الاجابة النموذجية الاختبار النهائي لمادة الرياضيات الفرع العلمي (م٤)

السؤال الأول:

أ) $\int_{\frac{\pi}{16}}^{\frac{\pi}{12}} (2\sec^2 x + m)^4 \, dx = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + \frac{m}{2})^4 \, dx$

نفرض انه: $y = \tan x + \frac{m}{2}$، $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$، عندما $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = 1 + \frac{m}{2}$، $x = \frac{\pi}{12} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{m}{2}$

$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{m}{2}}^{1+\frac{m}{2}} y^4 \, dy$

$\Rightarrow 1 + \frac{m}{2} = 2 \Rightarrow \frac{m}{2} = 1 \Rightarrow m = 2$

ب) ١) $\int \frac{1}{\sin^4 x - \cos^4 x} \, dx = \int \frac{1}{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)} \, dx$

$= \int \frac{1}{1 - \cos 2x} \, dx = \int \frac{1}{1 - \cos 2x} \times \frac{1 + \cos 2x}{1 + \cos 2x} \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{\sin^2 2x} \, dx$

$= \int \frac{1}{\sin^2 2x} \, dx + \int \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \times \frac{1}{\sin 2x} \, dx = \int (a \csc^2 2x + b \cot 2x \csc 2x) \, dx$

$= -\frac{a}{2} \cot 2x - \frac{b}{2} \csc 2x + c$

٢) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3 (1-x)^3}} \, dx = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x(1-x)}} \, dx$

نفرض انه: $y = 1 - x$، $dy = -dx$، $x = 1 - y$

$= \int \frac{-1}{(1-y)^2 \sqrt{(1-y)y}} \, dy = \int \frac{-1}{(1-y)^2 \sqrt{y - y^2}} \, dy$

نفرض انه: $y = \frac{1}{2} - t$، $dy = -dt$، $t = \frac{1}{2} - y$

$= \int \frac{-1}{(\frac{1}{2}+t)^2 \sqrt{\frac{1}{4} - t^2}} \, dt = \int \frac{-1}{(\frac{1}{2}+t)^2 \sqrt{\frac{1}{4} - t^2}} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \, dt$

$= \int \frac{-\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}+t)^2 \sqrt{\frac{1}{4} - t^2}} \, dt$

نفرض انه: $t = \frac{1}{2} \sin \theta$، $dt = \frac{1}{2} \cos \theta \, d\theta$، $\theta = \sin^{-1}(2t)$

$= \int \frac{-\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta)^2 \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin^2\theta}} \times \frac{1}{2} \cos\theta \, d\theta$

$= \int \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}(1+\sin\theta)^2 \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\theta}} \times \frac{1}{2} \cos\theta \, d\theta$

$= \int \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}(1+\sin\theta)^2 \frac{1}{2}\cos\theta} \times \frac{1}{2} \cos\theta \, d\theta$

$= \int \frac{-1}{(1+\sin\theta)^2} \, d\theta = \int -(1+\sin\theta)^{-2} \, d\theta$

$= -\int (1+\sin\theta)^{-2} \, d\theta$

نفرض انه: $z = \tan \frac{\theta}{2}$، $\sin\theta = \frac{2z}{1+z^2}$، $d\theta = \frac{2}{1+z^2} dz$

$= -\int \left(1 + \frac{2z}{1+z^2}\right)^{-2} \frac{2}{1+z^2} \, dz = -\int \left(\frac{1+z^2+2z}{1+z^2}\right)^{-2} \frac{2}{1+z^2} \, dz$

$= -\int \left(\frac{(1+z)^2}{1+z^2}\right)^{-2} \frac{2}{1+z^2} \, dz = -\int \frac{(1+z^2)^2}{(1+z)^4} \times \frac{2}{1+z^2} \, dz$

$= -2 \int \frac{1+z^2}{(1+z)^4} \, dz$

$$\int \frac{1}{\sqrt{س(1-س)^3}}\,ds = \int \frac{1}{\sqrt{(1-س+1)(1-س)^3}}\,ds = \int \frac{1}{\sqrt{(1-س)^4-(1-س)^4}}\,ds$$

طريقة رائعة للتميز

$$\leftarrow \int \frac{1}{\sqrt{(1-س)^2\left(\frac{1}{1-س}-1\right)}}\,ds = \int \frac{1}{\sqrt{ص^2}}\times \frac{1}{(1-س)^2}\,ص\,ص$$

نفرض أنه: $ص = \frac{1}{1-س} - 1$

$\frac{ص}{س} = \frac{-1\times -1}{(1-س)^2} = \frac{1}{(1-س)^2}$

$س = (1-س)^2 ص$

$$= \int ص^{-\frac{1}{2}}\,ص = 2ص^{\frac{1}{2}} + ب = 2\left(\frac{1}{1-س}-1\right)^{\frac{1}{2}} + ب$$

السؤال الثاني:

أ) عندما $ع = 25$ فإنه $ت = 0$

$$\leftarrow \frac{دع}{دت} = -10 \leftarrow ع = \int -10\,دت \leftarrow ع(ت) = -10ت + ب$$

$\leftarrow$ عندما $ع(0) = 25 \leftarrow ع(0) = 0 + ب = 25 \leftarrow \boxed{ب = 25}$

$\therefore ع(ت) = -10ت + 25$

$\leftarrow$ تقف الرصاصة عندما $ع = 0$

$ع(ت) = -10ت + 25 = 0 \leftarrow 10ت = 25 \leftarrow \boxed{ت = 2.5}$ ث

ب) $\frac{ص}{س} = هـ^{3س - 4ص} \leftarrow \frac{هـ^{3س}}{هـ^{4ص}} = \frac{ص}{س} \leftarrow هـ^{4ص} ص = هـ^{3س} س$

$$\leftarrow \frac{هـ^{4ص}}{4} = \frac{هـ^{3س}}{3} + ب \leftarrow هـ^{4ص} = \frac{4}{3} هـ^{3س} + ب$$

جـ) $\int \frac{س \text{جا} س}{\text{جتا}^3 س}\,س =$

نفرض انه: $ص = س$

$ده = س$

$ده = \frac{\text{جا} س}{\text{جتا}^3 س}\,س$

$هـ = \int \frac{\text{جا} س}{\text{جتا}^3 س}\,س = \frac{1}{2\text{جتا}^2 س}$

$\leftarrow \int \frac{\text{جا} س}{\text{جتا}^3 س}\,س = \int \frac{\text{جا} س}{ص^3}\times \frac{ص}{-\text{جا} س}\,ص = \int -ص^{-3}\,ص$

$= \frac{-ص^{-2}}{-2} = \frac{1}{2\text{جتا}^2 س}$

نفرض انه:
$ص = \text{جتا} س$
$س = \frac{ص}{-\text{جا} س}$

الأستاذ في الرياضيات
غيث الخرابشه
٠٧٧٦١٧٨٣٤١

$\int_{هـ} ف(س)\,دس = ف(س)\times هـ(س) - \int_{هـ} هـ(س)\times ف'(س)\,دس$ ←

$\therefore \int \frac{س\,جا\,س}{جتا^{2}\,س}\,دس = \int \frac{س}{ظا\,س\times جتا\,س}\,دس = \int \frac{1}{ظا\,س}\times \frac{س}{جتا\,س}\,دس = \int ظتا\,س\times \frac{س}{جتا\,س}\,دس$

$= ظتا\,س\times قا\,س - \int -قا^{2}\,س\times قا\,س\,دس + جـ$

$= ظتا\,س\,قا\,س + \int قا^{3}\,س\,دس + جـ$

$= ظتا\,س\,قا\,س + \int قا\,س\,(ظا^{2}\,س + 1)\,دس + جـ$

$= ظتا\,س\,قا\,س + \int ظا^{2}\,س\,قا\,س\,دس + \int قا\,س\,دس + جـ$

$= ظتا\,س\,قا\,س + \int ظا\,س\times ظا\,س\,قا\,س\,دس + \int قا\,س\,دس + جـ$

$\therefore \int ظا\,س\,قا\,س\,دس = ظتا\,س\,قا\,س + \int ظا\,س\,قا\,س\,دس + \int قا\,س\,دس + جـ$

$\therefore \int ظا\,س\,قا\,س\,دس = ظتا\,س\,قا\,س + \int قا\,س\,دس + جـ$

$\therefore \int ظا\,س\,قا\,س\,دس = ظتا\,س\,قا\,س + لو|قا\,س + ظا\,س| + جـ$

٢) $\int_{هـ} لو|1 - جا\,س|\,دس$

نفرض أنه $ف = لو_{هـ}|1 - جا\,س|$ ، $هـ = س$

$ف' = \frac{-جتا\,س}{1 - جا\,س}$ ، $هـ' = 1$

$\int_{هـ} ف(س)\,دس = ف(س)\times هـ(س) - \int_{هـ} هـ(س)\times ف'(س)\,دس$ ←

$\therefore \int_{هـ} لو|1 - جا\,س|\,دس = س\,لو_{هـ}|1 - جا\,س| + \int \frac{جتا\,س}{1 - جا\,س}\,دس$ ←

نفرض أنه $ص = جا\,س$ ، $ص' = جتا\,س$ ، $دس = \frac{دص}{جتا\,س}$

$= \int \frac{ص}{1 - ص}\times \frac{دص}{جتا\,س\times جتا\,س} = \int \frac{ص}{1 - ص}\times \frac{دص}{1 - ص^{2}}$ ←

$= \int \left(\frac{ص}{1 - ص} + \frac{-(-2ص - 2)}{ص^{2} + ص - 2}\right) دص = -لو_{هـ}|1 - ص| - ص^{2} - 2ص + جـ$

$= -لو_{هـ}|1 - جا\,س| - جا\,س - جا^{2}\,س + جـ$

$\therefore \int_{هـ} لو|1 - جا\,س|\,دس = س\,لو_{هـ}|1 - جا\,س| + لو_{هـ}|1 - جا\,س| + جا\,س + \frac{1}{2}جا^{2}\,س + جـ$

$ص^{2} + ص - 2$ | $ص^{2} + 2ص$ | $-2ص - 2$ | $-2ص - 2$ | 0

الأستاذ في الرياضيات
غيث الخرابشه
٠٧٧٦١٧٨٣٤١

السؤال الثالث :-

الأستاذ في الرياضيات
غيث الخرابشه
٠٧٧٦١٧٨٣٤١

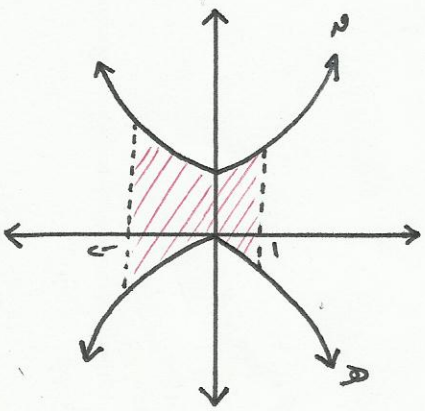
أ) $ق_1(س) = س^3 + 1$ ، $ق_2(س) = -س^3$ ، $س = -2$ ، $س = 1$

$\leftarrow ق_1(س) = ق_2(س)$

$س^3 + 1 = -س^3$

$2س^3 + 1 = 0 \leftarrow 2س^3 = -1 \leftarrow س^3 = -\frac{1}{2}$ لا يوجد جذور

∴ المنحنيان لا يتقاطعان .



$\therefore م = \int_{-2}^{1} (ق_1 - ق_2)(س)\,دس = \int_{-2}^{1} ((س^3 + 1) + س^3)\,دس$

$= \int_{-2}^{1} (2س^3 + 1)\,دس = \left[\frac{2}{3}س^3 + س\right]_{-2}^{1}$

$= (\frac{2}{3} + 1) - (-\frac{16}{3} - 2)$

$= \frac{5}{3} + \frac{22}{3} = \frac{27}{3} = 9$ وحدة مربعة

ب) 1) $\int \frac{1}{س^3 ه^{س^3} + 2ه^{س^3}}\,دس = \int \frac{1}{ص^3 + 2ص^2 + 3ص + 1} \times \frac{دص}{ص}$

نفرض أن
$ص = ه^{س}$
$دص = ه^{س}\,دس$
$دس = \frac{دص}{ه^{س}}$
$\frac{دص}{ص} = \frac{دص}{ه^{س}}$

$\leftarrow \frac{1}{ص(2ص+1)(ص+1)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{2ص+1} + \frac{جـ}{ص+1}$

$\leftarrow 1 = أ(2ص+1)(ص+1) + ب(ص)(ص+1) + جـ(ص)(2ص+1)$

$\leftarrow$ عندما $ص = 0$ ⟵ $أ = 1$

$ص = -1$ ⟵ $جـ = 1$

$ص = -\frac{1}{2}$ ⟵ $-\frac{1}{2}ب = 1 \leftarrow ب = -4$

$\therefore \int \left(\frac{1}{ص} + \frac{-4}{2ص+1} + \frac{1}{ص+1}\right) دص = لو_ه |ص| - 2لو_ه |2ص+1| + لو_ه |ص+1| + جـ$

$= لو_ه |ه^{س}| - 2لو_ه |2ه^{س}+1| + لو_ه |ه^{س}+1| + جـ$

ج) $\int \frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{3 + \text{جا}2\theta}\, d\theta = \int \frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{-(-3 - \text{جا}2\theta)}\, d\theta = \int \frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{-(-4 + 1 - \text{جا}2\theta)}\, d\theta$

$= \int \frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{-(-4 + \text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta - \text{جا}2\theta)}\, d\theta = \int \frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{-(-4 + (\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta)^2)}\, d\theta$

$= \int \frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{-(-4 + \text{ص}^2)} \times \frac{d\text{ص}}{\text{جتا}\theta + \text{جا}\theta} = \int \frac{1}{4 - \text{ص}^2}\, d\text{ص}$

نفرض انه:
$\text{ص} = \text{جا}\theta - \text{جتا}\theta$
$d\text{ص} = (\text{جتا}\theta + \text{جا}\theta)\, d\theta$

$\leftarrow \frac{1}{(2-\text{ص})(2+\text{ص})} = \frac{\text{أ}}{2-\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{2+\text{ص}}$

$\leftarrow 1 = \text{أ}(2+\text{ص}) + \text{ب}(2-\text{ص})$

عندما: $\text{ص} = -2$ ، $\text{ب} = \frac{1}{4}$

عندما: $\text{ص} = 2$ ، $\text{أ} = \frac{1}{4}$

$\leftarrow \int \left(\frac{1}{4(2-\text{ص})} + \frac{1}{4(2+\text{ص})}\right) d\text{ص} = -\frac{1}{4}\ln|2-\text{ص}| + \frac{1}{4}\ln|2+\text{ص}| + \text{جـ}$

$= -\frac{1}{4}\ln|2-(\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta)| + \frac{1}{4}\ln|2+\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta| + \text{جـ}$

الأستاذ في الرياضيات
غيث الخرابشه
٠٧٧٦١٧٨٣٤١

السؤال الرابع :-

أ) القطع المطلوب ← قطع زائد سيني

* البؤرتان $(\pm 5, 0)$

* المركز $(0, 0)$

* البعد البؤري $= 2\text{جـ} = 5 - -5 = 10$

$\text{جـ} = 5$

* $\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2$

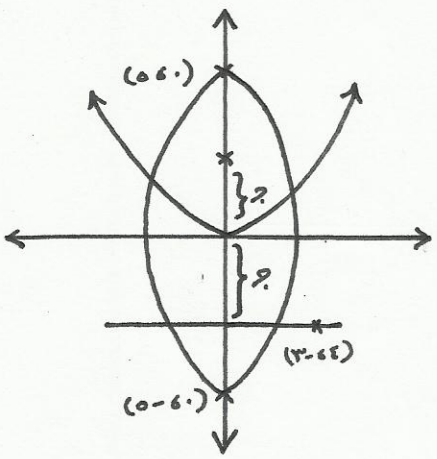
$25 = 16 + \text{ب}^2 \leftarrow \text{ب}^2 = 9$

* الفرق المطلق $= 2\text{أ} = 8 \leftarrow \text{أ} = 4$

∴ معادلة المحل الهندسي هي :

$\frac{\text{س}^2}{16} - \frac{(\text{ص}-1)^2}{9} = 1$

ب) رأسا القطع الناقص $(٠، ٥\pm٠)$ ، م $(٠، ٠)$



← منه القطع المكافئ (احداثيات البؤرة هي $(٣، ٠)$)

← ∴ احدى بؤرتي الناقص $(٣، ٠)$

← $\boxed{جـ = ٣}$

← ∴ معادلة القطع المكافئ : $س^{٢} = ٤ جـ ص$

$\boxed{س^{٢} = ١٢ ص}$

← منه القطع الناقص : $\boxed{م = ٥}$ ، $\boxed{جـ = ٣}$

← $ب^{٢} = م^{٢} - جـ^{٢} \leftarrow ٩ = ٢٥ - ب^{٢} \leftarrow \boxed{ب^{٢} = ١٦}$

← ∴ معادلة القطع الناقص هي : $\boxed{\frac{ص^{٢}}{٢٥} + \frac{س^{٢}}{١٦} = ١}$

جـ) $س^{٢} + ٤س + ٨ص = ٠$

$\leftarrow س^{٢} + ٤س = ٠ - ٨ص$

$س^{٢} + ٤س + ٤ = ٠ - ٨ص + ٤$

$(س + ٢)^{٢} = ٤ - ٨ص$

$(س + ٢)^{٢} = -٨ (ص - ٣)$

قطع مكافئ بؤرتي م $(-٢، ٣)$

١) احداثيات الرأس $(-٢، ٣)$

$-٨ = -٤جـ \leftarrow \boxed{جـ = ٢}$

البؤرة $(-٢، -٣+٣) \equiv (-٢، ١)$

٣) معادلة (المحور $\leftarrow س = -٢$)

معادلة الدليل $\leftarrow ص = ٥$

السؤال الخامس :-

م) $ص^{٢} = ٨ (س - ٢)$

مركز الدائرة = رأس المكافئ = $(٢، ٠)$

∴ معادلة الدائرة : $(س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ر^{٢}$

لكنه $(٤، -٤)$ تحقق الدائرة :

$\leftarrow ١٦ + ٤ = ر^{٢}$

$\leftarrow ر^{٢} = ٢٠$

∴ معادلة الدائرة هي :

$(س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٢٠$

الأستاذ في الرياضيات
غيث الخرابشه
٠٧٧٦١٧٨٣٤١

ب) قطع زائد صادر / م (٠،٠)

* $\boxed{أ = ٤}$

* $جـ^{٢} = ٦ - ٦ = ١٢$

$\leftarrow \boxed{جـ = ٦}$

* $جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$

$\leftarrow ٣٦ = ١٦ + ب^{٢} \leftarrow \boxed{ب^{٢} = ٢٠}$

∴ معادلة القطع هي :

$$\frac{ص^{٢}}{١٦} - \frac{س^{٢}}{٢٠} = ١$$

ج) حتى يكون $\overline{هـ م} \perp \overline{ب ب}$ يجب ان يكون طاهـ = طاهـ

$\leftarrow \frac{ص}{س} = \frac{ب م}{أ م} \leftarrow$ م = جـ ، ب م = ب ، م ب = أ ، ص = ص ، س = س

$\leftarrow \frac{ص}{جـ} = \frac{ب}{أ}$ ①

$\leftarrow$ لكن ك (جـ ، ص) تحقق معادلة القطع الناقص السيني الذي مركزه (٠،٠)

$$\frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{س^{٢}}{أ^{٢}} = ١ \leftarrow \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١ - \frac{جـ^{٢}}{أ^{٢}} = \frac{أ^{٢} - جـ^{٢}}{أ^{٢}} = \frac{ب^{٢}}{أ^{٢}}$$

$\leftarrow \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = \frac{ب^{٢}}{أ^{٢}} \leftarrow ص^{٢} = \frac{ب^{٢}}{أ^{٢}} \leftarrow \boxed{ص = \frac{ب}{أ}}$ عوض في ①

$\leftarrow \frac{ب}{أ} = \frac{ب}{أ} \leftarrow ب = ب \leftarrow ب^{٢} = جـ ب \leftarrow \boxed{ب = جـ}$

$\leftarrow جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢}$

$ب^{٢} = أ^{٢} - جـ^{٢} \leftarrow جـ^{٢} = أ^{٢} \leftarrow \boxed{جـ = أ}$

∴ الاختلاف المركزي هـ $= \frac{جـ}{أ} = \frac{أ}{أ} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

الأستاذ في الرياضيات
غيث الخرابشه
٠٧٧٦١٧٨٣٤١

أتمنى لكم التوفيق جميعاً