النـهـايـات

- يتم التعبير عن نهاية اقتران عند نقطة بالرموز التالية :

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \text{ل}$$

وتقرأ بالشكل التالي : نهاية الاقتران ق عندما تقترب س من العدد أ تساوي ل

- أنواع الاقترانات التي ستتم دراسة نهايتها :

اقتران كثير حدود :

مثال : ق(س) = ٣س^{٢} + ٥س +٧

اقتران نسبي :

مثال : $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{٢س} + ١}{\text{س}^{٢} + ١}$

اقتران الجذر النوني :

مثال : $\text{ق(س)} = \sqrt[٣]{\text{س} + ٣}$

اقتران متشعب :

مثال : $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٤س} + ١ \text{ ، س} < ٠ \\ ٥ - \text{س}^{٢} \text{ ، س} \geq ٠ \end{cases}$

طرق إيجاد نهاية الاقتران : توجد ثلاثة طرق لإيجاد نهاية الاقتران :

١- الجداول ٢- الرسم ٣ - التعويض والنظريات

النهاية بالإعتماد على الجداول :

→ ٢ ←

س	٣	٢,٥	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١		١,٩٩٩	١,٩	١,٥	١,١	١
ق(س)	٤	٣,٥	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١		٢,٩٩٩	٢,٩	٢,٥	٢,١	٢

→ ٣ ←
اليمين اليسار

من خلال الجدول نلاحظ عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليمين فإن ق(س) تقترب من العدد ٣

ونعبر عن ذلك بالرموز : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٣$

وكذلك عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليسار فإن فإن ق(س) تقترب من العدد ٣

ونعبر عن ذلك بالرموز : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٣$

أي أن ق(س) تقترب من العدد ٣ كلما اقتربت س من العدد ٢ من كلا الاتجاهين (اليسار ، واليمين) ونعبر عن ذلك بالرموز : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٣$

مثال : بالاعتماد على الجدول أوجد نهـــــا$_{س \leftarrow ٣}$ (س + ٥)

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	٣	٢,٩٩	٢,٩٨	٢,٩٠
ق(س)	٨,١	٨,٠١	٨,٠٠١		٧,٩٩	٧,٩٨	٧,٩٠

الحل :

عندما تقترب س من العدد ٣ من جهة اليمين فإن ق(س) تقترب من العدد ٨ ونكتب :

نهـــــا$_{س \leftarrow ٣^{+}}$ (س + ٥)

وعندما تقترب س من العدد ٣ من جهة اليسار فإن ق(س) تقترب من العدد ٨ ونكتب :

نهـــــا$_{س \leftarrow ٣^{-}}$ (س + ٥)

وبالتالي نهاية ق(س) عندما تقترب س من العدد ٣ تساوي ٨ ونكتب نهـــــا$_{س \leftarrow ٣}$ (س + ٥) = ٨

مثال :

بالاعتماد على الجدول أوجد نهـــــا$_{س \leftarrow ٣^{+}}$ ق(س)

٣

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١		٢,٩٩	٢,٩٨	٢,٩٠
ق(س)	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١		٥,٩٩	٥,٩٨	٥,٩٠

الحل : نهـــــــا$_{س \leftarrow ٣^{+}}$ ق(س) = ٤

مثال : بالاعتماد على الجدول أوجد نهـــــا$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س)

س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١		١,٩٩	١,٩٨	١,٩٠
ق(س)	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١		٢,٩٩	٢,٩٨	٢,٩٠

نهـــــا$_{س \leftarrow ٢^{-}}$ ق(س) = ٣

نهـــــا$_{س \leftarrow ٢^{+}}$ ق(س) = ٥ ⟵ نهـــــا$_{س \leftarrow ٢^{-}}$ ق(س) $\neq$ نهـــــا$_{س \leftarrow ٢^{+}}$ ق(س)

$\therefore$ نهـــــا$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) غير موجودة

النهاية بالاعتماد على الرسم :

مثال :

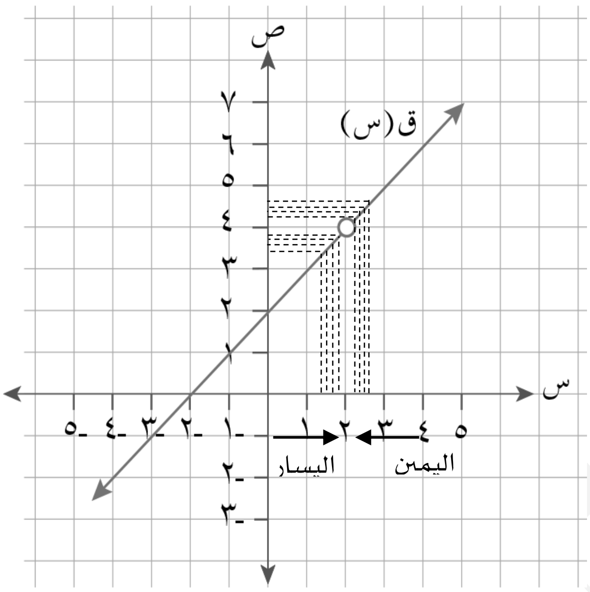
اعتمادا على الشكل نبحث عن نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب س من العدد ٢ أي:

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

الحل :

لإيجاد النهاية من اليمين نتخيل شخص يسيرعلى محور السينات باتجاه العدد ٢ من اليمين وعندما يصل إلى أقرب موضع من العدد ٢ نجد صورته على محور الصادات يقترب من العدد ٤ ونكتب :

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ٤



وبنفس الطريقة نوجد النهاية من اليسار ونتخيل شخص يسير باتجاه العدد ٢ من اليسار وعندما يصل أقرب موضع من العدد ٢ تكون صورته على محور الصادات تقترب من العدد ٤ ونكتب :

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ٤

بما أن : $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ٤

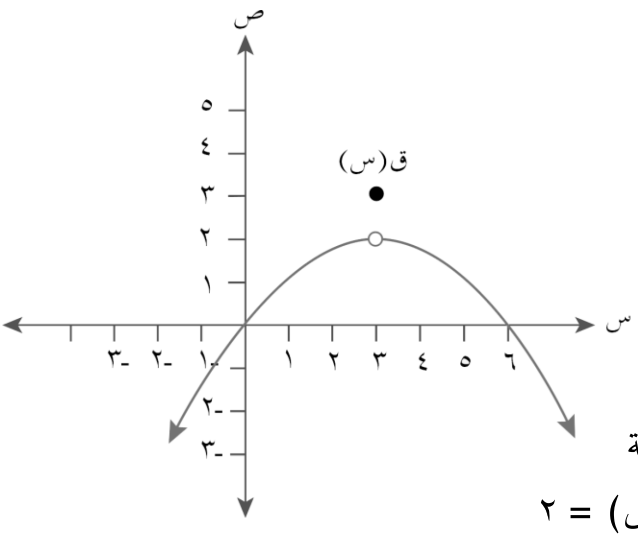
فإن $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٤

ملاحظات :

- إذا لم يحدد السؤال إيجاد النهاية من اليمين أو اليسار فإننا نوجدها من الجهتين
- تكون النهاية موجودة إذا كانت : $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س)
- إذا كانت : $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) $\neq$ $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) عندها تكون النهاية غير موجودة
- الدائرة الفارغة تعني أن الاقتران عندها غير معرف ،
- الدائرة المغلقة تعني أن الاقتران معرف عند هذه النقطة ,
- نأخذ بالاعتبار الدوائر المغلقة والمفتوحة فقط عند إيجاد الصورة

مثال :

اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س) أوجد ما يلي :



١- ق(٣)

٢- نهــــا ق(س)
س ← ٣+

٣- نهــــا ق(س)
س ← ٣-

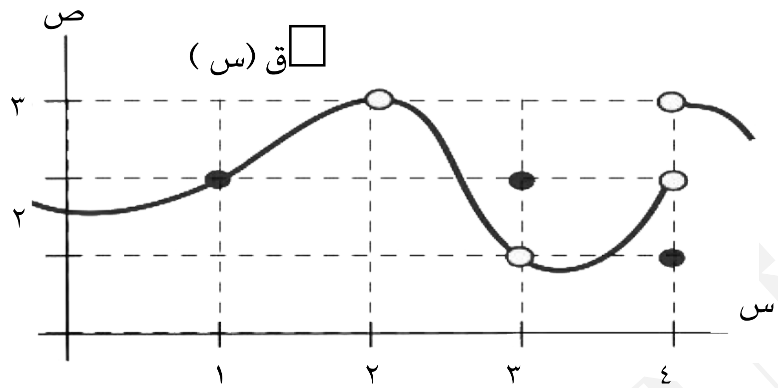
٤- نهــــا ق(س)
س ← ٣

الحــل :

ق(٣) = ٣ النقطة س=٣ تقابلها الدائرة المغلقة

نهــــا ق(س) = ٢ نهــــاق(س) = ٢
س ← ٣- س ← ٣+

∴ نهــــاق(س) = ٢
س ← ٣



مثال :

بالاعتماد على الجدول أوجد :

١- نهــــا ق(س)
س ← ١

٢- نهــــا ق(س)
س ← ٢

٣- نهــــا ق(س)
س ← ٤

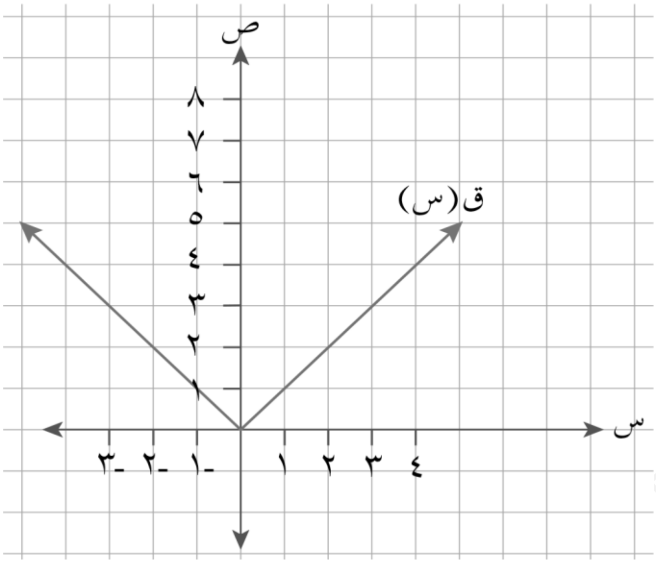
الحــــل :

نهــــا ق(س) = نهــــا ق(س) = ٢ ← نهــــا ق(س) = ٢
س ← ١+ س ← ١- س ← ١

نهــــا ق(س) = نهــــا ق(س) = ٣ ← نهــــا ق(س) = ٣
س ← ٢+ س ← ٢- س ← ٢

نهــــا ق(س) = ٣ نهــــا ق(س) = ٢ ← نهــــا ق(س) غير موجودة
س ← ٤+ س ← ٤- س ← ٤

سؤال كتاب : اعتمادا على الرسم الذي يمثل الاقتران المتشعب :



ق(س) = { ـ س ، س < ٠
　　　　 س ، س ≥ ٠

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت)

١ – ق(٠)

نهــا ق(س) (س ← ٢)

نهــا ق(س) (س ← ٠)

نلاحظ من الشكل أن :

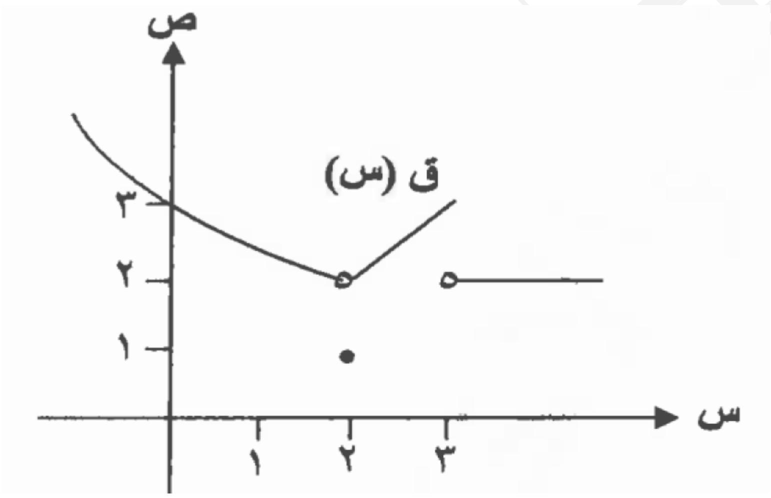
ق(٠) = ٠

نهــا ق(س) (س ← ٢⁻) = ٢ ، نهــا ق(س) (س ← ٢⁺) = ٢ ، ∴ نهــا ق(س) (س ← ٢) = ٢

نهــا ق(س) (س ← ٠⁻) = ٠ ، نهــا ق(س) (س ← ٠⁺) = ٠ ، ∴ نهــا ق(س) (س ← ٠) = ٠

مثال :

اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س) أوجد ما يلي :



أ) نهــا ق(س) (س ← ٣⁺)

ب) نهــا ق(س) (س ← ٠)

الحــل :

نهــا ق(س) (س ← ٣⁺) = ٢

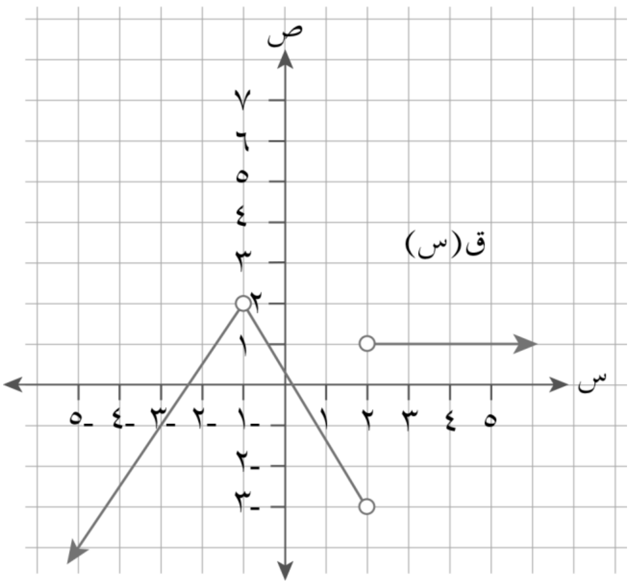
نهــا ق(س) (س ← ٠⁻) = ٣

نهــا ق(س) (س ← ٠⁺) = ٣

نهــا ق(س) (س ← ٠⁻) = نهــا ق(س) (س ← ٠⁺) ⟵ نهــا ق(س) (س ← ٠) = ٣

سؤال كتاب :

اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س) أوجد ما يلي :



- نهــــا ق(س)
  س ← -١
- نهــــا ق(س)
  س ← ٢
- نهــــا ق(س)
  س ← ٣

الحـــل :

نهــــا ق(س) = ٢
س ← -١^{+}

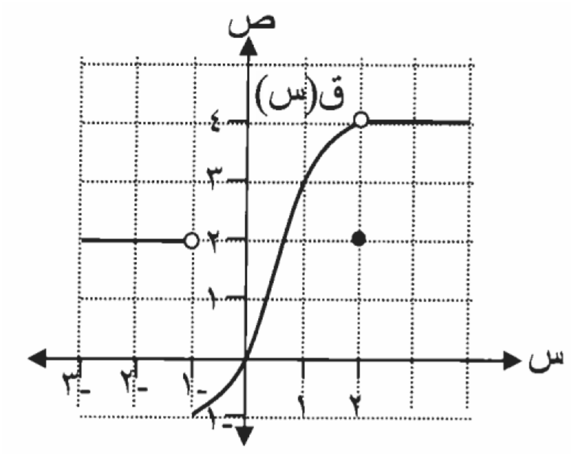
نهــــا ق(س) = ٢ (س ← -١^{-}) ، ⟵ نهــــا ق(س) = ٢ (س ← -١)

نهــــا ق(س) = ١ (س ← ٢^{+}) ، نهــــا ق(س) = -٣ (س ← ٢^{-}) ، ⟵ نهــــا ق(س) غير موجودة (س ← ٢)

نهــــا ق(س) = ١ (س ← ٣^{+}) ، نهــــا ق(س) = ١ (س ← ٣^{-}) ⟵ نهــــا ق(س) = ١ (س ← ٣)

مثال :

اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س) أوجد ما يلي :



- ق(٢)
- نهــــا ق(س)
  س ← ٢
- نهــــا ق(س)
  س ← -١^{-}

الحـــل :

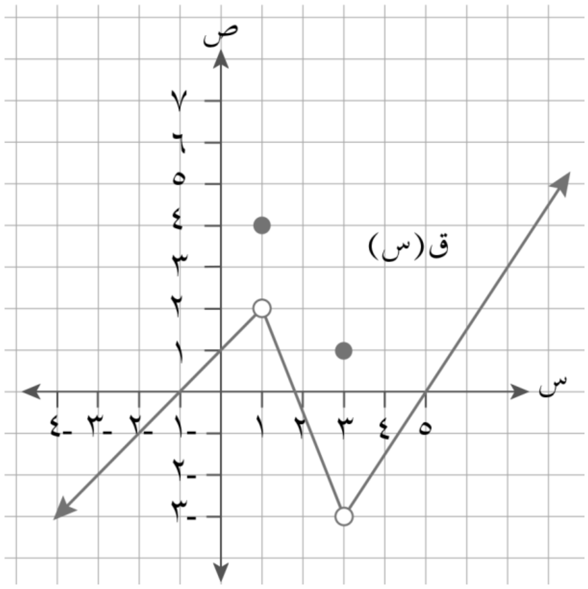
ق(٢) = ٢

نهــــا ق(س) = ٤ (س ← ٢^{+}) ، نهــــا ق(س) = ٤ (س ← ٢^{-}) ، نهــــا ق(س) = ٤ (س ← ٢)

نهــــا ق(س) = ٢
س ← -١^{-}

مثال :

اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س) أوجد ما يلي :



- ق(٣)
- ق(١)
- $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}$ ق(س)
- $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ ق(س)

الحـــل :

ق(٣) = ١

ق(١) = ٤

$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢

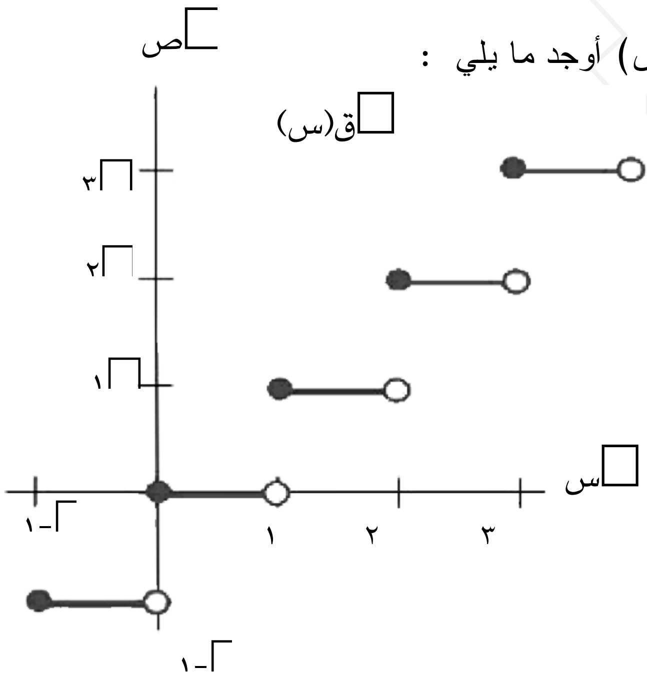
$\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢ ⟵

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢

$\underset{س \leftarrow ٣^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = -٣ ، $\underset{س \leftarrow ٣^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = -٣ ⟵ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ ق(س) = -٣

مثال :

اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س) أوجد ما يلي :



- $\underset{س \leftarrow -١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)
- $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}$ ق(س)
- $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ ق(س)

الحـــل :

$\underset{س \leftarrow -١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) غير موجودة

$\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٠

$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ١

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}$ ق(س) غير موجودة

$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ١ ، $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ ق(س) غير موجودة

نظريات النهايات

١) نهاية الاقتران الثابت يساوي الثابت نفسه ونعبر عن ذلك كما يلي

$\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ جـ = جـ حيث أ و جـ عددين حقيقيين

مثال : $\lim\limits_{س \leftarrow ٥}$ ٣ = ٣ ، $\lim\limits_{س \leftarrow ٣}$ −٩ = −٩

٢) نهاية مجموع اقترانين = نهاية الاقتران الأول + نهاية الاقتران الثاني ، ونعبر عن ذلك

$\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ (ق(س) + هـ(س)) = $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) + $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ هـ(س)

٣) فرق اقترانين = نهاية الاقتران الأول − نهاية الاقتران الثاني ، ونعبر عن ذلك :

$\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ (ق(س) − هـ(س)) = $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) − $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ هـ(س)

٤) جداء اقترانين = نهاية الاقتران الأول × نهاية الاقتران الثاني ، ونعبر عن ذلك :

$\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ (ق(س) × هـ(س)) = $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) × $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ هـ(س)

مثال :

إذا كان $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س) = ٦ ، $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ هـ(س) = −٢

أوجد : $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ (ق(س) + هـ(س)) ، $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ (ق(س) − هـ(س))

∴ $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ (ق(س) × هـ(س))

الحل : $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ (ق(س) + هـ(س)) = $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س) + $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ هـ(س)

= ٦ + (− ٢) = ٤

$\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ (ق(س) − هـ(س)) = $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س) − $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ هـ(س)

= ٦ − (− ٢) = ٨

$\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ (ق(س) × هـ(س)) = $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ ق(س) × $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ هـ(س)

= ٦ × −٢ = −١٢

نتائـــــج هامة :

- نهـــاية عدد ثابت × اقتران = العدد الثابت × نهـــاية الاقتران ...... ونعبر عن ذلك بالرموز
نهــــــــاجـ ق(س) = جـ × نهــــــــاق(س) = جـ حيث جـ عدد حقيقي
س ←أ س ←أ

مثال : إذا كانت نهــــــــا ق(س) = ٤ فأوجد : نهــــــــا٦ق(س)
س ← ٣ س ← ٣

الحــل : نهــــــــا ٦ ق(س) = ٦ × نهــــــــا ق(س) = ٦ × ٤ = ٢٤
س ← ٣ س ← ٣

نهــــــــا (ق(س))^{ن} = (نهــــــــا ق(س))^{ن}
س ← أ س ← ٣

مثال : جد قيمة ما يأتي : نهــــــــاس^{٣}
س ←٣

نهــــــــا س^{٣} = (نهــــــــا ق(س))^{٣} = (٣)^{٣} = ٢٧
س ← ٣ س ← ٣

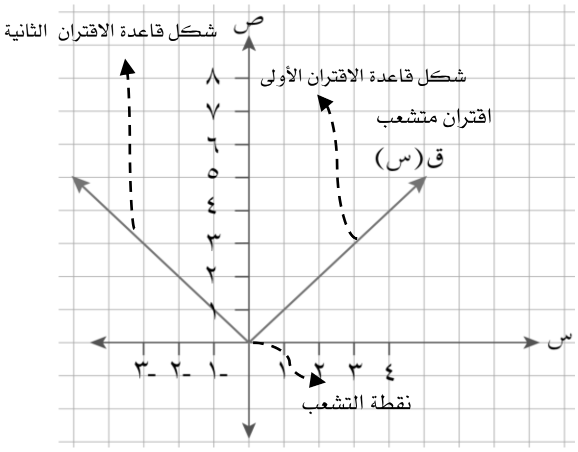
- إذا كان الاقتران كثير حدود تحسب نهايته بالتعويض المباشر

مثال : جد نهاية ما يأتي :
نهــــــــا(س^{٦}ـ ٥س^{٢} + ٤س + ٩)
س ←ـ١

الحــل :
نهــــــــا(س^{٦}ـ ٥س^{٢} + ٤س + ٩)
س ← ـ١
= نهــــــــا س^{٦}ـ نهــــــــا ٥س^{٢} + نهــــــــا ٤س + نهــــــــا ٩
س ← ـ١ س ← ـ١ س ← ـ١ س ← ـ١
= (نهــــــــا س)^{٦}ـ ٥ (نهــــــــا س)^{٢}+ ٤ نهــــــــا س + نهــــــــا ٩
س ← ـ١ س ← ـ١ س ← ـ١ س ← ـ١
= (ـ١)^{٦}ـ ٥ (ـ١)^{٢}+ ٤(ـ١) + ٩ = ١ ـ ٥ ـ ٤ + ٩ = ١

- إذا كان لدينا اقتران متشعب ق(س) وكان هذا الاقتران يتشعب عند نقطة (أ) فإن
نهــــــــاق(س) تكون موجودة إذا كانت نهــــــــاق(س) = نهــــــــاق(س)
س ←أ س ← أ+ س ← أ-

تعريف الاقتران المتشعب : هو الاقتران المعروف بأكثر من قاعدة



يمثل الشكل المبين اقتران متشعب له قاعدتين ونقطة تشعب
عند النقطة س = ٠

مثال :

ق(س) = { $س^{٢}$ + ١ ، س ≤ ٣
          { ٤س − ١ ، س > ٣

أوجد قيمة ما يلي : ق(٢) ، نهــا ق(س) (س ← ١) ، نهــا ق(س) (س ← ٤) ، نهــا ق(س) (س ← ٣)

الحل :

ق(٢) = $(٢)^{٢}$ + ١ = ٤ + ١ = ٥

نهــا ق(س) = نهــا ($س^{٢}$ + ١) = $(١)^{٢}$ + ١ = ١ + ١ = ٢
س ← ١ س ← ١

نهــا ق(س) = نهــا (٤س − ١) = ٤×٤ − ١ = ١٦ − ١ = ١٥
س ← ٤ س ← ٤

نلاحظ أن س = ٣ هي القيمة التي يتشعب عندها الاقتران لذلك نحسب النهاية من اليمين واليسار :

نهــا ق(س) = نهــا ($س^{٢}$ + ١) = $(٣)^{٢}$ + ١ = ٩ + ١ = ١٠
س ← ٣ - س ← ٣ -

نهــا ق(س) = نهــا (٤س − ١) = ٤×٣ − ١ = ١٢ − ١ = ١١
س ← ٣ + س ← ٣ +

بما أن نهــا ق(س) ≠ نهــا ق(س) فإن نهاية ق(س) غير موجودة
س ← ٣ + س ← ٣ -

أمثلة على نظريات النهايات

مثال :

إذا كانت نهــا ق(س) = ٧ ، نهــا هـ(س) = −٣ ، فجد :
س ← −٢ س ← −٢

نهــا (٢ ق(س) + $(هـ(س))^{٢}$ − س)
س ← −٢

الحل :

نهــا (٢ ق(س) + $(هـ(س))^{٢}$ − س) =
س ← −٢

= نهــــا ٢ق(س) + (نهــــا (هـ (س))^{٢} - نهــــا س
س ← ـ٢　　س ← ـ٢　　س ← ـ٢

= ٢ نهــــا ق(س) +(نهــــاهـ(س))^{٢} - نهــــا س
س ← ـ٢　　س ← ـ٢　　س ← ـ٢

=٢× ٧ + (ـ٣)^{٢} - (ـ٣) = ١٤ + ٩ + ٣ = ٢٦

سؤال كتاب :

إذا علمت أن نهــــا ق(س) = ٨ ، نهــــا هـ(س) = ـ٢ ، فجد :
س ← ٣　　س ← ٣

نهــــا (٤ق(س) + ٢ هـ(س))
س ← ٣

الحل :

نهــــا (٤ق(س) + ٢ هـ(س)) = نهــــا ٤ق(س) + نهــــا ٢هـ(س)
س ← ٣　　س ← ٣　　س ← ٣

= ٤ نهــــا ق(س) + ٢ نهــــا هـ(س) = ٤× ٨ + ٢ × ـ٢ =٣٢ - ٤ = ٢٨
س ← ٣　　س ← ٣

مثال :

إذا كانت نهــــا(ق(س)+س^{٣}ـ٣)=٥ ، فجد قيمة نهــــا٣(ق(س))^{٢}
س ← ـ١　　س ← ـ١

الحل :

نهــــا (ق(س) + س^{٢} - ٣) = نهــــا ق(س) + نهــــا س^{٢} _ نهــــا ٣ = ٥
س ← ـ١　　س ← ـ١　　س ← ـ١　　س ← ـ١

نهــــا ق(س) + (نهــــا س)^{٢} - نهــــا ٣ = ٥
س ← ـ١　　س ← ـ١　　س ← ـ١

نهــــا ق(س) + (ـ١)^{٢} ـ٣ = نهــــا ق(س) + ١ـ٣ = نهــــا ق(س) ـ٢= ٥
س ← ـ١　　س ← ـ١　　س ← ـ١

نهــــا ق(س) = ٥ + ٢ = ٧
س ← ـ١

نهــــا ٣ (ق(س))^{٢} = ٣ (نهــــا ق(س))^{٢} = ٣ (٧)^{٢} =٣×٤٩ = ١٤٧
س ←ـ١　　س ←ـ١

مثال :

إذا كانت نهــــا (ل س^{٢} + ٣) = ٧ فأوجد قيمة الثابت ل
س ← ـ١

نهــــا (ل س^{٢} + ٣) = نهــــا ل س ^{٢} + نهــــا ٣ = ٧
س ← ـ١　　س ← ـ١　　س ← ـ١

$ل \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} س^{٢} + \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} ٣ = ل \left(\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} (س) \right)^{٢} + \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} ٣ = ٧$

$ل (-١)^{٢} + ٣ = ٧$

$ل = ٧ - ٣ = ٤$

سؤال كتاب :

إذا كانت $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} (م س^{٢} + ٥س + ١) = ٢٥$ فأوجد قيمة الثابت م

الحــل :

$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} (م س^{٢} + ٥س + ١) = \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} م س^{٢} + \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} ٥س + \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} ١ = ٢٥$

$م \left(\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} س \right)^{٢} + ٥ \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} س + \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} ١ = ٢٥$

$م (٣)^{٢} + ٥ \times ٣ + ١ = ٢٥$

$٩م + ١٥ + ١ = ٢٥$

$٩م + ١٦ = ٢٥$

$٩م = ٢٥ - ١٦ = ٩$

$م = ١$

مثال :

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٧ & ، س \leq ٣ \\ ٥ & ، س > ٣ \end{cases}$$

أوجد $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} ق(س)$

$\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} ق(س) = \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} (س^{٢} + ٧) = (٥)^{٢} + ٧ = ٣٢$

سؤال كتاب :

$$هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \neq ٣ \\ ٥ & ، س = ٣ \end{cases}$$

أوجد مايلي :

أ) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} هـ(س)$ ، ب) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} هـ(س)$ ، جـ) هـ (٣)

الحــل :

ملاحظة هامة : عند وجود إشارة ($\neq$) فإننا نعوض بها دائما ولا نهتم بقاعدة (=) وذلك لأن النهاية هي قيمة تقترب ولا تساوي

أ) $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ (س^{٢} + ١) = $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ س^{٢} + $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ ١

= ($\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ س)^{٢} + $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ ١ = (٥)^{٢} + ١ = ٢٥ + ١ = ٢٦

ب) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ (س^{٢} + ١) = $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ س^{٢} + $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ١

= ($\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ س)^{٢} + $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ١ = (٣)^{٢} + ١ = ٩ + ١ = ١٠

جـ) هـ (٣) = ٣

مثال :

ق(س) = { س^{٢} ، س $\geq$ ٢
      { م س ، س < ٢

فما قيمة الثابت م التي تجعل $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة

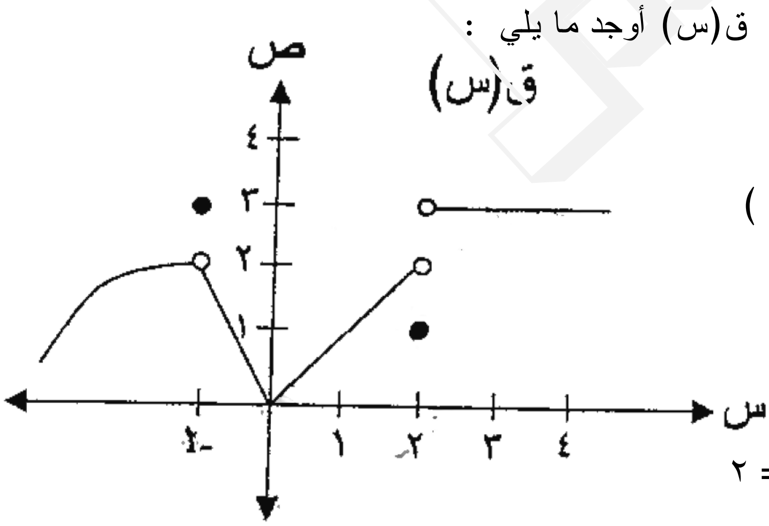
تكون النهاية موجودة عندما : $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

$\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ م س = $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ س^{٢}

م $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ س = ($\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ س)^{٢} ⟵ م×٢ = (٢)^{٢} ⟵ ٢م = ٤ ومنه م = ٢

مثال :

اعتمادا على الرسم الذي يمثل منحني الاقتران ق(س) أوجد ما يلي :



أ) $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

ب) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ ((ق(س))^{٢} − $\frac{١}{٤}$ (س − ٧))

الحـل :

أ) $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣

ب) من الرسم نلاحظ :

$\underset{س \leftarrow -١^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow -١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٢

$\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ ((ق(س))^{٢} − $\frac{١}{٤}$ (س − ٧)) = ($\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ ق(س))^{٢} − $\frac{١}{٤}$ $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ س + $\frac{٧}{٤}$

= (٢)^{٢} − $\frac{١}{٤}$ × −١ + $\frac{٧}{٤}$ = ٤ + $\frac{١}{٤}$ + ٧ + ٤ = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٧}{٤}$ = ٤ + $\frac{٨}{٤}$ = ٤ + ٢ = ٦

نهاية خارج قسمة اقترانين : نتحدث هنا عن الاقتران الكسري أو النسبي

تعريف الاقتران النسبي : هو اقتران على شكل كسر بسطه ومقامه كثيري حدود

مثال : $ق(س) = \frac{٢س + ٣}{س^٢ + ١}$

نظرية : نهاية اقتران كسري تساوي نهاية البسط على نهاية المقام ونعبر عن ذلك بالرموز :

$\underset{س \leftarrow أ}{نهـــا} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\underset{س \leftarrow أ}{نهـــا} ق(س)}{\underset{س \leftarrow أ}{نهـــا} ق(س)}$ ، النهاية غير موجودة إذا $\underset{س \leftarrow أ}{نهـــا} هـ(س) =$ صفر

نتائج هامة :

عند دراسة نهاية الاقتران الكسري نميز أربع نواتج :

الناتج الأول : $\frac{عدد}{عدد}$ وهو ناتج مقبول س ← ٢

مثال :

$$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \frac{س^٢ + ١}{س + ٣} = \frac{\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} س^٢ + ١}{\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} س+٣} = \frac{(٢)^٢ + ١}{٢ + ٣} = \frac{٥}{٥} = ١$$

الناتج الثاني : $\frac{صفر}{عدد}$ وهو ناتج مقبول ويساوي الصفر

مثال :

$$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \frac{س^٢ - ٤}{س + ١} = \frac{\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} س^٢ - ٤}{\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} س+١} = \frac{(٢)^٢ - ٤}{٢ + ١} = \frac{صفر}{٣} = صفر$$

الناتج الثالث : $\frac{عدد}{صفر}$ وهو ناتج غير مقبول والنهاية غير موجودة

مثال :

$$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \frac{س + ٣}{س^٢ - ٤} = \frac{\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} س + ٣}{\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} س^٢ - ٤} = \frac{٢ + ٣}{(٢)^٢ - ٤} = \frac{٥}{صفر}$$ النهاية غير موجودة

الناتج الرابع : $\frac{صفر}{صفر}$ وهو ناتج غير مقبول ولذلك نلجأ إلى كتابة الاقتران بصورة مكافئة بإحدى الطرق التالية :

التحليل إلى العوامل :

مثال :

$$\underset{س \leftarrow ٣}{نهـــا} \frac{س^٢ - ٦س + ٩}{س^٢ - ٩} = \frac{(٣)^٢ - ٦ \times ٣ + ٩}{(٣)^٢ - ٩} = \frac{صفر}{صفر}$$ النتيجة غير مقبولة نحلل إلى لعوامل

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٦س + ٩}{س^{٢} - ٩} = \text{نهـا} \frac{(\cancel{س - ٣})(س - ٣)}{(\cancel{س - ٣})(س + ٣)} = \text{نهـا} \frac{س - ٣}{س + ٣}$$

$$= \frac{٣ - ٣}{٣ + ٣} = \frac{\text{صفر}}{٦} = \text{صفر}$$

التحليل إلى عوامل مشتركة :

مثال :

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٢س}{٥س - ١٠} = \frac{(٢)^{٢} - ٢ \times ٢}{٥ \times ٢ - ١٠} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

الناتج غير مقبول ونحلل بإخراج العوامل المشتركة :

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٢س}{٥س - ١٠} = \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س\,(\cancel{س - ٢})}{٥\,(\cancel{س - ٢})} =$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س}{٥} = \frac{٢}{٥}$$

الضرب في مرافق الجذر التربيعي :

مثال :

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

الناتج غير مقبول لذلك نضرب ونقسم على مرافق الجذر أي بالمقدار $\frac{\sqrt{س} + ١}{\sqrt{س} + ١}$

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} = \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} \times \frac{\sqrt{س} + ١}{\sqrt{س} + ١}$$

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{\cancel{س - ١}}{(\cancel{س - ١})(\sqrt{س} + ١)} = \frac{١}{\sqrt{س} + ١} = \frac{١}{\sqrt{١} + ١} = \frac{١}{٢}$$

توحيد المقامات :

تذكرة في توحيد المقامات :

$$\frac{\text{البسط الأول}}{\text{المقام الأول}} \pm \frac{\text{البسط الثاني}}{\text{المقام الثاني}} = \frac{\text{البسط الاول} \times \text{المقام الثاني} \pm \text{البسط الثاني} \times \text{المقام الأول}}{\text{جداء المقامين}}$$

لتوضيح ذلك هذا مثال : $\frac{٣}{٤} + \frac{٢}{٥} = \frac{٣ \times ٥ + ٢ \times ٤}{٤ \times ٥} = \frac{١٥ + ٨}{٢٠} = \frac{٢٣}{٢٠}$

مثال :

$$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\frac{١}{٣\text{س}} - \frac{١}{\text{س}+٢}}{\text{س} - ١} = \frac{\frac{١}{٣\times١} - \frac{١}{١+٢}}{١ - ١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

غير مقبول ولذلك نوحد المقامات

$$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\frac{١}{٣\text{س}} - \frac{١}{\text{س}+٢}}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\frac{١\times(\text{س}+٢) - ١\times(٣\text{س})}{٣\text{س}(\text{س}+٢)}}{\text{س} - ١}$$

$$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}+٢-٣\text{س}}{٣\text{س}(\text{س}-١)(\text{س}+٢)} = \lim_{\text{س} \to ١} \frac{٢ - ٢\text{س}}{٣\text{س}(\text{س}-١)(\text{س}+٢)} =$$

$$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{-٢\cancel{(\text{س}-١)}}{٣\text{س}\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}+٢)}$$

$$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{-٢}{٣\text{س}\ (\text{س}+٢)} = \frac{-٢}{٣(١)\ (١+٢)} = \frac{-٢}{٩}$$

أمثلة على الاقترانات الكسرية :

مثال :

جد قيمة ما يلي : $\lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢}{\text{س}^٢ - ١٦} =$

$\lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢}{\text{س}^٢ - ١٦} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ النتيجة غير مقبولة ونحلل إلى عوامل مشتركة

$$\lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^٢\cancel{(\text{س} - ٤)}}{\cancel{(\text{س}-٤)}(\text{س}+٤)} = \lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^٢}{\text{س} + ٤} = \frac{(٤)^٢}{٤ + ٤} = \frac{١٦}{٨} = ٢$$

سؤال كتاب :

$\lim_{\text{س} \to ٥} \frac{٣\text{س} - ١٥}{\sqrt{\text{س} + ٢٠} - ٥} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نضرب ونقسم على مرافق المقام وهو $\sqrt{\text{س} + ٢٠} + ٥$

$$\lim_{\text{س} \to ٥} \frac{٣\text{س} - ١٥}{\sqrt{\text{س} + ٢٠} - ٥} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ٢٠} + ٥}{\sqrt{\text{س} + ٢٠} + ٥} =$$

$$= \underset{س \to ٥}{نهـا} \frac{٣(س - ٥)\left(\sqrt{س + ٢٠} + ٥\right)}{\left(\sqrt{س + ٢٠} - ٥\right)\left(\sqrt{س + ٢٠} + ٥\right)} = \underset{س \to ٥}{نهـا} \frac{(٣س - ١٥)\left(\sqrt{س + ٢٠} + ٥\right)}{س + ٢٠ - ٢٥}$$

$$= \underset{س \to ٥}{نهـا} \frac{٣\cancel{(س - ٥)}\left(\sqrt{س + ٢٠} + ٥\right)}{\cancel{س - ٥}} = \underset{س \to ٥}{نهـا}\ ٣\left(\sqrt{س + ٢٠} + ٥\right)$$

$$= ٣\left(\sqrt{٥ + ٢٠} + ٥\right) = ٣ \times ١٠ = ٣٠$$

مثال :

جد قيمة ما يلي : $\underset{س \to -٥}{نهـا} \left(\frac{٢س + ١٠}{س^{٢} + ٢٥} + س \right)$

$$\underset{س \to -٥}{نهـا} \left(\frac{٢س + ١٠}{س^{٢} + ٢٥} + س \right) = \left(\frac{٢(-٥) + ١٠}{(-٥)^{٢} + ٢٥} + (-٥) \right) = \frac{صفر}{٥٠} - ٥$$

$$= صفر - ٥ = -٥$$

سؤال كتاب :

إذا كان ق(س) = س ، فجد $\underset{س \to -٣}{نهـا} \frac{ق^{٢}(س) - ق(٩)}{س + ٣}$

الحل :

ق(٩) = ٩ ، $ق^{٢}(س) = س^{٢}$

$$\underset{س \to -٣}{نهـا} \frac{ق^{٢}(س) - ق(٩)}{س + ٣} = \underset{س \to -٣}{نهـا} \frac{س^{٢} - ٩}{س + ٣} = \frac{صفر}{صفر}$$ نحلل

$$= \underset{س \to -٣}{نهـا} \frac{(س-٣)\cancel{(س+٣)}}{\cancel{س + ٣}} = \underset{س \to -٣}{نهـا} (س - ٣) = -٣ - ٣ = -٦$$

مثال :

جد قيمة ما يلي

$$\underset{س \to ١}{نهـا} \frac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} - ١} = \frac{صفر}{صفر}$$ غير مقبول نحلل

$$\underset{س \to ١}{نهـا} \frac{(س + ٢)\cancel{(س - ١)}}{(س+١)\cancel{(س-١)}} = \underset{س \to ١}{نهـا} \frac{(س + ٢)}{(س+١)} = \frac{(١ + ٢)}{(١+١)} = \frac{٣}{٢}$$

مثال :

جد قيمة ما يلي :

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٧}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{٣\text{س} + ٤} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٤٩}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٧}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{٣\text{س} + ٤} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٤٩} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ نضرب ونقسم على مرافق الجذر

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٧}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{٣\text{س} + ٤} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٤٩} \times \frac{\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥}{\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥} =$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٧}{\text{نهـــا}} \frac{٣\text{س} + ٤ - ٢٥}{(\text{س}^{٢} - ٤٩)(\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥)} = \frac{٣\text{س} - ٢١}{(\text{س} - ٧)(\text{س} + ٧)(\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥)}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٧}{\text{نهـــا}} \frac{٣\cancel{(\text{س} - ٧)}}{\cancel{(\text{س} - ٧)}(\text{س} + ٧)(\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥)} =$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٧}{\text{نهـــا}} \frac{٣}{(\text{س} + ٧)(\sqrt{٣\text{س} + ٤} + ٥)} = \frac{٣}{(٧ + ٧)(\sqrt{٣ \times ٧ + ٤} + ٥)}$$

$$= \frac{٣}{١٤ \times ١٠} = \frac{٣}{١٤٠}$$

سؤال كتاب :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ٢}$ ، فجد $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ٢}$ ، $\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) = \frac{١}{(\text{س} + \text{هـ}) - ٢}$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\frac{١}{\text{س} + \text{هـ} - ٢} - \frac{١}{\text{س} - ٢}}{\text{هـ}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ نوحد المقامات

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\dfrac{(\text{س}-2)-(\text{س}+\text{هـ}-2)}{(\text{س}-2)(\text{س}+\text{هـ}-2)}}{\text{هـ}}$$

$$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\cancel{\text{س}}-\cancel{2}-\cancel{\text{س}}-\text{هـ}+\cancel{2}}{\text{هـ}(\text{س}-2)(\text{س}+\text{هـ}-2)} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{-\cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}(\text{س}-2)(\text{س}+\text{هـ}-2)}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{-1}{(\text{س}-2)(\text{س}+\text{هـ}-2)} = \frac{-1}{(\text{س}-2)(\text{س}+0-2)} = \frac{-1}{(\text{س}-2)(\text{س}-2)}$$

$= \frac{-1}{(\text{س}-2)^2}$ والناتج هو المشتقة الأولى لـ ق(س) كما سيمر معنا في بحث المشتقة الأولى

مثال :

جد قيمة ما يلي : $\lim_{\text{س} \to 0} \left(\dfrac{\dfrac{1}{\text{س}-5} + \dfrac{2}{4\text{س}+10}}{3\text{س}} \right)$

$$\lim_{\text{س} \to 0} \left(\frac{\dfrac{1}{\text{س}-5} + \dfrac{2}{4\text{س}+10}}{3\text{س}} \right) = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$ غير مقبول نوحد المقامات

$$\lim_{\text{س} \to 0} \left(\frac{(4\text{س}+10) + 2\times(\text{س}-5)}{3\text{س}(\text{س}-5)(4\text{س}+10)} \right) = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{4\text{س}+\cancel{10}+2\text{س}-\cancel{10}}{3\text{س}(\text{س}-5)(4\text{س}+10)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\cancel{6}^{\,2}\cancel{\text{س}}}{\cancel{3}\cancel{\text{س}}(\text{س}-5)(4\text{س}+10)} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{2}{(\text{س}-5)(4\text{س}+10)}$$

$$= \frac{2}{(0-5)(4\times 0+10)} = \frac{2}{5 \times 10} = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$$

سؤال كتاب :

إذا كان :

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{أس} + 4 & ، \text{س} < 2 \\ 5\text{س}^2 + \text{أ} & ، \text{س} \geq 2 \end{cases}$$

وكانت $\lim_{\text{س} \to 2}$ ق(س) موجودة ، فما قيمة الثابت أ ؟

بما أن النهاية موجودة فإن :

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س)

$\lim_{س \to ٢^+}$ (٥س^٢ + أ) = $\lim_{س \to ٢^-}$ (أس + ٤)

٥(٢)^٢ + أ = ٢ أ + ٤ ومنه ٢٠+ أ = ٢أ + ٤

٢أ ـ أ = ٢٠ ـ ٤ ومنه أ = ١٦

نهاية اقتران الجذر النوني

نظرية : نهاية الجذر النوني لاقتران ($\sqrt[ن]{ق(س)}$) عند عدد ما (أ) تساوي الجذر النوني لنهاية الاقتران عن هذا العدد ونعبر عن ذلك بالرموز :

$$\boxed{\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} ق(س)}}$$

ونميز حالتين لــ (ن) :

الحالة الاولى : ن فردي : وفي هذه الحالة نعوض بالنقطة التي تقترب منها س والتعويض مقبول

مثال : إذا كان ق(س) = $\sqrt[٣]{س + ٣}$ فأوجد $\lim_{س \to -١١}$ ق(س)

الحـــل : $\lim_{س \to -١١} \sqrt[٣]{س + ٣} = \sqrt[٣]{-١١ + ٣} = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

الحالة الثانية : ن زوجي : وهنا نميز ثلاث نواتج :

الناتج الاول : موجب وهو مقبول والنهاية موجودة وتساوي ناتج التعويض

مثال : إذا كان ق(س) = $\sqrt{س + ٤}$ فأوجد $\lim_{س \to ٥}$ ق(س)

الحـــل : $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س + ٤} = \sqrt{٥ + ٤} = \sqrt{٩} = ٣$

الناتج الثاني : سالب وهو مرفوض والنهاية غير موجودة

مثال : إذا كان ق(س) = $\sqrt{س - ٧}$ فأوجد $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

الحـــل : $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س - ٧} = \sqrt{٣ - ٧} = \sqrt{-٤}$ النهاية غير موجودة لعدم وجود جذر تربيعي حقيقي للعدد السالب

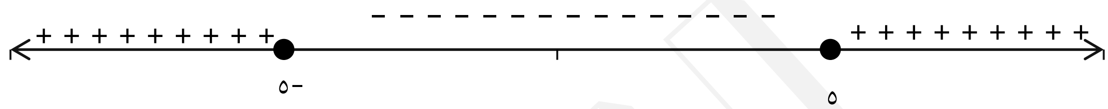
الناتج الثالث : صفر وهنا ندرس الإشارة فإذا كان الاقتران(ق(س) >٠) أي موجب من اليمين واليسار عند نقطة الاقتراب كانت النهاية موجودة وتساوي الصفر وإذا كان (ق(س) < ٠) كانت النهاية غير موجودة

مثال : أوجد قيمة ما يلي $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢٥}$

الحل : $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢٥} = \sqrt{(٥)^{٢} - ٢٥} = \text{صفر}$

ندرس إشارة ق(س)

$\text{س}^{٢} - ٢٥ = ٠ \longrightarrow \text{س}^{٢} = ٢٥ \longrightarrow \text{س} = \pm ٥$



$\underset{\text{س} \to ٥^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢٥}$ غير موجودة

$\underset{\text{س} \to ٥^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢٥} = \text{صفر}$

بما أن $\underset{\text{س} \to ٥^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢٥} \neq \underset{\text{س} \to ٥^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢٥}$

إذا $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢٥}$ غير موجودة

أمثلة على نهاية اقتران الجذر النوني

سؤال كتاب :

إذا كان $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = ٢٤$ ، $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \text{هـ(س)} = ٨$ ، فجد قيمة مايلي :

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{ق(س)} - \text{هـ(س)}} + \text{س هـ(س)}$

الحل :

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{ق(س)} - \text{هـ(س)}} + \text{س هـ(س)} = \sqrt{٢٤ - ٨} + ٣ \times ٨ = \sqrt{١٦} + ٢٤ = ٢٨$

مثال :

جد قيمة ما يلي : $\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}+٩}{\text{س}} + \sqrt{٦ - \text{س}} \right)$

الحل :

$\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}+٩}{\text{س}} + \sqrt{٦ - \text{س}} \right) = \underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}+٩}{\text{س}} \right) + \underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{٦ - \text{س}} \right)$

$= \frac{-٣+٩}{-٣} + \sqrt{٦ - (-٣)} = -٢ + \sqrt{٩} = -٢ + ٣ = ١$

سؤال كتاب :

إذا علمت أن $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) = −٦٤ أوجد ما يلي : $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \left(\sqrt[٣]{\text{ق(س)}} + \text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٣ \right)$

الحل :

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \left(\sqrt[٣]{\text{ق(س)}} + \text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٣ \right) = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{\text{ق(س)}} + \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \text{س}^{٢} + \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} ٥\text{س} - ٣$

$= \sqrt[٣]{-٦٤} + (٣)^{٢} - ٥(٣) - ٣ = -٤ + ٩ - ١٥ - ٣ = -١٣$

مثال :

جد قيمة ما يلي :

$$\underset{\text{س}\to -٥}{\text{نهـا}} \left(\sqrt[٣]{٣ - \text{س}} + \frac{\text{س}+٥}{\text{س}^{٢} - \text{س}} \right)$$

الحل :

$\underset{\text{س}\to -٥}{\text{نهـا}} \left(\sqrt[٣]{٣ - \text{س}} + \frac{\text{س}+٥}{\text{س}^{٢} - \text{س}} \right) = \underset{\text{س}\to -٥}{\text{نهـا}} \left(\sqrt[٣]{٣ - \text{س}} \right) + \underset{\text{س}\to -٥}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}+٥}{\text{س}^{٢} - \text{س}} \right)$

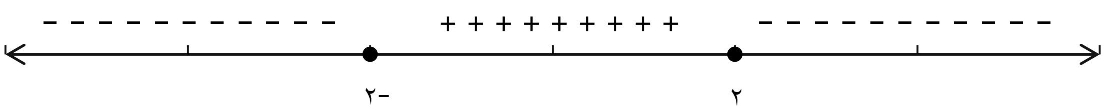
$= \sqrt[٣]{٣ - (-٥)} + \frac{-٥+٥}{(-٥)^{٢} - (-٥)} = \sqrt[٣]{٨} + \frac{\text{صفر}}{٢٥ + ٥} = ٢ + \text{صفر} = ٢$

سؤال كتاب :

جد قيمة ما يلي : $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \sqrt[٤]{٤ - \text{س}^{٢}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \sqrt[٤]{٤ - \text{س}^{٢}}$ = صفر لذلك ندرس إشارة الاقتران

$٤ - \text{س}^{٢} = ٠ \longleftarrow \text{س}^{٢} = ٤ \longleftarrow \text{س} = \pm ٢$



نلاحظ أن $\underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt[٤]{٤ - \text{س}^{٢}}$ غير موجودة

$\underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt[٤]{٤ - \text{س}^{٢}}$ = صفر $\longleftarrow$ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \sqrt[٤]{٤ - \text{س}^{٢}}$ غير موجودة

الاتصال

تعريف الاتصال :

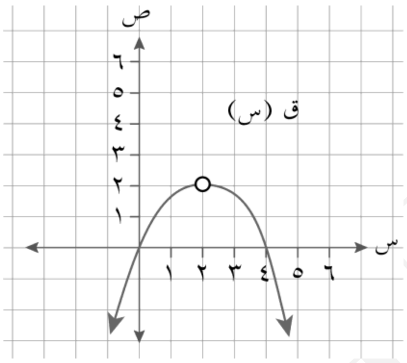
يكون الاقتران ق(س) متصلا عند نقطة س = أ إذا تحققت ثلاثة شروط :

الشرط الأول : ق(أ) = أ

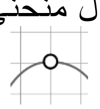
الشرط الثاني : $\underset{س \to أ^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{س \to أ^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) وبالتالي $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ ق(س) موجودة

الشرط الثالث : $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ ق(س) = ق(أ)

توضيح الاتصال من خلال الرسم :



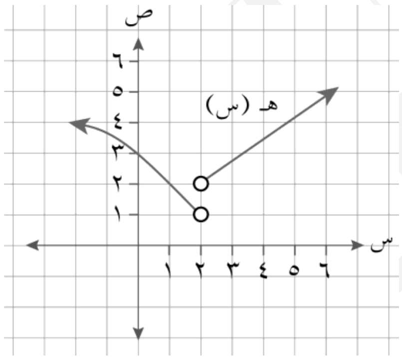
نلاحظ من خلال منحنى الاقتران ق(س) وجود ثقب

في المنحنى  عند النقطة س = ٢

أي أن الاقتران غير معرف عند النقطة س= ٢

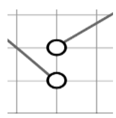
وبالتالي ق(٢) غير موجودة

والنتيجة ق(س) غير متصل لعدم تحقق أحد شروطه



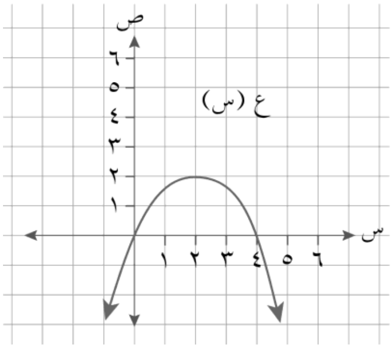
نلاحظ من منحنى الاقتران هـ(س) أن :

$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) $\neq$ $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س)

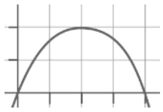


وذلك بسبب وجود قفزة في منحنى الاقتران :

عند النقطة س=٢ والنتيجة هـ (س) غير متصل



نلاحظ من منحنى الاقتران ع (س) عدم وجود انقطاع

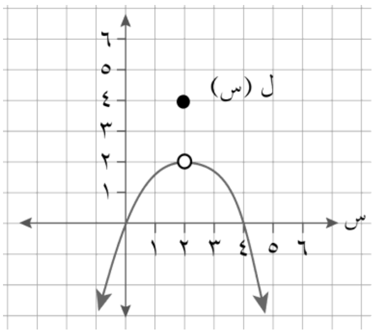
أو قفزة في المنحنى  وكذلك نجد :

ع(٢) = ٢

$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}}$ ع(س) = $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}}$ ع(س) = ٢

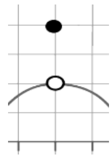
أي $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}$ ع(س) = ٢

وبما أن $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}$ ق(س) = ع (٢) تحققت كل الشروط فالاقتران ع(س) متصل



نلاحظ من منحنى الاقتران ل (س) وجود فجوة في المنحنى

عند النقطة س = ٢ وبالتالي :



نهـــا (س ← ٢) ل (س) ≠ ل (٢)

فالاقتران ل (س) غير متصل ,

نتيجة هامة : يكون منحنى الاقتران غير متصل عند وجود ثقب أو قفزة أو فجوة

ملاحظات هامة :

- الاقتران كثير الحدود يكون متصل دائما عند نقطة
- الاقتران الكسري يكون متصلا عند جميع الأعداد ما عدا الأعداد التي تجعل المقام صفرا
- في الاقتران المتشعب ندرس النهاية من اليمين واليسار عند نقاط التشعب لأنها قد تكون نقاط عدم اتصال بسبب وجود ثقب أو فجوة أو قفزة

أمثلة على الاتصال :

سؤال كتاب : إذا كان :

ق(س) = { س^{٢} + ٢ ، س < ١
٣س ، ١ ≤ س < ٣
س^{٣} ــ١٨ ، س > ٣ }

فابحث اتصال الاقتران عند كل مما يلي : س = ٠ ، س = ١ ، س = ٣

الحل :

نلاحظ أن الاقتران متشعب عند النقاط س =١ و س = ٣

عندما س = ٠ ⟵ ق(٠) = (٠)^{٢} + ٢ = ٢

نهـــا (س ← ٠) ق (س) = نهـــا (س ← ٠) (س^{٢} + ٢) = (٠)^{٢} + ٢ = ٢

بما أن نهـــا (س ← ٠) ق (س)= ق(٠) = ٢ فالإقتران متصل عند النقطة س = ٠

عندما س = ١ ⟵ ق(١) = ٣ × ١ = ٣

بما أن س = ١ نقطة تشعب نوجد النهاية من اليمين واليسار

نهـــا (س ← ١$^{-}$) ق (س) = نهـــا س^{٢} + ٢= (١)^{٢} + ٢ = ٣

نهـــا (س ← ١$^{+}$) ق (س) = نهـــا ٣س = ٣ × ١ = ٣ ⟵ نهـــا (س ← ١) ق (س) = ٣

بما أن نهـــا (س ← ١) ق (س) = ق(١)

∴ الاقتران ق (س) متصل عندما س = ١

عندما س = ٣ ⟵ ق(٣) غير موجودة لعدم وجودها في قاعدة الاقتران

∴ الاقتران ق(س) غير متصل عندما س = ٣

مثال :

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{٢أ س}^{٢} + \text{ب} & \text{، س} < ١ \\ ٧ & \text{، س} = ١ \\ \text{س}^{٢} - \text{٤ب} - ٦ & \text{، س} > ١ \end{cases}$

فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب التي تجعل الاقتران ق متصلا عند س = ١ ؟

الحل :

ق(١) =٧ يكون الاقتران ق متصلا عندما

نهـا$_{\text{س} \leftarrow ١^{+}}$ ق(س) = نهـا$_{\text{س} \leftarrow ١^{+}}$ ق(س) = ق (١) = ٧ ونكتب

نهـا$_{\text{س} \leftarrow ١^{=}}$ ق(س) = نهـا$_{\text{س} \leftarrow ١^{=}}$ (٢أ س^{٢} + ب) = ٢أ (١)^{٢} + ب = ٧

٢أ +ب = ٧ .... (١)

نهـا$_{\text{س} \leftarrow ١^{+}}$ ق(س) = نهـا$_{\text{س} \leftarrow ١^{+}}$ (س^{٢} −٤ب −٦) = (١)^{٢} −٤ ب − ٦ = ٧

١ −٤ب −٦ = ٧ ⟵ ٤ب = −١٢ ⟵ ب = −٣

نعوض ب في (١) فنجد ٢أ + (−٣) = ٧ ⟵ ٢أ −٣ = ٧ ⟵ ٢أ = ١٠ ⟵ أ = ٥

سؤال كتاب :

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{٥}{\text{س} + ١} & \text{، س} \neq ١ \\ ٣ & \text{، س} = ١ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران هـ عندما س = ١

الحل: ق(١) = ٣

عند وجود إشارة (≠) فإننا نعوض بها دائما ولا نوجد النهاية من اليمين واليسار

نهـا$_{\text{س} \leftarrow ١}$ ق (س) = نهـا$_{\text{س} \leftarrow ١}$ $\dfrac{٥}{\text{س} + ١}$ = $\dfrac{٥}{١ + ١}$ = $\dfrac{٥}{٢}$

∴ الاقتران غير متصل لأن نهـا$_{\text{س} \leftarrow ١}$ ق (س) ≠ ق(١)

مثال :

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^2 + (٢ - ا)\,س}{س} & ،\ س > ٠ \\ ٦ & ،\ س = ٠ \\ ٥ - س + ب & ،\ س < ٠ \end{cases}$

إذا كان ق متصلا عند س = صفر ، فما قيمة كل من الثابتين ا ، ب ؟

الحل : ق(٠) = ٦

يكون الاقتران ق متصلا عندما :

$\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = ق (٠) = ٦ ونكتب

$\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^+} \dfrac{س^2 + (٢ - ا)\,س}{س} = \dfrac{صفر}{صفر}$ غير مقبول نحلل

$\lim_{س \to ٠^+} \dfrac{س^2 + (٢ - ا)\,س}{س} = \lim_{س \to ٠^+} \dfrac{\cancel{س}(س + (٢ - ا))}{\cancel{س}} = \lim_{س \to ٠^+} \dfrac{س + (٢ - ا)}{١}$

= (٠ + (٢ - ا) = ق(٠) = ٦ ⟵ ٢ - ا = ٦ ⟵ ا = -٤

$\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ (٥ - س + ب) = ٥ - ٠ + ب = ق(٠) = ٦

٥ + ب = ٦ ⟵ ب = ٦ - ٥ ⟵ ب = ١

سؤال كتاب : إذا كان ق متصلا عندما س = ٢ ، وكانت $\lim_{س \to ٢}$ ٢ق(س) + س = ٦

فما قيمة ق(٢) ؟

$\lim_{س \to ٢}$ ٢ق(س) + س = ٦ ⟵ ٢ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) + س = ٦ ⟵ ٢ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) + ٢ = ٦

٢ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٤ ⟵ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٢ ، وبما أن الاقتران ق متصلا عند س = ٢

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ق(٢) = ٢

نظريات الاتصال

إذا كان الاقترانان ق ، هـ متصلين عندما س = أ فإن :

- ق ± هـ متصل عندما س = أ
- ق × هـ متصل عندما س = أ
- $\dfrac{\text{ق}}{\text{هـ}}$ متصل عندما س = أ ، إذا كان هـ ≠ أ

بمختصر العبارة مجموع أو فرق أو جداء أو قسمة اقترانين متصلين عند نقطة هو اقتران متصل عند نفس النقطة

مثال :

إذا كان ق (س) = $\text{س}^{٢}$ + ٢ ، هـ (س) =
$$\begin{cases} \text{س} - ١ & ، \text{س} \le ٣ \\ ٥ - \text{س} & ، \text{س} > ٣ \end{cases}$$

فابحث اتصال م (س) = (ق × هـ) عندما س = ٣

الحل :

$$\text{م (س)} = (\text{ق} + \text{هـ}) = \begin{cases} (\text{س}^{٢} + ٢)(\text{س} - ١) & ، \text{س} \le ٣ \\ (\text{س}^{٢} + ٢)(٥ - \text{س}) & ، \text{س} > ٣ \end{cases}$$

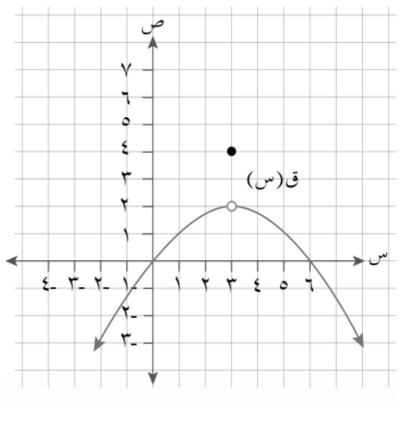
ق(٣) = ((٣)^{٢} + ٢)(٣ − ١) = ٢٢

$\text{نها}_{\text{س}\to ٣^-}$ م(س) = $\text{نها}_{\text{س}\to ٣^-}$ (س^{٢} + ٢)(س − ١) = ((٣)٢ + ٢)(٣ − ١) = ٢٢

$\text{نها}_{\text{س}\to ٣^+}$ م(س) = $\text{نها}_{\text{س}\to ٣^+}$ (س^{٢} + ٢)(٥ − س) = ((٣)^{٢}+٢) (٥ − ٣) = ٢٢

بما أن $\text{نها}_{\text{س}\to ٣^-}$ م(س) = $\text{نها}_{\text{س}\to ٣^+}$ م(س) = ق (٣)

∴ الاقتران م(س) متصل عند النقطة ٣



سؤال كتاب :

منحنى الاقتران ق المبين في الشكل غير متصل عندما س = ٣ لان

ق(٣) = ٤

بينما $\text{نها}_{\text{س}\to ٣^-}$ ق(س) = $\text{نها}_{\text{س}\to ٣^+}$ ق(س) = ٢ ≠ ق (٣)

مثال :

إذا كان هـ (س) = س^{٢} + ٦ ، ل (س) = { ٣س^{٢} – س ، س ≥ ٢ ؛ س + ٨ ، س < ٢ }

وكان ق(س) = هـ(س) – ل (س) فابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٢

الحل :

ق (س) = { (س^{٢} + ٦) – (٣س^{٢} – س) ، س ≥ ٢ ؛ (س^{٢} + ٦) – (س + ٨) ، س < ٢ }

ق (س) = { –٢س^{٢} +س + ٦ ، س ≥ ٢ ؛ س^{٢} – س – ٢ ، س < ٢ }

ق(٢) = –٢(٢)^{٢} + ٢ + ٦ = –٨ + ٨ = صفر

نهـــا$_{س ← ٢^{-}}$ ق(س) = نهـــا$_{س ← ٢^{-}}$ (–٢س^{٢} +س + ٦) = –٢(٢)^{٢} + ٢ + ٦ = –٨ + ٨ = صفر

نهـــا$_{س ← ٢^{+}}$ ق(س) = نهـــا$_{س ← ٢^{+}}$ (س^{٢} – س – ٢) = (٢)^{٢} – ٢ – ٢ = صفر

بما أن نهـــا$_{س ← ٢^{-}}$ ق(س) = نهـــا$_{س ← ٢^{+}}$ ق(س) = ق (٢) = صفر

∴ الاقتران ق(س) متصل عند النقطة س = ٢

سؤال كتاب :

جد قيم س التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي متصلا :

١) ق(س) = س^{٣} – س + ٨ وهو اقتران كثير حدود متصل لجميع قيم س

٢) هـ (س) = $\frac{س – ٣}{س^{٢} – ٥س + ٦}$ اقتران نسبي متصل لجميع قيم س ما عدا أصفار المقام لذا

نوجد أصفار مقامه :

س٢ – ٥س +٦ = صفر ⟵ (س–٣)(س–٢) = صفر ⟵ س=٣ ، س =٢

∴ هـ(س) غير متصل عندما س = ٣ أو س = ٢

٣) ل(س) = $\frac{س + ٢}{س^{٢} – ١}$ + $\frac{٥}{س}$ هذا اقتران نسبي متصل لجميع قيم س ما عدا أصفار المقام

نوجد أصفار مقامه :

من الكسر الأول نجد : س^{٢} –١ = صفر ⟵ س = ± ١

ومن الكسر الثاني نجد س = صفر

∴ ل(س) غير متصل عندما س = ±١ أو س = صفر

ملاحظة : يمكن حل هذا التمرين بتوحيد المقامات ثم إيجاد أصفار المقامات

مثال :

إذا كان ق، هـ اقترانين متصلين عند س = ٢ وكان ق(٢)=٦ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}(\text{ق(س)} - ٤\text{هـ(س)}) = -١٤$

فأجب عن كل مما يأتي :

١- جد قيمة هـ(٢)

٢- جد قيمة الثابت ل التي تجعل $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{ق(س)})^{٢} - \text{ل}}{\text{هـ(س)}} = ٤$

الحل :

أولاً:

بما أن ق ،هـ متصلين عند س = ٢ فإن $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\text{ق(س)} = \text{ق(٢)} = ٦$ وكذلك $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\text{هـ(س)} = \text{هـ(٢)}$

$\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}(\text{ق(س)} - ٤\text{هـ(س)}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\text{ق(س)} - ٤\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\text{هـ(س)} = -١٤ \leftarrow$ بالتعويض

$٦ - ٤\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\text{هـ(س)} = -١٤ \leftarrow \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\text{هـ(س)} = \dfrac{٦+١٤}{٤} = ٥ \leftarrow \text{هـ(٢)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\text{هـ(س)} = ٥$

ثانيا :

$\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{ق(س)})^{٢} - \text{ل}}{\text{هـ(س)}} = \dfrac{(\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\text{ق(س)})^{٢} - \text{ل}}{\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}\text{هـ(س)}} = \dfrac{(٦)^{٢} - \text{ل}}{٥} = ٤ \leftarrow (٦)^{٢} - \text{ل} = ٢٠ \leftarrow$

ل = ١٦

حل أسئلة الوحدة الاولى (النهايات والاتصال)

١) اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، جد قيمة كل مما يأتي :

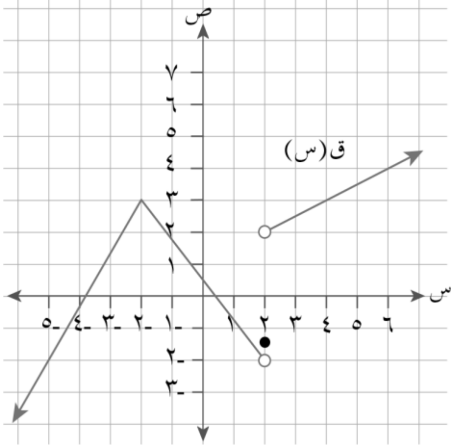
أ) ق(٢)

ب) $\underset{س \to -١}{\text{نهــا}}$ ق(س)

ج) $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)

د) قيم س التي يكون عندها منحنى الاقتران ق غير متصل

هـ) $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ ((ق(س))^{٢} – س + ٢)



الحل :

أ) ق(٢) = $-\frac{٣}{٢}$ = -١,٥

ب) $\underset{س \to -١^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٢ ، $\underset{س \to -١^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٢ ⟵ $\underset{س \to -١}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٢

ج) $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = -٢ ، $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٢ ⟵ $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) غير موجودة

د) الاقتران يكون غير متصل عند قيم س ∋ {٢} بسبب وجود قفزة

هـ) $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ ((ق(س))^{٢} – س + ٢) = ($\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ ق(س))^{٢} – $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ س + ٢

لكن $\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\frac{١}{٢}$ ⟵ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\frac{١}{٢}$ نعوض

($\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ ق(س))^{٢} – $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ س + ٢ = ($\frac{١}{٢}$)^{٢} – ٠ + ٢ = $\frac{١}{٤}$ + ٢ = $\frac{٩}{٤}$

٢) إذا كانت $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}}$ (ق(س))^{٣} + ٢ = ٢٩ ، $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}}$ هـ(س) = -٣ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}}$ (ق(س) + ٢هـ(س) + س) ب) $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}}$ (ق(س) × هـ(س))

الحل :

أ) نوجد أولا : $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}}$ (ق(س))^{٣} + ٢ = ٢٩ ⟵ $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}}$ (ق(س))^{٣} = ٢٩ – ٢ = ٢٧ ⟵

$\underset{س \to ١}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٣

$\underset{س \to ١}{\text{نهــا}}$ (ق(س) + ٢هـ(س) + س) = $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}}$ ق(س) + ٢ $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}}$ هـ(س) + $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}}$ س

= ٣ + ٢ × -٣ + ١ = ٣ – ٦ + ١ = -٢

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (\text{ق(س)} \times \text{هـ(س)}) = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} \times \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{هـ(س)}$

$= ٣ \times -٣ = -٩$

٤) جد قيمة النهاية (إن وجدت) في كل مما يأتي عند قيم س المبينة إزاء كل منها :

أ) $\text{ق(س)} = \sqrt{٣ - \text{س}} + \frac{\text{س}+١}{\text{س}^٢+١}$ ، س ← −١

الحل : $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \sqrt{٣ - \text{س}} + \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}+١}{\text{س}^٢+١}$

$= \sqrt{٣ - (-١)} + \frac{-١+١}{(-١)^٢+١} = \sqrt{٤} + \frac{\text{صفر}}{٢} = ٢$

ب) $\text{هـ(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{٢\text{س} - ١٠}$ ، س ← ٥

$\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \text{هـ(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{٢\text{س} - ١٠} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير مقبول نحلل

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}\cancel{(\text{س} - ٥)}}{٢\cancel{(\text{س} - ٥)}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{٢} = \frac{٥}{٢}$

جـ) $\text{ل(س)} = \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١}{١٢ - ٣\text{س}}$ ، س ← ١

$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{ل(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١}{١٢ - ٣\text{س}} = \frac{(١)^٢ - ٢(١) + ١}{١٢ - ٣(١)} = \frac{\text{صفر}}{٩} = \text{صفر}$

هـ) $\text{م(س)} = \frac{\frac{١}{\text{س}-٢} - \frac{١}{٢}}{٢\text{س} - ٨}$ س ← ٤

$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{م(س)} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير مقبول لذلك نوحد المقامات

$\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \text{م(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{\text{س}-٢} - \frac{١}{٢}}{٢\text{س} - ٨} = \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{٢ - (\text{س}-٢)}{٢(\text{س}-٢)(٢\text{س}-٨)}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{٢ - \text{س}+٢}{٢(\text{س}-٢)(٢\text{س}-٨)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{\overset{-١}{\cancel{٤ - \text{س}}}}{٤(\text{س}-٢)\cancel{(\text{س}-٤)}}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{-١}{٤(\text{س}-٢)} = \frac{-١}{٤(٤-٢)} = \frac{-١}{٨}$

و) $\text{د(س)} = \dfrac{\sqrt{\text{٣س+٤}} - \text{٥}}{\text{س٢} - \text{٤٩}}$　　　$\text{س} \longrightarrow \text{٧}$

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{٧}} \text{د(س)} = \dfrac{\sqrt{\text{٣(٧)+٤}} - \text{٥}}{\text{(٧)}^{\text{٢}} - \text{٤٩}} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير مقبول لذلك نضرب ونقسم على مرافق البسط

$= \lim\limits_{\text{س} \to \text{٧}} \dfrac{\sqrt{\text{٣س+٤}} - \text{٥}}{\text{س٢} - \text{٤٩}} \times \dfrac{\sqrt{\text{٣س+٤}} + \text{٥}}{\sqrt{\text{٣س+٤}} + \text{٥}} = \lim \dfrac{\text{٣س+٤} - \text{٢٥}}{\text{(س}^{\text{٢}} - \text{٤٩)} (\sqrt{\text{٣س+٤}} + \text{٥})} =$

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{٧}} \dfrac{\text{٣س} - \text{٢١}}{\text{(س−٧)(س+٧)}(\sqrt{\text{٣س+٤}} + \text{٥})} = \lim \dfrac{\text{٣}\cancel{\text{(س−٧)}}}{\cancel{\text{(س−٧)}}\text{(س+٧)}(\sqrt{\text{٣س+٤}} + \text{٥})}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to \text{٧}} \dfrac{\text{٣}}{\text{(س+٧)}(\sqrt{\text{٣س+٤}} + \text{٥})} = \dfrac{\text{٣}}{\text{(٧+٧)}(\sqrt{\text{٣(٧)+٤}} + \text{٥})} = \dfrac{\text{٣}}{\text{١٤×١٠}} = \dfrac{\text{٣}}{\text{١٤٠}}$

٥) إذا كان $\text{ق(س)} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{٥س}$ ، $\text{هـ (س)} = \begin{cases} \text{٥س +٤} & \text{، س} \le \text{١} \\ \text{٨ + س}^{\text{٢}} & \text{، س} > \text{٢} \end{cases}$

وكان ل(س)= (ق+هـ)(س) ، فابحث اتصال الاقتران ل عندما س= ١

الحل :

$\text{ل (س)} = \begin{cases} \text{س}^{\text{٣}}\text{+٥س + ٥س +٤} & \text{، س} \le \text{١} \\ \text{س}^{\text{٣}}\text{+٥س+٨ + س}^{\text{٢}} & \text{، س} > \text{١} \end{cases}$

$\text{ل (س)} = \begin{cases} \text{س}^{\text{٣}}\text{+١٠س +٤} & \text{، س} \le \text{١} \\ \text{س}^{\text{٣}}\text{+ س}^{\text{٢}}\text{ +٥ س+٨} & \text{، س} > \text{١} \end{cases}$

$\text{ق(١)} = \text{(١)}^{\text{٣}}\text{+١٠(١)} + \text{٤} = \text{١ +١٠+٤} = \text{١٥}$

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{١}^-} \text{ل(س)} = \lim \text{(س٣+١٠س +٤)} = \text{(١)٣+١٠(١)} + \text{٤} = \text{١ +١٠+٤} = \text{١٥}$

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{١}^+} \text{ل(س)} = \lim \text{(س}^{\text{٣}}\text{+ س}^{\text{٢}}\text{ +٥ س+٨)} = \text{(١)}^{\text{٣}}\text{ +(١)}^{\text{٢}}\text{+٥(١)+٨} = \text{١٥}$

بما أن $\lim\limits_{\text{س} \to \text{١}^-} \text{ل(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to \text{١}^+} \text{ل(س)} = \text{ق(١)} = \text{١٥}$

∴ ل(س) متصل عندما س = ١

٧) إذا كان كل من الاقترانين : ق ، هـ متصلا عندما س=٥ وكان هـ(٥) = ٤ ،

$\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س) + س}}{\text{٣هـ(س)}}$ = ١ ، فجد ق(٥)

$= \frac{\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} + \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ \text{س}}{\text{٣}\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)}} = ١$

بما أن هـ متصل فإن $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = هـ(٥) = ٤

$\frac{\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} + ٥}{٣ \times ٤} = ١ \longrightarrow \underset{}{\text{نهـا}}$ ق(س) +٥ = ١٢

$\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١٢ ـ ٥ = ٧ بما أن ق متصل فإن $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(٥) = ٧

٨) إذا كان ق(س) = $\frac{١}{\text{س}} + \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٣\text{س}}$ فما قيم س التي لايكون عندها الاقتران ق متصلا ؟

الحل:

بما أن الاقتران كسري فإن الاقتران ق يكون غير متصل عند أصفار المقام

من الكسر الأول نجد س =٠

ومن الكسر الثاني نجد $\text{س}^٢ - ٣\text{س}$ = ٠ ⟵ س(س-٣) = ٠ ⟵ س=٠ أو س = ٣

ق غير متصل عند القيم س ∈ {٠، ٣ }

٩) يتكون عذا السؤال نمن خمس فقرات من نوع الاختيار من متعدد ، لكل فقرة أربعة بدائل واحد منها فقط صحيح ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح :

(١) إذا كان م عدداً ثابتا ، وكان $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ (م $\text{س}^٢$ ـ ٤س +٥) = ٥ ، فإن قيمة م هي :

أ) ١　　ب) ـ١　　جـ) ٤　　د) ـ٤

(٢) $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ $(\text{س}^٢ - ٤)^٣$ تساوي :

أ) ـ١٢٥　　ب) ـ٢٧　　جـ) ١٢٥　　د) ٢٧

(٣) إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}$ فإن قيم س التي لا يكون عندها الاقتران ق متصلا هي :

أ) {٥،٠}　　ب) {ـ٥،٠}　　جـ) {١،٢}　　د) {ـ١،ـ٢}

(٤)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س} - ١ & \text{، س} \geq ٢ \\ ٣ & \text{، س} = ٢ \\ \text{س}^٢ & \text{، س} > ٢ \end{cases}$ فإن $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ هـ(س)=

أ) ٣　　ب) ٤　　جـ) ١　　د) غير موجودة

(٥) أ) ٩　　ب) ٨١　　جـ) ٢٧　　د) ٢