \frac{1}{u-1} \right) du = -\ln|u+4| + \ln|u-1| + C$$

$$= -\ln(4 + \sin x) + \ln|-1 + \sin x| + C = \ln \left| \frac{-1 + \sin x}{4 + \sin x} \right| + C$$

20 $u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow du = \sec^2 x dx$

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5 \tan x + 6} dx = \int \frac{1}{u^2 + 5u + 6} du$$

$$\frac{1}{u^2 + 5u + 6} = \frac{1}{(u+3)(u+2)} = \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u+2}$$

$$A(u+2) + B(u+3) = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{u^2 + 5u + 6} du = \int \left(\frac{-1}{u+3} + \frac{1}{u+2} \right) du = \ln|u+2| - \ln|u+3| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5 \tan x + 6} dx = \ln \left| \frac{2 + \tan x}{3 + \tan x} \right| + C$$

$u = -3 \Rightarrow A = -1$
 $u = -2 \Rightarrow B = 1$

21 $\frac{4x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{4x}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$

$$A(x+1) + B(x-3) = 4x$$

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2 - 2x - 3} dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{x-3} + \frac{1}{x+1} \right) dx = (3 \ln|x-3| + \ln|x+1|) \Big|_0^1$$

$$= (3 \ln 2 + \ln 2) - (3 \ln 3) = \ln 8 + \ln 2 - \ln 27 = \ln \frac{16}{27}$$

$x = 3 \Rightarrow A = 3$
 $x = -1 \Rightarrow B = 1$

22 $\frac{1}{2x^2 + x - 1} = \frac{1}{(2x-1)(x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1}$

$$A(x+1) + B(2x-1) = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$= \int_1^p \left(\frac{\frac{2}{3}}{2x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} \right) dx = \left(\frac{1}{3} \ln|2x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+1| \right) \Big|_1^p$$

$p > 1$

$$= \left(\frac{1}{3} \ln|2p-1| - \frac{1}{3} \ln|p+1| \right) - \left(-\frac{1}{3} \ln 2 \right) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{2(2p-1)}{p+1} \right| = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{4p-2}{p+1} \right)$$

أسئلة الوزارة

2) $\int \frac{7x^2 - 16x - 2}{(x^2 + 2)(x - 2)} dx$ (10 علامات) 2023

2) $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + x^2} dx$ (10 علامات) 2023 تكميلي



تمارين إضافية

$$1) \int \frac{x+6}{x^2-2x} dx = \quad a) \operatorname{Ln} |x^2-2x| + c \quad b) \operatorname{Ln} \left| \frac{(x-1)^3}{x^4} \right| + c$$

$$c) \frac{3}{4} \operatorname{Ln} \left| \frac{x-1}{x} \right| + c \quad d) \operatorname{Ln} |x^4(x-1)^3| + c$$

$$2) \int \frac{x^2+1}{x^3-x^2} dx = \quad a) \operatorname{Ln} \left| \frac{x(x+1)}{(x-1)} \right| + c \quad b) \operatorname{Ln} \left| \frac{x+1}{x(x-1)} \right| + c$$

$$c) \operatorname{Ln} \left| \frac{x(x-1)}{x+1} \right| + c \quad d) \operatorname{Ln} \left| \frac{x-1}{x(x+1)} \right| + c$$

$$3) \int_k^2 \frac{4}{x^2-1} dx = \operatorname{Ln} \left(\frac{4}{9} \right), \quad k > 0 \Rightarrow k = ?$$

a) 3 b) 2 c) 1 d) 4

$$4) \int \frac{4}{4-x^2} dx = \quad a) \operatorname{Ln} \left| \frac{2-x}{2+x} \right| + c \quad b) \operatorname{Ln} |4-x^2| + c$$

$$c) \operatorname{Ln}(4-x)^2 + c \quad d) \operatorname{Ln} \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + c$$

$$5) \int \frac{x^2}{4-x^2} dx = \quad a) x + \operatorname{Ln} \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + c \quad b) x + \operatorname{Ln} \left| \frac{2-x}{2+x} \right| + c$$

$$c) \operatorname{Ln} \left| \frac{2+x}{2-x} \right| - x + c \quad d) \operatorname{Ln} \left| \frac{2-x}{2+x} \right| - x + c$$

6) $\int \frac{4x}{x^2 - 4} dx =$ a) $\text{Ln}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 + c$ b) $\text{Ln}(x^2 - 4) + c$
c) $\text{Ln}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + c$ d) $2\text{Ln}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + c$

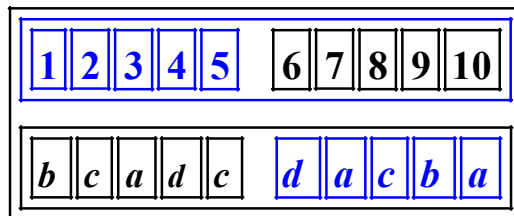
7) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x - \sin x} dx =$ a) $\text{Ln}\left|\frac{\sin x - 1}{\sin^3 x}\right| + c$ b) $\text{Ln}|\sin^3 x - \sin x| + c$
c) $3\text{Ln}\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x}\right| + c$ d) $\text{Ln}\left|\frac{\sin x - 1}{3\sin x}\right| + c$

8) $\int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)^2} dx =$

a) $\text{Ln}4$ b) $\text{Ln}4 + 2$ c) $\text{Ln}4 + \frac{1}{2}$ d) $\text{Ln}\frac{9}{2}$

9) $\int \frac{5x^2 - x + 2}{(x^2 + 1)(x - 1)} dx =$ a) $\text{Ln}|(x^2 + 1)(x - 1)| + c$ b) $\text{Ln}|(x^2 + 1)(x - 1)^3| + c$
c) $3\text{Ln}|(x^2 + 1)(x - 1)| + c$ d) $\text{Ln}|5x^2 - x + 2| + c$

10) $\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{(x^2 + 3x + 5)(x - 1)} dx =$ a) $\text{Ln}|(x^2 + 3x + 5)(x - 1)| + c$
b) $\text{Ln}|(3x^2 + 4x + 2)(x)| + c$
c) $\text{Ln}|(x^2 + 3x + 5)(x + 1)| + c$
d) $\text{Ln}|3x^2 + 4x + 2| + c$





القدس لنا

التكامل بالأجزاء

Integration by Parts

الدرس
4

- هناك عدة طرق للتكامل، منها: (1) الطريقة المباشرة من خلال البحث عن اقتران مشتقته تعطي الاقتران المُكامل. (2) من خلال التحليل إلى العوامل والاختصار (3) من خلال المتطابقات المثلثية (4) طريقة التكامل بالتعويض (5) طريقة الكسور الجزئية (6) طريقة التكامل بالأجزاء

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

Hasanat

استعملنا طريقة التكامل بالتعويض لحل مسائل تتميز باحتوائها مقدارا ومشتقته مثل : $\int x \sin(x^2+1) dx$

حيث كنا نكتب جزءا من المسألة بدلالة (u) فتصبح : $\int \sin(u) du$

أما طريقة الأجزاء فنستعملها لحل مسائل مثل : $\int x \sin x dx$ حيث لا يوجد (مقدار ومشتقته)

وتقوم الطريقة على تجزئة المُكامل إلى جزئين : نسمي الأول (u) والثاني (dv)

نشتق الأول ونكامل الثاني ثم القاعدة $\int u dv = uv - \int v du$

ويمكن استعمال طريقة الأجزاء لإيجاد تكاملات مثل : $\int e^x \sin x dx$, $\int x^2 \cos 6x dx$, $\int x^2 \ln 3x dx$

$$1) \int x \cos x dx \therefore u = x, dv = \cos x$$

$$du = dx, v = \sin x$$

$$\Rightarrow uv - \int v du = x \sin x - \int \sin x dx$$

$$= x \sin x + \cos x + c$$

$$2) \int x \ln x dx \therefore u = \ln x, dv = x$$

$$du = \frac{1}{x} dx, v = \frac{1}{2} x^2$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c$$



طريقة الأجزاء: نستعمل هذه الطريقة عندما يكون هناك حاصل ضرب أو قسمة مقدارين وأحدهما ليس مشتقة للآخر والتحدي الذي يواجهنا في هذه الطريقة هو تحديد (u) و (dv)

قاعدة (ل ك م أ) Liate

L	لوغاريتمي	Logarithmic functions	$\log x, \ln x$
I	غير منهجي غير مطلوب	Inverse trigonometric functions	$\sin^{-1}x, \cos^{-1}x$
A	كسري / حقيقي	Algebraic functions	$x^2, \sqrt{x}$
T	مثلثي	Trigonometric functions	$\sin x, \cos x$
E	اقتران أسّي	Exponential functions	$e^x, 2^x$

Abdulkadir Hasanat

ولتسهيل ذلك قمّت بتبسيط هذه القاعدة ((ل ك م أ)) أو (ل ك م أ)

حيث ل : اقتران لوغاريتمي

ك : كثير حدود أو حقيقي

م : اقتران مثلثي (دائري)

أ : اقتران أسّي

Integration by Parts

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Choose u in this order: **LIATE**

Logs
Inverse
Algebraic
Trig
Exponential

علماً بأن المثلثي العكسي (مثل $\sin^{-1}x$) غير مطلوب في التوجيهي

عند وجود مقدارين : فالذي يكون حرفه أولاً في ((ل ك م أ أو L i a t e)) نفرضه (u) والآخر (dv)

$$1) \int x^2 \ln x \, dx \quad \therefore u = \ln x \quad \boxed{L i a t e}$$

اللوغاريتمي قبل كثير الحدود (الحقيقي)

$$2) \int e^{2x} \sin x \, dx \quad \therefore u = \sin x \quad \boxed{L i a t e}$$

المثلثي قبل الأسّي

$$3) \int \frac{4x}{3x+1} \sec^2 x \, dx \quad \therefore u = \frac{4x}{3x+1} \quad \boxed{L i a t e}$$

الحقيقي قبل المثلثي

$$4) \int \sin x \cos 2x \, dx \quad \therefore u = \sin x, \text{ or } u = \cos 2x \quad \boxed{L i a t e}$$

كلاهما مثلثي

$$5) \int e^x \ln(x^2+7) \, dx \quad \therefore u = \ln(x^2+7) \quad \boxed{L i a t e}$$

اللوغاريتمي قبل الأسّي

$$1) \int \ln x \, dx \quad \therefore u = \ln x, \quad dv = dx$$

وقد تم تقسيم الدرس إلى الأجزاء الآتية :

$$du = \frac{1}{x} dx, \quad v = x$$

1) طريقة التكامل بالأجزاء :

$$= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

$$2) \int 12x \sin 2x \, dx \quad \therefore u = 12x, \quad dv = \sin 2x$$

$$du = 12 dx, \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$= 12x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) (12x) \, dx$$

$$= -6x \cos 2x + 3 \sin 2x + c$$

$$3) \int 8x e^{2x+5} dx \quad \therefore u = 8x, \quad dv = e^{2x+5}$$

$$du = 8dx, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x+5}$$

$$= 4x e^{2x+5} - \int \left(\frac{1}{2} e^{2x+5}\right)(8) dx$$

$$= 4x e^{2x+5} - 2e^{2x+5} + c$$



$$4) \int \sin x \ln(\cos x) dx \quad \therefore u = \ln(\cos x), \quad dv = \sin x$$

$$du = \frac{-\sin x}{\cos x} dx, \quad v = -\cos x$$

$$= -\cos x \ln(\cos x) - \int (\cos x) \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= -\cos x \ln(\cos x) - \int \sin x dx = -\cos x \ln(\cos x) + \cos x + c$$

$$5) \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad \therefore u = \ln x, \quad dv = x^{-2}$$

$$du = \frac{1}{x} dx = x^{-1}, \quad v = -x^{-1}$$

$$= -x^{-1} \ln x + \int (x^{-1})(x^{-1}) dx = -x^{-1} \ln x + \int x^{-2} dx$$

$$= -x^{-1} \ln x - x^{-1} + c$$

أتحقق من فهمي 63 أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int x \sin x dx$ b) $\int x^2 \ln x dx$ c) $\int 2x\sqrt{7-3x} dx$ d) $\int 3x e^{4x} dx$

أتحقق وأحل المسائل أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int (x+1) \cos x dx$

2) $\int x e^{x/2} dx$

4) $\int \ln \sqrt{x} dx$

5) $\int x \sin x \cos x dx$

6) $\int x \sec x \tan x dx$

7) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

8) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

10) $\int (x-2)\sqrt{8-x} dx$

12) $\int \frac{x}{6^x} dx$

14) $\int \cos x \ln \sin x dx$

15) $\int e^x \ln(1+e^x) dx$

1) $\int x e^x dx = \dots x e^x - e^x + c$

2) $\int 15x \sqrt{x+1} dx = \dots 10x \sqrt{(x+1)^3} - 4 \sqrt{(x+1)^5} + c$

3) $\int 2e^x \cos x dx = \dots -e^x \cos x - e^x \sin x + c$



اتحقق من فهمي صفحة 63

a $u = x \quad dv = \sin x \, dx$
 $du = dx \quad v = -\cos x$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

b $u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} \, dx \quad v = \frac{1}{3} x^3 \quad dv = x^2 \, dx$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{1}{3} x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

c ملاحظة: يمكن حل هذه المسألة بطريقة التعويض
 $u = x \quad dv = (7-3x)^{\frac{1}{2}} \, dx$
 $du = dx \quad v = -\frac{2}{9} (7-3x)^{\frac{3}{2}}$
 $u = 7-3x \quad \text{أو} \quad u = \sqrt{7-3x}$

$$\int x \sqrt{7-3x} \, dx = -\frac{2}{9} x (7-3x)^{\frac{3}{2}} - \int -\frac{2}{9} (7-3x)^{\frac{3}{2}} \, dx = -\frac{2}{9} x (7-3x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{135} (7-3x)^{\frac{5}{2}} + C$$

d $u = 3x \quad du = 3 \, dx \quad dv = e^{4x} \, dx \quad v = \frac{1}{4} e^{4x}$

$$\int 3x e^{4x} \, dx = \frac{3}{4} x e^{4x} - \int \frac{3}{4} e^{4x} \, dx = \frac{3}{4} x e^{4x} - \frac{3}{16} e^{4x} + C$$

1 $\int (x+1) \cos x \, dx = (x+1) \sin x - \int \sin x \, dx$
 $= (x+1) \sin x + \cos x + C$

$u = x+1 \quad dv = \cos x \, dx$
 $du = dx \quad v = \sin x$

2 $\int x e^{\frac{1}{2}x} \, dx = 2x e^{\frac{1}{2}x} - \int 2e^{\frac{1}{2}x} \, dx = 2x e^{\frac{1}{2}x} - 4e^{\frac{1}{2}x} + C$

$u = x \quad dv = e^{\frac{1}{2}x} \, dx$
 $du = dx \quad v = 2e^{\frac{1}{2}x}$

4 $\int \ln \sqrt{x} \, dx = \int \frac{1}{2} \ln x \, dx$

$$\int \frac{1}{2} \ln x \, dx = \frac{1}{2} x \ln x - \int \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{2} x \ln x - \frac{1}{2} x + C$$

$u = \ln x \quad dv = \frac{1}{2} \, dx$
 $du = \frac{1}{x} \, dx \quad v = \frac{1}{2} x$

5 $\int x \sin x \cos x \, dx = \int \frac{1}{2} x \sin 2x \, dx$

$$\int x \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{4} x \cos 2x + \int \frac{1}{4} \cos 2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C$$

$u = \frac{1}{2} x \quad dv = \sin 2x \, dx$
 $du = \frac{1}{2} \, dx \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x$

6 $\int x \sec x \tan x \, dx = x \sec x - \int \sec x \, dx$

$u = x \quad dv = \sec x \tan x \, dx$
 $du = dx \quad v = \sec x$

$$= x \sec x - \int \sec x \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx = x \sec x - \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

$$= x \sec x - \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$7 \quad \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = \int x \csc^2 x dx$$

$$\int x \csc^2 x dx = -x \cot x + \int \cot x dx$$

$$= -x \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -x \cot x + \ln |\sin x| + C$$

$u = x \quad dv = \csc^2 x dx$
 $du = dx \quad v = -\cot x$

$$8 \quad \int x^{-3} \ln x dx = -\frac{1}{2} x^{-2} \ln x - \int -\frac{1}{2} x^{-2} \frac{1}{x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^{-2} \ln x + \int \frac{1}{2} x^{-3} dx = -\frac{1}{2} x^{-2} \ln x - \frac{1}{4} x^{-2} + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$$

$u = \ln x \quad dv = x^{-3} dx$
 $du = \frac{1}{x} dx \quad v = -\frac{1}{2} x^{-2}$

$$10 \quad \int (x-2) \sqrt{8-x} dx = (x-2) \times -\frac{2}{3} (8-x)^{\frac{3}{2}} - \int -\frac{2}{3} (8-x)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= -\frac{2}{3} (x-2) (8-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (8-x)^{\frac{5}{2}} + C$$

يمكن حلها بالتعويض
 $u = \sqrt{8-x}$

$u = x-2 \quad dv = (8-x)^{\frac{1}{2}} dx$
 $du = dx \quad v = -\frac{2}{3} (8-x)^{\frac{3}{2}}$

$$12 \quad \int \frac{x}{6^x} dx = \int x 6^{-x} dx$$

$$\int x 6^{-x} dx = -x \frac{6^{-x}}{\ln 6} + \int \frac{6^{-x}}{\ln 6} dx = -x \frac{6^{-x}}{\ln 6} - \frac{6^{-x}}{(\ln 6)^2} + C$$

$u = x \quad dv = 6^{-x} dx$
 $du = dx \quad v = -\frac{6^{-x}}{\ln 6}$

$$14 \quad \int \cos x \ln \sin x dx = \sin x \ln \sin x - \int \cos x dx$$

$$= \sin x \ln \sin x - \sin x + C$$

$u = \ln \sin x \quad dv = \cos x dx$
 $du = \frac{\cos x}{\sin x} dx \quad v = \sin x$

$$15 \quad \int e^x \ln(1+e^x) dx = e^x \ln(1+e^x) - \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$$

$$= e^x \ln(1+e^x) - \int \left(e^x + \frac{-1}{1+e^x} \right) dx$$

$$= e^x \ln(1+e^x) - \int \left(e^x + \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} \right) dx = e^x \ln(1+e^x) - e^x - \ln(1+e^{-x}) + C$$

$u = \ln(1+e^x) \quad dv = e^x dx$
 $du = \frac{e^x}{1+e^x} dx \quad v = e^x$

(2) الشرط الأولي :

مثال : إذا كان الاقتران $f'(x) = \frac{2x e^x}{(x+1)^2}$ ، يمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ ،
جد قاعدة الاقتران علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(1, 2e)$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2x e^x}{(x+1)^2} dx \quad \therefore$$

$$u = 2x e^x, \quad dv = (x+1)^{-2}$$

$$du = 2e^x + 2xe^x, \quad v = -(x+1)^{-1}$$

$$= (2x e^x)(-(x+1)^{-1}) + \int \frac{2e^x + 2xe^x}{x+1} dx$$

$$= \frac{-2x e^x}{x+1} + \int \frac{2e^x(1+x)}{x+1} dx$$

$$f(x) = \frac{-2x e^x}{x+1} + 2e^x + c \Rightarrow f(1) = -e + 2e + c = 2e$$

$$\Rightarrow c = e \Rightarrow f(x) = -2x e^x (x+1)^{-1} + 2e^x + e$$



أتحقق من فهمي 69 التكلفة الحدية: يُمثل الاقتران: $C'(x) = (0.1x + 1)e^{0.03x}$ التكلفة الحدية لكل قطعة (بالدينار)

تُنتج في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار.

أجد اقتران التكلفة $C(x)$ ، علماً بأن $C(10) = 200$.

مسألة اليوم يُمثل الاقتران: $S'(t) = 350 \ln(t+1)$ مُعدّل تغيّر المبيعات الشهرية لكرة قدم جديدة، حيث t عدد الأشهر منذ طرح الكرة في الأسواق، و $S(t)$ عدد الكرات المبيعة شهرياً. أجد $S(t)$ ، علماً بأن $S(0) = 0$.

33 يتحرّك جُسيم في مسار مستقيم، وتُعطي سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = t e^{-t/2}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتّر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسيم الحركة من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستمعمل المعلومات المعطاة لإيجاد

34 $f'(x) = (x+2) \sin x$; $(0, 2)$

35 قاعدة الاقتران $f(x)$: $f'(x) = 2xe^{-x}$; $(0, 3)$

36 دورة تدريبية: تقدّمت دعاء لدورة تدريبية مُتقدّمة في الطباعة. إذا كان عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة يزداد بمُعدّل:

$$N'(t) = (t+6)e^{-0.25t}, \quad \text{حيث } N(t) \text{ عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة بعد } t \text{ أسبوعاً من التحاقها بالدورة،}$$

فأجد $N(t)$ ، علماً بأن دعاء كانت تطبع 40 كلمة في الدقيقة عند بدّء الدورة.



اتحقق من فهمي صفحة 69

$$C(x) = \int (0.1x + 1)e^{0.03x} dx$$

$$= (0.1x + 1) \left(\frac{1}{0.03} e^{0.03x} \right) - \int \frac{0.1}{0.03} e^{0.03x} dx$$

$$= \frac{10}{3} (x + 10) e^{0.03x} - \frac{1000}{9} e^{0.03x} + C$$

$$C(10) = \frac{200}{3} e^{0.3} - \frac{1000}{9} e^{0.3} + C = 200 \Rightarrow C \approx 260 \Rightarrow C(x) = \frac{10}{3} e^{0.03x} \left(x - \frac{70}{3} \right) + 260$$

$$\begin{aligned} u &= 0.1x + 1 & dv &= e^{0.03x} dx \\ du &= 0.1 dx & v &= \frac{1}{0.03} e^{0.03x} \end{aligned}$$

مسألة اليوم صفحة 60

$$S(t) = \int 350 \ln(t + 1) dt$$

$$\int 350 \ln(1 + t) dt = 350t \ln(t + 1) - \int \frac{350t}{t + 1} dt$$

$$= 350t \ln(t + 1) - \int \left(350 - \frac{350}{t + 1} \right) dt$$

$$= 350t \ln(t + 1) - 350t + 350 \ln(t + 1) + C$$

$$S(t) = 0 - 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow S(t) = 350t \ln(t + 1) - 350t + 350 \ln(t + 1)$$

$$\begin{aligned} u &= \ln(t + 1) & dv &= 350 dt \\ du &= \frac{1}{t + 1} dt & v &= 350 t \end{aligned}$$

$$33 \quad s(t) = \int t e^{-\frac{t}{2}} dt$$

$$u = t \quad dv = e^{-\frac{t}{2}} dt$$

$$s(t) = -2te^{-\frac{t}{2}} - \int -2e^{-\frac{t}{2}} dt = -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + C \quad du = dt \quad v = -2e^{-\frac{t}{2}}$$

$$s(0) = 0 - 4 + C = 0 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow s(t) = -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + 4$$

$$34 \quad f(x) = \int (x + 2) \sin x dx$$

$$\begin{aligned} u &= x + 2 & dv &= \sin x dx \\ du &= dx & v &= -\cos x \end{aligned}$$

$$f(x) = -(x + 2) \cos x + \int \cos x dx = -(x + 2) \cos x + \sin x + C$$

$$f(0) = -2 + 0 + C = 2 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow f(x) = -(x + 2) \cos x + \sin x + 4$$

$$35 \quad f(x) = \int 2xe^{-x} dx$$

$$u = 2x \quad dv = e^{-x} dx$$

$$du = 2dx \quad v = -e^{-x}$$

$$f(x) = -2xe^{-x} + \int 2e^{-x} dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$$

$$f(0) = 0 - 2 + C = 3 \Rightarrow C = 5 \Rightarrow f(x) = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + 5$$

$$36 \quad N(t) = \int (t + 6)e^{-0.25t} dt$$

$$u = t + 6 \quad dv = e^{-0.25t} dt$$

$$du = dt \quad v = -4e^{-0.25t}$$

$$N(t) = -4(t + 6)e^{-0.25t} + \int 4e^{-0.25t} dt$$

$$= -4(t + 6)e^{-0.25t} - 16e^{-0.25t} + C$$

$$N(0) = -24 - 16 + C = 40 \Rightarrow C = 80 \Rightarrow N(t) = -4(t + 6)e^{-0.25t} - 16e^{-0.25t} + 80$$

(3) تكرار التكامل بالأجزاء : في بعض التكاملات قد نضطر إلى استعمال التكامل بالأجزاء أكثر من مرة.

$$1) \int 6x^2 \cos 2x \, dx$$

$$\begin{aligned} \therefore u &= 6x^2, \, dv = \cos 2x \\ du &= 12x \, dx, \, v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{aligned}$$

Abdulkadir Hasanat
Abdulkadir Hasanat

078 531 88 77

$$= 6x^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) - \int (12x) \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) dx$$

$$= 3x^2 \sin 2x - \int (6x)(\sin 2x) \, dx$$

$$\begin{aligned} \therefore u &= 6x, \, dv = \sin 2x \\ du &= 6 \, dx, \, v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{aligned}$$

$$= 3x^2 \sin 2x - (-3x \cos 2x + \int (-3 \cos 2x) \, dx)$$

$$= 3x^2 \sin 2x + 3x \cos 2x + \frac{3}{2} \sin 2x + c$$

$$2) \int x^2 \sqrt{3x-2} \, dx \therefore u = x^2, \, dv = \sqrt{3x-2}, \, du = 2x \, dx, \, v = \frac{2}{9} (3x-2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= (x^2) \frac{2}{9} (3x-2)^{\frac{3}{2}} - \int (2x) \left(\frac{2}{9} (3x-2)^{\frac{3}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{2}{9} (x^2) (3x-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9} \int (x) (3x-2)^{\frac{3}{2}} dx \therefore u = x, \, du = dx, \, dv = (3x-2)^{\frac{3}{2}}, \, v = \frac{2}{15} (3x-2)^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{2}{9} (x^2) (3x-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9} \left((x) \frac{2}{15} (3x-2)^{\frac{5}{2}} - \int (3x-2)^{\frac{5}{2}} dx \right)$$

$$= \frac{2}{9} (x^2) (3x-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9} \left((x) \frac{2}{15} (3x-2)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{15} \times \frac{2}{21} (3x-2)^{\frac{7}{2}} \right) + c$$

$$3) \int x^2 \times 5^x \, dx \therefore u = x^2 \Rightarrow du = 2x, \, dv = 5^x, \, v = \frac{5^x}{\ln 5}$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2) 5^x}{\ln 5} - \int \frac{(2x) 5^x}{\ln 5} dx \therefore u = 2x, \, du = 2, \, dv = 5^x, \, v = \frac{5^x}{\ln 5}$$

$$= \frac{(x^2) 5^x}{\ln 5} - \frac{(2x) 5^x}{\ln^2 5} + \int \frac{(2) 5^x}{\ln^2 5} dx = \frac{(x^2) 5^x}{\ln 5} - \frac{(2x) 5^x}{\ln^2 5} + \frac{(2) 5^x}{\ln^3 5} + c$$

أتحقق من فهمي 64 أجد كلاً من التكاملين الآتيين: a) $\int x^2 \sin x \, dx$ b) $\int x^3 e^{4x} \, dx$

أدرب وأحل المسائل أجد كلاً من التكاملات الآتية:

3 $\int (2x^2 - 1) e^{-x} \, dx$

9 $\int 2x^2 \sec^2 x \tan x \, dx$

13 $\int e^{3x} \cos x \, dx$

1) $\int 20x^2 \sin 2x \, dx = \dots - 5x^2 \cos 2x + 10x \sin 2x + 5 \cos 2x + c$

2) $\int x^5 \sqrt{x^3 + 1} \, dx = \dots \frac{2}{9} x^3 \sqrt{(x^3 + 1)^3} - \frac{4}{45} \sqrt{(x^3 + 1)^5} + c$



3) $\int 4x^2 e^{2x} \, dx = \dots 2x^2 e^{2x} - 2x e^{2x} + 2 e^{2x} + c$

a $u = x^2 \quad dv = \sin x \, dx$
 $du = 2x \, dx \quad v = -\cos x$
 $\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x - \int -2x \cos x \, dx$
 $\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$
 $\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$

أتحقق من فهمي صفحة 64

$u = 2x \quad dv = \cos x \, dx$
 $du = 2 \, dx \quad v = \sin x$

b $u = x^3 \quad du = 3x^2 \, dx \quad dv = e^{4x} \, dx \quad v = \frac{1}{4} e^{4x}$
 $\int x^3 e^{4x} \, dx = \frac{1}{4} x^3 e^{4x} - \int \frac{3}{4} x^2 e^{4x} \, dx$
 $\int x^3 e^{4x} \, dx = \frac{1}{4} x^3 e^{4x} - \frac{3}{16} x^2 e^{4x} + \int \frac{3}{8} x e^{4x} \, dx$
 $\int x^3 e^{4x} \, dx = \frac{1}{4} x^3 e^{4x} - \frac{3}{16} x^2 e^{4x} + \frac{3}{32} x e^{4x} - \int \frac{3}{32} e^{4x} \, dx$
 $= \frac{1}{4} x^3 e^{4x} - \frac{3}{16} x^2 e^{4x} + \frac{3}{32} x e^{4x} - \frac{3}{128} e^{4x} + C$

$u = \frac{3}{4} x^2 \quad du = \frac{3}{2} x \, dx$
 $dv = e^{4x} \, dx \quad v = \frac{1}{4} e^{4x}$

$u = \frac{3}{8} x \quad dv = e^{4x} \, dx$
 $du = \frac{3}{8} \, dx \quad v = \frac{1}{4} e^{4x}$

3 $\int (2x^2 - 1) e^{-x} \, dx = -(2x^2 - 1) e^{-x} + \int 4x e^{-x} \, dx$
 $\int (2x^2 - 1) e^{-x} \, dx = -(2x^2 - 1) e^{-x} - 4x e^{-x} + \int 4 e^{-x} \, dx$
 $= -(2x^2 - 1) e^{-x} - 4x e^{-x} - 4 e^{-x} + C$
 $= -e^{-x} (2x^2 + 4x + 3) + C$

$u = 2x^2 - 1 \quad dv = e^{-x} \, dx$
 $du = 4x \, dx \quad v = -e^{-x}$

بالأجزاء مرة أخرى:
 $u = 4x \quad dv = e^{-x} \, dx$
 $du = 4 \, dx \quad v = -e^{-x}$

$$9 \quad u = 2x^2 \quad dv = \sec^2 x \tan x \, dx$$

$$du = 4x \, dx \quad v = \frac{1}{2} \tan^2 x$$

ملاحظة: لإيجاد v استخدمنا طريقة التعويض، حيث: $y = \tan x, dx = \frac{dy}{\sec^2 x}$ ومنه:

$$v = \int \sec^2 x \tan x \, dx = \int \sec^2 x y \frac{dy}{\sec^2 x} = \int y \, dy = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \tan^2 x$$

$$\int 2x^2 \sec^2 x \tan x \, dx = 2x^2 \left(\frac{1}{2} \tan^2 x \right) - \int 2x \tan^2 x \, dx$$

$$u = 2x \quad dv = \tan^2 x \, dx = (\sec^2 x - 1) \, dx \quad \text{بالأجزاء مرة أخرى:}$$

$$du = 2 \, dx \quad v = \tan x - x$$

$$\int 2x^2 \sec^2 x \tan x \, dx = x^2 \tan^2 x - \left(2x(\tan x - x) - \int 2(\tan x - x) \, dx \right)$$

$$= x^2 \tan^2 x - 2x \tan x + 2x^2 + 2 \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} - x \right) \, dx$$

$$= x^2 \tan^2 x - 2x \tan x + 2x^2 - 2 \ln |\cos x| - x^2 + C$$

$$= x^2 \tan^2 x - 2x \tan x + x^2 - 2 \ln |\cos x| + C$$

$$13 \quad u = e^{3x} \quad dv = \cos x \, dx$$

$$du = 3e^{3x} \, dx \quad v = \sin x$$

$$\int e^{3x} \cos x \, dx = e^{3x} \sin x - \int 3e^{3x} \sin x \, dx$$

$$u = 3e^{3x} \quad dv = \sin x \, dx$$

بالأجزاء مرة أخرى:

$$du = 9e^{3x} \, dx \quad v = -\cos x$$

$$\int e^{3x} \cos x \, dx = e^{3x} \sin x - 3e^{3x}(-\cos x) - 9 \int e^{3x} \cos x \, dx$$

$$10 \int e^{3x} \cos x \, dx = e^{3x} \sin x + 3e^{3x} \cos x$$

$$\int e^{3x} \cos x \, dx = \frac{1}{10} e^{3x} (\sin x + 3 \cos x) + C$$

(4) التكاملات الدورية : قد ينتج من تكرار التكامل بالأجزاء تكاملٌ مطابقٌ للتكامل الأصلي (ويُسمى دورياً). عندها يُمكن إيجاد التكامل جبرياً بطريقة مُشابهة لحلّ المعادلات.

$$1) \int e^{2x} \sin x \, dx \quad :: u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx, \quad dv = e^{2x}, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$= \sin x \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) - \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) (\cos x) \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos x \, dx$$

$$:: u = \cos x, \quad du = -\sin x, \quad dv = e^{2x}, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \cos x - \int \frac{-1}{2} e^{2x} \sin x \, dx \right)$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x - \frac{1}{4} \int e^{2x} \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \sin x \, dx + \frac{1}{4} \int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x + c$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} \int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x + c$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \sin x \, dx = \frac{2}{5} e^{2x} \sin x - \frac{1}{5} e^{2x} \cos x + c$$

$$2) \int 3^x \cos x \, dx \quad :: u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx, \quad dv = 3^x, \quad v = \frac{3^x}{\ln 3}$$

$$\int 3^x \cos x \, dx = \frac{3^x}{\ln 3} \cos x + \int \frac{3^x}{\ln 3} (\sin x) \, dx$$

$$:: u = \sin x, \quad du = \cos x, \quad dv = \frac{3^x}{\ln 3}, \quad v = \frac{3^x}{\ln^2 3}$$

$$\int 3^x \cos x \, dx = \frac{3^x}{\ln 3} \cos x + \left(\frac{3^x}{\ln^2 3} (\sin x) - \int \frac{3^x}{\ln^2 3} \cos x \, dx \right)$$

$$\int 3^x \cos x \, dx = \frac{3^x}{\ln 3} \cos x + \frac{3^x}{\ln^2 3} \sin x - \int \frac{3^x}{\ln^2 3} \cos x \, dx$$

$$\int 3^x \cos x \, dx + \frac{1}{\ln^2 3} \int 3^x \cos x \, dx = \frac{3^x}{\ln 3} \cos x + \frac{3^x}{\ln^2 3} \sin x$$

$$\Rightarrow \int 3^x \cos x \, dx = \frac{3^x \ln 3}{1 + \ln^2 3} \cos x + \frac{3^x}{1 + \ln^2 3} \sin x$$

$$3) \int \sin x \cos x \, dx \quad :: u = \sin x, \quad dv = \cos x$$

$$\Rightarrow du = \cos x, \quad v = \sin x$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = (\sin x)(\sin x) - \int \sin x \cos x \, dx$$

$$\int \sin x \cos x \, dx + \int \sin x \cos x \, dx = (\sin x)(\sin x)$$

$$\Rightarrow \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$$

أتحقق من فهمي 66 أجد كلاً من التكاملين الآتيين: **a) $\int \frac{\sin x}{e^x} dx$ b) $\int \sec^3 x \, dx$**

a) $\int \frac{\sin x}{e^x} dx$ تحقق من فهمي صفحة 66

$u = \sin x$	$dv = e^{-x} dx$
$du = \cos x \, dx$	$v = -e^{-x}$

$$\int \frac{\sin x}{e^x} dx = \int \sin x e^{-x} dx$$

$$\int \sin x e^{-x} dx = -\sin x e^{-x} - \int -e^{-x} \cos x \, dx$$

$$\int \sin x e^{-x} dx = -\sin x e^{-x} + \int e^{-x} \cos x \, dx$$

$u = \cos x$	$dv = e^{-x} dx$
$du = -\sin x \, dx$	$v = -e^{-x}$

$$\int \sin x e^{-x} dx = -\sin x e^{-x} - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow 2 \int \sin x e^{-x} dx = e^{-x}(\sin x + \cos x) + C$$

$$\int \sin x e^{-x} dx = \frac{-1}{2} e^{-x}(\sin x + \cos x) + C$$

b) $\int \sec^3 x \, dx$ تحقق من فهمي صفحة 66

$u = \sec x$	$dv = \sec^2 x \, dx$
$du = \sec x \tan x \, dx$	$v = \tan x$

$$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx$$

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \int \sec x \, dx = \sec x \tan x + \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} \, dx$$

$$= \sec x \tan x + \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C$$

5 تكرار التكامل بالأجزاء باستعمال طريقة الجدول

يُمكن استعمال طريقة الجدول لإيجاد التكاملات التي صورها: $f(x)$ كثير حدود

$$\int f(x) \sin ax \, dx \quad \int f(x) \cos ax \, dx \quad \int f(x) (ax+b)^n \, dx \quad \int f(x) e^{ax} \, dx$$

تكمّل المقدار الآخر	إشارة الضرب	اشتقاق $f(x)$
$f(x)$	(+)	Δ
$f'(x)$	(-)	$\square$
$f''(x)$	(+)	∇
$\vdots$	(-)	$\circ$
0	(+)	$\int$

عندما يتكون المُكامل من جزئين أحدهما دوري ،
وتكرار اشتقاق الآخر يصبح صفراً : نستخدم طريقة الجدول

مثال:

اشتقاق	تكمّل
x^2	e^x
$2x$	e^x
2	e^x
0	e^x

$$1) \int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

اشتقاق	تكمّل
$(x+1)^3$	$\sin x$
$3(x+1)^2$	$-\cos x$
$6(x+1)$	$-\sin x$
6	$\cos x$
0	$\sin x$

$$2) \int (x+1)^3 \sin x \, dx = -(x+1)^3 \cos x + 3(x+1)^2 \sin x + 6(x+1) \cos x - 6 \sin x + c$$

اشتقاق	تكمّل
$x^3 + 2x - 1$	$\cos(4x)$
$3x^2 + 2$	$\frac{1}{4} \sin(4x)$
$6x$	$-\frac{1}{16} \cos(4x)$
6	$-\frac{1}{64} \sin(4x)$
0	$\frac{1}{256} \cos(4x)$

$$3) \int (x^3 + 2x - 1) \cos x \, dx = \frac{1}{4} (x^3 + 2x - 1) \sin 4x + \frac{1}{16} (3x^2 + 2) \cos 4x - \frac{3x}{32} \sin 4x - \frac{3}{128} \cos 4x + c$$

اشتقاق	تكمّل
x^2	$+(x-2)^{3/2}$
$2x$	$-\frac{2}{5}(x-2)^{5/2}$
2	$+\frac{4}{35}(x-2)^{7/2}$
0	$-\frac{8}{315}(x-2)^{9/2}$

$$4) \int x^2 (x-2)^{3/2} \, dx = \frac{2}{5} x^2 (x-2)^{5/2} - \frac{8}{35} x (x-2)^{7/2} + \frac{16}{315} (x-2)^{9/2} + c$$

أتحقق من فهمي 67 أجد كلاً من التكاملين الآتيين: a) $\int x^4 \cos 4x \, dx$ b) $\int x^5 e^x \, dx$

أتحقق من فهمي 67 أجد كلاً من التكاملات الآتية: 11 $\int x^3 \cos 2x \, dx$ أدرّب وأحلّ المسائل

$$1) \int 6x^2 \sin x \cos x \, dx = \dots -\frac{3}{2}x^2 \cos 2x - \frac{6}{4}x \sin 2x + \frac{3}{4} \cos 2x + c$$

$$2) \int x^3 \cos 2x \, dx = \dots \frac{1}{2}x^3 \sin 2x + \frac{3}{4}x^2 \cos 2x - \frac{3}{4}x \sin 2x - \frac{3}{2} \cos 2x + c$$

$$3) \int x^3 e^{-x} \, dx = \dots -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6x e^{-x} - 6e^{-x} + c$$

$$4) \int x^2 \sqrt{(x-2)^3} \, dx = \dots \frac{2}{5}x^2 \sqrt{(x-2)^5} - \frac{8x}{35} \sqrt{(x-2)^7} + \frac{16}{315} \sqrt{(x-2)^9} + c$$

$$5) \int 10x^2 (2x-1)^4 \, dx = \dots x^2 (2x-1)^5 - \frac{x}{6} (2x-1)^6 + \frac{1}{84} (2x-1)^7 + c$$

a أتحقق من فهمي صفحة 67

$f(x)$	$g(x)$
x^4	$\cos 4x$
$4x^3$	$\frac{1}{4} \sin 4x$
$12x^2$	$-\frac{1}{16} \cos 4x$
$24x$	$-\frac{1}{64} \sin 4x$
24	$\frac{1}{256} \cos 4x$
0	$\frac{1}{1024} \sin 4x$

$$\frac{1}{4}x^4 \sin 4x + \frac{1}{4}x^3 \cos 4x - \frac{3}{16}x^2 \sin 4x - \frac{3}{32}x \cos 4x + \frac{3}{128} \sin 4x + C$$

b أتحقق من فهمي صفحة 67

$f(x)$	$g(x)$
x^5	e^x
$5x^4$	e^x
$20x^3$	e^x
$60x^2$	e^x
$120x$	e^x
120	e^x
0	e^x

$$= e^x (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + C$$

11 تكاملاته المتكررة $f(x)$ ومشتقاته المتكررة $g(x)$

$f(x)$	$g(x)$
x^3	$\cos 2x$
$3x^2$	$\frac{1}{2} \sin 2x$
$6x$	$-\frac{1}{4} \cos 2x$
6	$-\frac{1}{8} \sin 2x$
0	$\frac{1}{16} \cos 2x$

$$= \frac{1}{2}x^3 \sin 2x + \frac{3}{4}x^2 \cos 2x - \frac{3}{4}x \sin 2x - \frac{3}{8} \cos 2x + C$$

6 التكامل بالأجزاء لتكاملات محدودة:

$$1) \int_1^e \ln x \, dx \quad :: u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \quad v = x, \quad dv = dx$$

$$\Rightarrow \int_1^e \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e = (e \ln e - 1 \ln 1) - (e - 1) = 1$$

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

أتحقق من فهمي 70 أجد كلاً من التكاملين الآتيين: a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ b) $\int_0^1 x e^{-2x} dx$

16 $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx$

17 $\int_1^e \ln x^2 \, dx$

18 $\int_1^2 \ln(xe^x) \, dx$

أتردّب وأحلّ المسائل

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

19 $\int_{\pi/12}^{\pi/9} x \sec^2 3x \, dx$

20 $\int_1^e x^4 \ln x \, dx$

21 $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx$

22 $\int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x}) \, dx$

23 $\int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} \, dx$

24 $\int_0^1 x 3^x \, dx$

a $u = \ln x \quad dv = x^{-2} dx$
 $du = \frac{1}{x} dx \quad v = -\frac{1}{x}$
 $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} \Big|_1^e + \int_1^e x^{-2} dx = -\frac{\ln x}{x} \Big|_1^e + \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$

b $u = x \quad dv = e^{-2x} dx$
 $du = dx \quad v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$
 $\int_0^1 x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} \Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{4} e^{-2x}\right) \Big|_0^1$
 $= -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$

16 $\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$: وجئنا في المثال 3 أن:
 $\Rightarrow \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} e^{\pi/2} - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} e^{\pi/2} - \frac{1}{2}$

17 $\int_1^e \ln x^2 \, dx = \int_1^e 2 \ln x \, dx$
 $u = 2 \ln x \quad dv = dx$
 $du = \frac{2}{x} dx \quad v = x$
 $= 2x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e 2 dx = 2x \ln x \Big|_1^e - 2x \Big|_1^e = 2e \ln e - 2 \ln 1 - 2e + 2 = 2e - 0 - 2e + 2 = 2$

18 $\int_1^2 \ln(xe^x) \, dx = \int_1^2 (\ln x + \ln e^x) \, dx = \int_1^2 (\ln x + x) \, dx = \int_1^2 \ln x \, dx + \int_1^2 x \, dx$
 بطريقة الأجزاء:
 $\int_1^2 \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \ln 1 - 2 + 1 = 2 \ln 2 - 1$
 $\int_1^2 x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \int_1^2 \ln(xe^x) \, dx = 2 \ln 2 - 1 + \frac{3}{2} = 2 \ln 2 + \frac{1}{2}$

$$19 \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} x \sec^2 3x \, dx = \frac{1}{3} x \tan 3x \Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{3} \tan 3x \, dx$$

$$= \frac{1}{3} x \tan 3x \Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} - \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{3} \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \, dx = \frac{1}{3} x \tan 3x \Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} + \frac{1}{9} \ln \cos 3x \Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}}$$

$$= \frac{\pi}{27} \tan \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{36} \tan \frac{\pi}{4} + \frac{1}{9} \ln \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{9} \ln \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{\pi}{36} + \frac{1}{9} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \ln \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$u = x \quad dv = \sec^2 3x \, dx$
 $du = dx \quad v = \frac{1}{3} \tan 3x$

$$20 \int_1^e \frac{1}{5} x^5 \ln x \, dx = \frac{1}{5} x^5 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{5} x^4 \, dx = \frac{1}{5} x^5 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{25} x^5 \Big|_1^e$$

$$= \frac{1}{5} e^5 - 0 - \frac{1}{25} e^5 + \frac{1}{25} = \frac{4e^5 + 1}{25}$$

$u = \ln x \quad dv = x^4 \, dx$
 $du = \frac{dx}{x} \quad v = \frac{1}{5} x^5$

$$21 \int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$$

$f(x)$		$g(x)$
x^2	+	$\sin x$
$2x$	-	$-\cos x$
2	-	$-\sin x$
0	+	$\cos x$

$$22 \int_0^1 x e^{-2x} \, dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - x e^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} - e^{-x} \right) \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - x e^{-x} \Big|_0^1 - \left(\frac{1}{4} e^{-2x} + e^{-x} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-2} - e^{-1} - \frac{1}{4} e^{-2} - e^{-1} + \frac{1}{4} + 1$$

$$= -\frac{3}{4} e^{-2} - 2e^{-1} + \frac{5}{4}$$

$u = x \quad dv = (e^{-2x} + e^{-x}) \, dx$
 $du = dx \quad v = -\frac{1}{2} e^{-2x} - e^{-x}$

$$23 \int_0^1 x e^x (1+x)^{-1} \, dx = -x e^x (1+x)^{-1} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^x (x+1)}{(1+x)} \, dx$$

$$= -\frac{x e^x}{1+x} \Big|_0^1 + e^x \Big|_0^1 = -\frac{e}{2} + e - 1 = \frac{1}{2} e - 1$$

$u = x e^x \quad dv = (1+x)^{-2} \, dx$
 $du = (x e^x + e^x) \, dx \quad v = -(1+x)^{-1}$
 $= e^x (x+1) \, dx$

$$24 \int_0^1 x 3^x \, dx = x \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{3^x}{\ln 3} \, dx = x \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_0^1 - \frac{3^x}{(\ln 3)^2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{\ln 3} - \frac{3}{(\ln 3)^2} + \frac{1}{(\ln 3)^2} = \frac{3 \ln 3 - 2}{(\ln 3)^2}$$

$u = x \quad dv = 3^x \, dx$
 $du = dx \quad v = \frac{3^x}{\ln 3}$

7) التكامل بالأجزاء، والتكامل بالتعويض

أحياناً لحل بعض التكاملات نحتاج إلى استعمال طريقة التعويض وطريقة الأجزاء معاً.
وهناك قاعدة (شبه عامة): عند وجود زاوية غير خطية، أس غير خطي، أو ما بداخل اللوغاريتم غير خطي :
غالباً نبدأ بالتعويض (بفرض المقدار غير الخطي y) ثم نلاحظ الناتج ونحدد الطريقة التالية، أجزاء أم كسور

$$1) \int \sec \sqrt{x} \, dx \quad \because y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow 2y \, dy = dx$$

$$= \int \sec y \, 2y \, dy = \int 2y \sec y \, dy \quad \because u = 2y, \, dv = \sec y$$



$$du = 2dy, \, v = \tan y$$

$$= 2y \tan y - \int 2 \tan y \, dy = 2y \tan y - 2 \ln |\cos y| + c$$

$$= 2\sqrt{x} \tan \sqrt{x} + 2 \ln |\cos \sqrt{x}| + c$$

$$2) \int \sin 2x \, e^{\sin x} \, dx \quad \because y = \sin x \Rightarrow dy = \cos x \, dx$$

$$= \int 2 \sin x \cos x \, e^{\sin x} \frac{dy}{\cos x} = \int 2 \sin x \, e^{\sin x} \, dy = \int 2y \, e^y \, dy$$

$$\because u = 2y, \, dv = e^y$$

$$du = 2dy, \, v = e^y$$

$$= 2y \, e^y - \int 2 \, e^y \, dy = 2y \, e^y - 2 \, e^y + c$$

$$= 2 \sin x \, e^{\sin x} - 2 \, e^{\sin x} + c$$

$$3) \int 6x \ln(x^2 + 4) \, dx \quad \because y = x^2 + 4 \Rightarrow dy = 2x \, dx$$

$$= \int 6x \ln(y) \frac{dy}{2x} = 3 \int \ln(y) \, dy$$

$$\because u = \ln y, \, dv = dy$$

$$du = \frac{1}{y}, \, v = y$$

$$= 3(y \ln y - \int y \frac{1}{y} \, dy) = 3y \ln y - 3y + c$$

$$= 3(x^2 + 4) \ln(x^2 + 4) - 3(x^2 + 4) + c$$

أتحقق من فهمي 71 أجد قيمة كل من التكاملين الآتيين: $\int x^5 e^{x^2} dx$ b) $\int (x^3 + x^5) \sin x^2 dx$ a)

أتحقق من فهمي 71 أجد كلاً من التكاملات الآتية:

- 25 $\int x^3 e^{x^2} dx$ 26 $\int \cos(\ln x) dx$ 27 $\int x^3 \sin x^2 dx$
28 $\int e^{\cos x} \sin 2x dx$ 29 $\int \sin \sqrt{x} dx$ 30 $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} dx$

أتحقق من فهمي صفحة 71

a $\int (x^3 + x^5) \sin x^2 dx = \int x^3 \sin x^2 dx + \int x^5 \sin x^2 dx$

نجد كل تكامل على حدة. فنجد التكامل الأيسر كما يأتي:

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\int x^3 \sin x^2 dx = \int x^3 \sin y \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2} \int x^2 \sin y dy = \frac{1}{2} \int y \sin y dy$$

$$\int y \sin y dy = -y \cos y - \int -\cos y dy$$

$$= -y \cos y + \sin y$$

$$u = y \quad dv = \sin y$$

$$du = dy \quad v = -\cos y$$

$$\int x^3 \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos x^2 + \frac{1}{2} \sin x^2 + C$$

ونجد التكامل الأيمن كما يأتي:

$$\int x^5 \sin x^2 dx = \int x^5 \sin y \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2} \int x^4 \sin y dy = \frac{1}{2} \int y^2 \sin y dy$$

$$\int y^2 \sin y dy = -y^2 \cos y - \int -2y \cos y dy$$

$$= -y^2 \cos y + 2y \sin y - 2 \int \sin y dy$$

$$= -y^2 \cos y + 2y \sin y + 2 \cos y$$

$$u = y^2 \quad dv = \sin y$$

$$du = 2y dy \quad v = -\cos y$$

$$\int x^5 \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} x^4 \cos x^2 + x^2 \sin x^2 + \cos x^2 + C$$

$$\int (x^3 + x^5) \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos x^2 + \frac{1}{2} \sin x^2 - \frac{1}{2} x^4 \cos x^2 + x^2 \sin x^2 + \cos x^2 + C$$

71 تحقق من فهمي صفحة

$$b \quad y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\int x^5 e^{x^2} dx = \int x^5 e^y \frac{dy}{2x} = \int \frac{1}{2} x^4 e^y dy = \frac{1}{2} \int y^2 e^y dy$$

$$\int y^2 e^y dy = y^2 e^y - \int 2y e^y dy = y^2 e^y - 2y e^y + \int 2e^y dy$$

$$\begin{aligned} u &= y^2 & dv &= e^y dy \\ du &= 2y dy & v &= e^y \end{aligned}$$

$$= y^2 e^y - 2y e^y + 2e^y = (y^2 - 2y + 2)e^y = \left(\frac{1}{2} x^4 - x^2 + 1\right) e^{x^2} + C$$

$$25 \quad \int x^3 e^{x^2} dx = \int x^3 e^y \frac{dy}{2x} = \int \frac{1}{2} x^2 e^y dy = \int \frac{1}{2} y e^y dy$$

$$y = x^2 \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\int \frac{1}{2} y e^y dy = \frac{1}{2} y e^y - \int \frac{1}{2} e^y dy$$

$$u = \frac{1}{2} y \quad du = \frac{1}{2} dy \quad dv = e^y dy \quad v = e^y$$

$$= \frac{1}{2} y e^y - \frac{1}{2} e^y + C \Rightarrow \int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$26 \quad y = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x dy, \quad x = e^y$$

$$\int \cos(\ln x) dx = \int x \cos y dy = \int e^y \cos y dy$$

$$\int e^y \cos y dy = \frac{1}{2} e^y (\sin y + \cos y) + C \quad \text{من المثال محلول الصفحات 55 و 56 في كتاب الطالب}$$

$$\Rightarrow \int \cos(\ln x) dx = \frac{1}{2} e^{\ln x} (\sin \ln x + \cos \ln x) + C = \frac{1}{2} x (\sin \ln x + \cos \ln x) + C$$

$$27 \quad \int x^3 \sin x^2 dx = \int x^3 \sin y \frac{dy}{2x} = \int \frac{1}{2} x^2 \sin y dy = \int \frac{1}{2} y \sin y dy$$

$$y = x^2 \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$u = \frac{1}{2} y \quad du = \frac{1}{2} dy \quad v = -\cos y \quad dv = \sin y dy$$

$$\int \frac{1}{2} y \sin y dy = -\frac{1}{2} y \cos y + \int \frac{1}{2} \cos y dy = -\frac{1}{2} y \cos y + \frac{1}{2} \sin y + C$$

$$\int x^3 \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos x^2 + \frac{1}{2} \sin x^2 + C$$

$$28 \quad \int e^{\cos x} \sin 2x dx = \int e^y (2 \sin x \cos x) \frac{dy}{-\sin x} = \int -2y e^y dy$$

$$y = \cos x \Rightarrow dx = \frac{dy}{-\sin x}$$

$$\int -2y e^y dy = -2y e^y + \int 2e^y dy = -2y e^y + 2e^y + C$$

$$\begin{aligned} u &= -2y & dv &= e^y dy \\ du &= -2 dy & v &= e^y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int e^{\cos x} \sin 2x dx = -2 \cos x e^{\cos x} + 2e^{\cos x} + C$$

29 $\int \sin \sqrt{x} dx = \int 2y \sin y dy$ $y = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y} \Rightarrow dx = 2y dy$

$\int 2y \sin y dy = -2y \cos y + \int 2 \cos y dy$ $u = 2y \quad dv = \sin y dy$
 $du = 2 dy \quad v = -\cos y$

$= -2y \cos y + 2 \sin y + C \Rightarrow \int \sin \sqrt{x} dx = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$

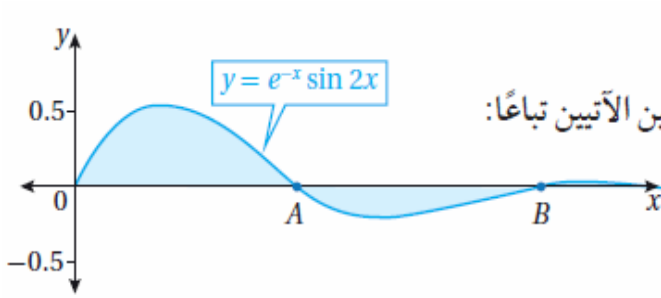
30 $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{x^3 e^y}{(y + 1)^2} \frac{dy}{2x}$ $y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$

$= \int \frac{1}{2} x^2 \frac{e^y}{(y + 1)^2} dy$ $u = \frac{1}{2} y e^y \quad dv = \frac{1}{(y + 1)^2} dy \quad v = \frac{-1}{y + 1}$
 $du = \frac{1}{2} (y e^y + e^y) dy = \frac{1}{2} e^y (y + 1) dy$

$\int \frac{1}{2} y e^y \frac{e^y}{(y + 1)^2} dy = \frac{-y e^y}{2(y + 1)} + \int \frac{1}{y + 1} \times \frac{1}{2} e^y (y + 1) dy = \frac{-y e^y}{2(y + 1)} + \frac{1}{2} \int e^y dy$

$= \frac{-y e^y}{2(y + 1)} + \frac{1}{2} e^y + C = \frac{-x^2 e^{x^2}}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} e^{x^2} + C = \frac{e^{x^2}}{2(x^2 + 1)} + C$

8 التكامل بالأجزاء ، والمساحة ومتفرقات



إذا كان الشكل المجاور يُمثّل منحنى الاقتران:

$f(x) = e^{-x} \sin 2x$ ، حيث: $x \geq 0$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

31 أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A، والنقطة B.

32 أجد مساحة المنطقة المُظلّلة.

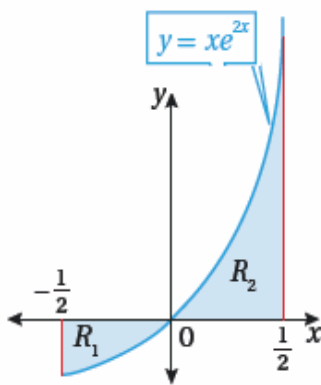


مهارات التفكير العليا

37 تبرير: أثبت أن: $\int_{1/2}^3 x^2 \ln 2x \, dx = 9 \ln 6 - \frac{215}{72}$ 38 تبرير: أثبت أن: $\int_0^{\pi/4} x \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{\pi-2}{16}$

39 تبرير: إذا كان: $\int_0^a x e^{x/2} \, dx = 6$ ، فأثبت أن a يُحقّق المعادلة: $x = 2 + e^{-x/2}$.

40 تبرير: أجد: $\int (\ln x)^2 \, dx$ بطريقتين مختلفتين، مُبرراً إجابتي.



تبرير: إذا كان الشكل المجاور يُمثّل منحنى الاقتران: $y = x e^{2x}$ ، حيث: $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

41 أجد مساحة كلٍّ من المنطقة R_1 ، والمنطقة R_2 .

42 أثبت أن مساحة المنطقة R_1 إلى مساحة المنطقة R_2 تساوي $e - 2$.

تحدّد: أستخدم التكامل بالأجزاء لإثبات كلٍّ ممّا يأتي، حيث: n عدد صحيح موجب، و $a \neq 0$:

43 $\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} (-1 + (n+1) \ln x) + C$ 44 $\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$

31 الإحداثيان x للنقطتين A و B هما أصغر حلين موجبين للمعادلة: $f(x) = e^{-x} \sin 2x = 0$
 $\Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi, 2\pi, \dots \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \pi, \dots \Rightarrow A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), B(\pi, 0)$

32 $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 2x \, dx + \left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-x} \sin 2x \, dx\right)$
 التبسيط منجد أولاً: $\int e^{-x} \sin 2x \, dx$ (التكامل غير المحدود)

$$u = e^{-x} \quad dv = \sin 2x \, dx$$

$$du = -e^{-x} dx \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \int \frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x \, dx$$

بالأجزاء مرة أخرى:

$$u = \frac{1}{2} e^{-x} \quad dv = \cos 2x \, dx$$

$$du = -\frac{1}{2} e^{-x} dx \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x - \frac{1}{4} \int e^{-x} \sin 2x \, dx$$

$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx + \frac{1}{4} \int e^{-x} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x$$

$$\frac{5}{4} \int e^{-x} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x + C$$

$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{5} e^{-x} (2 \cos 2x + \sin 2x) + C$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{5} e^{-x} (2 \cos 2x + \sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{5} e^{-x} (2 \cos 2x + \sin 2x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{5} e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} e^{-\pi} + \frac{2}{5} e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{5} (1 + e^{-\pi} + 2e^{-\frac{\pi}{2}})$$

$$37 \quad \int_{\frac{1}{2}}^3 x^2 \ln 2x \, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln 2x \Big|_{\frac{1}{2}}^3 - \int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{1}{3} x^2 \, dx \quad \begin{array}{l} u = \ln 2x \quad dv = x^2 dx \\ du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{1}{3} x^3 \end{array}$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln 2x \Big|_{\frac{1}{2}}^3 - \frac{1}{9} x^3 \Big|_{\frac{1}{2}}^3 = 9 \ln 6 - 3 + \frac{1}{72} = 9 \ln 6 - \frac{215}{72}$$

$$38 \quad \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \end{array} \quad dv = \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 8x) \, dx \quad v = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 5x \sin 3x \, dx = x \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x \right) dx$$

$$= x \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(-\frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{128} \cos 8x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{4} \right) + 0 - \frac{1}{128} - \frac{1}{8} + \frac{1}{128} = \frac{\pi - 2}{16}$$

$$39 \quad \int_0^a x e^{\frac{1}{2}x} \, dx = 2x e^{\frac{1}{2}x} \Big|_0^a - \int_0^a 2 e^{\frac{1}{2}x} \, dx = 2x e^{\frac{1}{2}x} \Big|_0^a - 4 e^{\frac{1}{2}x} \Big|_0^a \quad \begin{array}{l} u = x \quad dv = e^{\frac{1}{2}x} dx \\ du = dx \quad v = 2e^{\frac{1}{2}x} \end{array}$$

$$= 2a e^{\frac{1}{2}a} - 4e^{\frac{1}{2}a} + 4 \Rightarrow 2a e^{\frac{1}{2}a} - 4e^{\frac{1}{2}a} + 4 = 6 \quad 2a e^{\frac{1}{2}a} = 4e^{\frac{1}{2}a} + 2$$

لذا فإن a يحقق المعادلة $x = 2 + e^{-\frac{x}{2}}$

بقسمة طرفي المعادلة على $2e^{\frac{1}{2}a}$ نحصل على: $a = 2 + e^{-\frac{1}{2}a}$

$$40 \quad u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x \, du \quad , \quad x = e^u$$

الطريقة الأولى بالتعويض:

$$\int (\ln x)^2 dx = \int u^2 x du = \int u^2 e^u du$$

f ومشتقاته المتكررة $g(u)$ وتكاملاته المتكررة

u^2	+	e^u
$2u$	-	e^u
2	+	e^u
0		e^u

$$\int u^2 e^u du = e^u (u^2 - 2u + 2) + C$$

$$\int (\ln x)^2 dx = e^{\ln x} ((\ln x)^2 - 2 \ln x + 2) + C$$

$$= x((\ln x)^2 - 2 \ln x + 2) + C$$

الطريقة الثانية: بالأجزاء مباشرة: $dv = dx \quad v = x$

$$u = 2 \ln x \quad dv = dx$$

$$du = \frac{2}{x} dx \quad v = x$$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2 \ln x \, dx$$

بالأجزاء مرة أخرى:

$$= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + \int 2 dx$$

$$= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

41

$$A_1 = - \int_{-\frac{1}{2}}^0 x e^{2x} dx, \quad A_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx$$

نجد التكامل غير المحدود $\int x e^{2x} dx$ بالأجزاء:

$$u = x \quad dv = e^{2x} dx$$

$$du = dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\begin{aligned} \int x e^{2x} dx &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C \\ &= \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A(R_1) = - \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} = \frac{e - 2}{4e}$$

$$A(R_2) = \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

42

$$\frac{A(R_1)}{A(R_2)} = \frac{\frac{e - 2}{4e}}{\frac{1}{4}} = \frac{e - 2}{e} \Rightarrow A(R_1) : A(R_2) = (e - 2) : e$$

43

$$\begin{aligned} \int x^n \ln x dx &= \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \int \frac{1}{n+1} x^n dx & u = \ln x & \quad dv = x^n dx \\ & & du = \frac{1}{x} dx & \quad v = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\ &= \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} (-1 + (n+1) \ln x) + C \end{aligned}$$

44

$$\begin{aligned} \int x^n e^{ax} dx &= \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx & u = x^n & \quad dv = e^{ax} dx \\ & & du = n x^{n-1} dx & \quad v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{aligned}$$



من كتاب التمارين

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1 $\int x \cos 4x \, dx$

2 $\int x \sqrt{x+1} \, dx$

3 $\int x e^{-x} \, dx$

4 $\int (x^2 + 1) \ln x \, dx$

5 $\int \ln x^3 \, dx$

6 $\int e^{2x} \sin x \, dx$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

7 $\int_1^e \ln x \, dx$

8 $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

9 $\int_0^\pi x \cos \frac{1}{4} x \, dx$

10 $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \cos 2x \, dx$

11 $\int_1^e \ln(x+1) \, dx$

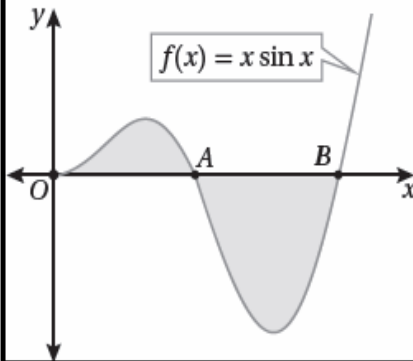
12 $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$

13 أثبت أن: $\int_2^4 \ln x \, dx = 6 \ln 2 - 2$.

إذا كان الشكل المجاور يُمثل منحنى الاقتران: $f(x) = x \sin x$, حيث: $x \geq 0$
فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

14 أجد إحداثيي كل من النقطة A، والنقطة B.

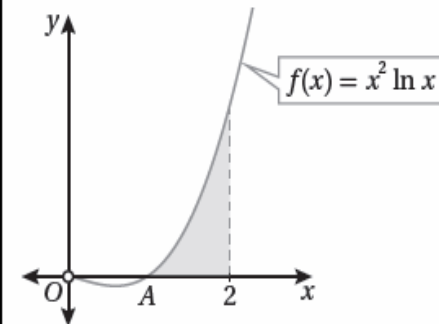
15 أجد مساحة المنطقة المُظللة.



إذا كان الشكل المجاور يُمثل منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 \ln x$, حيث: $x > 0$
فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

16 أجد إحداثيي النقطة A.

17 أجد مساحة المنطقة المُظللة.



1	$u = x$ $du = dx$ $dv = \cos 4x \, dx$ $v = \frac{1}{4} \sin 4x$ $= \frac{1}{4} x \sin 4x - \int \frac{1}{4} \sin 4x \, dx = \frac{1}{4} x \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x + C$
2	$u = x$ $du = dx$ $dv = (x+1)^{\frac{1}{2}} dx$ $v = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}}$ $= \frac{2}{3} x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3} x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (x+1)^{\frac{5}{2}} + C$
3	$u = x$ $du = dx$ $dv = e^{-x} dx$ $v = -e^{-x}$ $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$
4	$u = \ln x$ $du = \frac{1}{x} dx$ $dv = (x^2 + 1) dx$ $v = \frac{1}{3} x^3 + x$ $\int (x^2 + 1) \ln x \, dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) \ln x - \int \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) dx$ $= \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) \ln x - \int \left(\frac{1}{3} x^2 + 1 \right) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) \ln x - \frac{1}{9} x^3 - x + C$
5	$\int \ln x^3 \, dx = \int 3 \ln x \, dx$ $u = 3 \ln x$ $du = \frac{3}{x} dx$ $dv = dx$ $v = x$ $\int 3 \ln x \, dx = 3x \ln x - \int 3 \, dx = 3x \ln x - 3x + C$

6 $u = e^{2x} \quad du = 2e^{2x} dx \quad dv = \sin x dx \quad v = -\cos x$

$$\int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + \int 2e^{2x} \cos x dx$$

$u = 2e^{2x} \quad dv = \cos x dx$
 $du = 4e^{2x} dx \quad v = \sin x$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - \int 4e^{2x} \sin x dx$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int e^{2x} \sin x dx$$

$$\Rightarrow 5 \int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x + C$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \sin x dx = -\frac{1}{5} e^{2x} \cos x + \frac{2}{5} e^{2x} \sin x + C$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \sin x dx = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + C$$

7 $u = \ln x \quad dv = dx$
 $du = \frac{1}{x} dx \quad v = x$

$$= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

8 $u = \ln x \quad dv = x^{-2} dx$
 $du = \frac{1}{x} dx \quad v = -\frac{1}{x}$

$$= \frac{-\ln x}{x} \Big|_1^2 + \int_1^2 x^{-2} dx = \frac{-\ln x}{x} \Big|_1^2 - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

9 $u = x \quad du = dx \quad dv = \cos \frac{1}{4} x dx \quad v = 4 \sin \frac{1}{4} x$

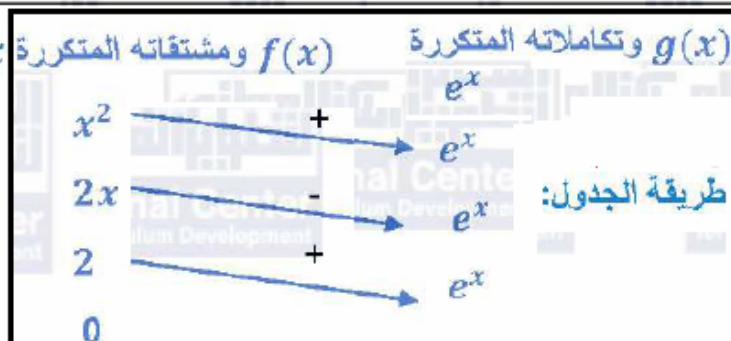
$$\int_0^\pi x \cos \frac{1}{4} x dx = 4x \sin \frac{1}{4} x \Big|_0^\pi - \int_1^2 4 \sin \frac{1}{4} x dx$$

$$= 4x \sin \frac{1}{4} x \Big|_0^\pi + 16 \cos \frac{1}{4} x \Big|_0^\pi = \frac{4\pi}{\sqrt{2}} + \frac{16}{\sqrt{2}} - 16 = 2\sqrt{2}\pi + 8\sqrt{2} - 16$$

$$\begin{aligned}
 u &= e^{3x} & dv &= \cos 2x \, dx \\
 du &= 3e^{3x} \, dx & v &= \frac{1}{2} \sin 2x \\
 \int e^{3x} \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x - \int \frac{3}{2} e^{3x} \sin 2x \, dx \\
 u &= \frac{3}{2} e^{3x} & dv &= \sin 2x \, dx \\
 du &= \frac{9}{2} e^{3x} \, dx & v &= -\frac{1}{2} \cos 2x \\
 10 \Rightarrow \int e^{3x} \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \cos 2x - \int \frac{9}{4} e^{3x} \cos 2x \, dx \\
 \Rightarrow \int e^{3x} \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \cos 2x - \frac{9}{4} \int e^{3x} \cos 2x \, dx \\
 \Rightarrow \frac{13}{4} \int e^{3x} \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \cos 2x + C \\
 \Rightarrow \int e^{3x} \cos 2x \, dx &= \frac{2}{13} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{13} e^{3x} \cos 2x + C \\
 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \cos 2x \, dx &= \frac{1}{13} (2e^{3x} \sin 2x + 3e^{3x} \cos 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{13} (2e^{\frac{3\pi}{4}} - 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11 \quad u &= \ln(x+1) & du &= \frac{1}{x+1} \, dx & dv &= dx & v &= x \\
 \int_1^e \ln(x+1) \, dx &= x \ln(x+1) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{x+1} \, dx \\
 &= x \ln(x+1) \Big|_1^e - \int_1^e \left(1 + \frac{-1}{x+1}\right) \, dx = x \ln(x+1) \Big|_1^e - (x - \ln(x+1)) \Big|_1^e \\
 &= e \ln(e+1) - \ln 2 - (e - \ln(e+1)) + (1 - \ln 2) = (1+e) \ln(e+1) - 2 \ln 2 - e + 1
 \end{aligned}$$

$$12 \quad \int x^2 e^x \, dx$$



$$\Rightarrow \int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 e^x \, dx = e^x (x^2 - 2x + 2) \Big|_0^1 = e - 2$$

$$13 \quad u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \quad dv = dx \quad v = x$$

$$\int_2^4 \ln x \, dx = x \ln x \Big|_2^4 - \int_2^4 dx = x \ln x \Big|_2^4 - x \Big|_2^4$$

$$= 4 \ln 4 - 2 \ln 2 - 2 = 8 \ln 2 - 2 \ln 2 - 2 = 6 \ln 2 - 2$$

14 إن الإحداثيين x للنقطتين A, B هما أول حلين موجبين للمعادلة:
ومنه: $A(\pi, 0), B(2\pi, 0)$

$$x \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi, \dots$$

$$15 \quad Area = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx + \left(- \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx \right)$$

$$u = x \quad du = dx \quad dv = \sin x \, dx \quad v = -\cos x$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$Area = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx + \left(- \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx \right)$$

$$= (-x \cos x + \sin x) \Big|_0^{\pi} + (x \cos x - \sin x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \pi + 2\pi - (-\pi) = 4\pi$$

$$16 \quad f(x) = 0 \Rightarrow x^2 \ln x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \Rightarrow A(1, 0)$$

$$17 \quad Area = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx \quad u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \quad dv = x^2 dx \quad v = \frac{1}{3} x^3$$

$$Area = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3} x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{9} x^3 \Big|_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$$



علمى 2023

9) ناتج: $\int 6x \ln x \, dx$ هو: c) $3x^2 \ln x + \frac{3}{2}x^2 + C$ a) $3x^2 \ln x - \frac{3}{2}x^2 + C$

b) $3x \ln x - \frac{3}{2}x^2 + C$ d) $3x \ln x + \frac{3}{2}x^2 + C$

10) ناتج: $\int 5x \cos(5x) \, dx$ هو:

a) $x \cos(5x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + C$ c) $x \cos(5x) - \frac{1}{5} \sin(5x) + C$

b) $x \sin(5x) + \frac{1}{5} \cos(5x) + C$ d) $x \sin(5x) - \frac{1}{5} \cos(5x) + C$

11) قيمة: $\int_0^1 x 4^x \, dx$ هي: d) $\frac{4 \ln 4 - 3}{(\ln 4)^2}$ c) $\frac{4 \ln 4 + 3}{(\ln 4)^2}$ b) $\frac{4 \ln 4 + 4}{(\ln 4)^2}$ a) $\frac{4 \ln 4 - 4}{(\ln 4)^2}$

صناعى 2023

2) $\int x^2 e^x \, dx$ (8 علامات)

علمى 2023 تكميلى

9) قيمة $\int_1^2 \ln x^2 \, dx$ تساوي: c) $4 \ln 2 - 4$ a) $4 \ln 2 - 2$

b) $4 \ln 2 - 6$ d) $2 \ln 2 - 1$

10) $\int x \csc^2 x \, dx$ يساوي: c) $-x \cot x + \ln|\sin x| + C$ a) $-x \cot x + \ln|\cos x| + C$

b) $x \cot x - \ln|\cos x| + C$ d) $x \cot x + \ln|\sin x| + C$

11) إذا كان: $f(0) = 5, f(1) = 8, \int_0^1 f(x) \, dx = 1$, فإن قيمة $\int_0^1 x f'(x) \, dx$ تساوي:

a) 2 b) 3 c) 8 d) 7

صناعى 2023 تكميلى

a) جد كلاً من التكاملات الآتية: (8 علامات) 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 1) \cos x \, dx$

تمارين إضافية

(1) قيمة $\int_1^e \ln x \, dx$ هي : $a) 2$ $b) 1$ $c) -1$ $d) e - 1$

(2) قيمة $\int_1^2 4x \ln x \, dx$ هي : $a) \ln 4 - 3$ $b) \ln 16 - 3$ $c) \ln 256 - 3$ $d) 4 \ln 4 + 3$

(3) قيمة $\int x e^x \, dx$ هي : $a) x e^x - e^x + c$ $b) x e^x + e^x + c$ $c) 2x e^x + c$ $d) 2 e^x + c$

(4) قيمة $\int x \sin x \, dx$ هي : $a) \sin x - x \cos x + c$ $b) \sin x + x \cos x + c$ $c) x \cos x$ $d) \cos x - x \sin x + c$

(5) قيمة $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{e^x}} \, dx$ هي : $a) \frac{4e+8}{e}$ $b) \frac{e+4}{8}$ $c) 4$ $d) \frac{4e-8}{e}$

(6) قيمة $\int x \sec^2 x \, dx$ هي : $a) x \tan x - \ln |\cos x| + c$ $b) \frac{1}{2} x^2 \tan x + c$ $c) x \tan x + \ln |\cos x| + c$ $d) x \tan x + \ln |\sin x| + c$

(7) قيمة $\int 2x^3 \csc^2 x^2 \, dx$ هي :

$a) x^2 \cot x^2 + \ln |\sin x^2| + c$ $b) -x^2 \cot x^2 + \ln |\sin x^2| + c$ $c) x^4 \cot x^2 + c$ $d) x^2 \cot^2 x^2 + \ln |\sin x^2| + c$

(8) إذا كان $f(2) = 3$, $f(5) = 8$, $\int_2^5 x f'(x) \, dx = 10$, فإن $\int_2^5 f(x) \, dx =$

$a) 14$ $b) 24$ $c) -24$ $d) 44$

(9) إذا كان $\int_0^1 (3ax^2 + 2x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cos x - 1) \, dx$, فإن قيمة الثابت (a) =

$a) \frac{\pi}{2} - 3$ $b) -1$ $c) -3$ $d) 3$

(10) إذا كان $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \cos x f(x) \, dx = \sqrt{2}$, $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x f'(x) \, dx = -3\sqrt{2}$, فإن $f(\frac{3\pi}{4}) =$

$a) 8$ $b) -8$ $c) -2$ $d) 2\sqrt{2}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	c	a	a	d	c	b	b	c	b

خلاصة طرائق التكامل

كما لاحظنا هناك عدة طرق للتكامل، منها:

- 1) الطريقة المباشرة من خلال البحث عن اقتران مشتقته تساوي المُكامل
- 2) من خلال التحليل إلى العوامل والاختصار
- 3) من خلال المتطابقات المثلثية
- 4) طريقة التكامل بالتعويض
- 5) طريقة الكسور الجزئية
- 6) طريقة التكامل بالأجزاء

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

Hasanat
Hasanat

والتحدي الأبرز الذي يواجه الطالب هو : أي طريقة أستعمل؟؟ أو بأيها أبدأ ؟

والحقيقة أنه لا توجد قاعدة ثابتة لتحديد طريقة الحل أو البداية ، فكل مسألة لها ظروفها ، ولكن هناك إرشادات قد تساعد الطالب على اختيار الطريقة المناسبة ، ومن المهم أن يحل الطالب الكثير من المسائل ليمتلك الخبرة التي تساعد على اختيار الطريقة الصحيحة وعدم إضاعة الوقت في البحث

ومن هذه الإرشادات :

- 1) إذا كانت الزاوية في الاقترانات المثلثية غير خطية ، أو قوة غير خطية في اقتران أسّي ، أو جذور مختلفة أو ما بداخل اللوغاريتم غير خطي : نبدأ بالتعويض بفرض (غير الخطي u) على الأغلب ثم نلاحظ الناتج ونكمل بناءا على ذلك ، مثلا

$$\int e^{\sqrt{x}} dx , \int e^{\frac{1}{x}+3} dx , \int \sin(x^2) dx , \int \tan^2\left(\frac{3}{x+1}\right) dx , \int \ln(\cos x) dx , \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

- 2) عند وجود مقدارين أحدهما مشتقة للآخر نستخدم التعويض

$$\int x e^{x^2+3} dx , \int \sec^2(2x) e^{\tan 2x} dx , \int \sin x \ln(1+\cos x) dx , \int x^2 \sqrt{x^3+1} dx$$

- 3) عند وجود مقدارين أحدهما ليس مشتقة للآخر نستخدم طريقة الأجزاء

$$\int x e^x dx , \int x \sin x dx , \int \ln(5x+4) dx , \int \sin x \cos x dx$$

- 4) عند وجود مقدار كسري درجة بسطه أكبر من أو تساوي درجة مقامه نبدأ بالقسمة الخوارزمية قم ملاحظ الناتج

$$\int \frac{x^2-4}{x^2-9} dx , \int \frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2} dx , \int \frac{x^3-x+1}{x^2+2x-3} dx$$

- 5) عند وجود $\sin x$ أو $\cos x$ بقوى زوجية نستخدم المكتطابقات فقط

$$\int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx , \int \sin^2 x \cos^4 x dx , \int (\sin x + \cos x)^2 dx , \int \sin^4 x \cos^6 x dx$$

كما أن هناك مسائل تُحل بأكثر من طريقة وقد تجد مسألة واحدة تجتمع فيها أكثر من طريقة



$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cos x dx : \text{متطابقات}$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \cos 2x \right) + c = \frac{-1}{4} \cos 2x + c$$

$$\int \sin x \cos x dx : \text{تعويض} :: u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \int u \cos x \frac{du}{\cos x} = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

$$\int \sin x \cos x dx :: \text{أجزاء}$$

$$u = \sin x, dv = \cos x$$

$$\Rightarrow du = \cos x, v = \sin x$$

$$\int \sin x \cos x dx = (\sin x)(\sin x) - \int \sin x \cos x dx$$

$$\int \sin x \cos x dx + \int \sin x \cos x dx = (\sin x)(\sin x)$$

$$\Rightarrow \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$$



والاختلاف بين الإجابتين (الأولى) و (الثانية أو الثالثة) يعود لوجود جزء من المقدار في الثابت (c)

$$\int \sin x \cos x e^{\sin x} dx :: y = \sin x \Rightarrow dy = \cos x dx$$

$$1) = \int \sin x \cos x e^y \frac{dy}{\cos x} = \int \sin x e^y dy = \int y e^y dy$$

$$:: u = y, dv = e^y$$

$$du = dy, v = e^y$$

$$= y e^y - \int e^y dy = y e^y - e^y + c = \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + c$$

هناك أيضا مسائل نستعمل فيها أكثر من طريقة :

(1) تعويض ثم أجزاء

$$2) \int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$$:: u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int \frac{\cos x}{1 - u^2} \frac{du}{\cos x} = \int \frac{a}{1 - u} du + \int \frac{b}{1 + u} du = \int \frac{\frac{1}{2} du}{1 - u} + \int \frac{\frac{-1}{2} du}{1 + u} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} + c$$

(2) متطابقات + تعويض + كسور جزئية

وفيما يأتي مجموعة من التكاملات المهمة (مع جوابها النهائي) ... حاول أن تحلها للتأكد من فهمك للمادة والهدف الأساسي من ذلك هو زيادة الخبرة والقدرة على تحديد الطريقة المناسبة لحل كل مسألة

$$1) \int \frac{\cot(Lnx)}{x} dx \dots \dots L n |\sin(Lnx) + c|$$

$$2) \int \frac{(1+x)^5}{x^7} dx \dots \dots -\frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{x}\right) + c$$



$$3) \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx \dots \dots \frac{1}{2} x \tan x + \frac{1}{2} L n |\cos x| + L n |1 + \cos x| + c$$

$$4) \int \frac{2 - \sqrt[3]{x}}{9 - \sqrt[3]{x^2}} dx \dots \dots \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + \frac{9}{2} L n |3 - \sqrt[3]{x}| + \frac{45}{2} L n |3 + \sqrt[3]{x}| + c$$

$$5) \int \frac{x + 4 \tan x}{\cos^2 x} dx \dots \dots x \tan x + L n |\cos x| + 2 \tan^2 x + c$$

$$6) \int \frac{2 \sin^3 x \cos x - \sin 2x + 4 \cos x}{\sin^2 x - 4} dx$$

$$\dots \dots \sin^2 x + 3 L n |\sin x - 2| + L n |\sin x + 2| + c$$

$$7) \int \frac{2x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} dx \dots \dots L n |x| + L n \sqrt{x^2 + 1} + c$$

$$8) \int 9 \sec^4 x L n(\tan x) dx$$

$$\dots \dots (3 \tan x + \tan^3 x) L n(\tan x) - 9 \tan x - \tan^3 x + c$$

$$9) \int \frac{4 \tan x \sec x}{3 - \tan^4 x} dx \dots \dots L n |2 + \sec x| - L n |2 - \sec x| + c$$

$$10) \int_1^0 \frac{x}{(x+1) - \sqrt{x+1}} dx \dots \dots ((x+1) + 2\sqrt{x+1}) \Big|_1^0 = 1 - 2\sqrt{2}$$

$$11) \int \frac{6e^x}{e^{2x} - 9} dx \dots \dots 2Ln|e^x - 3| - 2Ln|e^x + 3| + c$$

$$12) \int \frac{\sin 2x}{2\cos x - \sin 2x} dx \dots \dots \sec x + \tan x - x + c$$

$$13) \int \frac{2x - x^2 + 4}{x(x-2)^2} dx \dots \dots Ln|x| + 2Ln|x-2| - 2(x-2)^{-1} + c$$

$$14) \int \frac{2}{1 + \cos 2x} dx \dots \dots \cot 2x - \csc 2x + c$$

$$15) f(1)=1 , f(2)=4 \Rightarrow \int_1^2 3f'(x)\sqrt{f(x)}dx = ? \dots \dots 2\sqrt{(f(x))^3} \Big|_1^2 = 14$$

$$16) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos x dx \dots \dots \left[\frac{2}{3} \cos^3 x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$17) \int e^x \sin x dx \dots \dots \frac{1}{2}e^x \sin x - \frac{1}{2}e^x \cos x + c$$

$$18) \int \frac{\cos 3x}{\cos x} dx \dots \dots \sin 2x - x + c$$

$$19) \int \sin 2x \cos^2 x dx \dots \dots -\cos^4 x + c$$

$$20) \int Ln(x^2 - 9) dx$$

$$\dots \dots xLn|x^2 - 9| - 2x - 3Ln|x-3| + Ln|x+3| + c$$

