مراجعة مكثفة

في

الرياضيات المستوى الثالث

العلمي والصناعي

الرياضيات في 100 سؤال وجواب

للاستاذ

محمود الجزار

0787964168 - 0790155162

٢) $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\sqrt{س^2+3} - 2س}{س^3 - 1}$

الحل :-

$\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\sqrt{س^2+3} - 2س}{س^3-1} \times \dfrac{\sqrt{س^2+3}+2س}{\sqrt{س^2+3}+2س}$

$\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{س^2+3-4س^2}{(س-1)(س^2+س+1) \times 4}$

$\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{3-3س^2}{(س-1)(س^2+س+1) \times 4}$

$\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{3(1-س^2)}{(س-1)(س^2+س+1) \times 4}$

$\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{3(1-س)(1+س)}{4 \times (س^2+س+1)\cancel{(س-1)}} = \dfrac{-6}{4 \times 3} = \dfrac{-1}{2}$

٦) $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{س^3 - \sqrt[3]{2س-1}}{2س^2 - 3س + 1}$

الحل :-

$\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{س^3 - 1 + 1 - \sqrt[3]{2س-1}}{2س^2 - 3س + 1}$

$\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{س^3-1}{(س-1)(2س-1)} + \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{2س-1}}{(س-1)(2س-1)}$

$\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\cancel{(س-1)}(س^2+س+1)}{\cancel{(س-1)}(2س-1)} + \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{2س-1}}{(س-1)(2س-1)}$

$\dfrac{3}{1} + \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{2س-1}}{(2س-1)(س-1)} \times \dfrac{1+\sqrt[3]{2س-1}+\sqrt[3]{(2س-1)^2}}{1+\sqrt[3]{2س-1}+\sqrt[3]{(2س-1)^2}}$

$3 + \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{1-(2س-1)}{(س-1)(2س-1)(3)}$

$3 + \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{2-2س}{(2س-1)(س-1)(3)}$

$3 + \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{2\cancel{(1-س)}}{(3)\cancel{(س-1)}(2س-1)} = 3 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{7}{3}$

٣) إذا كانت $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{ق(س)-6}{س-1} = 8$ وكانت $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{س^2+2س-3}{ق(س)-6} + ب = \dfrac{3}{2}$

جد قيمة ب

الحل :- $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\dfrac{س^2+2س-3}{س-1}}{\dfrac{ق(س)-6}{س-1}} + ب = \dfrac{3}{2}$

$\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\dfrac{(س+3)\cancel{(س-1)}}{\cancel{س-1}}}{8} + ب = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{4}{8} + ب = \dfrac{3}{2}$

$\boxed{ب = 1}$

٤) $\lim\limits_{س \to 2} \dfrac{2-س}{جا \pi س}$

الحل :-

$\lim\limits_{س \to 2} \dfrac{2-س}{-جا(2\pi - \pi س)}$

$\lim\limits_{س \to 2} \dfrac{2-س}{-جا \pi(2-س)}$

ص = ٢ − س

س ← ٢

ص ← ٠

$\lim\limits_{ص \to 0} \dfrac{ص}{-جا \pi ص} = \dfrac{-1}{\pi}$

٥) $\lim\limits_{س \to -1} \dfrac{1}{س+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2س+1}} + 1\right)$

الحل :-

$\lim\limits_{س \to -1} \dfrac{1}{س+1} \times \dfrac{1+\sqrt[3]{2س+1}}{\sqrt[3]{2س+1}}$

$\lim\limits_{س \to -1} \dfrac{1}{س+1} \times \dfrac{1+\sqrt[3]{2س+1}}{\sqrt[3]{2س+1}} \times \dfrac{1-\sqrt[3]{2س+1}+\sqrt[3]{(2س+1)^2}}{1-\sqrt[3]{2س+1}+\sqrt[3]{(2س+1)^2}}$

$\lim\limits_{س \to -1} \dfrac{1+(2س+1)}{(س+1)(-1)(3)}$

$\lim\limits_{س \to -1} \dfrac{2س+2}{(س+1)(-1)(3)}$

$\lim\limits_{س \to -1} \dfrac{2\cancel{(1+س)}}{\cancel{(س+1)}(-1)(3)} = \dfrac{-2}{3}$

١١ $\displaystyle \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{جتا}\, س - \sqrt{3}\ \text{جا}\, س}{س - \frac{\pi}{6}}$

$\displaystyle \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{جتا}\, س - \frac{\sqrt{3}}{2}}{س - \frac{\pi}{6}} + \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\ \text{جا}\, س}{س - \frac{\pi}{6}}$

$\displaystyle \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{جتا}\, س - \text{جتا}\, \frac{\pi}{6}}{س - \frac{\pi}{6}} + \sqrt{3}\ \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{جا}\, \frac{\pi}{6} - \text{جا}\, س}{س - \frac{\pi}{6}}$

$\displaystyle \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{-2\ \text{جا}\, \frac{1}{2}(س + \frac{\pi}{6})\ \text{جا}\, \frac{1}{2}(س - \frac{\pi}{6})}{س - \frac{\pi}{6}} + \sqrt{3}\ \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\ \text{جتا}\, \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6} + س)\ \text{جا}\, \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6} - س)}{س - \frac{\pi}{6}}$

$\displaystyle = -2 \times \frac{1}{2} \times \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{جا}\, \frac{1}{2}(س - \frac{\pi}{6})}{س - \frac{\pi}{6}} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{جا}\, \frac{1}{2}(س - \frac{\pi}{6})}{س - \frac{\pi}{6}}$

$\displaystyle -\frac{1}{2} - 3 \times \frac{1}{2} = -2$

١٢ $\displaystyle \text{نهـا}_{س \to 2} \frac{س - \sqrt{4س + 1} + 1}{س^2 - 4}$

$\displaystyle \text{نهـا}_{س \to 2} \frac{(س+1) - \sqrt{4س+1}}{(س-2)(س+2)} \times \frac{(س+1) + \sqrt{4س+1}}{(س+1) + \sqrt{4س+1}}$

$\displaystyle \text{نهـا}_{س \to 2} \frac{(س+1)^2 - (4س+1)}{(س-2)(س+2)(\ 6\ )}$

$\displaystyle \text{نهـا}_{س \to 2} \frac{س^2 + 2س + \cancel{1} - 4س - \cancel{1}}{(س-2)(س+2)(6)}$

$\displaystyle \text{نهـا}_{س \to 2} \frac{س^2 - 2س}{(س-2)(س+2)(6)}$

$\displaystyle \text{نهـا}_{س \to 2} \frac{س\ \cancel{(س-2)}}{6 \times (س+2)\cancel{(س-2)}} = \frac{2}{24}$

$\displaystyle = \frac{1}{12}$

١٣ $\displaystyle \text{نهـا}_{س \to 3\pi} \frac{\text{جا}\, س}{\pi - \frac{س}{3}} = \text{نهـا}_{س \to 3\pi} \frac{\text{جا}\,(3\pi - س)}{\frac{1}{3}(3\pi - س)}$

$ص = 3\pi - س$
$س \to 3\pi$
$ص \to 0$

$\displaystyle \text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{جا}\, ص}{\frac{1}{3} \times ص}$

$= -3$

١٤ $\displaystyle \text{نهـا}_{س \to 4} \sqrt{\frac{س^2 - 16}{س - 4}}$

$\displaystyle \text{نهـا}_{س \to 4^+} \sqrt{\frac{س^2 - 16}{س - 4}}$

$\displaystyle \text{نهـا}_{س \to 4^+} \sqrt{\frac{(س+4)\cancel{(س-4)}}{\cancel{س-4}}} = \sqrt{8}$

$\displaystyle \text{نهـا}_{س \to 4^-} \sqrt{\frac{س^2 - 16}{س - 4}} = \text{غ.م}$

$\displaystyle \text{نهـا}_{س \to 4} \sqrt{\frac{س^2 - 16}{س - 4}} = \text{غ.م}$

١٥ إذا كانت $\text{نهـا}_{س \to 3} د(س) = 2$ ، $د(4) = 5$

$\text{نهـا}_{س \to 4} د(س) = 8$ وكانت $\text{نهـا}_{س \to 3}$

$\text{نهـا}_{س \to 3} \left(2د(س) - د(س+1) + 6ب\right) = 2$ جد قيمة ب

الحل : بتوزيع النهاية

$2\ \text{نهـا}_{س \to 3} د(س) - \text{نهـا}_{س \to 3} د(س+1) + 6ب = 2$

$2 \times 2 - \text{نهـا}_{ص \to 4} د(ص) + 6ب = 2$

$س + 1 = ص$
$س \to 3$
$ص \to 4$

$4 - 8 + 6ب = 2$

$6ب = 6 \Leftarrow ب = 1$

١٦ $\displaystyle \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}\, س - \text{جتا}\, 5س}{س\ \text{جا}\, 2س}$

$\displaystyle \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{-2\ \text{جا}\, 3س \times \text{جا}\, (-2س)}{س\ \text{جا}\, 2س}$

$\displaystyle = \frac{\cancel{-2} \times 3 \times \cancel{-2}}{\cancel{2}} = 6$

١٧ $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^6 - 1}{\frac{1}{(3\text{س}-2)^2} - 1}$ توحيد مقامات

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^6 - 1}{\frac{1 - (3\text{س}-2)^2}{(3\text{س}-2)^2}}$$

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^6 - 1}{1 - (3\text{س}-2)^2} \times (3\text{س}-2)^2$$

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{(\text{س}-1)(\text{س}^2+\text{س}+1)(\text{س}+1)(\text{س}^2-\text{س}+1)(3\text{س}-2)^2}{(-3)(\text{س}-1)(3\text{س}-2+1)}$$

$$= \frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3} = 1$$

٢٠ $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\sqrt{1 + \text{جا}\,\text{س}} - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}}$

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\sqrt{1+\text{جا}\,\text{س}} - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}} \times \frac{\sqrt{1+\text{جا}\,\text{س}} + \text{جتا}\,\text{س}}{\sqrt{1+\text{جا}\,\text{س}} + \text{جتا}\,\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 + \text{جا}\,\text{س} - \text{جتا}^2\text{س}}{\text{س} \times 2}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}^2\text{س} + \text{جا}\,\text{س}}{2\,\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}\,\text{س}\,(\text{جا}\,\text{س} + 1)}{2\,\text{س}}$$

$$\frac{1}{2} \times (0 + 1) = \frac{1}{2}$$

١٨ $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س} - 4\sqrt{\text{س}} + 3}{\text{س}^3 - 1}$

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{(\text{س}+3) - 4\sqrt{\text{س}}}{(\text{س}-1)(\text{س}^2+\text{س}+1)} \times \frac{(\text{س}+3) + 4\sqrt{\text{س}}}{(\text{س}+3) + 4\sqrt{\text{س}}}$$

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{(\text{س}+3)^2 - 16\,\text{س}}{(\text{س}-1)(\text{س}^2+\text{س}+1)(8)}$$

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^2 - 10\,\text{س} + 9}{(\text{س}-1)(\text{س}^2+\text{س}+1)(8)}$$

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{(\text{س}-9)\cancel{(\text{س}-1)}}{\cancel{(\text{س}-1)}(\text{س}^2+\text{س}+1)(8)}$$

$$= \frac{-8}{3 \times 8} = \frac{-1}{3}$$

٢١ $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\sqrt[3]{\text{س}+6} + \sqrt{\text{س}+2} - 4}{\text{س}^2 - 4}$

$$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\sqrt[3]{\text{س}+6} - 2}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)} + \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\sqrt{\text{س}+2} - 2}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)}$$

م. ت   م. تربيعي

$$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}+6-8}{(\text{س}-2)(\text{س}+2) \times 12} + \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}+2-4}{(\text{س}-2)(\text{س}+2) \times 4}$$

$$\frac{1}{48} + \frac{1 \times 3}{16 \times 3}$$

$$\frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$

١٩ $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 3} \frac{\sqrt[3]{\text{س}+5}\,\sqrt{\text{س}+6} - 6}{\text{س}^2 - 9}$

$$\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\sqrt[3]{\text{س}+5}\,\sqrt{\text{س}+6} - 2\sqrt{\text{س}+6}}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)} + \lim_{\text{س} \to 3} \frac{2\sqrt{\text{س}+6} - 6}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)}$$

$$\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\sqrt{\text{س}+6}\,(\sqrt[3]{\text{س}+5} - 2)}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)} \times \frac{\sqrt[3]{(\text{س}+5)^2} + 2\sqrt[3]{\text{س}+5} + 4}{12} + 2\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\sqrt{\text{س}+6} - 3}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)} \times \frac{\sqrt{\text{س}+6} + 3}{\sqrt{\text{س}+6} + 3}$$

$$\lim_{\text{س} \to 3} \frac{3\,(\text{س}+5-8)}{(\text{س}-3)(\text{س}+3) \times 12 \times 4} + 2\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}+6-9}{(\text{س}-3)(\text{س}+3) \times 6 \times 6}$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{18}$$

22) $\lim\limits_{س \to م} \dfrac{جا س - جا م}{س - م}$

$= \lim\limits_{س \to م} \dfrac{2 جتا \frac{1}{2}(س+م)\ جا \frac{1}{2}(س-م)}{س - م}$

$= 2 جتا م \times \lim\limits_{ص \to 0} \dfrac{جا \frac{1}{2} ص}{ص} = 2 جتا م \times \frac{1}{2}$

$= جتا م$

23) $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{|س|^3 - [\frac{س}{2} + 1]}{س - 1}$

$\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{س^3 - 1}{س - 1}$

$\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\cancel{(س-1)}(س^2 + س + 1)}{\cancel{س - 1}} = 3$

24) $\lim\limits_{س \to 8} \dfrac{16 - س\sqrt[3]{س}}{2س - 16}$

$ص = \sqrt[3]{س}$ ، $س = ص^3$ ، $س \to 8$ ، $ص \to 2$

$\lim\limits_{ص \to 2} \dfrac{16 - ص^4}{2(ص^3 - 8)}$

$\lim\limits_{ص \to 2} \dfrac{\cancel{(2-ص)}(2+ص)(4+ص^2)}{2\cancel{(ص-2)}(ص^2 + 2ص + 4)} = \dfrac{-4}{3}$

25) إذا كانت $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{جتا(م - س)}{س - \frac{\pi}{2}} = ب$ حيث

فجد م ، ب علماً بأن م $\in [0 ، \frac{3\pi}{2}]$.

الحل: من التعويض المباشر

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} جتا(م - س) = 0$

$جتا(م - \frac{\pi}{2}) = 0$ ، $م - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{م = \pi}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{جتا(\pi - س)}{س - \frac{\pi}{2}} = ب$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{جا(\frac{\pi}{2} - \pi + س)}{س - \frac{\pi}{2}} = ب$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{جا(س - \frac{\pi}{2})}{(س - \frac{\pi}{2})} = ب$ | $ص = س - \frac{\pi}{2}$ ، $س \to \frac{\pi}{2}$ ، $ص \to 0$

$\lim\limits_{ص \to 0} \dfrac{جا ص}{ص} = ب$

$\boxed{ب = 1}$

26) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{جا س - جتا س}{س - \frac{\pi}{4}} \times \dfrac{جا س + جتا س}{جا س + جتا س}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{جا^2 س - جتا^2 س}{(س - \frac{\pi}{4})(\sqrt{2})}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{- جتا 2س}{(س - \frac{\pi}{4})\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{- جا(\frac{\pi}{2} - 2س)}{\sqrt{2}(س - \frac{\pi}{4})}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{- جا 2(\frac{\pi}{4} - س)}{\sqrt{2}(س - \frac{\pi}{4})}$ | $ص = \frac{\pi}{4} - س$ ، $س \to \frac{\pi}{4}$ ، $ص \to 0$

$\lim\limits_{ص \to 0} \dfrac{جا 2ص}{\sqrt{2} \times ص} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

27) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \sqrt{2} جا س}{1 - \sqrt{2} جتا س}$

الحل:

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \sqrt{2} جا س}{1 - \sqrt{2} جتا س} \times \dfrac{1 + \sqrt{2} جا س}{1 + \sqrt{2} جا س} \times \dfrac{1 + \sqrt{2} جتا س}{1 + \sqrt{2} جتا س}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - 2 جا^2 س}{1 - 2 جتا^2 س} \times \dfrac{2}{2}$

$\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cancel{جتا 2س}}{- \cancel{جتا 2س}} = -1$

28) $\lim\limits_{س \to 3} \dfrac{س^2 + 9}{س^2 - 9} - \dfrac{س + 3}{س - 3}$

$\lim\limits_{س \to 3} \dfrac{\cancel{س^2} + 9 - \cancel{س^2} - 3س - 3س - 9}{(س - 3)(س + 3)}$

$\lim\limits_{س \to 3} \dfrac{18 - 6س}{(س - 3)(س + 3)}$

$\lim\limits_{س \to 3} \dfrac{6\cancel{(3 - س)}}{\cancel{(س - 3)}(س + 3)}$

$\dfrac{-6}{6} = -1$

٦ $\lim_{س \to 0} \dfrac{1 - \text{ظتا } س}{\text{قتا } س}$

$\lim_{س \to 0} \dfrac{1 - \dfrac{\text{جتا } س}{\text{جا } س}}{\dfrac{1}{\text{جا } س}} = \lim_{س \to 0} \dfrac{\dfrac{\text{جا } س - \text{جتا } س}{\cancel{\text{جا } س}}}{\dfrac{1}{\cancel{\text{جا } س}}}$

$\lim_{س \to 0} \text{جا } س - \text{جتا } س = 0 - 1 = -1$

---

٧ $\lim_{س \to 0} \dfrac{أ - \text{جتا } ٢ب\,س}{س^2} = 18$ أوجد قيمة أ، ب حيث ب $\in$ ح$^+$

الحل: من التعويض المباشر

$\lim_{س \to 0} أ - \text{جتا } ٢ب\,س = 0$

$أ - 1 = 0 \Leftarrow أ = 1$

$\lim_{س \to 0} \dfrac{1 - \text{جتا } ٢ب\,س}{س^2} \times \dfrac{1 + \text{جتا } ٢ب\,س}{1 + \text{جتا } ٢ب\,س} = 18$

$\lim_{س \to 0} \dfrac{1 - \text{جتا}^2\, ٢ب\,س}{س^2 \times 2} = 18$

$\lim_{س \to 0} \dfrac{\text{جا}^2\, ٢ب\,س}{س^2 \quad 2} = 18$

$\dfrac{(٢ب)^2}{2} = 18$

$ب^2 = 9 \Leftarrow ب = \pm 3$ ~~لـ~~ حل

---

٨ $\lim_{س \to 1} \dfrac{س \text{ جا } \frac{\pi}{س}}{س^2 - 1} = \lim_{س \to 1} \dfrac{س \text{ جا } (\pi - \frac{\pi}{س})}{س^2 - 1}$

$\lim_{س \to 1} \dfrac{س \text{ جا } \pi (1 - \frac{1}{س})}{(س - 1)(س + 1)}$

$\lim_{س \to 1} \dfrac{س \text{ جا } \pi (\frac{س - 1}{س})}{(س - 1)(س + 1)}$

ص $= \dfrac{س - 1}{س}$

س $- 1 =$ س ص

س $\to 1$

ص $\to 0$

$\lim_{ص \to 0} \dfrac{\cancel{س} \text{ جا } \pi ص}{\cancel{س} ص \times 2}$

$= \dfrac{\pi}{2}$

---

٩ $\lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\text{جتا } س - \sqrt{3}}{6س - \pi}$

جتا $\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2(\text{جتا } س - \frac{\sqrt{3}}{2})}{6(س - \frac{\pi}{6})}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2(\text{جتا } س - \text{جتا } \frac{\pi}{6})}{6(س - \frac{\pi}{6})}$

$\dfrac{1}{3} \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{-2 \text{ جا } \frac{1}{2}(س + \frac{\pi}{6}) \text{ جا } \frac{1}{2}(س - \frac{\pi}{6})}{(س - \frac{\pi}{6})}$

$\dfrac{-2}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\text{جا } \frac{1}{2}(س - \frac{\pi}{6})}{(س - \frac{\pi}{6})}$

ص $=$ س $- \frac{\pi}{6}$

س $\to \frac{\pi}{6}$

ص $\to 0$

$\dfrac{-1}{3} \lim_{ص \to 0} \dfrac{\text{جا } \frac{1}{2} ص}{ص}$

$\dfrac{-1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{-1}{6}$

---

١٠ $\lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\text{جا } س - 1}{س - \frac{\pi}{6}}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2(\text{جا } س - \frac{1}{2})}{س - \frac{\pi}{6}}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2(\text{جا } س - \text{جا } \frac{\pi}{6})}{س - \frac{\pi}{6}}$ متطابقة

$\lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2 \times 2 \text{ جتا } \frac{1}{2}(س + \frac{\pi}{6}) \text{ جا } \frac{1}{2}(س - \frac{\pi}{6})}{س - \frac{\pi}{6}}$

$4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\text{جا } \frac{1}{2}(س - \frac{\pi}{6})}{س - \frac{\pi}{6}}$

ص $=$ س $- \frac{\pi}{6}$

س $\to \frac{\pi}{6}$

ص $\to 0$

$2\sqrt{3} \times \lim_{ص \to 0} \dfrac{\text{جا } \frac{1}{2} ص}{ص}$

$2\sqrt{3} \times \dfrac{1}{2} = \sqrt{3}$

محمد الجزار [illegible]

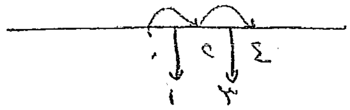
٢٩ اذا كان د(س) = { |٢س - ١| ، -١ ≤ س ≤ ١
[½س + ٢] ، ١ < س ≤ ٣

ابحث اتصال د(س) على [١ ، ٣]

الحل: ٢س - ١ = ٠ ⟸ س = ½

١-٢س | ٢س-١
-١ | ½ | ١

[½س + ٢] ل = ١ ÷ ½ = ٢



د(س) = { ١ - ٢س ، -١ ≤ س < ½
٢س - ١ ، ½ ≤ س ≤ ١
٢ ، ١ < س < ٢
٣ ، ٢ ≤ س < ٣
٣ ، س = ٣

القواعد: ١ - ٢س ، متصلة على (-١ ، ½) كثيرة حدود
٢س - ١ ، متصلة على (½ ، ١) " "
٢ ، " " (١ ، ٣)
٣ ، " " (٢ ، ٣)

الاطراف
س = -١ : نهــا س←-١+ د(س) = د(-١)
٣ = ٣ متصل عند س = -١
س = ٣ : نهــا س←٣- د(س) = د(٣)
٣ = ٣ متصل عند س = ٣

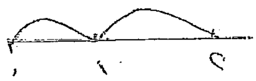
التحول
س = ½ : نهــا س←½- د(س) = نهــا س←½+ د(س) = د(½)
٠ = ٠ = ٠ ، متصل عند س = ½
س = ١ : نهــا س←١- د(س) = نهــا س←١+ د(س) = د(١)
٢ = ١ = ١ غ. متصل
س = ٢ : نهــا س←٢- د(س) = نهــا س←٢+ د(س) = د(٢)
٣ = ٢ = ٣ غ متصل

د(س) متصل على [-١ ، ٣] - {١ ، ٢}

٣٠ اذا كان د(س) = { س^٢ ، س < ٠
[س + ٢] ، ٠ ≤ س < ٢
√(س + ٧) ، س ≥ ٢

ابحث اتصال د(س) لجميع قيم س الحقيقية

الحل: [س + ٢]
ل = ١



د(س) = { س^٢ ، س < ٠
٢ ، ٠ ≤ س < ١
٣ ، ١ ≤ س < ٢
√(س + ٧) ، س ≥ ٢

القواعد: س^٢ ، متصلة على مجالها لانها كثيرة حدود
٢ ، متصلة " " " " "
٣ ، متصلة " " " "
√(س + ٧) ، " على مجالها لانها معرفة .

الاطراف لا يوجد اطراف

التحول
س = ٠ : نهــا س←٠- د(س) = نهــا س←٠+ د(س) = د(٠)
٠ ≠ ٢ ≠ ٢ غ. متصل عند س = ٠
س = ١ : نهــا س←١- د(س) = نهــا س←١+ د(س) = د(١)
٣ ≠ ٢ ≠ ٣ غ. متصل عند س = ١
س = ٢ : نهــا س←٢- د(س) = نهــا س←٢+ د(س) = د(٢)
٣ = ٣ = ٣ متصل عند س = ٢

د(س) متصل لجميع قيم س الحقيقية - {٠ ، ١}

٣١] اذا كان د(س) =
- أس² + ب س ، س < ٢
- ٣ب ، س = ٢
- ٢أس + ب + ١٢ ، س > ٢

جد قيمة أ ، ب اللذان يجعلان د(س) متصل

الحل:

نها د(س) (س ← ٢⁺) = نها د(س) (س ← ٢⁻) = د(٢)

٢أ + ب + ١٢ = ٤أ + ٢ب = ٣ب

٢أ + ب + ١٢ = ٣ب ⟸ ٢أ - ٢ب = -١٢

أ - ب = -٦ ← (١)

٤أ + ٢ب = ٣ب

٤أ - ب ← (٢)

أ - ب = -٦

٣أ = ٦ ⟸ $\boxed{أ = ٢}$

ب = ٤أ = ٤ × ٢ = ٨

$\boxed{أ = ٢}$ $\boxed{ب = ٨}$

٣٢] اذا كان د(س) = [س] - [١ - ½س] ، س ∈ [٢، ٤] ابحث اتصال د(س) على الفترة [٢، ٤].

٢ ٣ ٤

الحل: [س] =
- ٢ ، ٢ ≤ س < ٣
- ٣ ، ٣ ≤ س < ٤
- ٤ ، س = ٤

ل = ١

[١ - ½س] =
- -١ ، ٢ < س ≤ ٤
- ٠ ، س = ٢

ل = ٢

د(س) =
- ٢ - -١ ، ٢ < س < ٣
- ٣ - -١ ، ٣ < س < ٤
- ٢ - ٠ ، س = ٢
- ٣ - -١ ، س = ٣
- ٤ - -١ ، س = ٤

القواعد: جميعها متصلة على مجالها لانها تركيب

الاطراف

س = ٢

نها د(س) (س ← ٢⁺) = د(٢)

٣ ≠ ٢ ∴ غ. متصل عند س = ٢

س = ٤

نها د(س) (س ← ٤⁻) = د(٤)

٤ ≠ ٥ ∴ غ. متصل عند س = ٤

المجهول س

س = ٣

نها د(س) (س ← ٣⁺) = نها د(س) (س ← ٣⁻) = د(٣)

٤ ≠ ٣ ≠ ٤

∴ غ. متصل عند س = ٣

د(س) متصل على [٢، ٤] - {٢، ٣، ٤}

٣٣] اذا كان د(س) =
- [٣س] + ١ ، -١ ≤ س ≤ ٠
- $\frac{٣س^2 + س}{س}$ ، ٠ < س ≤ ٤

ابحث اتصال د(س) على الفترة [-١، ٤].

الحل: ل = ⅓

-١   -⅔   -⅓   ٠

د(س) =
- -٣ + ١ ، -١ ≤ س < -⅔
- -٢ + ١ ، -⅔ ≤ س < -⅓
- -١ + ١ ، -⅓ ≤ س < ٠
- ٠ + ١ ، س = ٠
- $\frac{٣س^2 + س}{س}$ ، ٠ < س ≤ ٤

القواعد جميعها متصلة ← معرفة

الاطراف س = -١ نها د(س) (س ← -١⁺) = د(-١)

-٢ = -٢ متصل

س = ٤ نها د(س) (س ← ٤⁻) = د(٤)

٥٢/٤ = ٥٢/٤ متصل

التحول س = -⅔ نها د(س) (س ← -⅔⁻) = نها د(س) (س ← -⅔⁺) = د(-⅔)

-١ = -٢ = -١ غ. متصل

س = -⅓ نها د(س) (س ← -⅓⁻) = نها د(س) (س ← -⅓⁺) = د(-⅓)

٠ = -١ = ٠ غ. متصل

س = ٠ نها د(س) (س ← ٠⁺) = نها د(س) (س ← ٠⁻) = د(٠)

٣ = ١ = ١ غ. متصل

د(س) متصل على [-١، ٤] - {-⅔ ، -⅓ ، ٠}

٣٤ إذا كان ق(س) = { (أ جا ب س − ٢س)/(س جا ٣س) ، $-\frac{\pi}{4}$ < س < ٠ ؛ ٢ ، س = ٠ ؛ (س² + (١−أ) س)/(أ س) ، ٠ < س ≤ ٢ }

جد قيم أ ، ب علماً بأن ق(س) متصل عند س = ٠

الحل :-

$\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = ق(٠)

$\lim_{س \to ٠^+}$ (س² + (١−أ) س)/(أ س) = ٢ ، $\lim_{س \to ٠^-}$ (أ جا ب س − ٢س)/(س جا ٣س) = ٢

(١−أ)/أ = ٢ ، (ب²/٢ − ١)/٢ = ٢

(١−أ)/٢ = ٢ | ب²/٢ − ١ = ٢

١ − أ = ٤ | ب² − ١ = ٤

$\boxed{أ = -٣}$ | ب² = ٥

ب = $\pm\sqrt{٥}$

٣٥ إذا كان ق(س) = (س³ + ٣س² − ٥)/(س² − أ س + ٣) متصلاً على ح جد مجموعة قيم أ .

الحل :-

المقام ≠ ٠

تربيعي ≠ ٠

لا يحلل

المميز < ٠

ب² − ٤ أ جـ < ٠

أ = ١
ب = −أ
جـ = ٣

(−أ)² − ٤ × ١ × ٣ < ٠

أ² − ١٢ < ٠

أ² < ١٢

أ < $\sqrt{١٢}$ ، أ > $-\sqrt{١٢}$

أ ∈ ($-\sqrt{١٢}$ ، $\sqrt{١٢}$)

٣٦ إذا كان د(س) = { (س² − س − ٣٠)/(أ س − ٦أ) ، س > ٦ ؛ ١ ، س = ٦ ؛ ب س ، س < ٦ }

اقترانًا متصلًا على ح ، جد قيمة كل من أ ، ب :

الحل :

$\lim_{س \to ٦^+}$ (س² − س − ٣٠)/(أ س − ٦أ) = $\lim_{س \to ٦^-}$ ب س = د(٦)

$\lim_{س \to ٦^+}$ ~~(س − ٦)~~ (س + ٥) / (أ ~~(س − ٦)~~) = ٦ب = ١

١١/أ = ٦ب = ١

١١/أ = ١ | ٦ب = ١

$\boxed{أ = ١١}$ | $\boxed{ب = \frac{1}{6}}$

٣٧ ق(س) = { س + ٢ ، |س| ≤ ٢ ؛ س² ، |س| > ٢ }

ابحث في اتصال ق(س) على مجاله

|س| ≤ ٢
س ≤ ٢ ، س ≥ −٢
−٢ ≤ س ≤ ٢
|س| > ٢
س > ٢ ، س < −٢

ق(س) = { س + ٢ ، −٢ ≤ س ≤ ٢ ؛ س² ، س > ٢ ؛ س² ، س < −٢ }

القطع :

س + ٢ متصلة على مجالها لأنها كثير حدود

س² − − −

س² − − −

الأطراف لا يوجد

التحول

س = ٢ : $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ق(٢)

٤ = ٤ = ٤ متصل عند س = ٢

س = −٢ : $\lim_{س \to -٢^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to -٢^+}$ ق(س) = ق(−٢)

٤ = ٠ = ٠ غير متصل عند س = −٢

ق(س) متصل على مجاله ح − {−٢}

٣٩] اذا كان ق(س) = { س² ، س ≤ ١
٢س + ٣ ، س > ١ }

هـ(س) = { ٢س ، س ≤ ١
-٢ ، س > ١ }

ابحث في اتصال (ق + هـ)(س) عند س = ١

الحل:

(ق + هـ)(س) = { س² + ٢س ، س ≤ ١
٣ + ٢س + -٢ ، س > ١ }

نها (س ← ١⁺) (ق + هـ)(س) = نها (س ← ١⁻) (ق + هـ)(س) = (ق + هـ)(١)

٣ = ٣ = ٣

(ق + هـ)(س) متصل عند س = ١

٤٠] اذا كان ق(س) = { (⅛ س³ + ١)/(س + ٢) ، س > -٢
٣/٢ ، س ≤ -٢ }

هـ(س) = جتا (π/٤ س) / س ، ابحث اتصال (ق + هـ)(س) عند س = -٢

الحل:

هـ(س) متصل عند س = -٢

نها (س ← -٢⁺) ق(س) = نها (س ← -٢⁺) ⅛ $\cancel{(س + ٢)}$ (س² - ٢س + ٤) / $\cancel{(س + ٢)}$ = ٣/٢ = ق(-٢)

٣/٢ = ٣/٢ = ٣/٢ ق(س) متصل عند س = -٢

بما ان ق(س) ، هـ(س) متصلان فإن

(ق + هـ)(س) متصل عند س = -٢

٣٨] لتكن ق(س) = { (س² + ٢س)/س ، -٢ ≤ س < ٠
٢ ، س = ٠
[س + ٢] ، ٠ < س ≤ ١ }

ابحث اتصال ق(س) على [-٢ ، ١]

الحل ل = ١

ق(س) = { (س² + ٢س)/س ، -٢ ≤ س < ٠
٢ ، س = ٠
٢ ، ٠ < س < ١
٣ ، س = ١ }

القواعد:

(س² + ٢س)/س متصل على (-٢ ، ٠) لأنها معرفة

٢ ، ٢ ، ٣ متصل على الفترات لأنها ثوابت

الأطراف س = -٢

نها (س ← -٢⁺) (س² + ٢س)/س = ق(-٢)

٠ = ٠ متصل

س = ١

نها (س ← ١⁻) ٢ = ق(١)

٢ ≠ ٣ غ. متصل

التحول س = ٠

نها (س ← ٠⁺) ٢ = نها (س ← ٠⁻) $\cancel{س}$(س + ٢)/$\cancel{س}$ = ق(٠)

٢ = ٢ = ٢ متصل

ق(س) متصل على [-٢ ، ١] - {١}

٤١ إذا كان ق(س) = { [س] + س ، -١ ≤ س < ٠ ؛ √س + ٤/٥ س² ، ٠ ≤ س ≤ ٢

ابحث اتصال ق(س) على الفترة [-١، ٢] .

الحل :- إعادة تعريف [س] ل = ١

ق(س) = { -١ + س ، -١ ≤ س < ٠ ؛ √س + ٤/٥ س² ، ٠ ≤ س ≤ ٢

القواعد : -١ + س متصل على (-١، ٠) لأنه كثير حدود

√س + ٤/٥ س² متصل على (٠، ٢) لأنه معرف

الأطراف

س = -١

نهـا ق(س) = ق(-١)
س ← -١⁺

-٢ = -٢ متصل عند س = -١

س = ٢

نهـا ق(س) = ق(٢)
س ← ٢⁻

√٢ + ١٦/٥ = √٢ + ١٦/٥ متصل عند س = ٢

التحول س = ٠

نهـا ق(س) = نهـا ق(س) = ق(٠)
س ← ٠⁺ ، س ← ٠⁻

٠ ≠ -١ = ٠ غ متصل عند س = ٠

ق(س) متصل [-١، ٢] - {٠}

---

٤٢ إذا كان ق(س) = (س - ٢)³ ، هـ(س) = [س + ١]

ابحث في اتصال (ق × هـ)(س) عند س = ٢

الحل :- ق(س) متصل عند س = ٢ لأنه كثير حدود

هـ(س) = { ٢ ، ١ ≤ س < ٢ ؛ ٣ ، ٢ ≤ س < ٣

هـ(س) غير متصل عند س = ٢ تفشل النظرية

(ق × هـ)(س) = { (س-٢)³ × ٢ ، ١ ≤ س < ٢ ؛ (س-٢)³ × ٣ ، ٢ ≤ س < ٣

نهـا ق(س) = نهـا ق(س) = (ق × هـ)(٢)
س ← ٢⁺ ، س ← ٢⁻

٠ = ٠ = ٠

(ق × هـ)(س) متصل عند س = ٢

---

٤٣ ق(س) = { ٢س - ١ ، س < ٢ ؛ [½س + ٢] ، ٢ ≤ س < ٤ ؛ (س - ٥)/(س² - ٣٦) ، س > ٤

ابحث في اتصال ق(س) على ح .

الحل :- ق(س) = { ٢س - ١ ، س < ٢ ؛ ٣ ، ٢ ≤ س < ٤ ؛ (س - ٥)/(س² - ٣٦) ، س ≥ ٤

القواعد ٢س - ١ متصل على ح لأنه كثير حدود

٣ متصل على ح لأنه كثير حدود

(س - ٥)/(س² - ٣٦) متصل على ح - {٦}

التحول س = ٢

نهـا ق(س) = نهـا ق(س) = ق(٢)
س ← ٢⁺ ، س ← ٢⁻

٣ = ٣ = ٣ متصل عند س = ٢

س = ٤ نهـا ق(س) = نهـا ق(س) = ق(٤)
س ← ٤⁺ ، س ← ٤⁻

-١ = ٣ = -١ غ متصل

ق(س) متصل على ح - {٤، ٦}

---

٤٤ ق(س) = س + ٢ ، هـ(س) = [٥ - س]

ابحث اتصال ق(س)/هـ(س) في الفترة (٤، ٧)

الحل : ل = ١

هـ(س) = { ٠ ، ٤ < س ≤ ٥ ؛ -١ ، ٥ < س ≤ ٦ ؛ -٢ ، ٦ < س < ٧

ق(س)/هـ(س) = { (س+٢)/٠ ، ٤ < س ≤ ٥ ؛ (س+٢)/-١ ، ٥ < س ≤ ٦ ؛ (س+٢)/-٢ ، ٦ < س < ٧

القواعد (س+٢)/٠ غير متصل على (٤، ٥]

(س+٢)/-١ متصل على (٥، ٦)

(س+٢)/-٢ متصل على (٦، ٧)

التحول س = ٥ نهـا ق(س) = نهـا ق(س) = ق(٥)
س ← ٥⁺ ، س ← ٥⁻

-٧ = غ معرف = غ معرف

س = ٦ نهـا ق(س) = نهـا ق(س) = ق(٦)
س ← ٦⁺ ، س ← ٦⁻

-٤ = -٨ = -٨

غير متصل عند س = ٦

ق(س)/هـ(س) متصل على (٤، ٧) - {٦} ∪ (٤، ٥]

٤٥ إذا كان $ق(س) = \sqrt[3]{س^٤ - ٨س - ١}$ ، $هـَ(-١) = ٣$ ، $هـ(-١) = ٢$

وكان $ك(س) = \frac{هـ(س)}{ق(س)}$ جد $كَ(-١)$

الحل :

$$كَ(س) = \frac{هـَ(-١) \times ق(-١) - هـ(-١) \times قَ(-١)}{(ق(-١))^٢}$$

$$ق(-١) = \sqrt[3]{١ + ٨ - ١} = ٢$$

$$قَ(س) = \frac{١}{٣}(س^٤ - ٨س - ١)^{\frac{-٢}{٣}} \times ٤س^٣ - ٨$$

$$قَ(س) = \frac{٤س^٣ - ٨}{٣\sqrt[3]{(س^٤ - ٨س - ١)^٢}}$$

$$قَ(-١) = \frac{-١٢}{٣ \times ٤} = -١$$

$$كَ(-١) = \frac{٣ \times ٢ - ٢ \times -١}{٤} = ٢$$

---

٤٦ إذا كان $ص = ن^٣ + ن$ ، $س = \frac{١}{ن + ١}$

أوجد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ لـ $ن = ٢$

$ص \leftarrow ن \leftarrow س$

$$\frac{دس}{دن} = \frac{-١}{(ن+١)^٢} \qquad \frac{دن}{دس} = -(ن+١)^٢$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$$

$$\frac{دص}{دس} = (٣ن^٢ + ١) \times -(ن+١)^٢$$

$$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = -\left[(٣ن^٢ + ١) ٢(ن+١)\frac{دن}{دس} + (ن+١)^٢ (٦ن \frac{دن}{دس})\right]$$

$$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = -\left[(١٣ \times ٢ \times ٣ \times -٩) + (٩ \times ١٢ \times -٩)\right]$$

---

٤٧ إذا كانت $ق(س) = أ س^ن$ ، $ق^{(٣)}(س) = ٦٠$

حيث $أ \in ح$ ، $ن \in صَ^+$ جد $ن$ ، $أ$.

الحل :

$$قَ(س) = أ ن س^{ن-١}$$

$$قً(س) = أ ن (ن-١) س^{ن-٢}$$

$$ق'''(س) = أ ن (ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣}$$

$$٦٠ = أ ن (ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣}$$

$$س^{ن-٣} = س^٠ \qquad ن - ٣ = ٠ \qquad \boxed{ن = ٣}$$

$$٦٠ = أ ن (ن-١)(ن-٢)$$

$$\frac{٦٠}{٦} = \frac{أ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٦} \qquad \boxed{أ = ١٠}$$

---

٤٨ إذا كان $ق(س) = \frac{جاس}{قاس}$ جد $قَ(س)$ باستخدام التعريف .

الحل : $قَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

تمهيد $ق(س) = \frac{جاس}{\frac{١}{جتاس}} = جاس جتاس$

$$ق(س) = \frac{١}{٢} جا٢س$$

$$قَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{١}{٢} جا٢ع - \frac{١}{٢} جا٢س}{ع - س}$$

$$\frac{١}{٢} \lim_{ع \to س} \frac{٢ جتا(ع+س) جا(ع-س)}{ع - س}$$

$$\frac{١}{٢} \times \cancel{٢} \times جتا٢س \times \lim_{ع \to س} \frac{جا(ع-س)}{ع - س}$$

$ص = ع - س$ ، $ع \to س$ ، $ص \to ٠$

$$جتا٢س \times \lim_{ص \to ٠} \frac{جاص}{ص}$$

$$جتا٢س$$

---

٤٩ إذا كان $ق(س) = س^٢ \times هـ(س)$ وكانت $هـَ(٢) = ٢$ ، $هـ(٢) = ٣$ جد $قَ(٢)$ باستخدام التعريف المشتقة .

الحل :

$$قَ(٢) = \lim_{ع \to ٢} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$$

$$قَ(٢) = \lim_{ع \to ٢} \frac{ع^٢ هـ(ع) - ٤هـ(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \lim_{ع \to ٢} \frac{ع^٢ هـ(ع) - ٤هـ(ع)}{ع - ٢} + \lim_{ع \to ٢} \frac{٤هـ(ع) - ٤هـ(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \lim_{ع \to ٢} \frac{هـ(ع)\cancel{(ع-٢)}(ع+٢)}{\cancel{ع-٢}} + ٤ \lim_{ع \to ٢} \frac{هـ(ع) - هـ(٢)}{ع - ٢}$$

$$٤ هـ(٢) + ٤ هـَ(٢)$$

$$٤ \times ٣ + ٤ \times ٢$$

$$قَ(٢) = ٢٠$$

٥٠ اذا كان د(س) = س جتا س جد د'(س) باستخدام التعريف .

الحل : $د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع\ جتا\ ع - س\ جتا\ س}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع\ جتا\ ع - س\ جتا\ ع}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{س\ جتا\ ع - س\ جتا\ س}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{جتا\ ع\ \cancel{(ع - س)}}{\cancel{ع - س}} + \lim_{ع \to س} \frac{س(جتا\ ع - جتا\ س)}{ع - س}$

$= جتا\ س + \lim_{ع \to س} \frac{س \times -2 \times جا\ \frac{1}{2}(ع+س)\ جا\ \frac{1}{2}(ع-س)}{ع - س}$

$= جتا\ س - 2\ س \times جا\ س \times \lim_{ع \to س} \frac{جا\ \frac{1}{2}(ع-س)}{ع - س}$

$= جتا\ س - 2\ س\ جا\ س \times \lim_{ص \to 0} \frac{جا\ \frac{1}{2}ص}{ص}$

$= جتا\ س - س\ جا\ س$

---

٥١ اذا كان د(س) = $\sqrt{س} + \frac{1}{\sqrt{س}}$ جد د'(٤) باستخدام التعريف

$د'(4) = \lim_{ع \to 4} \frac{د(ع) - د(4)}{ع - 4}$

$= \lim_{ع \to 4} \frac{\sqrt{ع} + \frac{1}{\sqrt{ع}} - 2 - \frac{1}{2}}{ع - 4}$

$= \lim_{ع \to 4} \frac{\sqrt{ع} - 2}{ع - 4} + \lim_{ع \to 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{ع}} - \frac{1}{2}}{ع - 4}$

$= \lim_{ع \to 4} \frac{\sqrt{ع} - 2}{ع - 4} \times \frac{\sqrt{ع} + 2}{\sqrt{ع} + 2} + \lim_{ع \to 4} \frac{\frac{2 - \sqrt{ع}}{2\sqrt{ع}}}{ع - 4}$

$= \lim_{ع \to 4} \frac{\cancel{ع - 4}}{\cancel{(ع-4)}(\sqrt{ع}+2)} + \frac{-1}{16}$

$= \frac{1 \times 4}{4 \times 4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

---

٥٢ ص = $جا^5\ 2س$ جد $\frac{دص}{دس}$ باستخدام قاعدة السلسلة

نفرض ع = جا ٢س ، ص = $ع^5$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$= 5ع^4 \times جتا\ 2س \times 2$

$= 10\ جا^4\ 2س \times جتا\ 2س$

---

٥٣ د(س) = $(س^2 + س)\ |س|$ جد $د''(0)$

$د(س) = \begin{cases} -س^3 - س^2 & ، س < 0 \\ س^3 + س^2 & ، س \geq 0 \end{cases}$

الاتصال $\lim_{س \to 0^-} د(س) = \lim_{س \to 0^+} د(س) = د(0)$

$0 = 0 = 0$

$د'(س) = \begin{cases} -3س^2 - 2س & ، س < 0 \\ 3س^2 + 2س & ، س > 0 \end{cases}$

$د'_-(0) = د'_+(0)$

$0 = 0$ ، د'(٠) = ٠

$د''(س) = \begin{cases} -6س - 2 & ، س < 0 \\ 6س + 2 & ، س > 0 \end{cases}$

$د''_-(0) = د''_+(0)$

$-2 \neq 2$ ∴ غ م ، س = ٠

---

٥٤ اذا كان $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = 6$ ، س ∈ [٢، ٥]

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = 4$ ، س ∈ [٢، ٣]

جد $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ، س ∈ [٣، ٥]

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(5) - د(3)}{5 - 3}$

$6 = \frac{د(5) - د(2)}{5 - 2}$

$\boxed{18 = د(5) - د(2)}$ ①

$4 = \frac{د(3) - د(2)}{3 - 2}$

$\boxed{4 = د(3) - د(2)}$ ②

①−② $14 = د(5) - د(3)$

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{14}{2}$

$= 7$

---

٥٥ اذا كان $\sqrt{ص} = د(3س + 1)$ اوجد $\frac{دص}{دس} \Big|_{س=1}$ علما بان $د'(4) = \frac{1}{6}$ ، د(٤) = ٢.

الحل : $\sqrt{ص} = د(3س + 1)$

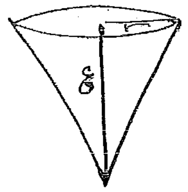
$ص = د^2(3س + 1)$

$\frac{دص}{دس} = 2د(3س+1) \times د'(3س+1) \times 3$

$\frac{دص}{دس} = 2د(4) \times د'(4) \times 3$

$\frac{دص}{دس} = 2 \times \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{6}} \times \cancel{3} = 2$

٥٦ مخروط ارتفاعه ٣ أمثال نصف قطر قاعدته أُخذ المخروط بالزيادة بحيث حافظ على شكله جد معدل تغير حجم المخروط بالنسبة الى ارتفاعه عندما يكون نصف قطر قاعدته ١٠ سم ؟



الحل :- $\text{ع} = ٣\,\text{نق}$

$\left.\dfrac{\text{دح}}{\text{دع}}\right|_{\text{نق}=١٠} = ؟؟$

$\boxed{\text{نق} = \dfrac{\text{ع}}{٣}}$

$\text{ح} = \dfrac{\pi}{٣}\,\text{نق}^٢\,\text{ع}$

$\text{ح} = \dfrac{\pi}{٣}\left(\dfrac{\text{ع}}{٣}\right)^٢ \times \text{ع}$

$\text{ح} = \dfrac{\pi}{٢٧}\,\text{ع}^٣$

$\dfrac{\text{دح}}{\text{دع}} = \dfrac{\pi}{٩}\,\text{ع}^٢$

$\text{نق} = ١٠$ ، $\text{ع} = ٣ \times ١٠$ ، $\text{ع} = ٣٠$

$\dfrac{\text{دح}}{\text{دع}} = \dfrac{\pi}{٩} \times ٣٠^٢ = \dfrac{\pi}{٩} \times ٩٠٠ = ١٠٠\pi$

---

٥٧ اذا كان $\text{ص}^٣ - \text{س ص} = ٣$ جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند $(١،٢)$

$٣\text{ص}^٢ \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} - \left(١ \times \text{ص} + \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \text{س}\right) = ٠$

$٣\text{ص}^٢ \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} - \text{ص} - \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}\text{س} = ٠$

$٣\text{ص}^٢ \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} - \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}\text{س} = \text{ص}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}\left(٣\text{ص}^٢ - \text{س}\right) = \text{ص}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{\text{ص}}{٣\text{ص}^٢ - \text{س}} = \dfrac{١}{١} = ١$

$\dfrac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = \dfrac{\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}\left(٣\text{ص}^٢ - \text{س}\right) - \left(٦\text{ص}\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} - ١\right)(\text{ص})}{\left(٣\text{ص}^٢ - \text{س}\right)^٢}$

$\dfrac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = \dfrac{١ \times ١ - ٥ \times ١}{١} = -٤$

---

٥٨ اذا كان $\text{س} = \text{جتا}٢\text{ن}$ ، $\text{ص} = \text{جا}٢\text{ن}$ اثبت ان $\dfrac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = -٢$

الحل :- $\text{ص} \leftarrow \text{ن} \leftarrow \text{س}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \dfrac{\text{دن}}{\text{دس}}$

$\dfrac{\text{دس}}{\text{دن}} = -\text{جا}٢\text{ن}$

$\dfrac{\text{دن}}{\text{دس}} = \dfrac{١}{-٢\,\text{جا}٢\text{ن}}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \cancel{٤\,\text{جا}٢\text{ن}} \times \text{جا}٢\text{ن} \times \dfrac{١}{\cancel{-٢\,\text{جا}٢\text{ن}}}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\,\text{جا}٢\text{ن}$

$\dfrac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = -٢\,\text{جتا}٢\text{ن} \times ٢\,\dfrac{\text{دن}}{\text{دس}}$

$= \cancel{٤}\,\text{جتا}٢\text{ن} \times ٢ \times \dfrac{١}{\cancel{-٤\,\text{جا}٢\text{ن}}} = -٢$

---

٥٩ $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{أ س}^٢ + ٢\text{ب س} & \text{،}\ \text{س} < ٣ \\ \text{ب س}^٢ + ١ & \text{،}\ \text{س} \geq ٣ \end{cases}$

جد قيمة أ ، ب علماً بأن $\text{د}'(٣)$ موجودة

الحل :-

الاتصال $\displaystyle\lim_{\text{س}\to٣^+} \text{د(س)} = \lim_{\text{س}\to٣^-} \text{د(س)} = \text{د(٣)}$

$٩\text{أ} + ٢\text{ب} = ٩\text{ب} + ١$

$٩\text{أ} - ٧\text{ب} = ١ \leftarrow (١)$

$\text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{أ س} & \text{،}\ \text{س} < ٣ \\ ٢\text{ب س} & \text{،}\ \text{س} > ٣ \end{cases}$

$\text{د}'(٣)^+ = \text{د}'(٣)^-$

$٦\text{أ} = ٦\text{ب}$

$\text{أ} - \text{ب} = ٠ \leftarrow (٢)$

$\cancel{٩\text{أ}} - ٧\text{ب} = ١ \leftarrow (١)$ $\quad \times -٩$

$\cancel{-٩\text{أ}} + ٩\text{ب} = ٠$

$٢\text{ب} = ١$

$\boxed{\text{ب} = \dfrac{١}{٢}}$ $\boxed{\text{أ} = \dfrac{١}{٢}}$

---

٦٠ اذا كان $\text{ص} = \text{جا}^٢(\text{ظا}^٣\text{س})$ جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :-

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\,\text{جا}(\text{ظا}^٣\text{س})\,\text{جتا}(\text{ظا}^٣\text{س}) \times ٢\,\text{ظا}^٣\text{س} \times \text{قا}^٢\text{س} \times ٣$

---

٦١ اذا كان $\text{د(س)} = \sqrt{\text{س}^٢ + ١}$ ، $\text{هـ(س)} = \text{ظا س}$

جد $(\text{د} \circ \text{هـ})'\left(\dfrac{\pi}{٤}\right)$

$= \text{د}'\left(\text{هـ}\left(\dfrac{\pi}{٤}\right)\right) \times \text{هـ}'\left(\dfrac{\pi}{٤}\right)$

$\text{د}'(١) \times ٢$

$\dfrac{١}{\sqrt{٢}} \times ٢$

$= \dfrac{٢}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$

$\text{هـ}\left(\dfrac{\pi}{٤}\right) = ١$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \text{قا}^٢\text{س}$

$\text{هـ}'\left(\dfrac{\pi}{٤}\right) = ٢$

$\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{\cancel{٢}\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{\text{س}^٢ + ١}}$

٦٢ إذا كان جتا ص = س ، $|\text{س}| < 1$

أثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-1}{\sqrt{1-\text{س}^2}}$ ، ص ∈ $(0, \frac{\pi}{2})$

الحل:

$-\text{جا ص} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-1}{\text{جا ص}}$

$\text{جا}^2\text{ص} = 1 - \text{جتا}^2\text{ص}$

$\text{جا ص} = \sqrt{1 - \text{جتا}^2\text{ص}}$

$\text{جا ص} = \sqrt{1 - \text{س}^2}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-1}{\sqrt{1-\text{س}^2}}$

٦٣ إذا كان $\text{د(س)} = 3\text{س}^2 - \frac{2}{\sqrt{\text{س}}}$ جد

$\text{دَ}(1)$ باستخدام التعريف.

الحل:

$\text{دَ}(1) = \lim_{\text{ع} \to 1} \frac{\text{د(ع)} - \text{د}(1)}{\text{ع} - 1}$

$= \lim_{\text{ع} \to 1} \frac{3\text{ع}^2 - \frac{2}{\sqrt{\text{ع}}} - 3 + 2}{\text{ع} - 1}$

$= \lim_{\text{ع} \to 1} \frac{3\text{ع}^2 - 3}{\text{ع} - 1} + \lim_{\text{ع} \to 1} \frac{2 - \frac{2}{\sqrt{\text{ع}}}}{\text{ع} - 1}$

$= \lim_{\text{ع} \to 1} \frac{3\cancel{(\text{ع}-1)}(\text{ع}+1)}{\cancel{\text{ع}-1}} + 2\lim_{\text{ع} \to 1} \frac{\frac{\sqrt{\text{ع}}-1}{\sqrt{\text{ع}}}}{\text{ع}-1}$

$= 3 \times 2 + 2 \lim_{\text{ع} \to 1} \frac{\sqrt{\text{ع}} - 1}{(\text{ع}-1)\sqrt{\text{ع}}} \times \frac{\sqrt{\text{ع}}+1}{\sqrt{\text{ع}}+1}$

$6 + 2 \lim_{\text{ع} \to 1} \frac{\cancel{\text{ع}-1}}{\cancel{(\text{ع}-1)}\sqrt{\text{ع}}\,(2)}$

$6 + \frac{2}{2} = 7$

٦٤ لتكن $\text{م(س)} = \text{أ}\text{س}^2 - 3\text{س} + 4$ ، س ∈ ح

وإذا كان متوسط التغير في م في الفترة [١، ٣]

يساوي ٣ جد قيمة أ

$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{م}(3) - \text{م}(1)}{3 - 1}$

$3 = \frac{(9\text{أ} - 9 + 4) - (\text{أ} - 3 + 4)}{2}$

$6 = 8\text{أ} - 6 \Leftarrow 8\text{أ} = 12$

$\text{أ} = \frac{3}{2}$

٦٥ إذا كان $\text{ق(س)} = \text{س}^3\,\text{هـ(س)} \times \text{د(س)}$

وكان $\text{هـ}(2) = \frac{1}{4}$ ، $\text{د}(2) = \frac{1}{2}$

$\text{قَ}(2) = -3$ ، $\text{دَ}(2) = -1$ جد $\text{هـَ}(2)$

الحل: نجعل المطلوب موضوع القانون

$\text{هـ(س)} = \frac{\text{ق(س)}}{\text{س}^3\,\text{د(س)}}$

$\text{هـَ(س)} = \frac{\text{قَ(س)} \times \text{س}^3\,\text{د(س)} - \text{ق(س)} \times (\text{س}^3 \times \text{دَ(س)} + \text{د(س)} \times 3\text{س}^2)}{(\text{س}^3\,\text{د(س)})^2}$

$\text{ق}(2) = 8 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} =$

$\text{هـَ}(2) = \frac{-3 \times 8 \times \frac{1}{2} - (8 \times -1 + \frac{1}{2} \times 12)(1)}{(8 \times \frac{1}{2})^2}$

$\text{هـَ}(2) = \frac{-12 - -2}{16} = \frac{-10}{16}$

٦٦ $\text{ق(س)} = (\text{س} - 5)^2$ ، $\text{هـ(س)} = \sqrt{\text{س}}$

أوجد $(\text{ق} \circ \text{هـ})'(3)$.

$\text{هـ}(3) = \sqrt{3}$

$\text{هـَ(س)} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$

$\text{هـَ}(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\text{قَ(س)} = 2(\text{س} - 5)$

$(\text{ق} \circ \text{هـ})'(3) = \text{قَ}(\text{هـ}(3)) \times \text{هـَ}(3)$

$= \text{قَ}(\sqrt{3}) \times \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\cancel{2}(\sqrt{3} - 5) \times \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3} - 5}{\sqrt{3}}$

٦٧ إذا كان $\frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{ص}} = \text{س} - \text{ص}$ جد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ عند (١، ١)

الحل: نضرب في س ص

$\text{ص} - \text{س} = \text{س}^2\text{ص}^2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 1 = 2\text{س}\text{ص}^2 + 2\text{ص}\text{س}^2\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - 2\text{ص}\text{س}^2\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}\text{ص}^2 + 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{2\text{س}\text{ص}^2 + 1}{1 - 2\text{ص}\text{س}^2} \Leftarrow (2\text{س}\text{ص}^2 + 1)$

$-4\text{س}\text{ص}$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{(2\text{ص}^2 + 4\text{س}\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}})(1 - 2\text{ص}\text{س}^2) - (\cdots - 2\text{س}^2\frac{\text{دص}}{\text{دس}})}{(1 - 2\text{ص}\text{س}^2)^2}$

نعوض النقطة (١، ١)

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 8$

٦٨) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أس^3 + ب س & ، س > 1 \\ جـ س^2 + 4س & ، س < 1 \\ 6 & ، س = 1 \end{cases}$

جد قيم أ ، ب ، جـ التي تجعل $قَ(1)$ موجودة .

الحل من الاتصال

$\cancel{أ} + ب = \cancel{2}جـ + 4 = 6$

$أ + ب = 6$ ، $جـ + 4 = 6$

$\boxed{جـ = 2}$

$قَ(س) = \begin{cases} 3أس^2 & ، س > 1 \\ 2جـ س & ، س < 1 \end{cases}$

$قَ(1)^+ = قَ(1)^-$

$3أ = 2جـ \Leftarrow 3أ = 4 \Leftarrow أ = \frac{4}{3}$

$ب = 6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3}$

---

٦٩) يتحرك جسيم حسب العلاقة $ف(ن) = جا^2 ن$

جد سرعة الجسيم في اللحظة التي ينعدم فيها التسارع لأول مرة

الحل : $ف(ن) = جا^2 ن$

$ع(ن) = 2 جا ن جتا ن = جا 2ن$

$ت(ن) = 2 جتا 2ن$

$ت = 0$

$جتا 2ن = 0$

$2ن = \frac{\pi}{2}$

$ن = \frac{\pi}{4}$

$ع(\frac{\pi}{4}) = جا \frac{\pi}{2} = 1$ م/ث

---

٧٠) يتحرك جسيم حسب العلاقة

$ف(ن) = \frac{1}{3}(2ن - 2)^3 + 2ن^2 - 4ن$ جد تسارع الجسم عندما تنعدم السرعة

$ع(ن) = 2(2ن - 2)^2 + 4ن - 4$

$ت(ن) = 8(2ن - 2) - 4$

$ع = 0$

$2(2ن - 2)^2 + 4ن - 4 = 0$

$(2ن - 2)^2 + 2ن - 2 = 0$

$(2ن - 2)(2ن - 2 + 1) = 0$

$ن = 1$ ، $ن = \frac{1}{2}$

$ت(\frac{1}{2}) = -12$ م/ث²

$ت(1) = -4$ م/ث²

---

٧١) يتحرك جسيم حسب العلاقة

$ف(ن) = ن + جتا ن$ ، $ن \in [0 ، \pi]$ جد تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة

$ف(ن) = ن + جتا ن$

$ع(ن) = 1 - جا ن$

$ت(ن) = - جتا ن$

$0 = 1 - جا ن$

$جا ن = 1$

$ن = \frac{\pi}{2}$

$ت(\frac{\pi}{2}) = - جتا \frac{\pi}{2} = 0$

---

٧٢) إذا كانت العلاقة بين المسافة والسرعة تعطى بالعلاقة $ع = 4\sqrt{ف}$ أثبت أن تسارع الجسم يساوي 8 م/ث²

الحل : $ع = 4\sqrt{ف}$

$ت = \frac{4 \times ع}{2\sqrt{ف}}$

$ت = \frac{2 \times 4\sqrt{ف}}{\sqrt{ف}}$

$ت = 8$ م/ث²

[illegible]

---

٧٣) قذف جسيم رأسياً إلى الأعلى بحيث

$ف(ن) = 30ن - 5ن^2$ إذا كانت سرعته لحظة وصوله الأرض تساوي -60 م/ث جد ارتفاع البناية

$ف(ن) = 30ن - 5ن^2$

$ع(ن) = 30 - 10ن$

$ت(ن) = -10$

$ع = -60$

$30 - 10ن = -60$

$\boxed{ن = 9}$

$ف(9) + أ = 0$

ارتفاع البناية

$30 \times 9 - 5 \times 81 + أ = 0 \Leftarrow أ = 135$ م

---

٧٤) يتحرك جسيم حسب العلاقة

$ف(ن) = \frac{1}{4}(ن + 2)^4 - 6ن^2$ جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته 89 م/ث

الحل : $ف = \frac{1}{4}(ن + 2)^4 - 6ن^2$

$ع = (ن + 2)^3 - 12ن$

$ت = 3(ن + 2)^2 - 12$

$(ن + 2)^3 - 12ن = 89$

$ن = 3$

$ت(3) = 3 \times 25 - 12 = 63$ م/ث²

---

٧٥) تتحرك نقطة مادية حسب العلاقة

$ف(ن) = \sqrt{ن}\,(27 - ن)$ أثبت أن هذه النقطة تبدأ في العودة بعد 9 ث ثم جد المسافة التي قطعتها حينئذ

$ف(ن) = 27ن^{\frac{1}{2}} - ن^{\frac{3}{2}}$

$ع(ن) = \frac{27}{2}ن^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}ن^{\frac{1}{2}}$

$ع(ن) = \frac{27}{2\sqrt{ن}} - \frac{3}{2}\sqrt{ن}$

$ع(9) = \frac{27}{3 \times 2} - \frac{3}{2} \times 3 = 0$

$ف(9) = \sqrt{9}\,(27 - 9) = 3 \times 18 = 54$ م

٧٦ جد معادلة المماس لمنحنى د(س) = س² − ٥س + ١٥ عند النقطة التي يتقاطع عندها د(س) مع المستقيم ص − ٢س = ٣ .

الحل:

		التقاطع
س = ٤	س = ٣	س² − ٥س + ١٥ = ٢س + ٣
ص = ١١	ص = ٩	س² − ٧س + ١٢ = ٠
م = ٣	م = ١	(س − ٤)(س − ٣) = ٠
ص − ١١ = ٣(س − ٤)	ص − ٩ = ١(س − ٣)	س = ٤ ، س = ٣
		دَ(س) = ٢س − ٥

---

٧٧ اذا كان د(س) = س³ + ٣ بين ان لـ د(س) ٣ مماسات اذا كان العمودي على هذا المماس يمر بالنقطة (٠ ، ٩/٢) .

−١/دَ(س) = Δص/Δس

−١/٣س² = (ص − ٩/٢)/(س − ٠)

− س = ٣س²(س³ + ٣ − ٩/٢)

− س = ٣س⁵ + ٩س² − ٩/٢ س²

٢س³ − ٢س = ٠

٢س(س² − ١) = ٠

س = ٠	س = ١	س = −١
ص = ٣	ص = ٤	ص = ٤
م = ٠	م = ٢	م = −٢

---

٧٨ جد جميع قيم س التي يكون عندها المماس العمودي على منحنى د(س) = س − جا٢س يوازي محور السينات

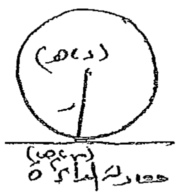
الحل: دَ(س) = ٠

١ − ٢جتا٢س = ٠ ⇐ جتا٢س = ١/٢

٢س = π/٣ ومضاعفاتها	٢س = ٥π/٣ ومضاعفاتها
٢س = π/٣ + ٢π(ن − ١)	٢س = ٥π/٣ + ٢π(ن − ١)
س = π/٦ + π(ن − ١)	س = ٥π/٦ + π(ن − ١)

---

٧٩ اثبت باستخدام التفاضل ان نصف قطر الدائرة عمودياً على مماس الدائرة عند نقطة التماس



معادلة الدائرة

(س − د)² + (ص − هـ)² = نق²

٢(س − د) + ٢(ص − هـ)صَ = ٠

صَ = −٢(س − د)/٢(ص − هـ)

مر = (ص − هـ)/(س − د)

مر × صَ = −١

(ص − هـ)/(س − د) × −(س − د)/(ص − هـ) = −١

−١ = −١

---

٨٠ اذا كان المستقيم ٤س − ٢ص − ٨ = ٠ يمس د(س) عند (٣ ، ٢) وكان المستقيم ٩ص + ٣س = ٠ عمودياً على منحنى ل(س) عند (٣ ، −١) جد (د × ل)َ(٣)

الحل:

(د × ل)َ(٣) = دَ(٣) × ل(٣) + لَ(٣) × د(٣)

٤س − ٢ص − ٨ = ٠	٩ص + ٣س = ٠
٤ − ٢صَ = ٠	٩صَ + ٣ = ٠
$\boxed{صَ = ٢}$ ⇐ دَ(٣) = ٢	$\boxed{صَ = −١/٣}$ ⇐ لَ(٣) = ٣
د(٣) = ٢	ل(٣) = −١

= ٢ × −١ + ٣ × ٢ = −٢ + ٦

= ٤

---

٨١ اذا كان المستقيم ٣س − ص − جـ = ٠ يمس منحنى د(س) = −٣/(س + ١) جد قيمة جـ

الحل: يمس د(س) = ص ← ①

دَ(س) = صَ ← ②

دَ(س) = ٣/(س + ١)² صَ = ٣

٣/(س + ١)² = ٣

(س + ١)² = ١

س + ١ = −١	س + ١ = ١
س = −٢	س = ٠
ص = ٣	ص = −٣
جـ = ٣س − ص	جـ = ٣س − ص
جـ = −٦ − ٣	جـ = ٠ − − ٣
جـ = −٩	جـ = ٣

---

٨٢ اذا كان د(س) = (س − ٣)² اذا كان هذا المماس مرسوماً من النقطة (٠ ، ٠) جد معادلة المماس

دَ(س) = (ص − ٠)/(س − ٠)

٢(س − ٣) = (س − ٣)²/س

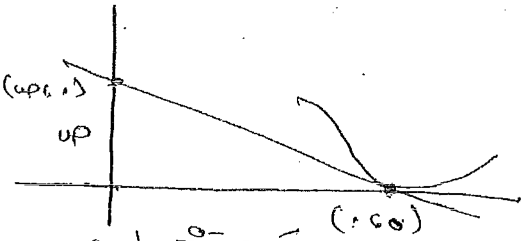
٢س(س − ٣) − (س − ٣)² = ٠

(س − ٣)(٢س − س + ٣) = ٠

س = ٣	س = −٣
ص = ٠	ص = ٣٦
م = ٠	م = −١٢

٨٢ | جد مساحة المثلث الواقع في الربع الأول والمحصور بين محوري السينات والصادات ومماس منحنى العلاقة $ص = \frac{٥}{س} - \frac{س^٢}{٥}$ ، $س \neq ٠$ ، عند النقطة (٥ ، ٠) .

الحل:-



$ص' = \frac{-٥}{س^٢} - \frac{١}{٥} \Leftarrow$

$\frac{Δص}{Δس} = ص'|_{س=٥}$

$\frac{ص - ٠}{٠ - ٥} = \frac{-٥}{٢٥} - \frac{١}{٥}$

$\frac{ص}{٥} = \frac{-٢}{٥}$

$م = \frac{١}{٢} × ٥ × ص$

$م = \frac{١}{٢} × ٥ × ٢$

$\boxed{م = ٥}$

---

٨٣ | إذا كان ل(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق وكان $ل(س) × هـ(س)^٢ = أ$ حيث أ ثابت ، $أ \neq ٠$ ، وكان $هـ'(٢) = ٣أ$ ، $هـ(٢) = -٢أ$ جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ل(س) عند س = ٢ .

الحل:-

$ل(٢) × هـ(٢)^٢ = أ$

$ل(٢) = \frac{أ}{هـ(٢)^٢}$

$ل(٢) = \frac{أ}{٤أ^٢} = \frac{١}{٤}$

$ل'(س) = \frac{-أ × ٢هـ(س) هـ'(س)}{هـ^٤(س)}$

$ل'(٢) = \frac{+\cancel{٢} × \cancel{٤} × \cancel{٢أ} × ٣أ}{\cancel{١٦}أ^٤}$

$ل'(٢) = \frac{٣}{٤}$

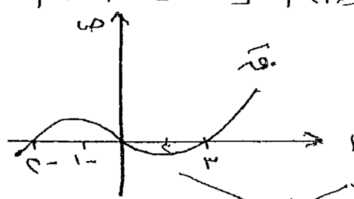
$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ل(٢) = ل'(٢)(س - ٢)$

$ص - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}(س - ٢)$

---

٨ | يمثل الشكل المجاور منحنى قَ(س) المعرف على ح ، اعتمد الشكل لايجاد: ١) فترات التزايد ٢) النقاط الحرجة



١) التزايد

متزايد $[-٢ ، ٠] \cup [٣ ، \infty)$

٢) النقاط الحرجة (−٢ ، ق(−٢))

(٠ ، ق(٠))

(٣ ، ق(٣))

---

٨٥ | إذا كان $ق(س) = \sqrt[٣]{(س^٢ - ٤س)^٢}$ ، س ∈ ح جد ١) فترات التزايد والتناقص ٢) القيم القصوى

الحل:- $قَ(س) = \frac{٢(٢س - ٤)}{٣\sqrt[٣]{(س^٢ - ٤س)}} = ٠$

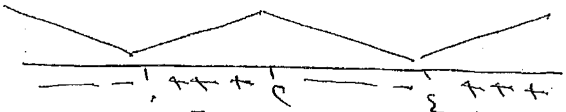
البسط: $٢(٢س - ٤) = ٠$ ، $\boxed{س = ٢}$

المقام: $٣\sqrt[٣]{س^٢ - ٤س} = ٠$

$س^٢ - ٤س = ٠$

$س(س - ٤) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٤$



١) متناقص $(-\infty ، ٠] \cup [٢ ، ٤]$

متزايد $[٠ ، ٢] \cup [٤ ، \infty)$

٢) القيم القصوى

عظمى عند س = ٢ ، ق(٢) = $\sqrt[٣]{١٦}$ محلية

صغرى عند س = ٠ ، ق(٠) = ٠ مطلقة

صغرى عند س = ٤ ، ق(٤) = ٠ مطلقة

---

٨٦ | جد قيم كل من الثابتين أ ، ب التي تجعل للاقتران $ق(س) = س^٣ + أس^٢ + ب س$ نقطتين حرجتين عند س = −١ ، س = ٢

الحل:- $قَ(س) = ٣س^٢ + ٢أس + ب$

$قَ(-١) = ٠ \Leftarrow -٢أ + ب = -٣ \longleftarrow ①$

$قَ(٢) = ٠$ ، $٤أ + ب = -١٢ \longleftarrow ②$

$\frac{٦أ}{٦} = \frac{-٩}{٦}$

$\boxed{أ = \frac{-٣}{٢}}$

$ب = -٣ + ٢أ$

$ب = -٣ + ٢ × \frac{-٣}{٢}$

$\boxed{ب = -٦}$

---

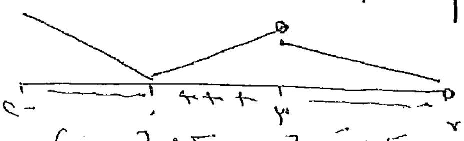
٨٧ | جد القيم القصوى للاقتران
$ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٥ ، & -٢ \leq س < ٣ \\ ١٠ - ٢س ، & ٣ \leq س < ٧ \end{cases}$
ثم جد التزايد والتناقص

الحل:- الاتصال غير متصل عند س = ٣

$قَ(س) = \begin{cases} ٢س ، & -٢ < س < ٣ \\ -٢ ، & ٣ < س < ٧ \end{cases}$

غ.م ، س = −٢ ، س = ٣

$٢س = ٠$ ، $س = ٠$ | $-٢ \neq ٠$



متزايد [٠ ، ٣) متناقص $[-٢ ، ٠] \cup [٣ ، ٧)$

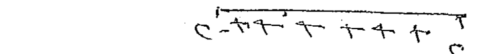
عظمى عند س = −٢ ، ق(−٢) = ٩

صغرى عند س = ٠ ، ق(٠) = ٥ كلية

٨٨ | إذا كان ق(س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ ، س ∈ [-٢، ٢] جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى.

الحل: ق'(س) = $\frac{-٢س}{٢\sqrt{٤-س^٢}}$ = ٠

المجال



-٢س = ٠ ، س = ٠ | $٢\sqrt{٤-س^٢}$ = ٠ ، س = ±٢

متزايد [-٢، ٠] متناقص [٠، ٢]

عظمى عند س = ٠ ، ق(٠) = ٢ مطلقة

صغرى عند س = -٢ ، ق(-٢) = ٠ مطلقة

صغرى عند س = ٢ ، ق(٢) = ٠ مطلقة

---

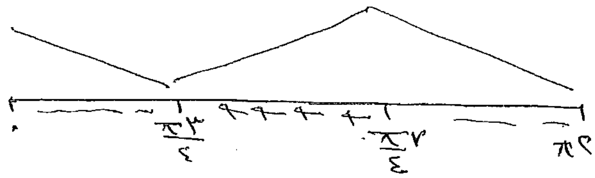
٨٩ | ق(س) = جتاس - جاس ، س ∈ [٠، ٢π] جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى

الحل: ق'(س) = -جاس - جتاس = ٠

جاس = -جتاس

ظاس = -١

س = $\frac{٣\pi}{٤}$ ، $\frac{٧\pi}{٤}$



متناقص [٠، $\frac{٣\pi}{٤}$] ∪ [$\frac{٧\pi}{٤}$، ٢π]

متزايد [$\frac{٣\pi}{٤}$، $\frac{٧\pi}{٤}$]

عظمى عند س = ٠ ، ق(٠) = ١

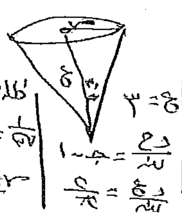
عظمى عند س = $\frac{٧\pi}{٤}$ ، ق($\frac{٧\pi}{٤}$) = $\sqrt{٢}$ مطلقة

صغرى عند س = $\frac{٣\pi}{٤}$ ، ق($\frac{٣\pi}{٤}$) = $-\sqrt{٢}$ مطلقة

صغرى عند س = ٢π ، ق(٢π) = ١

---

٩٠ | خزان ماء مخروطي الشكل رأسه للأسفل قياس زاوية رأسه ٦٠° فإذا كان الماء يتسرب من الخزان بمعدل ١ قدم^٣/ث وكانت هناك مضخة تصب في الخزان بمعدل ثابت هو جـ ، أوجد جـ بحيث يكون معدل ارتفاع الماء $\frac{٢}{\pi}$ قدم/ث في اللحظة التي يكون عمق الماء يساوي ٣ قدم.



ظا٣٠ = $\frac{نق}{ع}$

$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{نق}{ع}$

نق = $\frac{ع}{\sqrt{٣}}$

ع = ٣

$\frac{دح}{دن}$ = جـ - ١

$\frac{دع}{دن}$ = $\frac{٢}{\pi}$

الحل: ح = $\frac{\pi}{٣}$ نق^٢ ع = $\frac{\pi}{٩}$ ع^٣

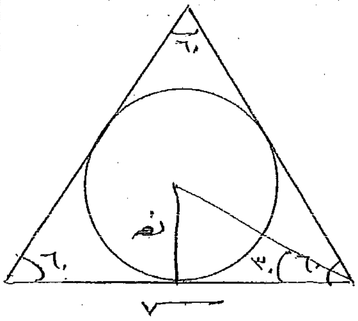
$\frac{دح}{دن}$ = $\frac{\pi}{٣}$ ع^٢ × $\frac{دع}{دن}$

جـ - ١ = $\frac{\pi}{٣}$ × ٩ × $\frac{٢}{\pi}$

جـ = ٧ قدم^٣/ث

---

٩١ | تتمدد دائرة داخل مثلث متساوي الأضلاع بمعدل ٢ سم/ث بحيث تبقى الدائرة داخل المثلث وتمس أضلاع المثلث. جد معدل تغير المساحة المحصورة بين المثلث والدائرة عندما يكون طول ضلع المثلث ١٢ سم.



م = م المثلث - م الدائرة

= $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س^٢ - π نق^٢

= $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س^٢ - $\frac{\pi}{١٢}$ س^٢

$\frac{دس}{دن}$ = ٢ سم/ث

س = ١٢

ظا٣٠ = $\frac{نق}{\frac{١}{٢}س}$

$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{نق}{\frac{١}{٢}س}$

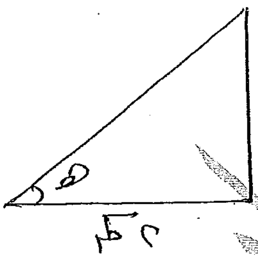
نق = $\frac{س}{٢\sqrt{٣}}$

$\frac{دم}{دن}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س $\frac{دس}{دن}$ - $\frac{\pi}{٦}$ س $\frac{دس}{دن}$

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ١٢ × ٢ - $\frac{\pi}{٦}$ × ١٢ × ٢

---

٩٢ | انطلق صاروخ رأسياً إلى الأعلى حيث تم رصده بواسطة رادار على سطح الأرض يبعد ٢ كم عن قاعدة انطلاق الصاروخ فإذا كانت سرعة الصاروخ ٥٤٠ م/ث جد معدل التغير في زاوية ارتفاع الصاروخ لكي يبقى ظاهراً على شاشة الرادار وهو على ارتفاع ١٥٠٠ م عن سطح الأرض



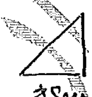
$\frac{دص}{دن}$ = ٥٤٠ م/ث

ص = ١٥٠٠

ظاهـ = $\frac{ص}{٢٠٠٠}$

قا^٢هـ × $\frac{دهـ}{دن}$ = $\frac{١}{٢٠٠٠}$ $\frac{دص}{دن}$

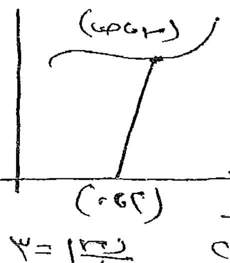
$\left(\left(\frac{١٥٠٠}{٢٠٠٠}\right)^٢ + ١\right)$ × $\frac{دهـ}{دن}$ = $\frac{٥٤٠}{٢٠٠٠}$



$\frac{دهـ}{دن}$ = $\frac{٥٤٠}{٢٠٠٠}$ × $\frac{١}{\left(\frac{١٥٠٠}{٢٠٠٠}\right)^٢ + ١}$

---

٩٣ | تتحرك نقطة مادية على منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{س^٢ + ٥}$ بحيث يزداد الإحداثي السيني بمعدل ٣ سم/ث جد معدل تغير البعد بينها وبين النقطة (٢، ٠) عندما تكون س = ٥



$\frac{دس}{دن}$ = ٣

س = ٥

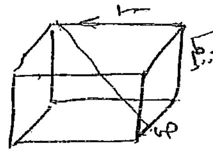
ف = $\sqrt{(ص-٠)^٢ + (س-٢)^٢}$

ف = $\sqrt{س^٢ + ٥ + (س-٢)^٢}$

$\frac{دف}{دن}$ = $\frac{٢س \frac{دس}{دن} + ٢(س-٢) \frac{دس}{دن}}{٢\sqrt{س^٢ + ٥ + (س-٢)^٢}}$

$\frac{دف}{دن}$ = $\frac{٢ × ٥ × ٣ + ٢ × ٣ × ٣}{٢\sqrt{٣٠ + ٩}}$

٩٤ جسر مشاة يرتفع عن مستوى الشارع ٦ م، يسير عليه رجل بمعدل ٣ كم/س وفي اللحظة نفسها مرت من تحته سيارة بسرعة ٦٠ كم/س، جد معدل ابتعاد الرجل عن السيارة بعد دقيقة من بدء الحركة



$ف = \sqrt{س^2 + ص^2 + ع^2}$

$ف = \sqrt{س^2 + ص^2 + (٠٫٠٠٦)^2}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن}}{٢\sqrt{س^2 + ص^2 + (٠٫٠٠٦)^2}}$

$\frac{دس}{دن} = ٣ كم/س$

$\frac{دص}{دن} = ٦٠ كم/س$

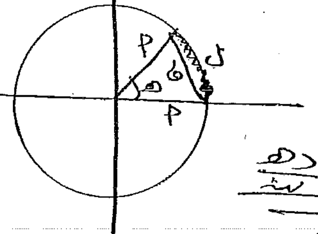
بعد دقيقة

$س = ٣ \times \frac{١}{٦٠} = \frac{٣}{٦٠}$

$ص = ٦٠ \times \frac{١}{٦٠} = ١$

---

٩٥ بدأت نقطة بالحركة على دائرة مركزها (٠،٠) من النقطة (أ،٠) بعكس عقارب الساعة بحيث يزداد طول القوس الذي ترسمه أثناء حركتها بمعدل ٨ سم/ث، جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة (أ،٠) عندما يقابل القوس الذي ترسمه زاوية مركزية قياسها $\frac{٢\pi}{٣}$



$ف = \sqrt{٢أ^2 - ٢أ^2 جتاهـ}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{\cancel{٢}أ^2 \times جاهـ \times \frac{دهـ}{دن}}{\cancel{٢}\sqrt{٢أ^2 - ٢أ^2 جتاهـ}}$

$\frac{دل}{دن} = ٨$

$ل = أهـ$

$\frac{دل}{دن} = أ \frac{دهـ}{دن}$

$\boxed{\frac{دهـ}{دن} = \frac{٨}{أ}}$

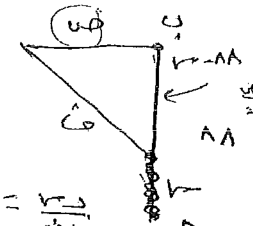
$\frac{دف}{دن} = \frac{أ^2 \times \frac{\sqrt{٣}}{\cancel{٢}} \times \frac{\cancel{٨}}{أ}}{\sqrt{٢أ^2 - ٢أ^2 \times -\frac{١}{٢}}}$

$\frac{\cancel{٤}\sqrt{٣}}{\cancel{أ}}$

$= ٤\sqrt{٣}$

---

٩٦ سفينتان أ، ب، أ إلى الجنوب من ب والمسافة بينهما ٨٨ كم، تحركت أ إلى الشمال بسرعة ٢٤ كم/س وتحركت ب إلى الغرب بسرعة ١٥ كم/س، جد معدل تغير المسافة بينهما بعد ساعتين من بدء الحركة



$ف = \sqrt{(٨٨ - س)^2 + ص^2}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢(٨٨ - س)(-\frac{دس}{دن}) + ٢ص \frac{دص}{دن}}{٢\sqrt{(٨٨ - س)^2 + ص^2}}$

$\frac{دس}{دن} = ٢٤$

$\frac{دص}{دن} = ١٥$

بعد ساعتين

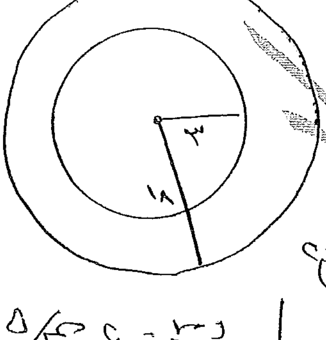
$س = ٤٨$

$ص = ٣٠$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢(٨٨ - ٤٨)(-٢٤) + ٢ \times ٣٠ \times ١٥}{٢\sqrt{٤٠^2 + ٣٠^2}}$

~~٩٧ النقطة أ (١، ٤)، ب (٦، ٩) والنقطة م تتحرك على محور السينات مبتعدة عن نقطة الأصل~~

٩٨ دائرتان متحدتا المركز، نصفا قطريهما ٣ سم، ١٨ سم. بدأت الدائرة الصغرى تتسع بحيث يزداد نصف قطرها بمعدل ٢ سم/د وفي نفس اللحظة أخذت الدائرة الكبرى تصغر بمعدل ٣ سم/د، أوجد معدل التغير في المساحة المحصورة بين الدائرتين في اللحظة التي تصبح المساحة بينهما تساوي صفر



$م = \pi نق_1^2 - \pi نق_2^2$

$م = \pi(١٨ - ص)^2 - \pi(٣ + س)^2$

$م = \pi(١٨ - ٣ن)^2 - \pi(٣ + ٢ن)^2$

$\frac{دم}{دن} = ٢\pi(١٨ - ٣ن) \times -٣ - ٢ \times ٢\pi(٣ + ٢ن)$

$\frac{دم}{دن} = ٢\pi(٩) \times -٣ - ٤\pi(٩)$

$= -٥٤\pi - ٣٦\pi$

$= -٩٠\pi$

$\frac{دس}{دن} = ٢ سم/د$

$\frac{دص}{دن} = ٣ سم/د$

$س = ٢ن$

$ص = ٣ن$

لما المساحة = ٠

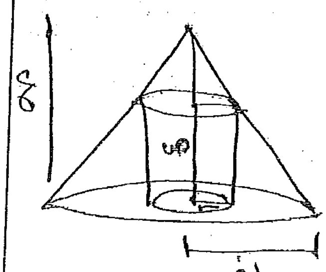
$نق_1 = نق_2$

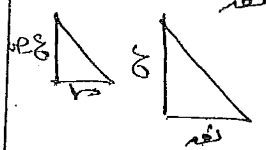
$١٨ - ٣ن = ٣ + ٢ن$

$٥ن = ١٥$

$ن = \frac{١٥}{٥} = ٣$

٩٩ | اثبت انه اكبر حجم اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم يساوي $\frac{4}{9}$ حجم المخروط





$$\text{ح} = \text{ط}\,\text{س}^2\,\text{ص}$$

$$\text{ح} = \text{ط}\,\text{س}^2\,\text{ع}\left(1 - \frac{\text{س}}{\text{نق}}\right)$$

$$\text{ح} = \text{ع}\,\text{ط}\left(\text{س}^2 - \frac{\text{س}^3}{\text{نق}}\right)$$

$$\text{ح}' = \text{ع}\,\text{ط}\left(2\text{س} - \frac{3\text{س}^2}{\text{نق}}\right) = 0$$

$$\text{س}\left(2 - \frac{3\text{س}}{\text{نق}}\right) = 0$$

$$\frac{\text{ع}-\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{نق}}$$

$$1 - \frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{نق}}$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \left(1 - \frac{\text{س}}{\text{نق}}\right)$$

$$\text{ص} = \text{ع}\left(1 - \frac{\text{س}}{\text{نق}}\right)$$

$$\cancel{3}\text{س} = \frac{2}{\cancel{3}}\,\text{نق}$$

$$\text{س} = \frac{2}{3}\,\text{نق}$$

$$\text{ص} = \text{ع}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\text{ع}}{3}$$

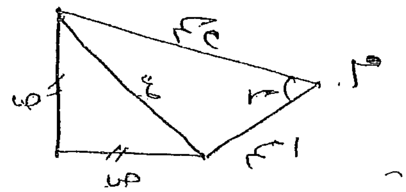
$$\text{ح} = \text{ط}\left(\frac{2}{3}\text{نق}\right)^2 \times \frac{\text{ع}}{3}$$

$$\text{ح} = \frac{4}{9}\,\frac{\text{ط}}{3}\,\text{نق}^2\,\text{ع}$$

---

١٠٠ | يمثل الشكل المجاور الرباعي أ ب جـ د الذي فيه الضلع (أ ب) ثابت وطوله ٢سم وفيه (أ د) ثابت وطوله ١سم اللذان وضعه مفصول يمكنه ان يدور في مستوى الشكل حول المفصل أ و يصنع مع الضلع الثابتة (أ ب) زاوية قدرها س اما الزاوية د جـ ب فهي قائمة والضلعان جـ د ، جـ ب متساويان دوماً جد قيمة س التي تجعل مساحة الشكل الرباعي عندها اكبر ما يمكن

الحل :-



$$\text{ع}^2 = \text{ص}^2 + \text{ص}^2$$

$$\text{ص}^2 = \frac{\text{ع}^2}{2}$$

$$\text{ع}^2 = 1 + 4 - 2\times1\times2\,\text{جتا}\,\text{س}$$

$$\text{ع}^2 = 5 - 4\,\text{جتا}\,\text{س}$$

$$\text{ص}^2 = \frac{5 - 4\,\text{جتا}\,\text{س}}{2}$$

$$\text{م} = \text{م}_{\text{المثلث}} + \text{م}_{\text{المثلث}}$$

$$= \frac{1}{2}\times1\times2\times\text{جا}\,\text{س} + \frac{1}{2}\times\text{ص}\times\text{ص}$$

$$\text{م} = \text{جا}\,\text{س} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(5 - 4\,\text{جتا}\,\text{س})$$

$$\text{م} = \text{جا}\,\text{س} + \frac{5}{4} - \text{جتا}\,\text{س}$$

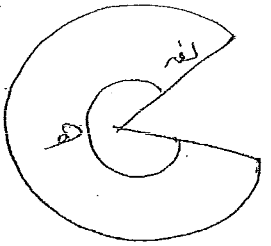
$$\text{م}' = \text{جتا}\,\text{س} + \text{جا}\,\text{س} \;,\; \text{م}' = \text{صفر}$$

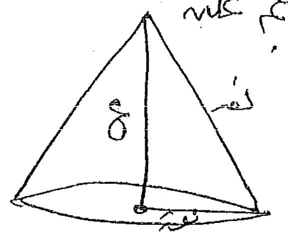
$$\text{س} = \frac{3\text{ط}}{4}$$

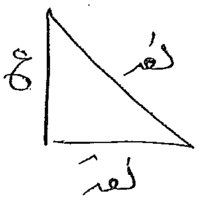
---

١٠١ | قطاع من دائرة زاوية المركزية بالتقدير الدائري هـ ونصف قطر دائرته نق، حول الى مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته نقَ وارتفاعه ع جد قيمة هـ التي تجعل المخروط اكبر حجم ممكن

حجم مخروط







$$\text{نق}^2 = \text{نقَ}^2 + \text{ع}^2$$

$$\text{نقَ}^2 = \text{نق}^2 - \text{ع}^2$$

$$\text{ح} = \frac{\text{ط}}{3}\,\text{نقَ}^2\,\text{ع}$$

$$\text{ح} = \frac{\text{ط}}{3}\left(\text{نق}^2 - \text{ع}^2\right)\times\text{ع}$$

$$\text{ح} = \frac{\text{ط}}{3}\left(\text{نق}^2\,\text{ع} - \text{ع}^3\right)$$

$$\text{ح}' = \frac{\text{ط}}{3}\left(\text{نق}^2 - 3\text{ع}^2\right) = 0$$

$$\text{ع}^2 = \frac{\text{نق}^2}{3}$$

$$\boxed{\text{ع} = \frac{\text{نق}}{\sqrt{3}}}$$

$$\text{نقَ}^2 = \text{نق}^2 - \text{ع}^2$$

$$\text{نقَ}^2 = \text{نق}^2 - \frac{\text{نق}^2}{3} = \frac{2}{3}\,\text{نق}^2$$

$$\text{نقَ} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\text{نق}$$

محيط القاعدة = طول القوس

$$2\,\text{ط}\,\text{نقَ} = \text{هـ}\times\text{نق}$$

$$2\,\text{ط}\times\text{نقَ} = \text{هـ}\times\text{نق}$$

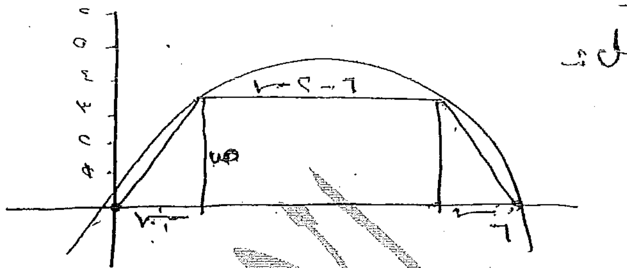
$$2\,\text{ط}\sqrt{\frac{2}{3}}\,\text{نق} = \text{هـ}\times\text{نق}$$

$$\text{هـ} = 2\,\text{ط}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

١٠٢

جد مساحة أكبر شبه منحرف علماً بأنه في الربع الأول بحيث تقع إحدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران تقعان على منحنى الاقتران $ق(س) = 6س - س^2$

الحل:



$م = \frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

$م = \frac{1}{2}(6 + 6 - 2س) \times ص$

$م = \frac{1}{2}(12 - 2س)(6س - س^2)$

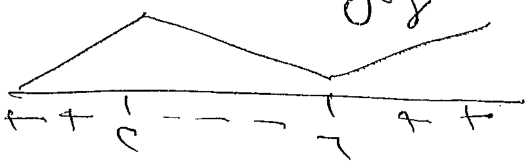
$م = \frac{1}{2}(72س - 12س^2 - 12س^2 + 2س^3)$

$م' = \frac{1}{2}(72 - 48س + 6س^2) = 0$

$س^2 - 8س + 12 = 0$

$(س - 6)(س - 2) = 0$

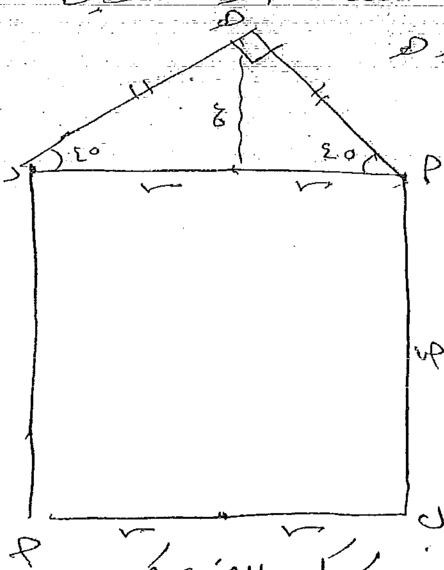
$س = 2$ ، $س = 6$ تهمل

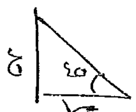


$\boxed{س = 2}$

١٠٣

في الشكل المجاور مثلث قائم ومستطيل، المثلث فيه أ هـ = د هـ، الشكل هو عبارة عن نافذة حيث المثلث من الزجاج الملون والمستطيل من الزجاج العادي، بحيث أن الزجاج الملون يسمح بإدخال نصف كمية الضوء الذي يسمح به الزجاج العادي، جد أبعاد النافذة التي تسمح بأكبر كمية للضوء علماً بأن محيط المستطيل ٨ م.





$ظا 45 = \frac{ع}{س}$

$ع = س$

$8 = 4س + 2ص$

$ص = 4 - 2س$

$ض = 2ل \times م_{المستطيل} + ل \times م_{المثلث}$

$= 2ل \times 2س ص + ل \times \frac{1}{2} \times 2س \times ع$

$= 4ل س ص + ل س^2$

$= 4ل س(4 - 2س) + ل س^2$

$ض' = 4ل(4 - 2س - 2س) + 2ل س$

$ض' = 4ل(4 - 4س) + 2ل س = 0$

$16 - 16س + 2س = 0$

$16 - 14س = 0$

$س = \frac{16}{14}$

$\boxed{س = \frac{8}{7}}$

الطول $= 2س = \frac{16}{7}$

العرض $= ص = 4 - \frac{16}{7} = \frac{12}{7}$

١٨) اتفقت إحدى الجامعات مع شركة سياحية لتسيير رحلة إلى العقبة بأن يدفع كل شخص (٦٥) دينارًا إذا كان عدد المشتركين في الرحلة (١٠٠) شخص وإذا زاد عدد المشتركين عن (١٠٠) شخص فإن الشركة تخفض نصف دينار عن كل مشترك جديد. جد عدد المشتركين ليكون إيراد الشركة أكبر ما يمكن.

الحل: عدد المشتركين = ١٠٠ + س

سعر التذكرة = ٦٥ − $\frac{1}{2}$ س

د(س) = (١٠٠ + س) (٦٥ − $\frac{1}{2}$ س)

د(س) = ٦٥٠٠ − ٥٠ س + ٦٥ س − $\frac{1}{2}$ س^2

د′(س) = −٥٠ + ٦٥ − س = ٠

$\boxed{\text{س} = ١٥}$

عدد المشتركين ١١٥ مشترك