2017

0785968199

الوحدة الاولى

النهايات والاتصال

قال نبراس الأقصى :

الرياضيات مادة ممتعة و سهلة، إن أحببتها فستفهمها، و إن فهمتها فسوف تتمتع بها.

إعداد الأستاذ

ناصر حشكي

الفرع العلمي

الصناعي

الدرس الأول: نهاية اقتران عند نقطة

مفهوم النهاية: دراسة سلوك الاقتران عندما يقترب المتغير س من قيمة معينة ويرمز لها "نها" وتتم حسابها من خلال الطرق التالية.

١ الجدول

مثال①: ادرس سلوك الاقتران ق(س) = س+١ عندما يقترب س من العدد ٣.

يمين ← ، يسار →

س	٣,٣	٣,٢	٣,١	٣	٢,٩	٢,٨	٢,٧
ق(س)	٤,٣	٤,٢	٤,١		٣,٩	٣,٨	٣,٧

تقل ← ٤ ٤ → تزداد

نلاحظ من الجدول أنه كلما اقتربت س من العدد ٣ سواء كان الاقتراب من يمين ويسار العدد ٣ فإن الاقتران ق(س) يقترب من العدد ٤.

فإننا نقول أن نهاية ق(س) تساوي ٤ عندما تقترب س من العدد ٣ ويرمز لها $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}$ ق(س) = ٤

نرمز للاقتراب س من العدد ٣ من اليمين بـ س ← ٣+ وتكون نهاية من يمين $\underset{س \leftarrow ٣^+}{نها}$ ق(س) = ٤ وكذلك من اليسار س ← ٣- فإنه نهاية من يسار $\underset{س \leftarrow ٣^-}{نها}$ ق(س) = ٤.

نلاحظ أن $\underset{س \leftarrow ٣^+}{نها}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٣^-}{نها}$ ق(س) لذلك نقول بأن النهاية موجودة وتساوي ٤ وإذا لم تكن نهاية من اليمين لا تساوي نهاية من اليسار فإن النهاية غير موجودة.

مثال②: جد قيمة $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ ق(س) من خلال الآتي:

س	٢,٣	٢,٢	٢,١	٢	١,٩	١,٨	١,٧
ق(س)	٥,٣	٥,٢	٥,١		٦,٩	٦,٨	٦,٧

$\underset{س \leftarrow ٢^+}{نها}$ ق(س) = ٥ ، $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نها}$ ق(س) = ٧

$\underset{س \leftarrow ٢^+}{نها}$ ق(س) ≠ $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نها}$ ق(س)

∴ $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ ق(س) غير موجودة

مثال③: بالاعتماد على الجدول الآتي الذي يبين قيم ق(س) عندما س ← ١ فإن $\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ ق(س) تساوي.

س	١,٣	١,٢	١,١	١	٠,٩	٠,٨	٠,٧
ق(س)	٤,٣	٤,٢	٤,١		٥,٩	٥,٨	٥,٧

أ) ٤ ب) ٦

جـ) غير موجودة د) ٥

٣ الرسم

صورة العدد من الرسم ق(أ)

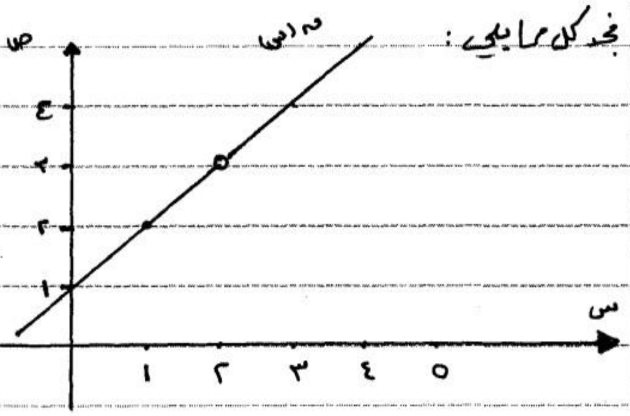
تكون صورة ق(أ) غير معرفة عند وجود دائرة مفتوحة ○

* النهاية: نقوم بإنزال (عمود) خط وهمي عند النقطة المطلوبة نقطة التقاء منحنى الاقتران من اليمين مع العمود هي قيمة $\underset{س \leftarrow أ^+}{نها}$ ق(س). نقطة التقاء منحنى الاقتران من اليسار مع العمود قيمة $\underset{س \leftarrow أ^-}{نها}$ ق(س)

← إذا تساوت النهايتين فإنه نهاية موجودة

← إذا اختلفت النهايتين فإن نهاية غير موجودة

مثال①: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران
نجد كل مما يلي:



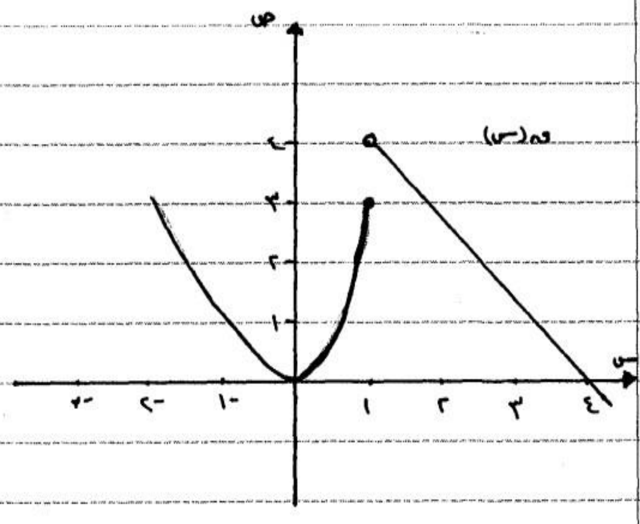
أ) نها ق(س) = ٢ (س ← ١+)   ب) نها ق(س) = ٢ (س ← ١-)

جـ) نها ق(س) = ٢ (س ← ١)   د) ق(١) = ٢

هـ) نها ق(س) = ٣ (س ← ٢+)   و) نها ق(س) = ٣ (س ← ٢-)

ل) نها ق(س) = ٣ (س ← ٢)   ط) ق(٢) = غير معرفة

مثال②: بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى
الاقتران ق(س) نجد كل مما يلي:



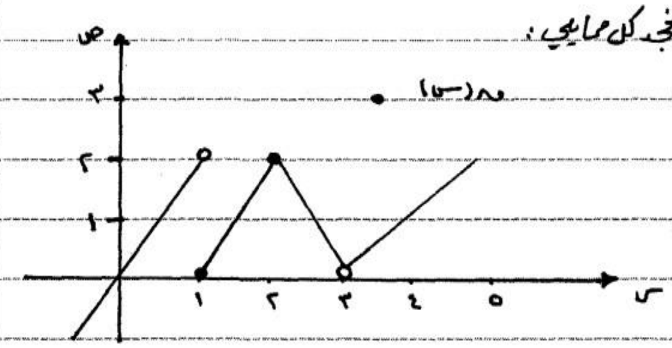
أ) نها ق(س) = (س ← ١-)   ب) نها ق(س) = (س ← ١+)

جـ) نها ق(س) = (س ← ١)   د) ق(١) =

هـ) نها ق(س) = (س ← -١+)   و) نها ق(س) = (س ← -١-)

ل) نها ق(س) = (س ← -١)   ط) ق(-١) =

مثال③ بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س)
نجد كل مما يلي:



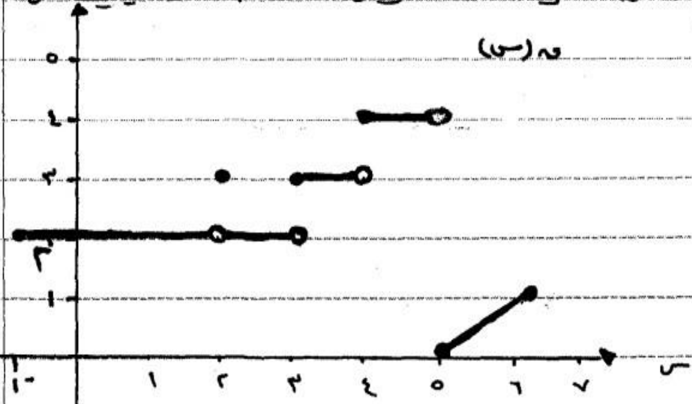
أ) نها ق(س) = (س ← ٠)   ب) نها ق(س) (س ← ١)

جـ) نها ق(س) (س ← ٣)   د) نها ق(س) (س ← ٢)

هـ) ق(٠)   و) ق(١)

ل) ق(٣)   ط) ق(٣)

مثال④: اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران
ق(س) المعرف على الفترة [-١، ٦] جد كلاً مما يلي:



أ) مجموعة قيم أ حيث نها ق(س) غير موجودة (س ← أ)

أ = {٣، ٤، ٥}

ب) مجموعة قيم أ حيث نها ق(س) = ٣ (س ← أ)

أ = (٣، ٤)

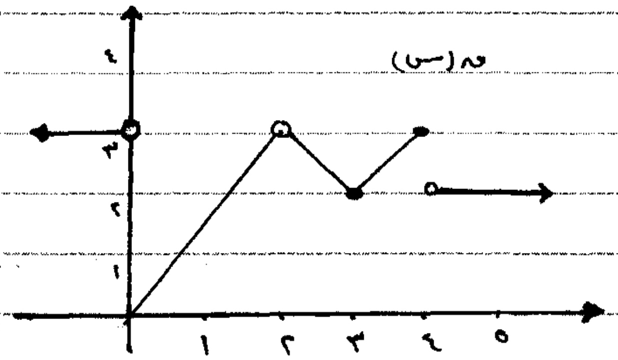
أسئلة سنوات سابقة

صيفي ٢٠٠٩: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح فإن قيم أ حيث أن

نهـا ق(س) = ٣ هي:
س←أ

أ) (-∞، ٠] ∪ {٢}   ب) (-∞، ٠) ∪ {٢}

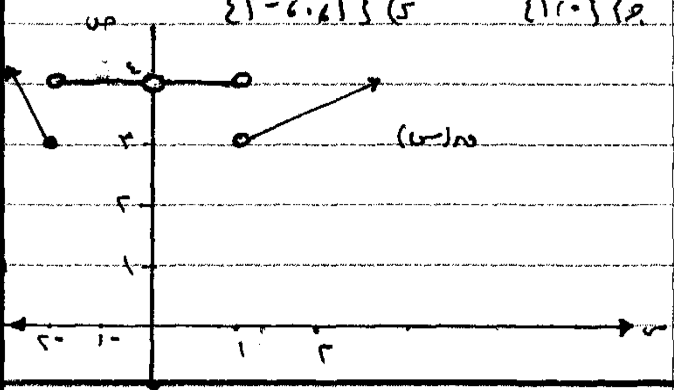
ج) (-∞، ٠] ∪ {٢، ٤}   د) (-∞، ٠) ∪ {٢، ٤}



شتوي ٢٠١٠: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح فإن مجموعة قيم أ بحيث أن نهـا ق(س) = ٣ هي:
س←أ+

أ) {١}   ب) {١، -٢}

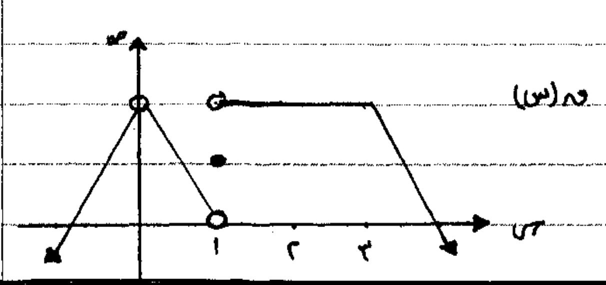
ج) {٠، ١}   د) {١، ٠، -٢}



شتوي ٢٠١١: معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق فإن مجموعة قيم ل حيث أن نهـا ق(س) غير موجودة هي:
س←ل

أ) {٠، ١، ٣}   ب) {٠، ١}

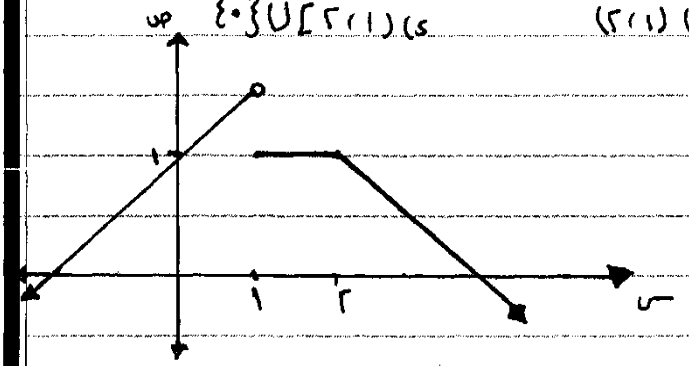
ج) {٣}   د) {١}



شتوي ٢٠١٣: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح فإن مجموعة قيم أ التي تجعل نهـا ق(س) = ١ هي
س←أ

أ) (١، ٢]   ب) [١، ٢] ∪ {٠}

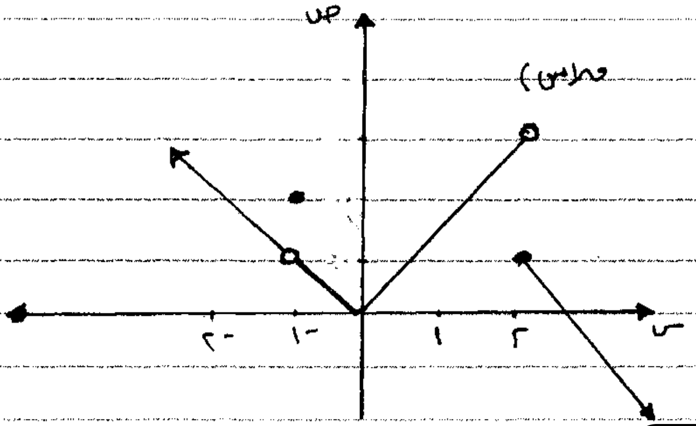
ج) (١، ٢)   د) (١، ٢] ∪ {٠}



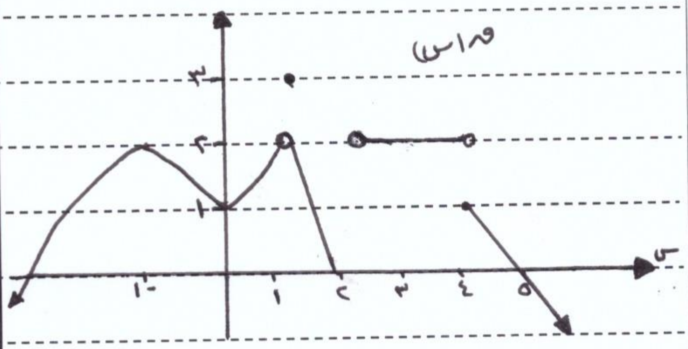
صيفي ٢٠١٣: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على ح، فإن مجموعة كل قيم ل حيث أن نهـا ق(س) غير موجودة هي
س←ل

أ) {-١}   ب) {٢}

ج) {-١، ٢}   د) {-١، ٠، ٢}



شتوي ٢٠١٦: بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) : س ∈ ح ، أجب عن كل مما يلي:



١- إذا كانت $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) = ٢ جد قيم الثابت أ ؟

أ ∈ (٢، ٤) ∪ {١ ، -١}

٢- إذا كانت $\lim\limits_{س \to ب}$ ق(س) غير موجودة جد قيم الثابت ب ؟

ب ∈ {٢، ٤}

الدرس الثاني: نظريات النهايات

③ حساب النهاية بالتعويض المباشر

نظرية ①:

① إذا كان أ، ب عددين حقيقيين، وكان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ب}$ لكل س في مجاله، فإن

$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ب}$ "نهاية الثابت الثابت نفسه"

② إذا كان $\text{أ} \in \text{ح}$، $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$، فإن

$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ}) = \text{أ}^{\text{ن}}$ حيث ن = ١، ٢، ٣، ...

"نهاية كثير الحدود صورة العدد".

مثال ① جد قيمة من النهايات الآتية:-

① $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ ٥ = ٥$ ② $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow -٢}\ ٧ = ٧$

③ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ١}\ -٤ = -٤$ ④ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow -٥}\ -٨ = -٨$

⑤ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٢}\ \text{س}^{٣} = (٢)^{٣} = ٨$ ⑥ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow -١}\ \text{س}^{٢} = (-١)^{٢} = ١$

⑦ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ١} (\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١) = (١)^{٢} + ٣ \times ١ - ١ = ١ + ٣ - ١ = ٣$

⑧ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣} (٢\text{س} - ٤) = ٢ \times ٣ - ٤ = ٢$

نظرية ②:

إذا كان ق، هـ اقترانين، أ، ب، جـ، $\text{م} \in \text{ح}$

بحيث أن: $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ب}$ ، $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \text{جـ}$ فإن:

① $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}} (\text{ق}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س})) = \text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}\ \text{ق}(\text{س}) \pm \text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \text{ب} \pm \text{جـ}$

② $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}\ \text{م}\,\text{ق}(\text{س}) = \text{م}\ \text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{م} \times \text{ب}$

③ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}} (\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})) = \text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}\ \text{ق}(\text{س}) \times \text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \text{ب} \times \text{جـ}$

④ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})} = \frac{\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}\ \text{ق}(\text{س})}{\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}\ \text{هـ}(\text{س})} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ ، $\text{جـ} \neq$ صفر

⑤ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}} \sqrt[\text{ن}]{\text{ق}(\text{س})} = \sqrt[\text{ن}]{\text{نها}_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}\ \text{ق}(\text{س})} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}$ ، بشرط ب > ٠ و ن عدد زوجي

ملاحظة: تتوزع النهاية على جميع العمليات الحسابية (جمع وطرح وضرب، قسمة والأسس).
وتتوزع النهاية على الجذور بشرط أن يكون الجذر معرف

مثال ①: إذا علمت أن $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ \text{ق}(\text{س}) = ٤$ ، $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ \text{هـ}(\text{س}) = ٦$ نجد كلاً مما يلي:

① $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣} (\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})) = \text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ \text{ق}(\text{س}) + \text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ \text{هـ}(\text{س})$
$= ٤ + ٦ = ١٠$

② $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣} (٥\text{ق}(\text{س}) - ٢\text{هـ}(\text{س})) = \text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ ٥\text{ق}(\text{س}) - \text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ ٢\text{هـ}(\text{س})$
$= ٥\ \text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ \text{ق}(\text{س}) - ٢\ \text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ \text{هـ}(\text{س})$
$= ٥ \times ٤ - ٢ \times ٦ = ٨$

③ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣} \left(\frac{\sqrt{\text{ق}(\text{س})}}{\text{هـ}(\text{س})} \right) = \frac{\sqrt{\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ \text{ق}(\text{س})}}{\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ \text{هـ}(\text{س})} = \frac{\sqrt{٤}}{٦} = \frac{٢}{٦}$

④ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣} (٢\text{س}\ \text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}^{٢}(\text{س}))$
$= \text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ ٢\text{س} \times \text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ \text{ق}(\text{س}) + \left(\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ \text{هـ}(\text{س})\right)^{٢}$
$= ٢ \times ٣ \times ٤ + (٦)^{٢} = ٢٤ + ٣٦ = ٦٠$

⑤ $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣} (٢\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}))$
$= ٢\ \text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ \text{ق}(\text{س}) \times \text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٣}\ \text{هـ}(\text{س})$
$= ٢ \times ٤ \times ٦ = ٤٨$

مثال ②: إذا كانت $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow -٢}\ \text{ق}(\text{س}) = ٥$ ، $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow -٢}\ \text{هـ}(\text{س}) = -٣$ نجد كلاً مما يلي:

① $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow -٢} (٣\text{ق}(\text{س}) - ٢\text{هـ}(\text{س}))$
$= ٣\ \text{نها}_{\text{س} \leftarrow -٢}\ \text{ق}(\text{س}) - ٢\ \text{نها}_{\text{س} \leftarrow -٢}\ \text{هـ}(\text{س})$
$= ٣ \times ٥ - ٢ \times -٣ = ١٥ + ٦ = ٢١$

② $\text{نها}_{\text{س} \leftarrow -٢} \sqrt[٣]{٥\text{هـ}(\text{س}) + ٦\text{س}} = \sqrt[٣]{٥\ \text{نها}_{\text{س} \leftarrow -٢}\ \text{هـ}(\text{س}) + \text{نها}_{\text{س} \leftarrow -٢}\ ٦\text{س}}$
$= \sqrt[٣]{٥ \times -٣ + ٦ \times -٢} = \sqrt[٣]{-١٥ + -١٢}$
$= \sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$

③ $\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}}\left(\frac{\text{س}^3-1}{\text{هـ(س)}}+\sqrt{2\text{ق(س)}+\text{س}^2+2}\right)$

$\frac{\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}}\,\text{س}^3-1}{\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}}\,\text{هـ(س)}}+\sqrt{2\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}+\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}}(\text{س}^2+2)}$

$\frac{(-2)^3-1}{-3}+\sqrt{2\times5+(-2)^2+2}=\frac{-9}{-3}+\sqrt{16}$

$3+4=7$

④ $\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}}\left(\text{هـ}^3\text{(س)}-2\text{ق}^2\text{(س)}\right)$

$\left(\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}}\,\text{هـ(س)}\right)^3-2\left(\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}\right)^2$

$(-3)^3-2(5)^2=-27-50=-77$

مثال③: إذا كانت $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\left(3\text{ق(س)}+2\text{س}^2\right)=20$ فجد $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\left(3\text{ق}^2\text{(س)}-5\text{س}\right)$.

$\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\left(3\text{ق(س)}+2\text{س}^2\right)=3\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}+\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\,2\text{س}^2=20$

$3\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}+2(2)^2=20$

$3\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}=20-8$

$3\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}=12\rightarrow\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}=4$

$\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\left(3\text{ق}^2\text{(س)}-5\text{س}\right)=3\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\,\text{ق}^2\text{(س)}-\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\,5\text{س}$

$=3\left(\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}\right)^2-5\times2$

$3(4)^2-10=48-10=38$

مثال④: إذا علمت أن $\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}}\left(4\text{س}\,\text{ق(س)}+3\right)=11$ فجد $\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}}\left(\text{ق}^4\text{(س)}+\frac{7}{\text{ق(س)}}\right)$.

$\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}}\left(4\text{س}\,\text{ق(س)}+3\right)=\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}}\,4\text{س}\times\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}+3=11$

$-4\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}=8\rightarrow\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}=-2$

$\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}}\left(\text{ق}^4\text{(س)}+\frac{7}{\text{ق(س)}}\right)=\left(\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}\right)^4+\frac{7}{\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}}$

$=(-2)^4+\frac{7}{-2}$

$16+\frac{-7}{2}=\frac{32-7}{2}=\frac{25}{2}$

مثال⑤: إذا كانت $\underset{\text{س}\to 4}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}=8$ فجد $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\left(6\text{ق}(3\text{س}-2)+5\text{س}^2\right)$

$\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\left(6\text{ق}(3\text{س}-2)+5\text{س}^2\right)$

$=6\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\,\underbrace{\text{ق}(3\text{س}-2)}_{\text{استبدال}}+\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\,5\text{س}^2$

$\text{ص}=3\text{س}-2$ $\qquad 3\times2-2=6-2=4$

عندما $\text{س}\to2$ فإن $\text{ص}\to4$

$6\underset{\text{ص}\to 4}{\text{نها}}\,\text{ق(ص)}+\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}}\,5\text{س}^2$

$6\times8+5\times4=48+20=68$

مثال⑥: إذا علمت أن $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}}\left(\frac{1}{3}\text{ق(س)}-4\right)=1$

نجد $\underset{\text{س}\to 9}{\text{نها}}\left(\text{ق}(\sqrt{\text{س}})+2\text{س}-1\right)$

$\underset{\text{س}\to 9}{\text{نها}}\,\text{ق}(\sqrt{\text{س}})+\underset{\text{س}\to 9}{\text{نها}}(2\text{س}-1)$

$\text{ص}=\sqrt{\text{س}}$

عندما $\text{س}\to9$ فإن $\text{ص}\to3$

$\underset{\text{ص}\to 3}{\text{نها}}\,\text{ق(ص)}+\underset{\text{س}\to 9}{\text{نها}}(2\text{س}-1)$

$15+(2\times9-1)$

$15+17$

32

$\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}}\left(\frac{1}{3}\text{ق(س)}-4\right)=1$

$\frac{1}{3}\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}=1+4$

$\frac{1}{3}\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}=5$

$\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}=15$

مثال⑦: إذا كانت $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}}\,\text{ق}(2\text{س}-4)=5$ فجد $\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}}\left(\text{ق}^2\text{(س)}+\frac{10}{\text{ق(س)}}\right)$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}}\,\text{ق}(2\text{س}-4)=5$

$\text{ص}=2\text{س}-4$ عندما $\text{س}\to1$ ، فإن $\text{ص}\to-2$

$\therefore\underset{\text{ص}\to -2}{\text{نها}}\,\text{ق(ص)}=5$

$\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}}\left(\text{ق}^2\text{(س)}+\frac{10}{\text{ق(س)}}\right)=\left(\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}\right)^2+\frac{10}{\underset{\text{س}\to -2}{\text{نها}}\,\text{ق(س)}}$

$=(5)^2+\frac{10}{5}$

$=25+2$

27

مثال ⑤: إذا علمت أن نها (س←١) ٢ق(س² - ١) = ٦ جد نها (س←٠) (٤ق(س) - ٧).

نها (س←١) ٢ق(س² - ١) = ٢ نها (س←١) ق(س² - ١) = ٦

∴ نها (س←١) ق(س² - ١) = ٣

ص = س² - ١ عندما س←١ فإن ص←٠.

∴ نها (ص←٠) ق(ص) = ٣

نها (س←٠) (٤ق(س) - ٧) = ٤ نها (س←٠) ق(س) - ٧

= ٤ × ٣ - ٧ = ٥

نهاية الاقترانات المتشعبة:

[١] نهاية الاقتران المتشعب الصريح:

لإيجاد النهاية عند نقطة التشعب "التحول" نجد النهاية عن يمين النقطة ويسارها وإذا تساوتا نقول أن النهاية موجودة وإذا لم تتساويا فإن النهاية غير موجودة.

مثال ①: إذا كان ق(س) = { ٢س² - ١ ، س ≥ ١
{ ٥س - ٤ ، س < ١

اوجد ⓐ نها (س←١) ق(س)

نها (س←١+) ق(س) = نها (س←١+) (٢س² - ١) = ٢(١)² - ١ = ١

نها (س←١-) ق(س) = نها (س←١-) (٥س - ٤) = ٥ × ١ - ٤ = ١

∴ نها (س←١+) ق(س) = نها (س←١-) ق(س) = ١

∴ نها (س←١) ق(س) = ١ موجودة

ⓑ نها (س←٣) ق(س) = نها (س←٣) (٢س² - ١) = ٢(٣)² - ١ = ١٧

ⓒ نها (س←٠) ق(س) = نها (س←٠) (٥س - ٤) = ٥ × ٠ - ٤ = -٤

مثال ②: إذا كان ق(س) = { س³ + ٤ ، س < -٢
{ ٢س + ١ ، س = -٢
{ ٣س + ١ ، س > -٢

اوجد كل من مايلي:

① نها (س←-٢) ق(س)

نها (س←-٢+) ق(س) = نها (س←-٢+) (٣س + ١) = ٣ × -٢ + ١ = -٥

نها (س←-٢-) ق(س) = نها (س←-٢-) (س³ + ٤) = (-٢)³ + ٤ = -٤

∴ نها (س←-٢+) ق(س) ≠ نها (س←-٢-) ق(س)

∴ نها (س←-٢) ق(س) غير موجودة.

② نها (س←-٣) ق(س) = نها (س←-٣) (س³ + ٤) = (-٣)³ + ٤ = -٢٧ + ٤ = -٢٣

③ نها (س←٠) ق(س) = نها (س←٠) (٣س + ١) = ٣ × ٠ + ١ = ١

مثال ③: إذا كان ق(س) = { ٣س² - ٤ ، ٠ ≤ س < ٢
{ ٢س - ١ ، ٢ ≤ س ≤ ٥

جد:

① نها (س←٢) ق(س)

نها (س←٢+) ق(س) = نها (س←٢+) (٢س - ١) = ٢ × ٢ - ١ = ٣

نها (س←٢-) ق(س) = نها (س←٢-) (٣س² - ٤) = ٣(٢)² - ٤ = ٨

نها (س←٢+) ق(س) ≠ نها (س←٢-) ق(س)

∴ نها (س←٢) ق(س) غير موجودة

② نها (س←٣) ق(س) = نها (س←٣) (٢س - ١) = ٢ × ٣ - ١ = ٥

③ نها (س←٠) ق(س) = غير موجودة (لأنه طرف فترة)

④ نها (س←٠+) ق(س) = نها (س←٠+) (٣س² - ٤) = ٣(٠)² - ٤ = -٤

⑤ نها (س←٥-) ق(س) = نها (س←٥) (٢س - ١) = ٢ × ٥ - ١ = ٩

⑥ نها (س←١) ق(س) = نها (س←١) (٣س² - ٤) = ٣(١)² - ٤ = -١

مثال④: إذا كان ق(س) = { $٢س^٢ - ١١$ ، س ≠ ٣ ؛ ٤س - ٣ ، س = ٣ }

اوجد ① $نها_{س \to ٣}$ ق(س) = $نها_{س \to ٣} (٢س^٢ - ١١) = ٢(٣)^٢ - ١١ = ٧$

② $نها_{س \to ١}$ ق(س) = $نها_{س \to ١} (٢س^٢ - ١١) = (٢(١)^٢ - ١١) = -٩$

٢ نهاية اقترانات القيمة المطلقة :

القيمة المطلقة: تُبعد النقطة التي تمثل العدد الحقيقي عن نقطة الاصل على خط الاعداد ويرمز لها | |

|٥| = ٥ ، |-٣| = ٣ ، |٠| = ٠ ، |-٤| = ٤

إعادة تعريف القيمة المطلقة:

① إيجاد أصفار الاقتران وذلك لمساواة ما داخل القيمة المطلقة بالصفر

② نحدد أصفار الاقتران على خط الاعداد

③ اختبار الاشارة وكتابة القواعد وذلك

اشارة موجب يبقى الاقتران كما هو والسالب نقوم بضرب الاقتران بسالب واحد.

مثال⑤: إذا كان ق(س) = |س - ٢| ، جد $نها_{س \to ٢}$ |س - ٢|.

نعيد التعريف: س - ٢ = صفر ⟸ س = ٢

-(س - ٢) - - - ٢ + + + س - ٢

ق(س) = |س - ٢| = { س - ٢ ، س > ٢ ؛ ٢ - س ، س ≤ ٢ } نضع المساواة على أي فترة

∴ $نها_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $نها_{س \to ٢}$ (س - ٢) = ٢ - ٢ = صفر

$نها_{س \to ٢^-}$ ق(س) = $نها_{س \to ٢^-}$ (٢ - س) = ٢ - ٢ = صفر

∴ $نها_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $نها_{س \to ٢^-}$ ق(س) = صفر

∴ $نها_{س \to ٢}$ ق(س) ≠ صفر

مثال⑥ جد قيمة النهايات في كل مما يلي

① $نها_{س \to ٣} |س^٢ - ٩|$ $س^٢ - ٩$ = صفر ⟸ $س^٢ = ٩$ ، س = ±٣

$س^٢ - ٩$ + + + -٣ $-(س^٢ - ٩)$ - - - ٣ + + + $س^٢ - ٩$

$|س^٢ - ٩|$ = { $س^٢ - ٩$ ، س ≥ ٣ ، س ≤ -٣ ؛ $٩ - س^٢$ ، -٣ < س < ٣ }

$نها_{س \to ٣^+} س^٢ - ٩ = نها_{س \to ٣^-} ٩ - س^٢$ = صفر

$نها_{س \to ٣}$ ق(س) = صفر

② $نها_{س \to ١} |س - س^٢|$ $س - س^٢$ = صفر ؛ س(١ - س) = صفر ؛ س = ٠ ، س = ١

$س^٢ - س$ ٠ $س - س^٢$ ١ $س^٢ - س$

$|س - س^٢|$ = { $س^٢ - س$ ، س ≥ ١ ، س ≤ ٠ ؛ $س - س^٢$ ، ٠ < س < ١ }

$نها_{س \to ١^+} س^٢ - س = نها_{س \to ١^-} س - س^٢$ = صفر

∴ $نها_{س \to ١} |س - س^٢|$ = صفر

③: $نها_{س \to ٢} \frac{|س - ٣| - ١}{س - ٢}$ = $\frac{٠}{٠}$

|س - ٣| = { س - ٣ ، س > ٣ ؛ ٣ - س ، س < ٣ }

$نها_{س \to ٢} \frac{٣ - س - ١}{س - ٢} = نها_{س \to ٢} \frac{٢ - س}{س - ٢} = -١$

④ $نها_{س \to -٢} \frac{\sqrt{س^٢ + ٤س + ٤}}{س + ٢} = نها_{س \to -٢} \frac{\sqrt{(س + ٢)^٢}}{س + ٢} = نها_{س \to -٢} \frac{|س + ٢|}{س + ٢}$

|س + ٢| = { س + ٢ ، س > -٢ ؛ -س - ٢ ، س < -٢ }

$نها_{س \to -٢^+} \frac{س + ٢}{س + ٢} \neq نها_{س \to -٢^-} \frac{-س - ٢}{س + ٢}$

١ ≠ -١ النهاية غير موجودة.

خصائص القيمة المطلقة

١) |س| = أ ⟸ س = أ ، -أ

٢) |س| < أ ⟸ -أ < س < أ

٣) |س| > أ ⟸ س > أ ، س < -أ

٤) $\sqrt{س^٢}$ = |س|

③ نهاية اقتران أكبر عدد صحيح

تذكير :- $[٣] = ٣$ ، $[-٥] = -٥$

$[٦,٩] = ٦$ ، $[-٦,٩] = -٧$

$[٠,٨] = ٠$ ، $[-٠,٥] = -١$

إعادة تعريف الأكبر عدد صحيح $[م س + ب]$:

① نجد طول الدرجة $ل = \frac{١}{|معامل\ س|} = \frac{١}{|م|}$

② نجد أصفار الاقتران وتحديد الأصفار على خط الأعداد

③ نزيد أو نطرح طول درجة حسب الفترة المطلوبة.

④ عندما يكون معامل س موجب تكون المساواة للطرف الأول، عندما يكون معامل س سالب تكون المساواة للطرف الثاني.

مثال①: اعد تعريف الاقترانات الآتية.

① $ع(س) = [س + ١]$ ، $س \in [١ ، ٤]$

$س + ١ = صفر \Leftarrow س = -١$

$ل = \frac{١}{|١|} = ١$

$-١ \quad ٠ \quad ١ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤ \quad ٥$

$$ع(س) = \begin{cases} ٢ ، & ١ \le س < ٢ \\ ٣ ، & ٢ \le س < ٣ \\ ٤ ، & ٣ \le س < ٤ \\ ٥ ، & س = ٤ \end{cases}$$

معامل س موجب المساواة عند بداية الفترة

② $هـ(س) = [٢س - ٦]$

$٢س - ٦ = صفر \Leftarrow س = ٣$

$ل = \frac{١}{|٢|} = \frac{١}{٢}$

$١,٥ \quad ٢ \quad ٢,٥ \quad ٣ \quad ٣,٥ \quad ٤ \quad ٤,٥$

∴ المساواة عند بداية الفترة لأن معامل س موجب قيم الاقتران تتزايد

$$هـ(س) = \begin{cases} -٣ ، & ١,٥ \le س < ٢ \\ -٢ ، & ٢ \le س < ٢,٥ \\ -١ ، & ٢,٥ \le س < ٣ \\ ٠ ، & ٣ \le س < ٣,٥ \\ ١ ، & ٣,٥ \le س < ٤ \\ \vdots \end{cases}$$

③ $ع(س) = [٢ - س]$ ، $س \in [٠ ، ٣]$

$٢ - س = صفر \leftarrow س = ٢$ ، $ل = \frac{١}{|-١|} = ١$

$٠ \quad ١ \quad ٢ \quad ٣$

$$ع(س) = \begin{cases} ٢ ، & س = ٠ \\ ١ ، & ٠ < س \le ١ \\ ٠ ، & ١ < س \le ٢ \\ -١ ، & ٢ < س \le ٣ \end{cases}$$

المساواة على يسار فترة لأن معامل س سالب

④ $ل(س) = [٥ - س]$ ، $س \in [١ ، ٥]$

$٥ - س = صفر \leftarrow س = ٥$ ، $ل = \frac{١}{|-١|} = ١$

$١ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤ \quad ٥$

$$ل(س) = \begin{cases} ٤ ، & س = ١ \\ ٣ ، & ١ < س \le ٢ \\ ٢ ، & ٢ < س \le ٣ \\ ١ ، & ٣ < س \le ٤ \\ ٠ ، & ٤ < س \le ٥ \end{cases}$$

معامل س سالب لذلك المساواة على يسار الفترة وقيم الاقتران تتناقص

ملاحظة :- لإيجاد نهاية اقتران ع(س) = [ ] عند نقطة فإن:

① إذا كان اقتران [ ] غير مرتبط بالاقتران آخر فإن ناتج التعويض المباشر (الداخلي) عدد صحيح فإن النهاية غير موجودة وذلك لأنه نهاية عند اليمين ≠ نهاية من اليسار وإذا كان ناتج تعويض المباشر (داخلي) عدد غير صحيح فإن نهاية موجودة.

② إذا كان اقتران [ ] مرتبط بالاقتران آخر فهنا لا بد من اعادة تعريف ليكون لدينا اقتران متشعب نجد نهاية عند النقطة المطلوبة.

مثال ①: اوجد نها (س ← ٠,٣) [٢س + ٤] = [(٠,٦ + ٤)] = [٤,٦] = ٤

لان ناتج تعويض عدد غير صحيح

مثال ②: نها (س ← ٠,١) [٦ - ٣س] = [٦ - ٠,٣] = [٥,٧] = ٥

مثال ③: نها (س ← ٠,٢) [٦س + ٠,٨] = [١,٢ + ٠,٨] = [٢] = غير موجودة

لان ناتج تعويض عدد صحيح .

مثال ④: نها (س ← ١) [½س - ٨] = [½ - ٨] = [-٧,٥] = -٨

مثال ⑤: نها (س ← ٢,٥) [س] = [٢,٥] = ٢ ، ٤

مثال ⑥: نها (س ← ٤,٨) [س - ١] = [٤,٨ - ١] = ٣ ، ٩

مثال ⑦: جد قيمة نها (س ← ٠) ٢س [س] .

لابد من إعادة تعريف [س] . س = ٠

[س] = { -١ ، -١ ≤ س < ٠
         ٠ ، ٠ ≤ س < ١

ق(س) = ٢س [س] = { -١ × ٢س ، -١ ≤ س < ٠
                   ٠ × ٢س ، ٠ ≤ س < ١

ق(س) = { -٢س ، -١ ≤ س < ٠
          صفر ، ٠ ≤ س < ١

نها (س ← ٠⁺) ق(س) = نها (س ← ٠⁺) صفر = صفر

نها (س ← ٠⁻) ق(س) = نها (س ← ٠⁻) -٢س = -٢ × ٠ = صفر

∴ نها (س ← ٠⁺) ق(س) = نها (س ← ٠⁻) ق(س) = صفر

∴ نها (س ← ٠) ق(س) = صفر موجودة .

مثال ⑧: إذا كان ق(س) = ٢س² - [س + ١] اوجد:

Ⓐ نها (س ← ½) ق(س)

Ⓑ نها (س ← ٢) ق(س)

لابد من إعادة تعريف

[س + ١] = { ١ ، ٠ ≤ س < ١
            ٢ ، ١ ≤ س < ٢
            ٣ ، ٢ ≤ س < ٣

ق(س) = { ٢س² - ١ ، ٠ ≤ س < ١
          ٢س² - ٢ ، ١ ≤ س < ٢
          ٢س² - ٣ ، ٢ ≤ س < ٣

Ⓐ نها (س ← ½) ق(س) = نها (س ← ½) (٢س² - ١) = ٢ × ¼ - ١ = -½

Ⓑ نها (س ← ٢) ق(س) ← نها (س ← ٢⁺) ق(س) = نها (س ← ٢⁺) (٢س² - ٣) = ٢ × ٤ - ٣ = ٥
← نها (س ← ٢⁻) ق(س) = نها (س ← ٢⁻) (٢س² - ٢) = ٢ × ٤ - ٢ = ٦

∴ نها (س ← ٢) ق(س) غير موجودة

مثال ⑨: ليكن ق(س) = [س + ٨] - [س + ٣] اوجد نها (س ← ٤) ق(س) .

ق(س) = [س + ٨] - [س + ٣]

= [س] + ٨ - [س] - ٣

ق(س) = ٥

نها (س ← ٤) ق(س) = نها (س ← ٤) ٥ = ٥ .

لا يمكن استخدام نها (س ← ٤) ([س + ٨] - [س + ٣]) = نها (س ← ٤) [س + ٨] - نها (س ← ٤) [س + ٣] لانه شرط استخدام نظرية اي نهاية موجودة للاقترانين .

يمكن حل المثال بإعادة تعريف الاقترانين .

مثال ⑩: اوجد قيمة نها (س ← ١,٦) [٤ - س] / ٢

اعادة تعريف [٤ - س] ، تعويض مباشر

نها (س ← ١,٦) [٤ - ١,٦] / ٢ = نها (س ← ١,٦) [٢,٤] / ٢ = نها (س ← ١,٦) ٢/٢ =

نها (س ← ١,٦) ١ = ١

مثال ⑪: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} |س+٢| ، & ٣ \le س < ٥ \\ [س-١] ، & ٥ \le س < ٧ \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to ٥} ق(س)$.

إعادة تعريف:

$ق(س) = \begin{cases} س+٢ ، & ٣ \le س < ٥ \\ ٤ ، & ٥ \le س < ٦ \\ ٥ ، & ٦ \le س < ٧ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٥^+} ق(س) = \lim_{س \to ٥^+} ٤ = ٤$

$\lim_{س \to ٥^-} ق(س) = \lim_{س \to ٥^-} س+٢ = ٧$

$\lim_{س \to ٥} ق(س)$ غير موجودة.

إيجاد المجاهيل في النهايات:

في الاقترانات المتشعبة التي يوجد فيها مجاهيل وذكر في سؤال أن النهاية موجودة فإن نهاية من اليمين = نهاية من اليسار.

مثال ①: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س - أ ، & س \ge ٢ \\ س^٢ + ٥ ، & س < ٢ \end{cases}$

جد قيمة الثابت أ بحيث أن $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} ق(س)$

$\lim_{س \to ٢^+} (س - أ) = \lim_{س \to ٢^-} (س^٢ + ٥)$

$٢ - أ = ٤ + ٥$

$٢ - أ = ٩ \Leftarrow -أ = ٧ \Leftarrow \boxed{أ = -٧}$

مثال ②: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٣ + ٤أ ، & س < -١ \\ ٥س ، & س = -١ \\ أس^٢ + ٨ ، & س > -١ \end{cases}$

أوجد قيمة أ التي تجعل $\lim_{س \to -١} ق(س)$ موجودة.

$\lim_{س \to -١^+} ق(س) = \lim_{س \to -١^-} ق(س)$

$\lim_{س \to -١^+} (أس^٢ + ٨) = \lim_{س \to -١^-} (س^٣ + ٤أ)$

$أ + ٨ = -١ + ٤أ$

$٨ + ١ = ٤أ - أ \leftarrow ٣أ = ٩ \leftarrow \boxed{أ = ٣}$

مثال ③: إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{|س| + أ}{٤س} = ٣$ جد قيمة أ ؟؟

$\frac{|٢| + أ}{٤ \times ٢} = ٣ \leftarrow أ + ٢ = ٣ \times ٨$

$أ + ٢ = ٢٤$

$\boxed{أ = ٢٢}$

تذكير: $[ق(س)] = أ$

$أ \le ق(س) < أ + ١$

① $[س] = ٣$: $٣ \le س < ٤$ ، $س \in [٣، ٤)$

② $[٣س + ١] = ٤$: $٤ \le ٣س + ١ < ٥$

$٣ \le ٣س < ٤$

$١ \le س < \frac{٤}{٣}$ ، $س \in [١، \frac{٤}{٣})$

③ إذا كان $أ \in ص$

فإن $[أ]^- = أ - ١$ ، $[أ]^+ = أ$

④ إذا كان $أ \notin ص$

$[أ]^+ = [أ]^- = أ$

مثال ④: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} [س+٢] ، & س \ge أ \\ ٧ - [س] ، & س < أ \end{cases}$

أوجد قيمة أ التي تجعل $\lim_{س \to أ} ق(س)$ موجودة.

$\lim_{س \to أ^+} ق(س) = \lim_{س \to أ^-} ق(س)$

$\lim_{س \to أ^+} [س + ٢] = \lim_{س \to أ^-} ٧ - [س]$

$[أ + ٢]^+ = ٧ - [أ]^-$

$[أ]^+ + ٢ = ٧ - [أ]^-$

هنا يوجد حالتين

① أ ∈ ص : [أ]$^+$ + ٢ = ٧ − [أ]$^-$

أ + ٢ = ٧ − أ + ١

أ + أ = ٨ − ٢

٢أ = ٦ ← $\boxed{أ = ٣}$

② أ ∉ ص : [أ]$^+$ + ٢ = ٧ − [أ]$^-$

[أ] + ٢ = ٧ − [أ]

[أ] + [أ] = ٧ − ٢

٢[أ] = ٥ ← [أ] = $\frac{٥}{٢}$

لا يوجد لها حل

مثال ⑨: إذا كان ق(س) = { أس + س^٢ ، ٠ ≤ س ≤ ٢
{ [س] + ٦ ، ٢ < س ≤ ٥

أوجد قيمة الثابت أ التي تجعل نها ق(س) (س ← ٢) موجودة

نها ق(س) (س ← ٢$^+$) = نها ق(س) (س ← ٢$^-$)

نها ([س] + ٦) (س ← ٢$^+$) = نها (أس + س^٢) (س ← ٢$^-$)

[٢] + ٦ = ٢أ + ٤

٢ + ٦ = ٢أ + ٤

٨ − ٤ = ٢أ ← ٤أ = ٢ ← $\boxed{أ = ٢}$

مثال ⑩: إذا كان ق(س) = { [س − ٢] ، س ≥ أ
{ ٦ − [س] ، س < أ

جد قيمة الثابت أ التي تجعل نها ق(س) (س ← أ) موجودة .

نها ق(س) (س ← أ$^+$) = نها ق(س) (س ← أ$^-$)

نها [س + ٢] (س ← أ$^+$) = نها ٦ − [س] (س ← أ$^-$)

[أ − ٢]$^+$ = ٦ − [أ]$^-$

① أ ∈ ص

[أ]$^+$ − ٢ = ٦ − [أ]$^-$

أ − ٢ = ٦ − أ + ١

أ + أ = ٧ + ٢

٢أ = ٩ ← $\boxed{أ = \frac{٩}{٢}}$

② أ ∉ ص

[أ]$^+$ + ٢ = ٦ − [أ]$^-$

[أ] + ٢ = ٦ − [أ]

[أ] + [أ] = ٦ + ٢

٢[أ] = ٨

[أ] = ٤

٤ ≤ أ < ٥

أ ∈ [٤ ، ٥)

الدرس الثالث: نهاية الاقترانات الكسرية

الاقتران الكسري: هو اقتران على صورة $\frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$

عند إيجاد نهاية الاقتران النسبي (الكسري) نقوم بعملية التعويض المباشر ويكون لدينا أربع حالات:

[1] $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ نهاية موجودة.

مثال: جد قيمة كل مما يلي:

① $\text{نها}_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^٢+٣}{\text{س}-٥} = \frac{(٢)^٢+٣}{٢-٥} = \frac{٧}{-٣}$ ، $-\frac{٧}{٣}$ موجودة

② $\text{نها}_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^٢+٢\text{س}-١}{\text{س}+٤} = \frac{٩+٦-١}{٣+٤} = \frac{١٤}{٧}$ ، ٢ موجودة

[2] $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}} = \text{صفر}$ نهاية موجودة.

مثال: جد قيمة كل مما يلي:

① $\text{نها}_{\text{س}\to ٤} \frac{\text{س}^٢-١٦}{\text{س}+٨} = \frac{١٦-١٦}{٨+٤}$ ، $\frac{\text{صفر}}{١٢} = \text{صفر}$ موجودة

② $\text{نها}_{\text{س}\to -٥} \frac{\text{س}+٥}{\text{س}^٢-١٠} = \frac{-٥+٥}{(-٥)^٢-١٠} = \frac{\text{صفر}}{١٥} = \text{صفر}$ موجودة

[3] $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ نهاية غير موجودة.

مثال: جد قيمة كل مما يلي:

① $\text{نها}_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^٢-٢}{\text{س}-٣} = \frac{٩-٢}{٣-٣}$ ، $\frac{٧}{\text{صفر}}$ ، غير موجودة

② $\text{نها}_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^٢+١}{٢\text{س}-٦} = \frac{٩+١}{٢\times٣-٦}$ ، $\frac{١٠}{\text{صفر}}$ = غير موجودة

[4] $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معرفة في هذه الحالة

نقوم بمعالجة صفر المقام بإحدى الطرق الآتية:

① الاختصار ② تحليل إلى عوامل

③ توحيد مقامات ④ ضرب بالمرافق (تربيعي، تكعيبي)

⑤ استبدال ⑥ إضافة وطرح

---

① الاختصار: يكون ناتج تعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ويحوي البسط والمقام على مقدارين متشابهين أو معاكسين بالإشارة مثل: $\frac{\text{س}-\text{أ}}{\text{أ}-\text{س}}$ ، $\frac{\text{س}-\text{أ}}{\text{س}-\text{أ}}$ ، $\frac{\text{س}-\text{أ}}{\text{س}+\text{أ}}$

مثال: جد قيمة كل مما يلي:

① $\text{نها}_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}-٢}{\text{س}-٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ،

$\text{نها}_{\text{س}\to ٢} \frac{\cancel{\text{س}-٢}}{\cancel{\text{س}-٢}} = \text{نها}_{\text{س}\to ٢} ١$ ، ١

② $\text{نها}_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^٣-٢٧}{٢٧-\text{س}^٣} = \frac{٠}{٠} \leftarrow \text{نها}_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^٣-٢٧}{-(\text{س}^٣-٢٧)} = \text{نها}_{\text{س}\to ٣} -١$ ، -١

③ $\text{نها}_{\text{س}\to -٢} \frac{٤-\text{س}^٢}{\text{س}^٢-٤} = \frac{٠}{٠} \leftarrow \text{نها}_{\text{س}\to -٢} \frac{-(\text{س}^٢-٤)}{\text{س}^٢-٤} = \text{نها}_{\text{س}\to -٢} -١$ ، -١

② تحليل إلى عوامل

تذكير:

* فرق بين مربعين $(\text{س}^٢-\text{أ}^٢) = (\text{س}-\text{أ})(\text{س}+\text{أ})$
* فرق بين مكعبين $(\text{س}^٣-\text{أ}^٣) = (\text{س}-\text{أ})(\text{س}^٢+\text{أ}\text{س}+\text{أ}^٢)$
* مجموع بين مكعبين $(\text{س}^٣+\text{أ}^٣) = (\text{س}+\text{أ})(\text{س}^٢-\text{أ}\text{س}+\text{أ}^٢)$

ملاحظة: ① نستخدم تحليل في أغلب الأحيان إذا كان ناتج تعويض $\frac{٠}{٠}$ وكان $\frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$.

② عندما تكون نهاية تقترب من العدد أ

س ← أ فيجب حذف من بسط ومقام (س − أ)

س ← −أ فيجب حذف من بسط ومقام (س + أ)

مثال: جد قيمة كل مما يلي:

① $\text{نها}_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^٢-١}{\text{س}-١} = \frac{٠}{٠} \leftarrow \text{نها}_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^٢-١}{\text{س}-١} = \text{نها}_{\text{س}\to ١} \frac{(\text{س}-١)(\text{س}+١)}{(\text{س}-١)}$

$\text{نها}_{\text{س}\to ١} \text{س}+١ = ١+١ = ٢$

② $\text{نها}_{\text{س}\to -٩} \frac{\text{س}^٢-٨١}{\text{س}+٩} = \frac{٠}{٠} \leftarrow \text{نها}_{\text{س}\to -٩} \frac{(\text{س}-٩)(\text{س}+٩)}{\text{س}+٩}$

$\text{نها}_{\text{س}\to -٩} \text{س}-٩ = -٩-٩$ ، -١٨

③ $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦} = \div$

$\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦} = \underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - ٢)\cancel{(\text{س} + ٢)}}{(\text{س} + ٣)\cancel{(\text{س} + ٢)}}$

$\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٣} = \frac{-٤}{١} = -٤$

④ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س}^٣ - ١} = \div$

$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س} - ١)}(\text{س} + ١)}{\cancel{(\text{س} - ١)}(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)} = \underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^٢ + \text{س} + ١} = \frac{٢}{٣}$

⑤ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٣ + ١}{\text{س}^٢ + \text{س}} = \div$

$= \underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س} + ١)}(\text{س}^٢ - \text{س} + ١)}{\text{س}\cancel{(\text{س} + ١)}} = \underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٢ - \text{س} + ١}{\text{س}} = \frac{٣}{-١} = -٣$

⑥ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢}{\text{س}^٣ - ٨} = \div$

$= \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}^٢\cancel{(\text{س} - ٢)}}{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤)} = \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}^٢}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$

⑦ $\underset{\text{س} \to \frac{٩}{٢}}{\text{نها}} \frac{(٢\text{س} - ٥)^٢ - ١٦}{٢\text{س} - ٩} = \div$

$\underset{\text{س} \to \frac{٩}{٢}}{\text{نها}} \frac{(٢\text{س} - ٥ + ٤)(٢\text{س} - ٥ - ٤)}{٢\text{س} - ٩} = \underset{\text{س} \to \frac{٩}{٢}}{\text{نها}} \frac{(٢\text{س} - ١)\cancel{(٢\text{س} - ٩)}}{\cancel{٢\text{س} - ٩}}$

$= \underset{\text{س} \to \frac{٩}{٢}}{\text{نها}} ٢\text{س} - ١ = ٨$

⑧ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - ١)^٢ - ٤}{\text{س}^٤ - ٨١} = \div$

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - ١ - ٢)(\text{س} - ١ + ٢)}{(\text{س}^٢ - ٩)(\text{س}^٢ + ٩)} = \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س} + ١)}{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س} + ٣)(\text{س}^٢ + ٩)}$

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س} + ١}{(\text{س} + ٣)(\text{س}^٢ + ٩)} = \frac{٤}{١٨ \times ٦} = \frac{٤}{١٠٨}$

$= \frac{١}{٢٧}$

⑨ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + ١)^٣ - ٨}{\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٤} = \div$

$= \underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + ١ - ٢)\left((\text{س} + ١)^٢ + ٢(\text{س} + ١) + ٤\right)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٤)}$

$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{س} - ١)}\left((\text{س} + ١)^٢ + ٢(\text{س} + ١) + ٤\right)}{\cancel{(\text{س} - ١)}(\text{س} + ٤)}$

$= \underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + ١)^٢ + ٢(\text{س} + ١) + ٤}{\text{س} + ٤} = \frac{٤ + ٤ + ٤}{٥} = \frac{١٢}{٥}$

⑩ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^٢ - ٣)^٢ - ١}{(\text{س}^٣ - ٧)^٢ - ١} = \div$

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^٢ - ٣ + ١)(\text{س}^٢ - ٣ - ١)}{(\text{س}^٣ - ٧ - ١)(\text{س}^٣ - ٧ + ١)} = \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^٢ - ٢)(\text{س}^٢ - ٤)}{(\text{س}^٣ - ٨)(\text{س}^٣ - ٦)}$

$= \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^٢ - ٢)\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س} + ٢)}{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤)(\text{س}^٣ - ٦)} =$

$= \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^٢ - ٢)(\text{س} + ٢)}{(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤)(\text{س}^٣ - ٦)} = \frac{٢ \times ٤}{١٢ \times ٢} = \frac{١}{٣}$

⑪ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \frac{(٢\text{س} + ١)^٣ - ١٢٥}{(٢\text{س}^٢ - ٤)^٢ - ١٦}$

ج : $\frac{٧٥}{١٣}$

⑫ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣}+٢\text{س}^{٢}-٥\text{س}-٦}{\text{س}^{٢}-٣\text{س}+٢} = \dfrac{٠}{٠}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٣)}{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}-١)} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٣}{\text{س}-١}$

$= \dfrac{٤+٨+٣}{١} = ١٥$

	$\text{س}^{٣}$	$\text{س}^{٢}$	س	ثابت
	١	٢	٥-	٦-
$\boxed{٢}$		٢	٨	٦
	١	٤	٣	٠

$\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٣$

⑬ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}-٦\text{س}+٨}{\text{س}^{٣}-\text{س}} = \dfrac{٠}{٠}$

	$\text{س}^{٣}$	$\text{س}^{٢}$	س	ثابت
	١	٣-	٦-	٨
$\boxed{١}$		١	٢-	٨-
	١	٢-	٨-	٠

$\text{س}^{٢}-٢\text{س}-٨$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-١)(\text{س}^{٢}-٢\text{س}-٨)}{\text{س}(\text{س}^{٢}-١)}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}^{٢}-٢\text{س}-٨)}{\text{س}\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}+١)}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}-٢\text{س}-٨}{\text{س}(\text{س}+١)} = \dfrac{-٩}{٢}$

⑭ $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س}^{٣}-\text{س}^{٢}-٨\text{س}-٥}{\text{س}^{٣}+١}$

ج : صفر

⑮ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٦}-٩\text{س}^{٣}+٨}{٣\text{س}^{٣}-١٢\text{س}} = \dfrac{٠}{٠}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}^{٣})^{٢}-٩(\text{س}^{٣})+٨}{٣\text{س}(\text{س}^{٢}-٤)} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}^{٣}-٨)(\text{س}^{٣}-١)}{٣\text{س}(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)(\text{س}^{٣}-١)}{٣\text{س}\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}+٢)} =$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)(\text{س}^{٣}-١)}{٣\text{س}(\text{س}+٢)} = \dfrac{١\times ٤٢}{٤\times ٦} = \dfrac{١}{٢}$

③ توحيد المقامات :

إذا كان ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ واحتوى البسط أو المقام أو كلاهما على كسر.

مثال: جد قيمة كل مما يلي:

① $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\frac{١}{\text{س}}-\frac{١}{٣}}{\text{س}-٣} = \dfrac{٠}{٠}$

$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \left(\dfrac{١}{\text{س}}-\dfrac{١}{٣}\right)\times\left(\dfrac{١}{\text{س}-٣}\right) =$

$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{٣-\text{س}}}{٣\text{س}} \times \dfrac{١}{\cancel{\text{س}-٣}} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{-١}{٣\text{س}} = \dfrac{-١}{٩}$

② $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\frac{٣}{\text{س}+٢}-\frac{٢}{\text{س}}}{\text{س}-٤}$

ج : $\dfrac{١}{٢٤}$

③ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \left(\dfrac{١}{٢}-\dfrac{١}{٢\text{س}}\right)\left(\dfrac{١}{\text{س}^{٣}-١}\right)$

$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س}-٢}{٤\text{س}} \times \dfrac{١}{(\text{س}-١)(\text{س}^{٢}+\text{س}+١)}$

$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{٢\cancel{(\text{س}-١)}}{٤\text{س}} \times \dfrac{١}{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}^{٢}+\text{س}+١)}$

$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{٢}{٤\text{س}} \times \dfrac{١}{\text{س}^{٢}+\text{س}+١}$

$\dfrac{٢}{٤} \times \dfrac{١}{٣} = \dfrac{١}{٦}$

④ $\underset{س \to 3}{\text{نها}} \left(\frac{1}{س+3} - \frac{2}{3س+5}\right)\left(\frac{1}{س^2+س-2}\right)$

ج: $\frac{1}{96}$

⑤ $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{1}{س}\left(\frac{1}{5+س} - \frac{1}{5-س}\right)$

$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{1}{س} \times \frac{5-س-5-س}{(5-س)(5+س)} = \underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{1}{\cancel{س}} \times \frac{-2\cancel{س}}{(5-س)(5+س)}$

$\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{-2}{(5-س)(5+س)} = \frac{-2}{25}$

⑥ $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \left(1 - \frac{2}{س}\right)\left(\frac{3}{س^2-4}\right)$

$\underset{س \to 2}{\text{نها}} \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{س}\right)\left(\frac{3}{س^2-4}\right) = \underset{س \to 2}{\text{نها}} \left(\frac{س-2}{س}\right)\left(\frac{3}{س^2-4}\right)$

$\underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{\cancel{س-2}}{س} \times \frac{3}{(\cancel{س-2})(س+2)} = \underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{3}{س(س+2)} = \frac{3}{2 \times 4}$

$= \frac{3}{8}$

⑦ $\underset{س \to \frac{1}{2}}{\text{نها}} \frac{8س^3 - 1}{س - \frac{1}{2}} = \frac{0}{0}$

$\underset{س \to \frac{1}{2}}{\text{نها}} \frac{8(س^3 - \frac{1}{8})}{س - \frac{1}{2}} = \underset{س \to \frac{1}{2}}{\text{نها}} \frac{8\cancel{(س-\frac{1}{2})}(س^2 + \frac{1}{2}س + \frac{1}{4})}{\cancel{س - \frac{1}{2}}}$

$\underset{س \to \frac{1}{2}}{\text{نها}} 8(س^2 + \frac{1}{2}س + \frac{1}{4}) = 8 \times \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$

حساب النهايات للجذور

أ- الجذور الفردية:

$\underset{س \to أ}{\text{نها}} \sqrt[ن]{ق(س)}$ ، ن فردي ن: ٣، ٥، ٧، ١١ ...

تعويض مباشر وتقبل جميع الاجابات.

ب- الجذور الزوجية:

$\underset{س \to أ}{\text{نها}} \sqrt[ن]{ق(س)}$ ن: زوجي ن: ٢، ٤، ٦، ٨ ...

الاعتماد على ناتج تعويض داخل الجذر

١- اذا كان ناتج تعويض داخل الجذر سالب "نهاية غير موجودة"

٢- اذا كان ناتج تعويض داخل الجذر موجب، فإن نهاية موجودة وتساوي قيمة الجذر.

٣- اذا كان ناتج تعويض داخل الجذر "صفر" ندرس إشارة الاقتران ق(س) حول س = أ.

مثال: جد قيمة كل مما يلي:

① $\underset{س \to 3}{\text{نها}} \sqrt[3]{س^2 - 1} = \sqrt[3]{9-1} = \sqrt[3]{8} = 2$

② $\underset{س \to 4}{\text{نها}} \sqrt[3]{5 - 2س^2} = \sqrt[3]{-27} = -3$

ملاحظة: لا يوجد مانع من وجود السالب داخل الجذر فردي

③ $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \sqrt{س^3 + 1} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$

④ $\underset{س \to 5}{\text{نها}} \sqrt{9 - س^2} = \sqrt{9-25} = \sqrt{-16}$ غير موجودة

⑤ $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \sqrt{س-2} = \sqrt{2-2} = \sqrt{0}$

$- - - - \underset{2}{|} + + + +$

$\underset{س \to 2^+}{\text{نها}} \sqrt{س-2} =$ صفر موجودة

$\underset{س \to 2^-}{\text{نها}} \sqrt{س-2} =$ غير موجودة

$\therefore \underset{س \to 2}{\text{نها}} \sqrt{س-2}$ غير موجودة

⑥ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \sqrt{س^٢ - ١} = \sqrt{١ - ١} = \sqrt{٠}$

+++ ($١-$) −−− (١) +++

$\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نها}} \sqrt{س^٢ - ١} = \sqrt{٠} =$ صفر "موجودة"

$\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نها}} \sqrt{س^٢ - ١}$ غير موجودة

∴ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \sqrt{س^٢ - ١}$ غير موجودة

⑦ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \sqrt{٩س - س^٣} = \sqrt{٢٧ - ٢٧} = \sqrt{٠}$

+++ ($٣-$) −−− (٠) +++ (٣) −−−

$\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نها}} \sqrt{٩س - س^٣} =$ غير موجودة لانه سالب غير معرف داخل الجذر الزوجي

$\underset{س \leftarrow ٣^-}{\text{نها}} \sqrt{٩س - س^٣} = \sqrt{٢٧ - ٢٧} = \sqrt{٠} =$ صفر موجودة

⑧ $\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نها}} \sqrt{س^٢ - ٣س}$

+++ (٠) −−− (٣) +++

∴ $\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نها}} \sqrt{س^٢ - ٣س} = \sqrt{٩ - ٩} = \sqrt{٠} =$ صفر "موجودة".

⑨ $\underset{س \leftarrow ٤^-}{\text{نها}} \sqrt{س - ٤}$

−−− (٤) +++

∴ $\underset{س \leftarrow ٤^-}{\text{نها}} \sqrt{س - ٤}$ غير موجودة

④ الضرب بالمرافق :

أ- الضرب بالمرافق التربيعي.

نستخدمها عندما يكون ناتج تعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

وبالاضافة لوجود الجذر التربيعي.

ويكون المقدار المرافق هو فقط عكس الاشارة الفاصلة بين الحدين .....

مقدار	مرافق	مقدار × مرافق
$\sqrt{س} - أ$	$\sqrt{س} + أ$	$(\sqrt{س} - أ)(\sqrt{س} + أ) = س - أ^٢$
$\sqrt{س} - ٤$	$\sqrt{س} + ٤$	$(\sqrt{س} - ٤)(\sqrt{س} + ٤) = س - ١٦$
$\sqrt{س} + أ$	$\sqrt{س} - أ$	$(\sqrt{س} + أ)(\sqrt{س} - أ) = س - أ^٢$
$\sqrt{س} + ٣$	$\sqrt{س} + ٣$	$(\sqrt{س} + ٣)(\sqrt{س} - ٣) = س - ٩$
$\sqrt{س} - \sqrt{ص}$	$\sqrt{س} + \sqrt{ص}$	$(\sqrt{س} - \sqrt{ص})(\sqrt{س} + \sqrt{ص}) = س - ص$
$\sqrt{س} + \sqrt{ص}$	$\sqrt{س} - \sqrt{ص}$	$(\sqrt{س} + \sqrt{ص})(\sqrt{س} - \sqrt{ص}) = س - ص$
$\sqrt{٢س} - \sqrt{٣س+١}$	$\sqrt{٢س} + \sqrt{٣س+١}$	$٢س - ٣س - ١$

مثال :- جد قيمة كل مما يلي :

① $\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} = \frac{٠}{٠}$

$\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} \times \frac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} + ٣} = \underset{س \leftarrow ٩}{\text{نها}} \frac{\cancel{س - ٩}}{\cancel{(س - ٩)}(\sqrt{س} + ٣)}$

$\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نها}} \frac{١}{\sqrt{س} + ٣} = \frac{١}{٣ + ٣} = \frac{١}{٦}$

② $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{٤ - س}{٢ - \sqrt{س}} = \frac{٠}{٠}$

$\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{٤ - س}{٢ - \sqrt{س}} \times \frac{٢ + \sqrt{س}}{٢ + \sqrt{س}} = \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{\cancel{(٤ - س)}(٢ + \sqrt{س})}{\cancel{٤ - س}}$

$\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}} ٢ + \sqrt{س} = ٢ + ٢ = ٤$

③ $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^3-1}{2-\sqrt{\text{س}^4+3}} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^3-1}{2-\sqrt{\text{س}^4+3}} \times \dfrac{2+\sqrt{\text{س}^4+3}}{2+\sqrt{\text{س}^4+3}}$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}^3-1)(2+\sqrt{\text{س}^4+3})}{4-(\text{س}^4+3)} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}^3-1)(2+\sqrt{\text{س}^4+3})}{4-\text{س}^4-3}$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{(\cancel{\text{س}-1})(\text{س}^2+\text{س}+1)(2+\sqrt{\text{س}^4+3})}{(\text{س}+1)(\cancel{\text{س}-1})}$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{-(\text{س}^2+\text{س}+1)(2+\sqrt{\text{س}^4+3})}{(\text{س}+1)} = \dfrac{-3\times 4}{2} = -6$

④ $\underset{\text{س}\to 4}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{2\text{س}+1}-3}{\text{س}^2-\text{س}-12}$

ج: $\dfrac{1}{21}$

⑤ $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{2-\sqrt{\text{س}+1}}{\text{س}^2-9} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{2-\sqrt{\text{س}+1}}{\text{س}^2-9} \times \dfrac{2+\sqrt{\text{س}+1}}{2+\sqrt{\text{س}+1}} = \underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{4-\text{س}-1}{(\text{س}^2-9)(2+\sqrt{\text{س}+1})}$

$\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{3-\text{س}}}{(\cancel{\text{س}-3})(\text{س}+3)(2+\sqrt{\text{س}+1})}$

$\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{-1}{(\text{س}+3)(2+\sqrt{\text{س}+1})} = \dfrac{-1}{6\times 4} = \dfrac{-1}{24}$

⑥ $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{5\text{س}-1}-\sqrt{\text{س}+3}}{\text{س}^2+3\text{س}-4} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{5\text{س}-1}-\sqrt{\text{س}+3}}{\text{س}^2+3\text{س}-4} \times \dfrac{\sqrt{5\text{س}-1}+\sqrt{\text{س}+3}}{\sqrt{5\text{س}-1}+\sqrt{\text{س}+3}}$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{5\text{س}-1-\text{س}-3}{\text{س}^2+3\text{س}-4} \times \dfrac{1}{2+2}$

$\dfrac{1}{4} \times \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{4\text{س}-4}{(\text{س}-1)(\text{س}+4)} = \dfrac{1}{4} \times \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{4(\cancel{\text{س}-1})}{(\cancel{\text{س}-1})(\text{س}+4)}$

$\dfrac{1}{4} \times \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{4}{\text{س}+4} = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}$

⑦ $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{6-\text{س}}-\sqrt{2\text{س}}}{8-\text{س}^3}$

4

ج: $\dfrac{3}{48}$

⑧ $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2+2\text{س}-15}{\sqrt{\text{س}^3-2}-\sqrt{2\text{س}^2+7}} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2+2\text{س}-15}{\sqrt{\text{س}^3-2}-\sqrt{2\text{س}^2+7}} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}^3-2}+\sqrt{2\text{س}^2+7}}{\sqrt{\text{س}^3-2}+\sqrt{2\text{س}^2+7}}$

$\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2+2\text{س}-15}{\text{س}^3-2-2\text{س}^2-7} \times \text{نها}\left(\sqrt{\text{س}^3-2}+\sqrt{2\text{س}^2+7}\right)$

	س^3	س^2	س	ثابت
	1	−2	0	−9
$\boxed{3}$		3	3	9
	1	1	3	0

$\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-3)(\text{س}+5)(5+5)}{\text{س}^3-2\text{س}^2-9}$

$\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{(\cancel{\text{س}-3})(\text{س}+5)(10)}{(\cancel{\text{س}-3})(\text{س}^2+\text{س}+3)}$

$\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \dfrac{(10)(\text{س}+5)}{\text{س}^2+\text{س}+3} = \dfrac{10\times 8}{9+3+3} = \dfrac{80}{15}$

⑨ $\underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{3-\sqrt{س+8}}{\sqrt{س}-1} = \dfrac{0}{0}$ ← نضرب بالمرافقين التربيعيين

$\underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{3-\sqrt{س+8}}{\sqrt{س}-1} \times \dfrac{3+\sqrt{س+8}}{3+\sqrt{س+8}} \times \dfrac{\sqrt{س}+1}{\sqrt{س}+1}$

$\underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{9-س-8}{س-1} \times \underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س}+1}{3+\sqrt{س+8}}$

$\underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{1-\cancel{س}}{\cancel{س}-1} \times \dfrac{1+1}{3+3}$

$-1 \times \dfrac{2}{6} = \dfrac{-1}{3}$

⑩ $\underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{2-\sqrt{س}}{\sqrt{2س+1}-3} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{2-\sqrt{س}}{\sqrt{2س+1}-3} \times \dfrac{2+\sqrt{س}}{2+\sqrt{س}} \times \dfrac{\sqrt{2س+1}+3}{\sqrt{2س+1}+3}$

$\underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{4-س}{2س+1-9} \times \underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{2س+1}+3}{2+\sqrt{س}}$

$\underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{4-س}}{2(\cancel{س-4})} \times \dfrac{3+3}{2+2} = -1 \times \dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$

⑪ $\underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{2س\sqrt{س}-2}{س^2-1} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{2س\sqrt{س}-2}{س^2-1} \times \dfrac{2س\sqrt{س}+2}{2س\sqrt{س}+2}$

$\underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{4س^2 \times س-4}{س^2-1} \times \underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{1}{2س\sqrt{س}+2}$

$\underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{4س^3-4}{س^2-1} \times \dfrac{1}{2+2}$

$\underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{4}(س^3-1)}{س^2-1} \times \dfrac{1}{\cancel{4}} = \underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{(\cancel{س-1})(س^2+س+1)}{(\cancel{س-1})(س+1)}$

$= \underset{س\to 1}{\text{نها}} \dfrac{س^2+س+1}{س+1} = \dfrac{1+1+1}{1+1} = \dfrac{3}{2}$

⑫ $\underset{س\to 3}{\text{نها}} \dfrac{3\sqrt{2س+3}-9}{س^2-7س+12}$

ج : -١

⑬ $\underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\sqrt{س}+7}-3}{س^3-64} = \dfrac{0}{0}$

$\underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\sqrt{س}+7}-3}{س^3-64} \times \dfrac{\sqrt{\sqrt{س}+7}+3}{\sqrt{\sqrt{س}+7}+3}$

$\underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س}+7-9}{س^3-64} \times \underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{س}+7}+3}$

$\dfrac{1}{6} \times \underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س}-2}{س^3-64} \times \dfrac{\sqrt{س}+2}{\sqrt{س}+2}$

$\dfrac{1}{6} \times \underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{س-4}{س^3-64} \times \underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{1}{\sqrt{س}+2}$

$\dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{4} \times \underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{س-4}}{(\cancel{س-4})(س^2+2س+4)}$

$\dfrac{1}{24} \times \underset{س\to 4}{\text{نها}} \dfrac{1}{س^2+2س+4} = \dfrac{1}{24} \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{288}$

ب- الضرب بالمرافق للجذر التكعيبي:

نستخدمها عندما يكون ناتج تعويض $\frac{٠}{٠}$ بالإضافة إلى وجود الجذر التكعيبي ($\sqrt[٣]{\quad}$).

المقدار	المرافق	ناتج ضربهما
$\sqrt[٣]{\text{س}} - \text{أ}$	$(\sqrt[٣]{\text{س}})^٢ + \text{أ}\sqrt[٣]{\text{س}} + \text{أ}^٢$	$\text{س} - \text{أ}^٣$
$\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢$	$(\sqrt[٣]{\text{س}})^٢ + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤$	$\text{س} - ٨$
$٣ - \sqrt[٣]{\text{س}}$	$٩ + ٣\sqrt[٣]{\text{س}} + (\sqrt[٣]{\text{س}})^٢$	$٢٧ - \text{س}$
$\sqrt[٣]{\text{س}} + \text{أ}$	$(\sqrt[٣]{\text{س}})^٢ - \text{أ}\sqrt[٣]{\text{س}} + \text{أ}^٢$	$\text{س} + \text{أ}^٣$
$\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤$	$(\sqrt[٣]{\text{س}})^٢ - ٤\sqrt[٣]{\text{س}} + ١٦$	$\text{س} + ٦٤$
$٥ + \sqrt[٣]{\text{س}}$	$٢٥ - ٥\sqrt[٣]{\text{س}} + (\sqrt[٣]{\text{س}})^٢$	$١٢٥ + \text{س}$

مثال: جد قيمة كل مما يلي:

① $\text{نها}_{\text{س} \to ١} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}{\text{س}^٢ - ١} = \frac{٠}{٠}$

$\text{نها}_{\text{س} \to ١} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}{\text{س}^٢ - ١} \times \frac{(\sqrt[٣]{\text{س}})^٢ + \sqrt[٣]{\text{س}} + ١}{(\sqrt[٣]{\text{س}})^٢ + \sqrt[٣]{\text{س}} + ١}$

$\text{نها}_{\text{س} \to ١} \frac{\cancel{\text{س} - ١}}{(\cancel{\text{س} - ١})(\text{س} + ١)} \times \text{نها}_{\text{س} \to ١} \frac{١}{(\sqrt[٣]{\text{س}})^٢ + \sqrt[٣]{\text{س}} + ١}$

$\text{نها}_{\text{س} \to ١} \frac{١}{\text{س} + ١} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

② $\text{نها}_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ١٢}{\sqrt[٣]{\text{س}^٣ + ١٩} - ٣} = \frac{٠}{٠}$

$\text{نها}_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ١٢}{\sqrt[٣]{\text{س}^٣ + ١٩} - ٣} \times \frac{(\sqrt[٣]{\text{س}^٣ + ١٩})^٢ + ٣\sqrt[٣]{\text{س}^٣ + ١٩} + ٩}{(\sqrt[٣]{\text{س}^٣ + ١٩})^٢ + ٣\sqrt[٣]{\text{س}^٣ + ١٩} + ٩}$

$\text{نها}_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ١٢}{\text{س}^٣ + ١٩ - ٢٧} \times \text{نها}_{\text{س} \to ٢} [(\sqrt[٣]{\text{س}^٣ + ١٩})^٢ + ٣\sqrt[٣]{\text{س}^٣ + ١٩} + ٩]$

$\text{نها}_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ١٢}{\text{س}^٣ - ٨} \times (٩ + ٩ + ٩)$

$\text{نها}_{\text{س} \to ٢} \frac{(\text{س} + ٦)\cancel{(\text{س} - ٢)}}{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤)} \times ٢٧$

$\text{نها}_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س} + ٦}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤} \times ٢٧$

$= \frac{٨}{٤ + ٤ + ٤} \times ٢٧ =$

③ $\text{نها}_{\text{س} \to ١} \frac{٢\text{س} - ٢}{٣ - \sqrt[٣]{٢٦ + \text{س}}}$

ج: −٥٤

④ $\text{نها}_{\text{س} \to -٧} \frac{\sqrt[٣]{٢\text{س} + ٦} + ٢}{\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ٢١} = \frac{٠}{٠}$

$\text{نها}_{\text{س} \to -٧} \frac{\sqrt[٣]{٢\text{س} + ٦} + ٢}{\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ٢١} \times \frac{(\sqrt[٣]{٢\text{س} + ٦})^٢ - ٢\sqrt[٣]{٢\text{س} + ٦} + ٤}{(\sqrt[٣]{٢\text{س} + ٦})^٢ - ٢\sqrt[٣]{٢\text{س} + ٦} + ٤}$

$\text{نها}_{\text{س} \to -٧} \frac{٢\text{س} + ٦ + ٨}{\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ٢١} \times \text{نها}_{\text{س} \to -٧} \frac{١}{(\sqrt[٣]{٢\text{س} + ٦})^٢ - ٢\sqrt[٣]{٢\text{س} + ٦} + ٤}$

$\text{نها}_{\text{س} \to -٧} \frac{٢\cancel{(\text{س} + ٧)}}{\cancel{(\text{س} + ٧)}(\text{س} - ٣)} \times \frac{١}{٤ + ٤ + ٤}$

$\text{نها}_{\text{س} \to -٧} \frac{٢}{\text{س} - ٣} \times \frac{١}{١٢} = \frac{٢}{-١٠} \times \frac{١}{١٢} = \frac{-١}{٦٠}$

⑤ $\text{نها}_{\text{س} \to -٨} \frac{٢ + \sqrt[٣]{\text{س}}}{\text{س}^٢ - ٦٤}$

ج: $\frac{-١}{١٩٢}$