2.250

إضاءات في الرياضيات

Mathematics

توجيهي الفرع العلمي - المستوى الثالث

مكتبة الوسام
ALWESAM
tawjihi center & service store
النسخة الأصلية

الوحدة الثانية:

2016 -17

التفاضل

شاملة أسئلة الكتاب

إعداد المعلم :

محمد قريع

٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

مكتبة الوسام
ALWESAM
tawjihi center & service store

الدرس الأول : متوسط التغير :-

* اذا تغيرت قيمة المتغير س من س١ الى س٢ فان مقدار هذا التغير في س هو Δس = س٢ - س١

* اذا تغيرت قيمة الاقتران ص = ق(س) من ص١ = ق(س١) الى ص٢ = ق(س٢) فان هذا المقدار يسمى التغير في قيمة الاقتران ويرمز له بالرمز Δص = ص٢ - ص١ .

* متوسط التغير يعرف انه مقدار التغير في قيمة الاقتران ق(س) مقسوماً على مقدار التغير في قيمة س ورمزاً $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$ ، $س_2 = س_1 + \Delta س$

$$= \frac{ق(س_1 + \Delta س) - ق(س_1)}{\Delta س}$$ حيث $\Delta س = س_2 - س_1$

مثال : اذا كان ق(س) = $س^2 - 3س$ فجد ما يلي :

أ) مقدار التغير في الدالة اذا تغيرت س من ١ الى ٣

ب) مقدار التغير في قيمة الاقتران اذا تغيرت س من ٢ بمقدار ٣ وحدات.

ج) معدل متوسط التغير للاقتران اذا تغيرت س من ٢ بمقدار ٣ وحدات.

الحل : أ) $\Delta س = س_2 - س_1 = 3 - 1 = 2$

ب) $س_1 = 2$ ، $س_2 = 5$

ق(١) = $(2)^2 - 3(2) = -2$ ، ق(٥) = $(5)^2 - 3 \times 5 = 10$

$\Delta ص = ق(س_2) - ق(س_1) = 10 - -2 = 12$

ج) متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{12}{3} = 4$ (لاحظ ان متوسط التغير يساوي وحدة)

مثال : اذا كان ق(س) = [س - ٢] فأوجد متوسط التغير عندما تتغير س من (١) بمقدار ٤,٥ وحدات.

الحل : $\Delta س = 4,5$.

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س + \Delta س) - ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(1 + 4,5) - ق(1)}{4,5}$$

$$= \frac{[-1] - [2 - 5,0]}{4,5}$$

$$= \frac{-1 - -3}{4,5} = \frac{4}{4,5}$$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٥ + ٢س & ، -١ \leq س \leq ٣ \\ \sqrt{س + ٥} & ، ٣ < س \leq ٥ \end{cases}$ فجد متوسط التغير للاقتران $هـ(س)$ في الفترة $[١ ، ٤]$ ؟

الحل : $\frac{ص}{س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{هـ(٤) - هـ(١)}{٤ - ١}$

$= \frac{\sqrt{٤ + ٥} - (٥ + ٢ \times ١)}{٣}$

$= \frac{٣ + ٧}{٣} = \frac{١٠}{٣}$

مثال : اذا كان $د(س) = |جا س|$ فجد متوسط التغير في الفترة $[\frac{\pi}{٢} ، \pi]$.

الحل : $\frac{ص}{س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{هـ(\pi) - هـ(\frac{\pi}{٢})}{\pi - \frac{\pi}{٢}}$

$= \frac{|جا \pi| - |جا \frac{\pi}{٢}|}{\frac{\pi}{٢}}$

$= \frac{صفر - ١}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{-١}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{-٢}{\pi}$.

مثال : جد متوسط التغير للاقتران $هـ(س) = س^٢ + ٢س$ عندما تتغير س من (١) الى $(١ + هـ)$

الحل : $\frac{ص}{س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{هـ(١ + هـ) - هـ(١)}{١ + هـ - ١}$

$= \frac{((١ + هـ)^٢ + ٢(١ + هـ)) - ((١)^٢ + ٢(١))}{هـ}$

$= \frac{(١ + ٢هـ + هـ^٢ + ٢ + ٢هـ) - (١ + ٢)}{هـ}$

$= \frac{هـ^٢ + ٤هـ}{هـ} = \frac{هـ(هـ + ٤)}{هـ} = هـ + ٤$

مثال : اذا كان متوسط التغير للاقتران $هـ$ لبيادي ٥ في الفترة $[-٣ ، ٣]$ فجد متوسط التغير للاقتران $د(س) = س^٢ \times هـ(س)$ في الفترة $[-٣ ، ٣]$ ؟

الحل : $\frac{ص}{س} = \frac{د(٣) - د(-٣)}{٣ - -٣} = \frac{(٣)^٢ \times هـ(٣) - (-٣)^٢ \times هـ(-٣)}{٦}$

$= \frac{٩ هـ(٣) - ٩ هـ(-٣)}{٦} = \frac{٩(هـ(٣) - هـ(-٣))}{٦}$

$= ٩ (\frac{هـ(٣) - هـ(-٣)}{٦}) = ٩ \times ٥$

$= ٤٥$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : اذا كان متوسط التغير للاقتران هـ في الفترة [٢، ٥] يساوي ٣ ، وكان الاقتران هـ(س) = ٣س + ٣ هـ(س) فجد متوسط التغير للاقتران هـ في الفترة [٢، ٥] .

الحل : $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_2) - هـ(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{هـ(٥) - هـ(٢)}{٥ - ٢}$

$= \frac{(٣(٥) + ٣هـ(٥)) - (٣(٢) + ٣هـ(٢))}{٥ - ٢}$

$= \frac{١٥ + ٣هـ(٥) - ٦ - ٣هـ(٢)}{٣}$

$= \frac{٩ + ٣(هـ(٥) - هـ(٢))}{٣}$

$= ٣ + \frac{٣(هـ(٥) - هـ(٢))}{٣}$

$= ٣ + ٣(٣) = ٩ + ٣$

$= ١٢$

مثال : اذا كان متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $\frac{أ}{س}$ + ٣ يساوي (١) عندما تتغير س من (١) الى (٣) فجد قيمة أ ؟

الحل : $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١} = \frac{(٣ + \frac{أ}{٣}) - (٣ + \frac{أ}{١})}{٢} = ١$

$= \frac{\frac{أ + ٣}{٣} - أ - ١}{٢} = ١$

$= \frac{أ + ٣}{٣} - أ - ١ = ٢$

$= \frac{أ}{٣} + ١ - أ - ١ = ٢$

$= \frac{-٤أ}{٣} = ٢ \Leftarrow -٤أ = ٦$

$\Leftarrow أ = \frac{-٣}{٢}$

مثال : اذا كان متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $\sqrt{٣س + ١}$ في الفترة [٠، ب] يساوي (١) فجد قيمة ب ؟

الحل : $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(ب) - هـ(٠)}{ب - ٠} = \frac{\sqrt{٣ب + ١} - \sqrt{١ + ٠}}{ب} = ١$

$\Leftarrow \frac{\sqrt{٣ب + ١} - ١}{ب} = ١$

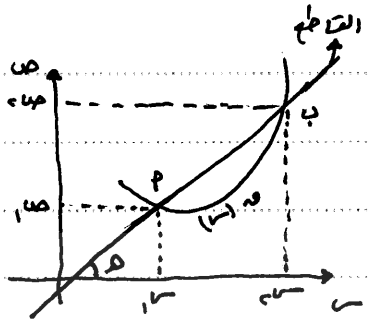
$(\sqrt{٣ب + ١})^2 = (ب + ١)^2$

$٣ب + ١ = ب^2 + ٢ب + ١$

$ب^2 - ب = ٠ \Leftarrow ب(ب - ١) = ٠ \Leftarrow ب = ٠$ مرفوض ، $\boxed{ب = ١}$

مكتبة الوسام ALWESAM للبوربوينت
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info



* التفسير الهندسي لمتوسط التغير :

يمثل الخط المستقيم المار بالنقطتين أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) الواقعتين على منحنى ق(س) قاطعاً .

ميل القاطع = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = ظاه

اي ان ميل القاطع = متوسط التغير = ظاه ، ه هي الزاوية المحصورة بين القاطع ومحور السينات .

مثال : جد ميل القاطع الواصل بين النقطتين (٢ ، ق(٢)) ، (٣ ، ق(٣)) اذا علمت ان ق(س) = $س^٢ - ٣س + ١$

الحل : ميل القاطع = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(٣) - ق(٢)}{٣ - ٢}$

$= \frac{(١ + ٣ \times ٣ - (٣)^٢) - (١ + ٢ \times ٣ - (٢)^٢)}{١}$

$= ١ + ١ = ٢$

مثال : اذا كان القاطع الواصل بين النقطتين (-١ ، ق(-١)) ، (١ ، ق(١١)) يصنع زاوية مقدارها ١٥٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فجد متوسط التغير لـ ق في الفترة [-١ ، ١] ؟

الحل : متوسط التغير لـ ق = ظاه ١٥٠° = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$

* التفسير الفيزيائي لمتوسط التغير :-

- السرعة المتوسطة هي التغير الفيزيائي لمتوسط التغير ويرمز لها بالرمز ($\bar{ع}$)

$\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١} = \frac{ف(١ + ٥) - ف(١)}{٥}$

حيث ف هي المسافة ، ن هو الزمن

مثال : يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $٢ن^٢ + ٣ن$ احسب السرعة المتوسطة في الفترة [٢ ، ٤]

الحل : $\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٤) - ف(٢)}{٤ - ٢} = \frac{(٢(٤)^٢ + ٣(٤)) - (٢(٢)^٢ + ٣(٢))}{٢}$

$= \frac{٣٢ + ١٢ - ١٤}{٢}$

$= ١٥$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ٢٠ن - ن^{٢} احسب ما يلي ؟

أ) مقدار التغير في الإزاحة في الفترة [١ ، ٣]

ب) السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١ ، ٣]

ج) السرعة المتوسطة للجسيم اذا تغيرت ن من صفر الى ٢ بدلالة ن .

الحل : أ) Δف = ف (٣) - ف (١)

= (٢٠ (٣) - (٣)^{٢}) - (٢٠ (١) - (١)^{٢})

= ٥١ - ١٩ = ٣٢ م

ب) ع$^{-}$ = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ = $\frac{٣٢}{٢}$ = ١٦ م/ث

ج) ع$^{-}$ = $\frac{ف(٢+ن) - ف(١)}{٢+ن}$ = $\frac{٢٠(٢+ن) - (٢+ن)^{٢}}{٢+ن}$

= $\frac{(٢+ن)(٢٠ - ٢ - ن)}{٢+ن}$

= ١٨ - ن م/ث .

سؤال : اذا كان هـ (س) = ٢س + ق^{٢} (س) وكان متوسط التغير لـ ق (س) في الفترة [١ ، ٣] يساوي (٣) وكان ق (٣) + ق (١) = -٢ فجد متوسط التغير للاقتران هـ ؟

الحل :

سؤال : اذا كان متوسط التغير للاقتران ق (س) في الفترة [-١ ، ٤] يساوي (-٢) وكان هـ (س) = $\frac{٣}{ق(س)}$ وكان ق (٤) × ق (-١) = -٣ فجد متوسط التغير لـ هـ (س) ؟

الحل :

سؤال : اذا كان منحنى ق (س) يمر بالنقطتين (-١ ، ٤) ، (١ ، ٨) فجد ميل المماس الذي يمر بالنقطتين بينهما .

سؤال : اذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقاط (٠ ، ١) ، (-١ ، ٢) ، (٣ ، ١٠) فأوجد متوسط التغير لـ ق (س) عندما تتغير س من (٠) الى (٣) ؟

سؤال : يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٢} + ٣ن - ٥ فجد السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١ ، ٣] ؟

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

التمارين والمسائل ص ٨٧ :-

س١ ق(س) = ٢س٢ + س - ١ ، م.ت = ٤ ، س١ = س٠ ، س٢ = س١ + ١

الحل : $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{(٢س_2^2 + س_2 - ١) - (٢س_1^2 + س_1 - ١)}{س_2 - س_1} = ٤$

$= \frac{(٢(س_1 + ١)^2 + (س_1 + ١) - ١) - (٢س_1^2 + س_1 - ١)}{س_1 + ١ - س_1} = ٤$

$= \frac{(٢(س_1^2 + ٢س_1 + ١) + س_1 + ١ - ١) - ٢س_1^2 - س_1 + ١}{١} = ٤$

$= \frac{٢س_1^2 + ٤س_1 + ٢ + س_1 - ٢س_1^2 - س_1 + ١}{١} = ٤$

$= ٣ + ٤س_1 = ٤$

$\Leftarrow س_1 = \frac{١}{٤}$

س٢ ق(س) = ٥ - س٢ ، س١ = ٣ ، س٢ = ٣ + هـ

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٣ + هـ) - ق(٣)}{٣ + هـ - ٣} = \frac{(٥ - (٣ + هـ)^2) - (٥ - ٩)}{هـ}$

$= \frac{٥ - ٩ - ٦هـ - هـ^2 + ٤}{هـ}$

$= \frac{هـ^2 + ٦هـ}{هـ} = \frac{هـ(هـ + ٦)}{هـ}$

$= هـ + ٦$

س٣ م(س) = ٢س٢ - ٣س + ٤ ، [١ ، ٣] ، $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = ٣$

الحل : $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{م(٣) - م(١)}{٢} = \frac{(٢٩ - ٩ + ٤) - (٢ - ٣ + ٤)}{٢} = ٣$

$= \frac{٢٨ - ٦}{٢} = ٣$

$= ٢٨ - ٦ = ٦$

$= ٢٨ = ١٢ \Leftarrow ٨ب = ٣ \Leftarrow ب = \frac{٣}{٨}$

س٤ $\Delta س = ٠,١$ ، $\Delta ص = ٠,٨$ ، أ (٣ ، ٥) ، ب (س ، ص)

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص - ٥}{س - ٣} = \frac{٠,٨}{٠,١} \Leftarrow \Delta ص = ٠,٨ \Leftarrow ص - ٥ = ٠,٨ \Leftarrow ص = ٥,٨$

$\Leftarrow \Delta س = س - ٣ = ٠,١ \Leftarrow س = ٣,١$

$\Leftarrow$ ب (س ، ص) = (٣,١ ، ٥,٨)

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

س٥ $\frac{\Delta ص}{\Delta س}_{هـ} = -٤$ ، Δ (س) = ٢ هـ (س) − ٣س٢ ، ح [−١ ، ٣]

الحل : $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\Delta (٣) - \Delta (-١)}{٣ - -١} = -٤$

$= \frac{(٢ هـ (٣) - ٣ (٣)^٢) - (٢ هـ (١) - ٣ (١)^٢)}{٤}$

$= \frac{٢ هـ (٣) - ٢ هـ (١) - ٢٧ + ٣}{٤}$

$= ٢ \left(\frac{هـ (٣) - هـ (١)}{٤} \right) - \frac{٢٤}{٤}$

$= ٢ (-٤) - ٦ = -١٤$

س٦ $س_١ = ٥$ سم ، $\Delta س = ٠,٢$ ث حدد مقدار التغير في مساحتها ؟ هـ (س) = س٢

$\Delta ص = هـ (٥,٢) - هـ (٥)$

$= (٥,٢)^٢ - (٥)^٢$

$= ٢٧,٠٤ - ٢٥ = ٢,٠٤$

س٧ ف (ن) = ٤٠ن − ٥ن٢

أ) $\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{(٤٠ \times ٤ - ٥ (٤)^٢) - (٤٠ (١) - ٥ (١)^٢)}{٤ - ١}$

$= \frac{(١٦٠ - ٨٠) - (٣٥)}{٣}$

$= \frac{٤٥}{٣} = ١٥ \, ٣/٥ \, .$

ب) $ن_١ = هـ ف$ ، $ن_٢ = \Delta ن$

$\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف (\Delta ن - ٠) - ف (٠)}{\Delta ن}$

$= \frac{٤٠ \Delta ن - ٥ (\Delta ن)^٢ - ٠}{\Delta ن}$

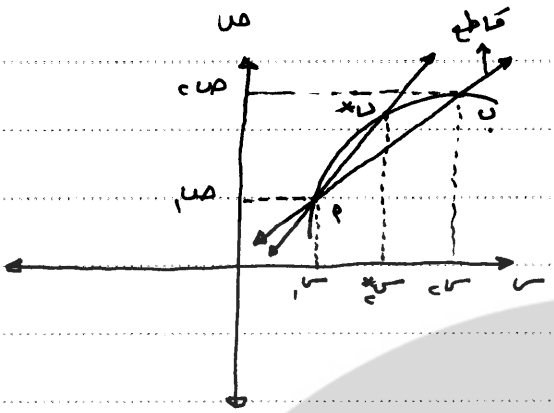
$= \frac{\Delta ن (٤٠ - ٥ \Delta ن)}{\Delta ن}$

$= ٤٠ - ٥ \Delta ن$

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الرياضيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

الدرس الثاني : المشتقة الأولى :-



في الشكل المجاور اذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ قاطعاً للمنحنى $ه$ في النقطتين أ ، ب ، وفرضنا أن النقطة ب تتحرك على المنحنى باتجاه أ فإن $س_٢$ ستقترب تدريجياً من $س_١$ وبالتالي فإن $\Delta س = س_٢ - س_١ \to$ صفر

وأيضاً فإن القاطع يقترب من أن يصبح مماساً للمنحنى $ه$ عند أ عندما تقترب ب من أ

$\Leftarrow$ ميل المماس هو نهاية ميل القاطع أي أن ميل المماس $= \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

ويرمز لهذا المقدار بالرمز $ه'$ أو $\frac{د ص}{د س}$ ويسمى هذا المقدار بالمشتقة الأولى .

مهم جداً المشتقة الأولى = نهاية متوسط التغير .

التعريف العام للمشتقة الأولى : اذا كان $ص = ه(س)$ معرف عند $س_١$ وفي جوارها فإن

$ه'(س) = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{ه(س_١ + \Delta س) - ه(س_١)}{\Delta س}$ بشرط أن تكون النهاية موجودة .

* وبشكل عام فإن $ه'(س) = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{ه(س + \Delta س) - ه(س)}{\Delta س}$ ، $س$ أي نقطة في مجال $ه$.

* واذا استبدلنا $(س + \Delta س)$ بـ $ع$ ، $\Delta س \to ٠ \Leftarrow ع \to س$

$\Leftarrow$ $ه'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$

مهم جداً : حتى يكون الاقتران $ه$ قابلاً للاشتقاق عند $س$ يجب أن تكون النهاية موجودة .

مهم لايجاد المشتقة الأولى عند نقطة معطاة نستخدم العلاقة

$ه'(س_١) = \lim_{س \to س_١} \frac{ه(س) - ه(س_١)}{س - س_١}$

مثال ① استخدم التعريف العام للمشتقة لايجاد مشتقة الاقتران $ص = ه(س) = س$

الحل $ه'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = ١$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال ٢: اوجد $و'(س)$ اذا علمت ان $و(س) = ٥$ كا باستخدام التعريف العام :

$$و'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{و(ع) - و(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٥ ع - ٥ س}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٥ (ع - س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} ٥ = ٥$$

ملاحظة: في مثال ١، ٢ مشتقة الثابت هو صفر !!!

مثال ٣: استخدم تعريف المشتقة لايجاد مشتقة الاقتران $و(س) = س^٢ - ٣س$ ؟

الحل:

$$و'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{و(س + هـ) - و(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{((س + هـ)^٢ - ٣(س + هـ)) - (س^٢ - ٣س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{س^٢ + ٢سهـ + هـ^٢ - ٣س - ٣هـ - س^٢ + ٣س}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ^٢ + ٢سهـ - ٣هـ}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(هـ + ٢س - ٣)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} هـ + ٢س - ٣$$

$$= ٢س - ٣$$

أو $و'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{و(ع) - و(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{(ع^٢ - ٣ع) - (س^٢ - ٣س)}{ع - س}$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ - س^٢}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٣س - ٣ع}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٣(س - ع)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} ع + س + \lim_{ع \to س} -٣$$

$$= ٢س + ٣ = ٢س - ٣$$

مثال ٤: استخدم تعريف المشتقة لايجاد مشتقة الاقتران $و(س) = \frac{٢س}{٣ - س}$ ؟

الحل:

$$و'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{و(ع) - و(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{٢ع}{٣ - ع} - \frac{٢س}{٣ - س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢ع^٢ - ٦س - ٢ع^٢ + ٦س}{(٣ - ع)(٣ - س)(ع - س)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٦(ع - س)}{(٣ - ع)(٣ - س)(ع - س)} = \frac{٦}{(٣ - س)(٣ - س)} = \frac{٦}{(٣ - س)^٢}$$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال ① جد المشتقة الأولى للاقتران $ق(س) = جا^{٢}س$ باستخدام التعريف العام للمشتقة ؟

الحل : $ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \frac{جا^{٢}ع - جا^{٢}س}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{(جاع + جاس)(جاع - جاس)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} جاع + جاس \times \lim_{ع \to س} \frac{جاع - جاس}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} (جاع + جاس) \times \lim_{ع \to س} ٢ جتا(\frac{ع+س}{٢}) جا(\frac{ع-س}{٢})$

$= ٢ جاس \times \lim_{ع \to س} ٢ جتا\frac{ع+س}{٢} \times \lim_{ع \to س} \frac{جا\frac{ع-س}{٢}}{ع - س}$ افرض $\frac{ع-س}{٢} = ص$

$= ٢ جاس \times ٢ جتاس \times \lim_{ص \to ٠} \frac{جاص}{ص}$ $ع \to س \Rightarrow ص \to ٠$

$= ٢ جاس \times ٢ جتاس \times ١$

$= ٤ جاس جتاس$

مثال ② جد المشتقة الأولى للاقتران $ق(س) = س^{٢} + ٢ جتاس$ باستخدام التعريف العام ؟

الحل : $ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{(ع^{٢} + ٢ جتاع) - (س^{٢} + ٢ جتاس)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٢ جتاع - ٢ جتاس}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} ع + س + ٢ \lim_{ع \to س} -٢ (جا\frac{ع+س}{٢}) جا\frac{ع-س}{٢}$

$= ٢س + \lim_{ع \to س} -٤ جا(ع+س) \times \lim_{ع \to س} \frac{جا(ع-س)}{ع - س}$

افرض $ص = ع - س \Rightarrow ع \to س \Rightarrow ص \to ٠$

$= ٢س + \lim_{ع \to س} -٤ جا(ع+س) \times \lim_{ص \to ٠} \frac{جاص}{ص}$

$= ٢س + -٤ جا٢س \times ١$

$= ٢س - ٤ جا٢س$

ملاحظة مهمة للمرة الثانية :- حتى يكون الاقتران قابل للاشتقاق يجب ان تكون النهاية موجودة

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

* لإيجاد المشتقة لأول عند نقطة معلومة نستعمل القاعدة (تذكير)

$$\text{هـ}'(س_1) = \lim_{س \to س_1} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(س_1)}{س - س_1}$$

لاحظ أن صورة $\lim$ هي $\frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٤)}{س - ٤}$ عندما $س \to ٤$

مثال : جد $\text{هـ}'(٣)$ للاقتران $\text{هـ}(س) = \sqrt[٣]{٢س + ٣}$

الحل : $\text{هـ}'(٣) = \lim_{س \to ٣} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٣]{٢س + ٣} - ٨}{س - ٣}$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٣]{٢س + ٣} - ٢}{س - ٣} \times \frac{(\sqrt[٣]{٢س + ٣})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{٢س + ٣} + ٤}{(\sqrt[٣]{٢س + ٣})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{٢س + ٣} + ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{٢س + ٣ - ٨}{(س - ٣)((\sqrt[٣]{٢س + ٣})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{٢س + ٣} + ٤)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{٢(س - ٣)}{(س - ٣)((\sqrt[٣]{٢س + ٣})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{٢س + ٣} + ٤)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{٢}{(\sqrt[٣]{٢س + ٣})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{٢س + ٣} + ٤}$$

$$= \frac{٢}{٤ + ٤ + ٤} = \frac{٢}{١٢} = \frac{١}{٦}$$

تدريب ٢ ص٩١ : جد $\text{هـ}'(٤)$ للاقتران $\text{هـ}(س) = س + \sqrt{س}$

الحل $\text{هـ}'(٤) = \lim_{س \to ٤} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٤)}{س - ٤}$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س + \sqrt{س}) - (٤ + \sqrt{٤})}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س + \sqrt{س} - ٦}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤ + \sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{س - ٤} + \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س} + ٢}{\sqrt{س} + ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٤} ١ + \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{(س - ٤)(\sqrt{س} + ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٤} ١ + \lim_{س \to ٤} \frac{١}{\sqrt{س} + ٢}$$

$$= ١ + \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{٥}{٤}$$

حل آخر : $\text{هـ}'(٤) = \lim_{س \to ٤} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٤)}{س - ٤}$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س + \sqrt{س}) - (٤ + \sqrt{٤})}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س + \sqrt{س} - ٦}{س - ٤}$$

نفرض $ص = \sqrt{س} \Leftarrow ص^{٢} = س$

$س \to ٤ \quad ص \to ٢$

$$= \lim_{ص \to ٢} \frac{ص^{٢} + ص - ٦}{ص^{٢} - ٤}$$

$$= \lim_{ص \to ٢} \frac{(ص + ٣)(ص - ٢)}{(ص - ٢)(ص + ٢)}$$

$$= \lim_{ص \to ٢} \frac{ص + ٣}{ص + ٢}$$

$$= \frac{٥}{٤}$$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

تدريب (١) ص٩٥ اذا كان هـ'(٠) = -٦ فجد $\lim_{هـ\to 0} \frac{هـ(٠)-هـ(٥هـ)}{٢هـ}$

الحل: افرض ٥هـ = ل ، هـ ← ٠ ، ل ← ٠ ، $هـ = \frac{ل}{٥}$

$$\lim_{هـ\to 0} \frac{هـ(٠)-هـ(٥هـ)}{٢هـ} = \lim_{ل\to 0} \frac{هـ(٠)-هـ(٥\times\frac{ل}{٥})}{\frac{٢ل}{٥}}$$

$$= \lim_{ل\to 0} \frac{هـ(٠)-هـ(ل)}{\frac{٢}{٥}ل}$$

$$= \frac{٥}{٢} \lim_{ل\to 0} \frac{هـ(٠)-هـ(ل)}{ل}$$

$$= \frac{٥}{٢} \times هـ'(٠)$$

$$= \frac{٥}{٢} \times -٦ = -١٥$$

تدريب (٣) : ص = ل(س) = $\frac{س}{س+٢}$ فجد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=-١}$ باستخدام التعريف العام ؟

$$\frac{دص}{دس} = \lim_{س\to -١} \frac{ل(س)-ل(-١)}{س-(-١)}$$

$$= \lim_{س\to -١} \frac{\frac{س}{س+٢} - (-١)}{س+١} = \lim_{س\to -١} \frac{\frac{س}{س+٢} + ١}{س+١}$$

$$= \lim_{س\to -١} \frac{س+س+٢}{(س+١)(س+٢)} = \lim_{س\to -١} \frac{٢(س+١)}{(س+١)(س+٢)}$$

$$= \frac{٢}{١} = ٢$$

تعريف (مهم) : ① اذا كانت هـ'(P) = $\lim_{س\to P^+} \frac{هـ(س)-هـ(P)}{س-P}$ موجودة ، فإنه هـ'(P) تسمى المشتقة الاولى للاقتران هـ من اليمين عند س = P .

② اذا كانت هـ'(P) = $\lim_{س\to P^-} \frac{هـ(س)-هـ(P)}{س-P}$ موجودة ، فإنه هـ'(P) تسمى مشتقة الاولى للاقتران هـ من اليسار عند س = P

③ اذا كانت هـ'(P) = هـ'(P) فإنه هـ(P) موجودة .

اما اذا كانت هـ'(P) ≠ هـ'(P) فإنه هـ(P) غير موجودة .

⇐ هـ غير قابل للاشتقاق عند س = P .

التعريف السابق نستخدم عادة في الاقترانات المتشعبة وذلك في كثير من ذات القواعد المزدوجة .

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : اذا كان $ه(س) = |س - ١|$ فابحث في قابلية اشتقاقه $ه$ عند $س = ١$

الحل : اعد تعريف $ه$ $\Leftarrow$ $ه(س) = \begin{cases} س - ١ & ، س \geq ١ \\ ١ - س & ، س < ١ \end{cases}$

$ه'_+(١) = \lim_{س \to ١^+} \frac{ه(س) - ه(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{(س - ١) - (١ - ١)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١^+} \frac{س - ١}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} ١ = ١$

$ه'_-(١) = \lim_{س \to ١^-} \frac{ه(س) - ه(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^-} \frac{(١ - س) - (١ - ١)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١^-} \frac{١ - س}{س - ١} = \lim_{س \to ١^-} -١ = -١$

$\Leftarrow ه'_+(١) \neq ه'_-(١) \Leftarrow$ $ه$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ١$

مثال : صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بانتظام حيث تعمل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة الى طولها عندما يكون طولها ٢٠ سم ؟

الحل اذا رمزنا لطول ضلع $س$ فان مساحة $م(س) = س^٢$

المطلوب $\left.\frac{دم}{دس}\right|_{س = ٢٠} = \lim_{س \to ٢٠} \frac{ه(س) - ه(٢٠)}{س - ٢٠} = \lim_{س \to ٢٠} \frac{س^٢ - (٢٠)^٢}{س - ٢٠}$

$= \lim_{س \to ٢٠} \frac{(س - ٢٠)(س + ٢٠)}{(س - ٢٠)}$

$= \lim_{س \to ٢٠} س + ٢٠ = ٢٠ + ٢٠ = ٤٠$ سم .

ملاحظة : اذا كان $ه$ معرف على $[أ ، ب]$ فان $ه'(أ)$ ، $ه'(ب)$ غير موجودتين لأنه $ه$ غير معرف على يمين $أ$ ، ويسار $ب$

* اذا طُلب اشتقاق اقتران متشعب باستخدام التعريف فاننا نقوم بما يلي

① نجد اشتقاق كل قاعدة على الفترة المفتوحة المقابلة لها .

② نجد اشتقاق عند نقاط التشعب (الفصل) من اليمين ومن اليسار .

③ الاطراف دائماً عندها اشتقاق غير موجودة .

مثال $ه(س) = \begin{cases} ٢س - ٣\sqrt{س} & ، س \leq ٨ \\ ٢س + ١ & ، س > ٨ \end{cases}$

ابحث عن قابلية $ه$ للاشتقاق باستخدام التعريف العام للاشتقاق عند $س = ٨$.

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

الحل : $\text{ق}'_+(٨) = \lim_{س \to ٨^+} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٨^+} \frac{(س^{\frac{٢}{٣}} - ١٦) - (٤^{\frac{٢}{٣}} - ٨)}{س - ٨}$

$= \lim_{س \to ٨^+} \frac{س^{\frac{٢}{٣}} - ١٦}{س - ٨} + \lim_{س \to ٨^+} \frac{٤ - س^{\frac{٢}{٣}}}{س - ٨} \times \frac{٤ + ٢^{\frac{٢}{٣}} س^{\frac{١}{٣}} + س^{\frac{٢}{٣}}}{٤ + ٢^{\frac{٢}{٣}} س^{\frac{١}{٣}} + س^{\frac{٢}{٣}}}$

$= \lim_{س \to ٨^+} \frac{س^{\frac{٢}{٣}} - ٤^٢}{س - ٨} + \lim_{س \to ٨^+} \frac{-(س^{\frac{١}{٣}} - ٤^١)}{(س - ٨)(٤ + ٢^{\frac{٢}{٣}} س^{\frac{١}{٣}} + س^{\frac{٢}{٣}})}$

$= \lim_{س \to ٨^+} \frac{س^{\frac{٢}{٣}} - ٤^٢}{س - ٨} + \lim_{س \to ٨^+} \frac{-١}{(س - ٨)(٤ + ٢^{\frac{٢}{٣}} س^{\frac{١}{٣}} + س^{\frac{٢}{٣}})}$

$= ٢ + \frac{-١}{٤ + ٤ + ٤}$

$= ٢ - \frac{١}{١٢} = \frac{٢٣}{١٢}$

$\text{ق}'_-(٨) = \lim_{س \to ٨^-} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(٤)}{س - ٨} = \lim_{س \to ٨^-} \frac{(٢ \times ٨ + ١) - (٢ \times ٤ + ١)}{س - ٨}$

$= \lim_{س \to ٨^-} \frac{٢(س - ٤)}{س - ٨}$

$= ٢$

لاحظ ان $\text{ق}'_+(٨) \neq \text{ق}'_-(٨) \Rightarrow \text{ق}'(٨)$ غير موجودة $\Rightarrow$ ق غير قابل للاشتقاق عند ٨

مثال اذا كان $\text{ق}(س) = |س - ١| - [س - ٢]$ فاحث في قابلية ق للاشتقاق عند س =

$|س - ١| \Leftarrow$

$[س - ٢] \Leftarrow$

$\Rightarrow \text{ق}(س) = \begin{cases} س - ١ - ٢ & ، ٠ \leq س < ١ \\ ١ - س - ١ & ، ١ \leq س < ٢ \\ -س & ، ١ \leq س < ٢ \end{cases} \Rightarrow = \begin{cases} س - ٣ & ، ٠ \leq س < ١ \\ -س & ، ١ \leq س < ٢ \end{cases}$

$\text{ق}'_+(١) = \lim_{س \to ١^+} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{-س - (-١)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١^+} \frac{-س + ١}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١^+} -١ = -١$

$\text{ق}'_-(١) = \lim_{س \to ١^-} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^-} \frac{(س - ٣) - (-٢)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١^-} \frac{س - ١}{س - ١} = \lim_{س \to ١^-} ١ = ١$

بما ان $\text{ق}'_+(١) \neq \text{ق}'_-(١)$ فان ق غير قابل للاشتقاق عند س = ١

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

تمارين ومسائل ص ٩٧ :-

١) أ) $ق(س) = س^٣ + ٢س - ١$ عند $س = ٥$ ⇐ جد $ق'(٥)$

الحل : $ق'(٥) = \lim_{س \to ٥} \frac{ق(س) - ق(٥)}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{(س^٣ + ٢س - ١) - (١٢٥ + ١٠ - ١)}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س^٣ + ٢س - ١٣٥}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(س^٢ + ٥س + ٢٧)}{(س - ٥)}$

$= \lim_{س \to ٥} س^٢ + ٥س + ٢٧$

$= (٥)^٢ + ٥(٥) + ٢٧ = ٧٧$

ب) $ك(س) = \frac{١}{٤س - ٣}$ ، عند $س = -٢$ ⇐ جد $ك'(-٢)$

الحل : $ك'(-٢) = \lim_{س \to -٢} \frac{ك(س) - ك(-٢)}{س - (-٢)} = \lim_{س \to -٢} \frac{\frac{١}{٤س - ٣} - \frac{١}{-٣ - ٨}}{س + ٢}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{\frac{١}{٤س - ٣} - \frac{١}{-١١}}{س + ٢} = \lim_{س \to -٢} \frac{١١ + (٤س - ٣)}{١١(٤س - ٣)(س + ٢)}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{١١ + ٤س - ٣}{١١(٤س - ٣)(س + ٢)} = \lim_{س \to -٢} \frac{٤س + ٨}{١١(٤س - ٣)(س + ٢)}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{٤}{١١(٤س - ٣)} = \frac{٤}{١١(-٨ - ٣)} = \frac{٤}{-١٢١}$

ج) $د(س) = \begin{cases} س^٢ + س & ، ٠ \leq س \leq ١ \\ ٣س - ١ & ، ١ < س \leq ٥ \end{cases}$ ، عند $س = ٠$ ، $س = ١$ ، $س = ٥$

الحل : $د'(٠)$ ، $د'(٥)$ غير موجودة لأن $د(س)$ غير معرف عندما $س = ٠$ وعندما $س = ٥$

$د'_+(١) = \lim_{س \to ١^+} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{(٣س - ١) - (٢)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١^+} \frac{٣(س - ١)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١^+} ٣ = ٣$

$د'_-(١) = \lim_{س \to ١^-} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^-} \frac{(س^٢ + س) - (٢)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١^-} \frac{س^٢ + س - ٢}{س - ١} = \lim_{س \to ١^-} \frac{(س + ٢)(س - ١)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١^-} س + ٢ = ٣$

⇐ $د'(١) = ٣$

د) $ل(س) = |س^٢ - ٣|$ ، عند $س = ٣$ ، $س = \sqrt{٣}$

⇐ $ل(س) = \begin{cases} س^٢ - (س^٢ - ٣) & ، س \geq \sqrt{٣} \\ س^٢ - (٣ - س^٢) & ، س < \sqrt{٣} \end{cases}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$$\Leftarrow \text{ل}'(٣) = \lim_{س \to ٣} \frac{\text{ه}(س) - \text{ه}(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣}(س - ٣) - ٣^{٣}(٣ - ٣)}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥٤ - ٥٤}{س - ٣}$$

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	$س$	$ثابت$
٣	١	٣	٩	٢٧
	١	٣	٩	٢٧

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} س^{٢} + ٣س + ٩ = ٣^{٢} + ٣(٣) + ٩ = ٢٧$$

$$\text{عند } س = \frac{١}{٢} \Leftarrow \text{ه}'(\frac{١}{٢}) = \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{\text{ه}(س) - \text{ه}(\frac{١}{٢})}{س - \frac{١}{٢}} = \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣}(س - ٢) - \frac{١}{٢}(\frac{١}{٢} - ٢)}{س - \frac{١}{٢}}$$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣} - ٢س^{٢} - \frac{١}{٢}(-\frac{٣}{٢})}{س - \frac{١}{٢}}$$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣} - ٢س^{٢} + \frac{٣}{٤}}{س - \frac{١}{٢}} \times \frac{س^{٢} + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤}}{س^{٢} + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤}}$$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣} - \frac{٣}{٤}}{س - \frac{١}{٢}} \times \frac{(س^{٣} + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤}س^{٢})}{(س^{٢} + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤}س^{٢})} \times (س - ٢)$$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} س^{٣} + \frac{١}{٢}س^{٢} + \frac{١}{٤}س^{٢} \times (س - ٢)$$

$$= \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٨} \times (-\frac{٣}{٢}) = -\frac{٣}{٤}$$

$$\text{ه}'(\frac{١}{٢}) = \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{\text{ه}(س) - \text{ه}(\frac{١}{٢})}{س - \frac{١}{٢}} = \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣}(س - ٢) - \frac{١}{٢}(\frac{١}{٢} - ٢)}{س - \frac{١}{٢}}$$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣}(س - ٢) - \frac{١}{٢}(-\frac{٣}{٢})}{س - \frac{١}{٢}}$$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣}(س - ٢) + \frac{٣}{٤}}{س - \frac{١}{٢}} \times \frac{(س^{٢} + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤}س^{٢})}{(س^{٢} + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤}س^{٢})}$$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣} - \frac{١}{٨}}{س - \frac{١}{٢}} \times \frac{س^{٣}(س - ٢) + \frac{٣}{٤}}{(س^{٢} + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤}س^{٢})}$$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} س^{٣}(س - ٢) + \frac{٣}{٤}$$

$$= \frac{١}{٨}(\frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}) = \frac{١}{٨}(\frac{١}{٢})^{٣}(\frac{١}{٢})^{٢} = \frac{١}{٨}$$

$$\text{ه}'(\frac{١}{٢}) = \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{\text{ه}(س) - \text{ه}(\frac{١}{٢})}{س - \frac{١}{٢}} = \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣}(٢ - س) - \frac{١}{٢}(٢ - \frac{١}{٢})}{س - \frac{١}{٢}}$$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣}(٢ - س) - \frac{١}{٢}(\frac{٣}{٢})}{س - \frac{١}{٢}} \times \frac{(س^{٢} + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤}س^{٢})}{(س^{٢} + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤}س^{٢})}$$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣} - \frac{١}{٨}}{س - \frac{١}{٢}} \times \frac{س^{٣}(٢ - س) - \frac{٣}{٤}}{(س^{٢} + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤}س^{٢})}$$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} س^{٣}(٢ - س) - \frac{٣}{٤} \times (س - ٢)$$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^{٣}(٢ - س) - \frac{٣}{٤}}{(س^{٢} + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤}س^{٢})} \times \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س - ٢}{٢ - س^{٣}}$$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} س^{٣}(٢ - س) + \frac{٣}{٤} \times -١$$

$$= -\frac{١}{٨} - \frac{٣}{٤} = -\frac{٧}{٨}$$

$\Leftarrow$ ه$'(\frac{١}{٢})$ غير موجودة $\Leftarrow$ ه غير قابلة للاشتقاق عند $س = \frac{١}{٢}$

مثال ٢) ص $= \sqrt{س + ٢}$ ، $س > -٢$

الحل: $\frac{د ص}{د س} = \lim_{ع \to س} \frac{\text{ه}(ع) - \text{ه}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع + ٢} - \sqrt{س + ٢}}{ع - س}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \lim_{س \to ع} \frac{\sqrt{ع+٢} - \sqrt{س+٢}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{ع+٢} + \sqrt{س+٢}}{\sqrt{ع+٢} + \sqrt{س+٢}}$$

$$= \lim_{س \to ع} \frac{(ع+٢) - (س+٢)}{(ع - س)(\sqrt{ع+٢} + \sqrt{س+٢})}$$

$$= \lim_{س \to ع} \frac{(ع \not- س)}{(ع \not- س)(\sqrt{ع+٢} + \sqrt{س+٢})}$$

$$= \lim_{س \to ع} \frac{١}{\sqrt{ع+٢} + \sqrt{س+٢}} = \frac{١}{\sqrt{س+٢} + \sqrt{س+٢}}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{س+٢}}$$

ب) $ص = ٥س^{-\frac{٣}{٢}}$ ، $س \neq$ صفر

$$\frac{دص}{دس} = \lim_{س \to ع} \frac{(٥ع^{-\frac{٣}{٢}}) - (٥س^{-\frac{٣}{٢}})}{ع - س}$$

$$= \lim_{س \to ع} \frac{٥ع^{-\frac{٣}{٢}} - ٥س^{-\frac{٣}{٢}}}{ع - س} + \frac{-\frac{٣}{٢}}{-\frac{٣}{٢}}$$

$$= \lim_{س \to ع} \frac{٥(ع^{-\frac{٣}{٢}} - س^{-\frac{٣}{٢}})}{ع - س} + \lim_{س \to ع} \frac{ع^{-\frac{٣}{٢}} - س^{-\frac{٣}{٢}}}{ع - س}$$

$$= \lim_{س \to ع} ٥(ع + س) + \lim_{س \to ع} \frac{ع - س}{س^{\frac{٣}{٢}} ع^{\frac{٣}{٢}}}$$

$$= ٥ \times ٢س + \frac{س}{س^{\frac{٣}{٢}}}$$

$$= ١٠س + س^{-\frac{٣}{٢}}$$

ملاحظة : قابل للاشتقاق $\Rightarrow$ لما موجودة .

م) $\lim_{ه \to ٠} \frac{ق(س+ه) - ق(س-ه)}{ه} = ٢ ق'(س)$

$= \lim_{ه \to ٠} \frac{ق(س+ه) - ق(س)}{ه} + \lim_{ه \to ٠} \frac{ق(س) - ق(س-ه)}{ه}$ (طرحنا واضفنا ق(س))

$= ق'(س) + \lim_{ه \to ٠} \frac{ق(س) - ق(س-ه)}{ه}$ نرضى ص = $-ه$

$= ق'(س) + \lim_{ص \to ٠} \frac{ق(س) - ق(س+ص)}{-ص}$ ه $\to ٠$ ، ص $\to ٠$

$= ق'(س) + \lim_{ص \to ٠} \frac{-(ق(س+ص) - ق(س))}{ص}$

$= ق'(س) + ق'(س)$

$= ٢ ق'(س)$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

س٣ ب) $\lim_{س \to ع} \frac{ع\,و(س) - س\,و(ع)}{ع - س} = و(س) - س\,و'(س)$

(اضف واطرح $س\,و(س)$)

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع\,و(س) - س\,و(س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{س\,و(س) - س\,و(ع)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{و(س)(ع - س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{س(و(س) - و(ع))(-1)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} و(س) + س \times -و'(س)$

$= و(س) - س\,و'(س)$

ج) $\lim_{ع \to س} \frac{٣ع\,و(ع) - ٣س\,و(س)}{ع - س} = ٣\,و(س) + ٣س\,و'(س)$

(اضف واطرح $٣س\,و(ع)$)

$= \lim_{ع \to س} \frac{٣ع\,و(ع) - ٣س\,و(ع)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٣س\,و(ع) - ٣س\,و(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{و(ع)(٣ع - ٣س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٣س(و(ع) - و(س))}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} ٣\,و(ع) + \lim_{ع \to س} ٣س \left(\frac{و(ع) - و(س)}{ع - س}\right)$

$= ٣\,و(س) + ٣س\,و'(س)$

ج) اذا كان $و'(٤) = ٦$ فجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{و(٤ - ٢هـ) - و(٤ + ٥هـ)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{و(٤ - ٢هـ) - و(٤) + و(٤) - و(٤ + ٥هـ)}{هـ}$ (اضف واطرح $و(٤)$)

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{و(٤ - ٢هـ) - و(٤)}{هـ} + \lim_{هـ \to ٠} \frac{و(٤) - و(٤ + ٥هـ)}{هـ}$

اذا كان $ص = -٢هـ \Leftarrow هـ = -\frac{ص}{٢}$ ، $هـ \to ٠ \Leftarrow ص \to ٠$. ايضا اذا كان $ع = ٥هـ \Leftarrow هـ = \frac{ع}{٥}$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{و(٤ + ص) - و(٤)}{-\frac{١}{٢}ص} + \lim_{ع \to ٠} \frac{-(و(٤ + ع) - و(٤))}{\frac{ع}{٥}}$

$= -٢\,و'(٤) + -٥\,و'(٤)$

$= -٢ \times ٦ + -٥ \times ٦$

$= -١٢ - ٣٠ = -٤٢$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

س٥) ق (س) = (س - م) ل (س) ، ل (س) متصل عند س = م

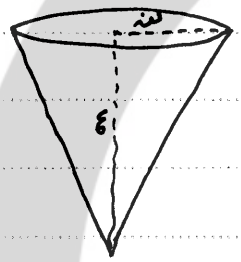
بينه باستخدام تعريف المشتقة انه قـ (م) = ل (م) حيث م ثابت

قـ (م) = $\lim_{س \to م}$ $\frac{ق(س) - ق(م)}{س - م}$

= $\lim_{س \to م}$ $\frac{(س - م) ل (س) - ((م - م) ل (م))}{س - م}$

= $\lim_{س \to م}$ ل (س) = ل (م)

س٦) الارتفاع = ٣ امثال نصف القطر ، جد معدل التغير في الحجم عندما يكون نصف قطر قاعدته ١٠ سم



الحل ع = ٣ نق ⇐ نق = $\frac{ع}{٣}$

عندما نق = ١٠ ⇐ ع = ٣٠

ح = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ π ($\frac{ع}{٣}$)^{٢} × ع

= $\frac{١}{٢٧}$ π ع^{٣}

$\frac{ح}{ز}$ = $\frac{١}{٢٧}$ π × ٣ ع^{٢} × $\frac{ع}{ز}$

= $\frac{١}{٩}$ π × ٣٠ × ٣٠ × $\frac{ع}{ز}$

= ١٠٠ π

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

الدرس الثالث : الاتصال والاشتقاق :

تعريف : اذا كان $هـ$ قابل للاشتقاق عند $س_1$ فإنه يكون متصلاً عند $س_1$

البرهان : $هـ$ قابل للاشتقاق $\Leftarrow هـ'(س_1)$ موجودة $\Leftarrow هـ$ معرف عند $س_1$

$$هـ(س) - هـ(س_1) = \frac{هـ(س) - هـ(س_1)}{س - س_1} \times (س - س_1) \quad ، س \neq س_1$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $س \to س_1$

$$\Leftarrow \lim_{س \to س_1} هـ(س) - هـ(س_1) = \lim_{س \to س_1} \frac{هـ(س) - هـ(س_1)}{س - س_1} \times \lim_{س \to س_1} (س - س_1)$$

$$= \lim_{س \to س_1} هـ(س) - \lim_{س \to س_1} هـ(س_1) = هـ'(س_1) \times صفر$$

$$\Leftarrow \lim_{س \to س_1} هـ(س) - هـ(س_1) = صفر$$

$$\Leftarrow \lim_{س \to س_1} هـ(س) = هـ(س_1)$$ وبما انه $هـ(س_1)$ معرفة فإن $هـ(س)$ متصل عند $س_1$

ملاحظة : معكوس النظرية غير صحيح بالضرورة بمعنى اذا كان $هـ$ متصلاً عند $س_1$ فليس شرطاً ان يكون قابلاً للاشتقاق عند $س_1$.

لاحظ ان متصل ← ممكن قابل للاشتقاق
                ← ممكن غير قابل للاشتقاق

غير متصل ← غير قابل للاشتقاق

مثال : اذا كان $هـ'(١) = ٣$ وكانت $\lim_{س \to ١} هـ(س) = ٥$ ، جد $هـ(١)$

الحل : بما ان $هـ'(١) = ٣$ موجودة فإن $هـ$ متصل عند $س = ١$

$$\Leftarrow هـ(١) = \lim_{س \to ١} هـ(١) = ٥$$

مثال : اذا كان $هـ(٢) = -٣$ ، $هـ'(٢) = ٢$ فأوجد $\lim_{س \to ٢} -٢ هـ(س) + ٣س$

الحل $\lim_{س \to ٢} -٢ هـ(س) + ٣س = -٢ \lim_{س \to ٢} هـ(س) + ٣ \times ٢$ ($هـ'(٢)$ موجودة $\Leftarrow هـ$ متصل)

$$= -٢ \times هـ(٢) + ٦$$

$$= -٢ \times -٣ + ٦ = ١٢$$

مثال : اذا كان $هـ'(١) = ٢$ ، $هـ'(١) = ١$ ، $هـ(١) = -٢$ فجد $\lim_{س \to ١} هـ(س)$

الحل : $هـ'(١) \neq هـ'(١) \Leftarrow هـ'(١)$ غير موجودة $\Leftarrow هـ$ غير قابل للاشتقاق

$هـ'(١) = ٢ \Leftarrow هـ$ متصل عاديه (١) ، ايضاً $هـ'(١) = ١ \Leftarrow هـ$ متصل يسار (١)

$$\Leftarrow \lim_{س \to ١^+} هـ(س) = هـ(١) \quad \text{، ايضاً } \lim_{س \to ١^-} هـ(س) = هـ(١)$$

$$\Leftarrow \lim_{س \to ١} هـ(س) = -٢ = هـ(١)$$

تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : اذا كان $ه(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، س \geq 2 \\ 3س - 1 & ، س < 2 \end{cases}$ ① ناقش قابلية الاشتقاق عند $س = 2$
(كتاب ل١) ② احسب قابلية $ه$ للاشتقاق عند $س = 2$

الحل : العدد 2 نقطة تشعب ⇐

$\lim_{س \to 2^+} ه(س) = \lim_{س \to 2^+} س^2 + 1 = 5$
$\lim_{س \to 2^-} ه(س) = \lim_{س \to 2^-} 3س - 1 = 5$
$\Rightarrow \lim_{س \to 2} ه(س)$ موجودة

$\lim_{س \to 2^+} ه(س) = \lim_{س \to 2^+} س^2 + 1 = 5$
$\lim_{س \to 2^-} ه(س) = \lim_{س \to 2^-} 3س - 1 = 5$
$\Rightarrow \lim_{س \to 2} ه(س) = 5$

$\Rightarrow$ $ه$ غير متصل عند $س = 2$ لأن $\lim_{س \to 2^+} ه(س) \neq \lim_{س \to 2^-} ه(س)$.

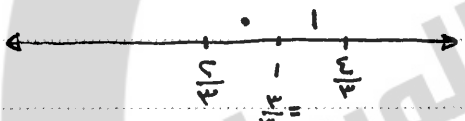
② بما أن $ه$ غير متصل عند $س = 2$ $\Rightarrow$ $ه$ غير قابل للاشتقاق عند $س = 2$.

مثال : اذا كان $ه(س) = [3س - 2]$ ناقش قابلية $ه$ للاشتقاق عند $س = 1$ ؟

الحل : نفيد تعريف $ه$ حول العدد 1

$3س - 2 = 0 \Leftarrow س = \frac{2}{3}$

$ل = \frac{1}{3}$



$\Rightarrow ه(س) = \begin{cases} 0 & ، \frac{2}{3} \leq س < 1 \\ 1 & ، 1 \leq س < \frac{4}{3} \end{cases}$

$ه(1) = 1$ معرف

$\lim_{س \to 1^+} ه(س) = \lim_{س \to 1^+} 1 = 1$
$\lim_{س \to 1^-} ه(س) = \lim_{س \to 1^-} 0 = 0$
$\Rightarrow \lim_{س \to 1} ه(س)$ غير موجودة .

$\Rightarrow$ $ه$ غير متصل عند $س = 1$

$\Rightarrow$ $ه$ غير قابل للاشتقاق عند $س = 1$

مثال اذا كان $ه(س) = \begin{cases} 3س + 2 & ، 2 \leq س \leq 3 \\ \sqrt{س - 1} & ، 3 < س \leq 5 \end{cases}$ فجد $ه'(س)$ ؟

الحل : صيغة السؤال مكافئة للسؤال ناقش قابلية $ه$ للاشتقاق على مجموعة تعريف $ه$ في درس الاشتقاق في فترة

* $ه$ غير متصل عند $س = 2$ ، $س = 5$ لأنه غير معرف يسار (2) وعلى يمين (5)

$\Rightarrow$ $ه$ غير قابل للاشتقاق عند $س = 2$ ، $س = 5$ (طرفا فترة)

* $ه$ متصل في الفترة $(2 ، 3)$ لأنه كثير حدود $(3س + 2)$.

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

* هـ متصل في الفترة $(٣،٥)$ لأنه كثير حدود وما بداخله معرف في الفترة $(٥،٣)$

* عند $س = ٣ \Leftarrow هـ(٣) = ٣ \times ٣ + ٢ = ١١$

$$\text{لما } س \to ٣^+ \Leftarrow \text{لما } \sqrt{س-١} = \sqrt{٣-١} = \sqrt{٢}$$
$$\text{لما } س \to ٣^- \Leftarrow \text{لما } ٣س + ٢ = ٣ \times ٣ + ٢ = ١١$$

$\Leftarrow$ لما $هـ(س)$ غير موجودة .

$\Leftarrow$ هـ غير متصل عند $س = ٣ \Leftarrow$ هـ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٣$

الى هنا نهاية حل الاختبار في الفترة

$\Leftarrow$ هـ(٣) غير موجودة ، هـ(٢) غير موجودة ، هـ(٥) غير موجودة .

* بما أن هـ(س) في الفترة $(٢،٣)$ $\quad هـ(س) = ٣س + ٢$

$$هـ'(س) = \text{لما}_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} = \text{لما}_{ع \to س} \frac{(٣ع+٢) - (٣س+٢)}{ع - س}$$
$$= \text{لما}_{ع \to س} \frac{٣(ع-س)}{ع-س} = \text{لما}_{ع \to س} ٣ = ٣$$

* بما أن هـ(س) في الفترة $(٣،٥)$ $\quad هـ(س) = \sqrt{س-١}$

$$هـ'(س) = \text{لما}_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} = \text{لما}_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع-١} - \sqrt{س-١}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{ع-١} + \sqrt{س-١}}{\sqrt{ع-١} + \sqrt{س-١}}$$
$$= \text{لما}_{ع \to س} \frac{(ع-١) - (س-١)}{(ع-س)(\sqrt{ع-١} + \sqrt{س-١})} = \text{لما}_{ع \to س} \frac{ع-س}{(ع-س)(\sqrt{ع-١} + \sqrt{س-١})}$$
$$= \text{لما}_{ع \to س} \frac{١}{\sqrt{ع-١} + \sqrt{س-١}} = \frac{١}{\sqrt{س-١} + \sqrt{س-١}}$$
$$= \frac{١}{٢\sqrt{س-١}}$$

$$\Leftarrow هـ'(س) = \begin{cases} ٣ & ، ٢ < س < ٣ \\ \dfrac{١}{٢\sqrt{س-١}} & ، ٣ < س < ٥ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٢ ، س = ٥ ، س = ٣ \end{cases}$$

سؤال : ابحث قابلية الاشتقاق للاقتران هـ عند $س = \frac{١}{٢}$ حيث

$$هـ(س) = \begin{cases} [٢س] & ، ٠ \le س < \frac{١}{٢} \\ |٢س - ١| & ، \frac{١}{٢} \le س \le ١ \end{cases}$$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

التمارين و المسائل ص ١٠٤ :-

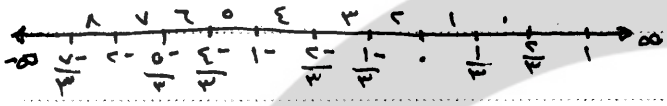
٤) أ) و(س) = $\frac{س}{س-٢}$ ، س = ٢

الحل : و غير معرّف عند س = ٢ ⇐ و غير متصل عند س = ٢ ⇐ و غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

ب) هـ(س) = [٢ - ٣س] عند س = -٢ ، س = $\frac{١}{٢}$

الحل : لغايد التعريف : ٢ - ٣س = صفر ، ل = $\frac{١}{٢}$

⇐ س = $\frac{٢}{٣}$



⇐ هـ(س) = { ٨ ، س ≤ -٢ ؛ ٧ ، -٢ < س ≤ $-\frac{٥}{٣}$ ؛ ٦ ، $-\frac{٥}{٣}$ < س ≤ $-\frac{٤}{٣}$ ؛ ٥ ، $-\frac{٤}{٣}$ < س ≤ -١ ؛ ٤ ، -١ < س ≤ $-\frac{٢}{٣}$ ؛ ٣ ، $-\frac{٢}{٣}$ < س ≤ $-\frac{١}{٣}$ ؛ ٢ ، $-\frac{١}{٣}$ < س ≤ ٠ ؛ ١ ، ٠ < س ≤ $\frac{١}{٣}$ ؛ ٠ ، $\frac{١}{٣}$ < س ≤ $\frac{٢}{٣}$ }

عند س = -٢ ⇐ هـ(-٢) = ٨ معرف

نهـا و(س) = نهـا ٧ = ٧ ، نهـا هـ(س) = نهـا ٨ = ٨

⇐ نهـا هـ(س) غير موجودة

⇐ هـ غير متصل عند س = -٢ ⇐ هـ غير قابل للاشتقاق عند س = -٢

عند س = $\frac{١}{٢}$ ⇐ هـ($\frac{١}{٢}$) = ٠ معرف

نهـا هـ(س) = نهـا ٠ = صفر

⇐ نهـا هـ(س) = هـ($\frac{١}{٢}$) = صفر ⇐ هـ متصل عند س = $\frac{١}{٢}$

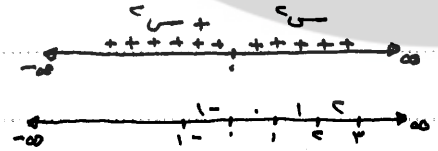
هـ'($\frac{١}{٢}$) = نهـا $\frac{هـ(س) - هـ(\frac{١}{٢})}{س - \frac{١}{٢}}$ = نهـا $\frac{٠ - ٠}{س - \frac{١}{٢}}$ = صفر

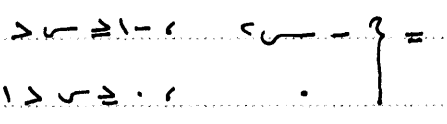
⇐ هـ قابل للاشتقاق عند س = $\frac{١}{٢}$

ج) ل(س) = |س²| [س] عند س = صفر .

|س²| ⇐ س² = ٠ ⇐ س = صفر

[س] ⇐ س = ٠ ⇐ ل = ١





⇐ ل(س) = { -س² ، -١ ≤ س < ٠ ؛ ٠ ، ٠ ≤ س < ١ } = { -س² ، -١ ≤ س < ٠ ؛ ٠ ، ٠ ≤ س < ١ }

عند س = ٠ ⇐ ل(٠) = ٠ ، نهـا ٠ = صفر ، نهـا -س² = ٠

⇐ نهـا ل(س) = ٠ ⇐ ل متصل عند س = صفر

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$\Leftarrow$ $ل'(٠) = \lim_{س \to ٠} \frac{ل(س) - ل(٠)}{س - ٠} = \lim_{س \to ٠} \frac{صفر - صفر}{س} = صفر$

$ل'(٠) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{ل(س) - ل(٠)}{س - ٠} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{-س^٢ - ٠}{س} = \lim_{س \to ٠^-} -س = صفر$

$\Leftarrow$ $ل'(٠) = صفر$.

د) $د(س) = \begin{cases} س^٣ & ، س \geq ١ \\ ٣س^٢ - ٣س + ٥ & ، س < ١ \end{cases}$ ، عند $س = ١$

$د(١) = (١)^٣ = ١$ $\Leftarrow$ د معرف عند $س = ١$

$\lim_{س \to ١^+} ٣س^٢ - ٣س + ٥ = ٣(١)^٢ - ٣(١) + ٥ = ٥$

$\lim_{س \to ١^-} س^٣ = (١)^٣ = ١$

$\Leftarrow$ $\lim_{س \to ١^+} د(س) \neq \lim_{س \to ١^-} د(س)$ $\Leftarrow$ غير متصل عند $س = ١$

$\Leftarrow$ $د(س)$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ١$

هـ) $و(س) = \begin{cases} \frac{١}{س} & ، س \leq ١ \\ -\frac{١}{٢}س^٢ + \frac{٣}{٢} & ، س > ١ \end{cases}$ عند $س = -١$ ، $س = ١$

عند $س = -١$ $\Leftarrow$ $و(-١) = -\frac{١}{٢}(-١)^٢ + \frac{٣}{٢} = ١$ معرف

$\lim_{س \to -١^+} \frac{١}{س} = \frac{١}{-١} = -١$ ، $\lim_{س \to -١^-} -\frac{١}{٢}س^٢ + \frac{٣}{٢} = ١$

$\Leftarrow$ $\lim_{س \to -١}$ $و(س)$ غير متصل عند $س = -١$

$\Leftarrow$ $و(س)$ غير قابل للاشتقاق عند $س = -١$

عند $س = ١$ $\Leftarrow$ $و(١) = \frac{١}{١} = ١$

$\lim_{س \to ١^+} \frac{١}{س} = ١$ ، $\lim_{س \to ١^-} -\frac{١}{٢}س^٢ + \frac{٣}{٢} = ١$

$\Leftarrow$ $\lim_{س \to ١} و(س) = ١ = و(١)$ $\Leftarrow$ $و(س)$ متصل عند $س = ١$

$و'(١) = \lim_{س \to ١^+} \frac{و(س) - و(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{\frac{١}{س} - ١}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١^+} \frac{١ - س}{(س-١)س} = \lim_{س \to ١^+} \frac{-١}{س} = -١$

$و'(١) = \lim_{س \to ١^-} \frac{و(س) - و(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^-} \frac{-\frac{١}{٢}س^٢ + \frac{٣}{٢} - ١}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١^-} \frac{-\frac{١}{٢}(س^٢ - ١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^-} \frac{-\frac{١}{٢}(س-١)(س+١)}{(س-١)}$

$= \lim_{س \to ١^-} -\frac{١}{٢}(س+١) = -\frac{١}{٢}(٢) = -١$

$\Leftarrow$ $\boxed{و'(١) = -١}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$$\Leftarrow \text{هـ}(س) = \begin{cases} ١ & ، \ ١ \geq س < ٢ \\ ٣ - س & ، \ ٢ \geq س < ٣ \\ س - ٣ & ، \ ٣ \geq س \leq ٤ \end{cases}$$

* هـ غير قابل للاشتقاق عند أطراف الفترات $س = ١ ، س = ٤$ لأنه غير متصل عندهما .

* $\lim_{س \to ٢^-} ١ = ١$ ، $\lim_{س \to ٢^+} ٣ - س = ١ \Leftarrow \lim_{س \to ٢} \text{هـ}(س) = ١$

$\text{هـ}(٢) = ١ \Leftarrow \lim_{س \to ٢} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(٢) = ١ \Leftarrow$ هـ متصل عند $س = ٢$

$$\text{هـ}'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{٣ - س - ١}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{٢ - س}{س - ٢} = -١$$

$$\text{هـ}'_-(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{١ - ١}{س - ٢} = \text{صفر}$$

بما أن $\text{هـ}'_+(٢) \neq \text{هـ}'_-(٢) \Leftarrow \text{هـ}'(٢)$ غير موجودة $\Leftarrow$ هـ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٢$

* $\lim_{س \to ٣^+} س - ٣ = \text{صفر}$ ، $\lim_{س \to ٣^-} ٣ - س = \text{صفر} \Leftarrow \lim_{س \to ٣} \text{هـ}(س) = \text{صفر}$

$\text{هـ}(٣) = ٣ - ٣ = \text{صفر} \Leftarrow \lim_{س \to ٣} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(٣) = \text{صفر} \Leftarrow$ هـ متصل عند $س = ٣$

$$\text{هـ}'_+(٣) = \lim_{س \to ٣^+} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{(س - ٣) - (٠)}{س - ٣} = ١$$

$$\text{هـ}'_-(٣) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^-} \frac{٣ - س - ٠}{س - ٣} = -١$$

$\Leftarrow \text{هـ}'_+(٣) \neq \text{هـ}'_-(٣) \Leftarrow$ هـ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٣$

* عندما $١ < س < ٢$ $\quad \text{هـ}(س) = ١$

$$\text{هـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{١ - ١}{ع - س} = \text{صفر}$$

* عندما $٢ < س < ٣$ $\quad \text{هـ}(س) = ٣ - س$

$$\text{هـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{(٣ - ع) - (٣ - س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{س - ع}{ع - س} = -١$$

* عندما $٣ < س < ٤$ $\quad \text{هـ}(س) = س - ٣$

$$\text{هـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{(ع - ٣) - (س - ٣)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = ١$$

ملخص : $\text{هـ}'(س) = \begin{cases} \text{صفر} & ، \ ١ < س < ٢ \\ -١ & ، \ ٢ < س < ٣ \\ ١ & ، \ ٣ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} & ، \ س = ١ ، ٢ ، ٣ \end{cases}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

س٢) $\text{ه}(س) = \begin{cases} أ س^2 - ب س & ، س \geq 2 \\ 4 - ب س^3 + أ س & ، س < 2 \end{cases}$ حيث أ ، ب ثابتان إذا علمت أن ه(س) موجودة. جد قيمة أ ، ب التي تجعل ه(س) موجودة.

الحل ه(س) موجودة ⇐ ه قابل للاشتقاق عند س = 2 ⇐ ه متصل عند س = 2

متصل ⇐ $\lim_{س \to 2^-}$ $أ س^2 - ب س$ = $\lim_{س \to 2^+}$ $4 - ب س^3 + أ س$

$4أ - 2ب = 4 - 8ب + 2أ$

$6أ + 6ب = 4$ ---- ①

قابل للاشتقاق ⇐ $\text{ه}'_+(2) = \text{ه}'_-(2)$

$\text{ه}'_+(2) = \lim_{س \to 2^+} \frac{\text{ه}(س) - \text{ه}(2)}{س - 2}$

$= \lim_{س \to 2^+} \frac{(4 - ب س^3 + أ س) - (4 - 8ب + 2أ)}{س - 2}$

$= \lim_{س \to 2^+} \frac{-ب(س^3 - 8) + أ(س - 2)}{س - 2}$

$= \lim_{س \to 2^+} -ب(س^2 + 2س + 4) + أ$

$= -ب(4 + 4 + 4) + أ$

$= أ - 12ب$

$\text{ه}'_-(2) = \lim_{س \to 2^-} \frac{\text{ه}(س) - \text{ه}(2)}{س - 2}$

$= \lim_{س \to 2^-} \frac{(أ س^2 - ب س) - (4أ - 2ب)}{س - 2}$

$= \lim_{س \to 2^-} \frac{أ س^2 - ب س - 4أ + 2ب}{س - 2}$

$= \lim_{س \to 2^-} \frac{أ(س^2 - 4) - ب(س - 2)}{س - 2}$

$= \lim_{س \to 2^-} \frac{أ(س - 2)(س + 2) - ب(س - 2)}{س - 2}$

$= \lim_{س \to 2^-} أ(س + 2) - ب$

$= 4أ - ب$

⇐ $أ - 12ب = 4أ - ب \Leftarrow 3أ + 11ب = صفر$ --- ②

اضرب ① في 3 و ② في -2

$+ \quad 6أ + 18ب = 12$

$-6أ - 22ب = صفر$

$-4ب = 12 \Leftarrow ب = -3$

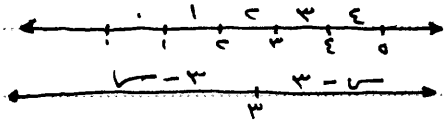
بالتعويض في ① $6أ + 18 \times -3 = 12$

$6أ - 54 = 12 \Leftarrow 6أ = 66 \Leftarrow أ = 11$

س٣) $\text{ه}(س) = \begin{cases} [س] & ، 1 \geq س > 0 \\ |س - 3| & ، 2 \geq س \geq 4 \end{cases}$ ابحث في قابلية ه للاشتقاق عند المجال.

الحل : $[س] \Leftarrow س = 0$ ، $ل = 1$

$|س - 3| \Leftarrow س = 3$



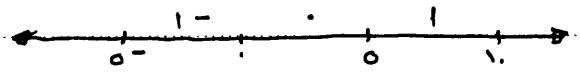
يتبع ←

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

ليكن $ل(س) = \dfrac{[\frac{س}{٥}] - س}{س + ١}$ ، $س \neq -٢$ ، $س \neq ٥$

الحل : $[\frac{س}{٥}] \Leftarrow س = ٠$ ، $ل = ٥$



$$ل(س) = \begin{cases} \dfrac{-١-س}{س+١} & ، -٥ \leq س < ٠ \\ \dfrac{-س}{س+١} & ، ٠ \leq س < ٥ \\ \dfrac{١-س}{س+١} & ، ٥ \leq س < ١٠ \end{cases} = \begin{cases} -١ & ، -٥ \leq س < ٠ \\ \dfrac{-س}{س+١} & ، ٠ \leq س < ٥ \\ \dfrac{١-س}{س+١} & ، ٥ \leq س < ١٠ \end{cases}$$

عند $س = -٢ \Leftarrow$ هـ$(-٢) = -١$ معرّف

$$ل'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$$

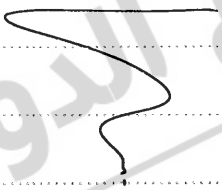
$$= \lim_{ع \to س} \frac{-١-(-١)}{ع-س} = \text{صفر} \Leftarrow ل'(-٢) = \text{صفر}$$

$\Leftarrow$ ل قابل للاشتقاق عند $س = -٢$.

عند $س = ٥ \Leftarrow$ هـ$(٥) = \dfrac{١-٥}{٥+١} = \dfrac{-٤}{٦} = \dfrac{-٢}{٣}$ معرف

$$\begin{cases} \lim_{س \to ٥+} \dfrac{١-س}{١+س} = \dfrac{-٤}{٦} = \dfrac{-٢}{٣} \\ \lim_{س \to ٥-} \dfrac{-س}{١+س} = \dfrac{-٥}{١+٥} = \dfrac{-٥}{٦} \end{cases} \Leftarrow$$ ل غير متصل عند $س = ٥ \Leftarrow$

ل غير قابل للاشتقاق عند $س = ٥$.



تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

الدرس الرابع : قواعد الاشتقاق (١) :

١ إذا كان $هـ(س) = ج$ ، حيث $هـ$ دالة ثابتة ، $ج$ عدد ثابت ، $ج \in ح$

البرهان : $هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ج - ج}{ع - س} = صفر$.

٢ إذا كان $هـ(س) = س^ن$ ، $ن$ عدد صحيح موجب أكبر من الواحد فإن $هـ'(س) = ن س^{ن-١}$

البرهان : $ع^ن - س^ن = (ع - س)(ع^{ن-١} + ع^{ن-٢} س^١ + ع^{ن-٣} س^٢ + ... + ع^١ س^{ن-٢} + س^{ن-١})$ نفضل مقدارها

$$هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^ن - س^ن}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع^{ن-١} + ع^{ن-٢} س^١ + ... + ع^١ س^{ن-٢} + س^{ن-١})}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} ع^{ن-١} + ع^{ن-٢} س^١ + ... + ع^١ س^{ن-٢} + س^{ن-١}$$

$$= س^{ن-١} + س^{ن-٢} \times س^١ + ... + س \times س^{ن-٢} + س^{ن-١}$$

$$= ن (س^{ن-١})$$

مثال : أوجد $هـ'(س)$ لكل مما يلي :

① $هـ(س) = ٥$ ② $هـ(س) = س^٨$

③ $هـ(س) = س^٢$ ④ $هـ(س) = \sqrt{٣}$

⑤ $هـ(س) = س^٥$

الحل ① $هـ'(س) = صفر$

② $هـ'(س) = ٨ س^٧$

③ $هـ'(س) = ٢ س$

④ $هـ'(س) = صفر$

⑤ $هـ'(س) = ٥ س^٤$

مثال : إذا كان $هـ(س) = س^٧$ فأوجد $هـ'(١)$ ، $هـ'(-١)$

الحل $هـ'(س) = ٧ س^٦$

$هـ'(١) = ٧ (١)^٦ = ٧$

$هـ'(-١) = ٧ (-١)^٦ = ٧$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

٣ اذا كان $هـ(س) = ب\, د(س)$ ، $ب \in ح$ ، $د(س)$ قابل للاشتقاق فإن

$هـ'(س) = ب\, د'(س)$

البرهان : $هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ب\, د(ع) - ب\, د(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} ب \left(\frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} \right)$

$= ب \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س}$

$= ب\, د'(س)$

مثال جد $هـ'(س)$ لكل مما يلي :

① $هـ(س) = ٥ س^{٤}$ ② $هـ(س) = -٣ س^{٢}$ ③ $هـ(س) = \frac{١}{٢} س^{٣}$

الحل : ① $هـ'(س) = ٢٠ س^{٣}$

② $هـ'(س) = -٦ س$

③ $هـ'(س) = \frac{٣}{٢} س^{٢}$

مثال : اذا كان $هـ(س) = ٣ س^{٣} + ١$ فأوجد $هـ'(٣)$

$س + ١ = ٤$ عند $س = ٣$

$\Leftarrow هـ(س) = ٣ س^{٣} \times س = ٣ س^{٤}$

$\Leftarrow هـ'(س) = ٤ \times ٣ س^{٣} = ١٢ س^{٣}$

$هـ'(٣) = ١٢ (٣)^{٣} = ٣٢٤$

مثال : اذا كان $هـ(س) = ٥ ب س^{٤}$ وكان $هـ'(٢) = ١٦٠$ فجد قيمة $ب$ ؟

الحل $هـ'(س) = ٢٠ ب س^{٣}$

$هـ'(٢) = ٢٠ ب (٢)^{٣} = ١٦٠$

$\Leftarrow ١٦٠ ب = ١٦٠$

$\Leftarrow ب = ١$

مثال : اذا كان $هـ(س) = ٢ س^{٣}$ وكان $هـ'(ب) = ٥٤$ فجد قيمة $ب$ ؟

الحل $هـ'(س) = ٦ س^{٢}$

$هـ'(ب) = ٦ ب^{٢} = ٥٤$

$\Leftarrow ب^{٢} = ٩ \Leftarrow ب = \pm ٣$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

٤) اذا كانت ل ، هـ قابلة للاشتقاق عند س فإن

و(س) = ل(س) ± هـ(س) قابلة للاشتقاق عند س ولذلك فإن

و'(س) = ل'(س) ± هـ'(س)

البرهان : ل ، هـ قابلة للاشتقاق ⇐ ل' ، هـ' موجودتان

$$و'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{و(ع) - و(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ل(ع) \pm هـ(ع)) - (ل(س) \pm هـ(س))}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ل(ع) - ل(س)}{ع - س} \pm \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$$

= ل'(س) ± هـ'(س)

ملاحظة : القاعدة ٤ يمكن تعميمها على أكثر من اقترانين .

مبدأ : اذا كانت و دالة حدودية فإن و قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح .

مثال : جد و'(س) اذا علمت أن و(س) = ٣س^٤ - ٥س^٣ + ٣س ثم جد و'(١)

الحل و'(س) = ١٢س^٣ - ١٥س^٢ + ٣

= ١٢س^٣ - ١٥س^٢ + ٣

و'(١) = ١٢(١)^٣ - ١٥(١)^٢ + ٣

= ١٢ - ١٥ + ٣ = ٠

مثال : اذا كانت و(س) = ٢س^٢ + |س - ١| فجد و'(٢) ، و'(-١)

|س - ١| ⇐ س = ١

| س - ١ | ١ - س |

و(س) = { ٢س^٢ + س - ١ ، س ≥ ١
{ ٢س^٢ + ١ - س ، س < ١

و'(٢) = ٢(٢)^٢ + (٢) - ١ = ٩

و'(-١) = ٢(-١)^٢ + ١ - -١ = ٤

تدريب (٣) ص ١١ : ① و(س) = ١/٢ (س^٤ + ٧) = ١/٢ س^٤ + ٧/٢

و'(س) = ٢س^٣

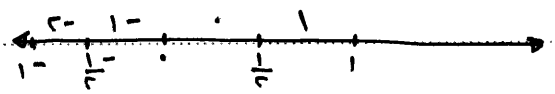
② و(س) = أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س + د

و'(س) = ٣أ س^٢ + ٢ب س + جـ

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال اذا كان هـ(س) = -٣س^٤ + [٢س] فأوجد هـ' (٠٫٢) ، هـ' (-٠٫٧)



الحل : [٢س] = ٠ ⇐ س = ٠ ، ل = ١/٢

هـ(س) = { -٣س^٤ ، ٠ ≤ س < ١/٢
        { -٣س^٤ ، -١ ≤ س < -١/٢

هـ'(س) = { -٦س ، ٠ < س < ١/٢
        { -٦س ، -١ < س < -١/٢

هـ'(٠٫٢) = -٦(٠٫٢) = -١٫٢

هـ'(-٠٫٧) = -٦(-٠٫٧) = ٤٫٢

مثال : اذا كان هـ(س) = ٣س^٢ + هـ(س) وكانت هـ'(٢) = ٣ فجد هـ'(٢)

الحل : هـ'(س) = ٦س + هـ'(س)

هـ'(٢) = ٦ × ٢ + هـ'(٢)

= ١٢ + ٣ = ١٥

مثال : اذا كان هـ(س) = ب س^٣ - ٤س ، ب ∈ ح ، وكان هـ'(٢) = ٨ فجد قيمة ب

الحل هـ'(س) = ٣ ب س^٢ - ٤

هـ'(٢) = ١٢ ب - ٤ = ٨

⇐ ١٢ ب = ١٢

⇐ ب = ١

مثال اذا كان هـ(س) = ٣ س^٣ + ٤ س^٢ + ١ ، وكان هـ'(أ) = صفر ، فجد قيمة أ

أ اذا علمت ان أ ≠ صفر ؟

الحل : هـ'(س) = ٩ س^٢ + ٨ س

هـ'(أ) = ٩ أ^٢ + ٨ أ = ٠

أ (٩ أ + ٨) = ٠

إما أ = ٠ مرفوض أو ٩ أ + ٨ = صفر

⇐ ٩ أ = -٨ ⇐ $\boxed{أ = -\frac{٨}{٩}}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

التمارين والمسائل ٣-١

س١ أ) هـ(س) = ٤ ⇐ هـ'(س) = صفر

ب) هـ(س) = π^2 ⇐ هـ'(س) = صفر

ج) ص = $-٣س^{١٢}$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = -٣٦س^{١١}$

د) ل(س) = $\frac{١}{٢}$ ك(س) ⇐ ل'(س) = $\frac{١}{٢}$ ك'(س) .

س٢ أ) ص = $١ - ٣س^٢$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = -٦س$

ب) ص = $٦س^٣ - ٥س^٢ + س + ٩$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = ١٨س^٢ - ١٠س + ١$

ج) ص = $\frac{س^٢ + ١}{٥} = \frac{س^٢}{٥} + \frac{١}{٥}$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{٥}س$

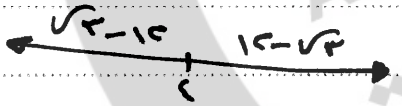
د) ص = $\frac{١}{٢}س^٤ - \frac{١}{٣}س^٣ + \frac{١}{٢}س^٢ - س + ١$

$\frac{دص}{دس} = س^٣ - س^٢ + س - ١$

س٣ أ) ص = $\frac{س^٤}{٢}$ ، س = -٢

$\frac{دص}{دس} = ٢س^٣$ ⇐ $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=-٢} = ٢(-٢)^٣ = -١٦$

ب) ص = $س^٢ + |٣س - ١٢|$ ، س = ٥

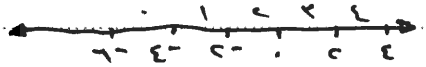


$|٣س - ١٢| = ٠$ ⇐ س = ٤

⇐ $\frac{دص}{دس} = ٢س + ٣$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٥} = ٢ \times ٥ + ٣ = ١٣$

ج) ص = $٨س^٢ - [\frac{١}{٢}س + ٣]$ ، س = ١,٢



$[\frac{١}{٢}س + ٣]$ ⇐ س = -٦ ، ل = ٢

عند س = ١,٢ ⇐ ص = $٨س^٢ - ٣$

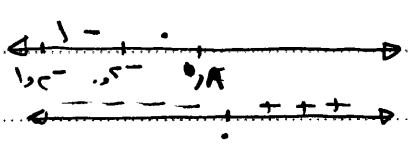
⇐ $\frac{دص}{دس} = ١٦س$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=١,٢} = ١٦ \times ١,٢ = ١٩,٢$

د) ص = $س + [س + ٢,٥] - |س - ١|$ ، س = -١

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info



$[س + ٢ ، ٠] \Leftarrow س = -٢ ، ٠ ، ل = ١$

$|س| \Leftarrow س = ٠$

$\Leftarrow ص = س + ١ - (-س)$

$ص = س + ١ + س$

$ص = ٢س$

$\frac{دص}{دس} = ٢ \Leftarrow \frac{دص}{دس}|_{س=-١} = ٢$

ج) $ل'(٢) = ٤$ ، $هـ'(٢) = -٥$

أ) $و(س) = ٥ ل(س) + ٢ هـ(س)$

$و'(س) = ٥ ل'(س) + ٢ هـ'(س)$

$و'(٢) = ٥ \times ٤ + ٢ \times -٥$

$= ٢٠ - ١٠ = ١٠$

ب) $و(س) = ل(س) - ٣ هـ(س)$

$و'(س) = ل'(س) - ٣ هـ'(س)$

$و'(٢) = ل'(٢) - ٣ هـ'(٢)$

$= ٤ - ٣ \times -٥$

$= ٤ + ١٥ = ١٩$

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

الدرس الخامس : قواعد الاشتقاق (٢) :-

١ قاعدة ضرب اقترانين :

اذا كان هـ ، ﻫ قابلين للاشتقاق وكان ل(س) = هـ(س) × ﻫ(س) فإن ل قابل للاشتقاق وإن ل'(س) = هـ(س) × ﻫ'(س) + ﻫ(س) × هـ'(س)

كلاماً : المشتقة الأول × الثاني + الأول × مشتقة الثاني .

ملاحظة : نبدل كل مرة في القاعدة لنؤشر على الحالة الكلية

= الثاني × مشتقة الأول + الأول × مشتقة الثاني .

مثال : اذا كان هـ(س) = (٢س^٢ + ١) ، ﻫ(س) = ٣س - ٥ فجد مشتقة الاقتران

ل(س) = هـ(س) × ﻫ(س)

الحل : ل'(س) = هـ(س) × ﻫ'(س) + هـ'(س) × ﻫ(س)

= (٢س^٢ + ١)(٣) + (٤س)(٣س - ٥)

= ٦س^٢ + ٣ + ١٢س^٢ - ٢٠س

= ١٨س^٢ - ٢٠س + ٣ .

٢ قاعدة القسمة :

اذا كان هـ ، ﻫ قابلين للاشتقاق وكان ل(س) = هـ(س) / ﻫ(س) فإن ل قابل للاشتقاق وإن ل'(س) = (هـ(س) × ﻫ'(س) - ﻫ(س) × هـ'(س)) / (ﻫ(س))^٢

كلاماً = (المقام × مشتقة البسط - البسط × مشتقة المقام) / (المقام)^٢

مثال : اذا كان هـ(س) = (٥س^٢ + ٢) / (٣س + ٧) فجد هـ'(س) ؟

هـ'(س) = ((٣س + ٧)(١٠س) - (٥س^٢ + ٢)(٣)) / (٣س + ٧)^٢

هـ'(س) = (٣٠س^٢ + ٧٠س - ١٥س^٢ - ٦) / (٣س + ٧)^٢

= (١٥س^٢ + ٧٠س - ٦) / (٣س + ٧)^٢

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

ملاحظة: اذا كان البسط ثابتاً فإنه لقاعدة كسبع

$$\text{إذا كان } \text{هـ}(س) = \frac{\text{ثابت}}{\text{ق}(س)} \Leftarrow \text{هـ}'(س) = \frac{-\text{ثابت} \times \text{ق}'(س)}{(\text{ق}(س))^{2}}$$

$$\text{مثلاً } \text{ع} = \frac{\text{ثابت} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{2}} \quad \text{..... لماذا}$$

تدريب ٣ ص ١١٥ :

أ) $\text{هـ}(س) = \frac{٥}{س^{٣}} = ٥ س^{-٣}$

$\text{هـ}'(س) = -١٥ س^{-٤}$

$= \frac{-١٥}{س^{٤}}$

أو $\text{هـ}'(س) = \frac{٠ \times س^{٣} - ٥ \times ٣ س^{٢}}{(س^{٣})^{٢}}$

$= \frac{-١٥ س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{-١٥}{س^{٤}}$

ب) $\text{هـ}(س) = \frac{ج - س^{٤}}{س^{٣}}$

$\text{هـ}'(س) = \frac{س^{٣}(-٤ س^{٣}) - (ج - س^{٤})(٣ س^{٢})}{س^{٦}}$

$= -٤ س^{٤} - ٣ ج س^{٢} + ٣ س^{٤}$

$= س^{٤} - ٣ ج س^{٢}$

نتيجة ⇐ اذا كان $\text{هـ}(س) = س^{ن}$ ، $س \neq ٠$ ، $ن$ عدد صحيح سالب غير -١

$\text{هـ}'(س) = ن س^{ن-١}$

البرهان : نفرض $ن = -م$ ، $م \in ص^{+}$

$\Leftarrow \text{هـ}(س) = س^{ن} = س^{-م} = \frac{١}{س^{م}}$

$\Leftarrow \text{هـ}'(س) = \frac{س^{م} \times \text{صفر} - ١ \times م س^{م-١}}{(س^{م})^{٢}}$

$= \frac{-م س^{م-١}}{س^{٢م}} = -م س^{م-١-٢م} = -م س^{-م-١}$

بالتعويض $-م = ن$

$\Leftarrow \quad \text{هـ}'(س) = ن س^{ن-١}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

تدريب ٣ ص١١٥ : ① $ه(س) = \frac{٥}{س^{٣}} = ٥س^{-٣}$

$ه'(س) = -١٥س^{-٤} = \frac{-١٥}{س^{٤}}$

② $ه(س) = \frac{\sqrt{٣}س^{٢} - ٢}{س^{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{س} - \frac{٢}{س^{٣}}$

$= \sqrt{٣}س^{-١} - ٢س^{-٣}$

$ه'(س) = -\sqrt{٣}س^{-٢} + ٦س^{-٤}$

$= \frac{-\sqrt{٣}}{س^{٢}} + \frac{٦}{س^{٤}}$

امثلة : جد مشتقة الدوال التالية :-

① $ه(س) = (٢س^{٤} + س)(٣س^{٣} - ٤)$ ، جد $ه'(س)$

الحل : $ه'(س) = (٢س^{٤} + س)(٩س^{٢}) + (٤س^{٣} + ١)(٣س^{٣} - ٤)$

$= ١٨س^{٦} + ٩س^{٣} + ١٢س^{٦} - ١٦س + ٣س^{٣} - ٤$

$= ٣٠س^{٦} + ١٢س^{٣} - ١٦س - ٤$

② $ه(س) = س^{٤}(٣س + ١)(س^{٣} - ١)$ ، جد $ه'(٢)$

الحل : $ه(س) = (٣س^{٤} + س^{٣})(س^{٣} - ١)$

$ه'(س) = (٣س^{٤} + س^{٣})(٣س^{٢}) + (١٢س^{٣} + ٣س^{٢})(س^{٣} - ١)$

$= ٩س^{٦} + ٣س^{٥} + ٩س^{٥} - ٩س^{٢} + ٣س^{٦} - ٣س^{٢}$

$= ١٨س^{٦} + ٥س^{٥} - ٩س^{٢} - ٣س$

$ه'(٢) = ١٨(٢)^{٦} + ٥(٢)^{٥} - ٩(٢)^{٢} - ٣(٢)$

$= ١٨ \times ٦٤ + ٥ \times ٣٢ - ٩ \times ٤ - ٣$

$= ١١٥٢ + ١٦٠ - ٣٦ - ٣$

$= ١٢١٦$

③ اذا كان $ه(س) = ه(س) \times ل(س)$ وكانت $ه'(٢) = ٣$

$ه(٢) = ٤$ ، $ه'(٢) = ٢$ ، $ل(٢) = ١$ فجد $ل'(٢)$ ؟

الحل : $ه'(س) = ه(س) \times ل'(س) + ه'(س) \times ل(س)$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$\Leftarrow$ هـ'(٢) = ك(٢) × ل'(٢) + ك'(٢) × ل(٢)

٣ = ٤ × ل'(٢) + ٢ × ١

٣ = ٤ ل'(٢) + ٢

$\Leftarrow$ ٤ ل'(٢) = ٣ - ٢

$\frac{٤}{٤}$ ل'(٢) = $\frac{١}{٤}$

ل'(٢) = $\frac{١}{٤}$

④ اذا كان هـ(س) = $\frac{٤}{٢+س^{٢}}$ ، وكانت هـ'(٣) = ٥ فجد قيمة أ ؟

الحل : هـ'(س) = $\frac{(أ س^{٢}+٢) \times صفر - ٤(أ س^{٢}+٢)}{(أ س^{٢}+٢)^{٢}}$

$\Leftarrow$ هـ'(س) = $\frac{-٤(أ س^{٢}+٢)}{(أ س^{٢}+٢)^{٢}}$

هـ'(س) = $\frac{-٤}{أ س^{٢}+٢}$

$\Leftarrow$ هـ'(٣) = $\frac{-٤}{٩أ+٢}$ = ٥

$\Leftarrow$ -٤ = ١٥أ + ١٠

$\Leftarrow$ $\frac{١٥}{١٥}$ أ = $\frac{-١٤}{١٥}$

$\Leftarrow$ أ = $\frac{-١٤}{١٥}$

⑤ اذا كان هـ(س) = $س^{٢}$ ك(س) + ٤س ، وكان ك(٢) = ٥ ، ك'(٢) = ٣

فجد هـ'(س) .

الحل : هـ'(س) = $س^{٢}$ ك'(س) + ٢س ك(س) + ٤

هـ'(٢) = $(٢)^{٢}$ ك'(٢) + ٢ × ٢ ك(٢) + ٤

= ٤ × ٣ + ٤ × ٥ + ٤

= ١٢ + ٢٠ + ٤ = ٣٦

⑥ اذا كان هـ(س) = $(ل(س))^{٢}$ فجد هـ'(١) اذا علمت ان ل(س) = $س^{٥}$ ؟

الحل : هـ(س) = ل(س) × ل(س)

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$\Leftarrow$ هـ'(س) = ل(س) × ل'(س) + ل'(س) × ل(س)

$= ٥س^{٢} \times ١٠س + ١٠س \times ٥س^{٢}$

$= ٥٠س^{٣} + ٥٠س^{٣}$

هـ'(١) = $٥٠(١)^{٣} + ٥٠(١)^{٣} = ١٠٠$

⑦ اذا كانه هـ(س) = $\frac{٣س}{٥س+٤}$ ، $س \neq -\frac{٤}{٥}$ فجد هـ'(٢) ؟

الحل : هـ'(س) = $\frac{(٥س+٤)(٣) - (٣س)(٥)}{(٥س+٤)^{٢}}$

هـ'(س) = $\frac{١٥س+١٢ - ١٥س}{(٥س+٤)^{٢}}$

$\Leftarrow$ هـ'(س) = $\frac{١٢}{(٥س+٤)^{٢}}$

$\Leftarrow$ هـ'(٢) = $\frac{١٢}{(٥ \times ٢+٤)^{٢}} = \frac{١٢}{١٩٦} = \boxed{\frac{٣}{٤٩}}$

* اشتقاقه الاقترانه المتشعب :-

اذا كانه هـ(س) = { ك(س) ، $س \leq P$ وكانت ك'(س) موجودة لكل $س < P$
ل(س) ، $س \geq P$ وكانت ل'(س) موجودة لكل $س > P$

فاننا نجد هـ'(س) كما يلي :-

١) نجد ك'(س) عندما $س < P$ ، ل'(س) عندما $س > P$

فيكون هـ'(س) = { ك'(س) ، $س < P$
ل'(س) ، $س > P$ ، $س \neq P$.

٢) نبحث في اتصال هـ عند $س = P$ فاذا كانه

* هـ غير متصل عند $س = P$ فانه هـ غير قابل للاشتقاق عند $س = P$

* هـ متصل عند $س = P$ وهنا نبحث في قابلية هـ للاشتقاق عند $س = P$
باستخدام التعريف او باستخدام قواعد الاشتقاق .

مثال : اوجد هـ'(س) اذا علمت انه

هـ(س) = { $س^{٣} - ١$ ، $س \leq ٢$
$س^{٢} + ٣س$ ، $٢ < س \leq ٥$
$س$ ، $س > ٥$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

الحل : $هـ(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، س < ٢ \\ س^{٢} + ٣ & ، ٢ < س < ٥ \\ ٢ & ، س > ٥ \end{cases}$

هـ غير متصل عند $س = ٢$ ، $س = ٥$ لدينا اطراف فترات

$\lim_{س \to ٢^{+}} س^{٢} + ٣ = ٧$ ، $\lim_{س \to ٢^{-}} ٣س^{٢} = ١٢$ ⇐ هـ غير متصل عند $س = ٢$

⇐ هـ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٢$

$\lim_{س \to ٥^{+}} ٢ = ٢$ ، $\lim_{س \to ٥^{-}} س^{٢} + ٣ = ٢٨$ ⇐ هـ غير متصل عند $س = ٥$

⇐ هـ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٥$.

مثال : اذا كانت $هـ(س) = \begin{cases} س^{٣} - ٣س & ، س \leq ٣ \\ س^{٢} + ٣س & ، س > ٣ \end{cases}$ ، جد $هـ'(س)$

الحل : نبحث في اتصال هـ عند $س = ٣$

$هـ(٣) = ١٨$ ⇐ هـ معرف

$\lim_{س \to ٣^{+}} س^{٢} - ٣س = ١٨$ ، $\lim_{س \to ٣^{-}} س^{٢} + ٣س = ١٨$

⇐ $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ١٨$

بما ان $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = هـ(٣) = ١٨$ ⇐ هـ متصل عند $س = ٣$

⇐ $هـ'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} - ٣ & ، س < ٣ \\ ٢س + ٣ & ، س > ٣ \end{cases}$ ، $س \neq ٣$

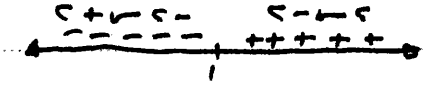
$هـ'_{+}(٣) = ٣(٣)^{٢} - ٣ = ٢٤$

$هـ'_{-}(٣) = ٢(٣) + ٣ = ٩$ ⇐ $هـ'(٣)$ غير موجودة

⇐ $هـ'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} - ٣ & ، س < ٣ \\ ٢س + ٣ & ، س > ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٣ \end{cases}$

مثال : اذا كان $هـ(س) = ٥س + |س^{٢} - ١| - ٢$ جد $هـ'(٠)$ ، $هـ'(٤)$ ، $هـ'(١)$ ؟

$س^{٢} - ١ = ٠ \Leftarrow س = ١$



⇐ $هـ(س) = \begin{cases} ٧س - ٢ & ، س \leq ١ \\ ٣س + ٢ & ، س > ١ \end{cases}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$\Leftarrow$ هـ(١) = ٧ × ١ − ٢ = ٥

$\lim_{س \to 1^+}$ ٧س − ٢ = $\lim_{س \to 1^-}$ ٣س + ٢ = ٥ $\Leftarrow$ هـ متصل عند س = ١

هـ'(١) = ٧ ، هـ'(١) = $\lim_{س \to 1^+} \frac{(٧س - ٢) - (٧ \times ١ - ٢)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to 1^+} \frac{٧س - ٧}{س - ١} = \lim_{س \to 1^+}$ ٧ = ٧

هـ'(١) = ٣ ، هـ'(١) = $\lim_{س \to 1^-} \frac{(٣س + ٢) - (٣ \times ١ + ٢)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to 1^-} \frac{٣س - ٣}{س - ١} = \lim_{س \to 1^-}$ ٣ = ٣

هـ'(١) غير موجودة

* اقتران القيمة المطلقة : نعيد التعريف فإقتران متشعب ثم نعمل كالسابق :

مثال : إذا كان هـ(س) = | س² − ٣س + ٢ | فجد هـ'(−٣) ، هـ'(١) ، هـ'(−٢) ؟

الحل : أعد التعريف : س² − ٣س + ٢ = ٠

(س − ١)(س − ٢) = ٠

س = ١ ، ٢

$\Leftarrow$ هـ(س) = { س² − ٣س + ٢ ، س $\leq$ −٢ $\Leftarrow$ هـ'(س) = { ٢س − ٣ ، س < −٢
{ −س² + ٣س − ٢ ، س > −٢ { −٢س + ٣ ، س > −٢

عند س = −٣ نقطة عادية $\Leftarrow$ هـ(−٣) = −(−٣)² + ٣(−٣) − ٢ = −٤

عند س = ١ نقطة عادية $\Leftarrow$ هـ(١) = ٣(١)² − ٣ = صفر

عند س = −٢ نقطة كعب

هـ(−٢) = (−٢)² − ٣ × −٢ + ٢

= صفر

$\lim_{س \to -2^+}$ س² − ٣س + ٢ = (−٢)² − ٣ × −٢ + ٢ = صفر

$\lim_{س \to -2^-}$ −س² + ٣س − ٢ = −(−٢)² + ٣ × −٢ − ٢ = صفر

$\Leftarrow$ هـ متصل عند س = −٢

هـ'(−٢) = $\lim_{س \to -2^+} \frac{هـ(س) - هـ(-٢)}{س + ٢}$

$= \lim_{س \to -2^+} \frac{(س^2 - ٣س + ٢) - (-١)^2 - ٣ \times -٢ + ٢)}{س + ٢}$

$= \lim_{س \to -2^+} \frac{س^2 - ٣س + ٢}{س + ٢}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$$\Leftarrow \quad = \lim_{س \to -٢} \frac{(س+٢)(س^٢ - ٢س + ١)}{س+٢}$$

$$= \lim_{س \to -٢} س^٢ - ٢س + ١ = (-٢)^٢ - ٢ \times -٢ + ١ = ٩$$

$$\text{ه}'(-٢) = \lim_{س \to -٢} \frac{(-س^٣ + ٣س - ٢) - (-(-٢)^٣ + ٣ \times -٢ - ٢)}{س+٢}$$

$$= \lim_{س \to -٢} \frac{-س^٣ + ٣س - ٢}{س+٢} = \lim_{س \to -٢} \frac{(س+٢)(-س^٢ + ٢س - ١)}{س+٢}$$

$$= \lim_{س \to -٢} -س^٢ + ٢س - ١ = -(-٢)^٢ + ٢(-٢) - ١$$

$$= -٤ - ٤ - ١ = -٩$$

بما انه $\text{ه}'_+(-٢) \neq \text{ه}'_-(-٢)$ فإنه $\text{ه}'(-٢)$ غير موجودة .

* اقتران اكبر عدد صحيح :

- اذا كان اقتران اكبر عدد صحيح لوحده منه غير متصل اذا كان ناتج التعويض عدداً صحيحاً وبالتالي منه غير قابل للاشتقاق اذا كان ناتج التعويض صحيحاً اما اذا كان ناتج التعويض ليس صحيحاً فإنه قابل للاشتقاق يساوي صفراً .

$$\text{ه}'(س) = \begin{cases} \text{صفر} & ، \text{ه}(أ) \notin \text{ص} \\ \text{غير موجودة} & ، \text{ه}(أ) \in \text{ص} \end{cases}$$

مثال : اذا كان $\text{ه}(س) = [٢س + ٠٫٦]$ فجد $\text{ه}'(٢)$ ، $\text{ه}'(١٫٧)$ ؟

الحل : $\text{ه}'(٢) =$ صفر ، لأنه $\text{ه}(٢) = ٤٫٦$

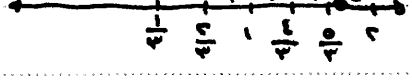
$\text{ه}'(١٫٧) =$ غير موجودة ، لأنه $\text{ه}(١٫٧) = ٤$

- اذا كان هو اقتران آخر يفيد التعريف ثم نكمل .

مثال : $\text{ه}(س) = \dfrac{[٣س - ١]}{١١ - س}$ فجد $\text{ه}'(\frac{٣}{٢})$ ؟

الحل : $١١ - س = ٠ \Leftarrow س = ١١$

$[٣س - ١] \Leftarrow س = \frac{١}{٣}$ ، $ل = \frac{١}{٣}$



$\Leftarrow \text{ه}(س) = \begin{cases} \dfrac{٣}{١١ - س} & ، \frac{٤}{٣} \leq س < \frac{٥}{٣} \end{cases}$

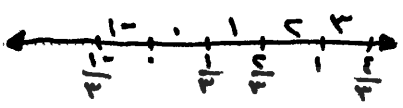
$$\text{ه}'(س) = \frac{(١١ - س) \times ٠ - ١ \times -٣}{(١١ - س)^٢} = \frac{-٣}{(١١ - س)^٢} \Leftarrow \text{ه}'(\frac{٣}{٢}) = \frac{-٣}{(١١ - \frac{٣}{٢})^٢} = \frac{-٣}{\frac{١٤٤}{٤}} = -\frac{١٢}{٤}$$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : $هـ(س) = [\![٣س - ٢]\!]$ ، جد $هـ'(س)$

الحل : $[\![٣س - ٢]\!] = [\![٣س]\!] - ٢$



$\Leftarrow هـ(س) = [\![٣س]\!] - ٢$ ، ل $= \frac{١}{٣}$

$\Leftarrow هـ(س) = \begin{cases} -٣ ، -\frac{١}{٣} \geq س < ٠ \\ -٢ ، ٠ \geq س < \frac{١}{٣} \end{cases}$

$\Leftarrow هـ'(س) = \begin{cases} هـ ، -\frac{١}{٣} < س < ٠ \\ هـ ، ٠ < س < \frac{١}{٣} \\ \text{غير موجودة} ، س = ..., -\frac{١}{٣}, ٠, \frac{١}{٣}, \frac{٢}{٣}, ... \end{cases}$

مثال : $هـ(س) = [\![٣س - ١]\!] - [\![٣س - ٣]\!]$

الحل : $هـ(س) = [\![٣س]\!] - ١ - [\![٣س]\!] + ٣$

$هـ(س) = ٢$

$\Leftarrow هـ'(س) = هـ٠$.

سؤال : متى يكون $هـ$ غير قابل للاشتقاق ؟

الجواب : ① عند نقاط عدم الاتصال

② $هـ'_+(أ) \neq هـ'_-(أ)$

③ عند أطراف المجال المغلق (أطراف الفترات) .

④ إذا كان ناتج التعويض في المشتقة $(\frac{هـ}{٠})$

⑤ $[\![هـ(س)]\!]$ ، $هـ(أ) \in ص$.

سؤال : متى يكون $هـ$ غير قابل للاشتقاق مع ذكر السبب :

① عند الرؤوس لماذا ؟ $(هـ'_+ \neq هـ'_-)$

② نقاط عدم الاتصال (دوائر مفتوحة أو قفزات)

③ عند أطراف الفترات .

مثال : ابحث في قابلية $هـ(س) = س^{\frac{١}{٣}}$ للاشتقاق على الفترة $[-١ ، ١]$ ؟

الحل : $هـ'(س) = \frac{١}{٣} س^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$

$\Leftarrow هـ'(٠)$ غير موجودة (ناتج التعويض $\frac{١}{٠هـ}$) ، $هـ'(-١)$ ، $هـ'(١)$ غير موجودة

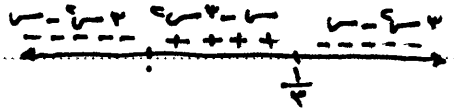
$\Leftarrow$ أطراف مفتوحة ، $هـ$ قابل للاشتقاق على $(-١ ، ١) - \{٠\}$

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدروسيات
تصميم وإخراج فريق عمل موقع مكتبة الوسام التعليمي www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : ابحث في قابلية قـ(س) = | س - ٣س٢ | للاشتقاق على الفترة [-١ ، ٥] ؟

الحل : س - ٣س٢ = ٠ ⇐ س(١ - ٣س) = ٠



⇐ س = ٠ ، ١/٣

⇐ قـ(س) = { ٣س٢ - س ، س ≥ ٠ ، س ≤ ١/٣
{ س - ٣س٢ ، ٠ ≤ س ≤ ١/٣

⇐ قـ'(س) = { ٦س - ١ ، س < ٠ ، س > ١/٣
{ ١ - ٦س ، ٠ < س < ١/٣

* قـ'(-١) ، قـ'(٥) غير موجودتين لأنهما أطراف الفترة .

* قـ(٠) = ٠ ، نهـا(س→٠+) س - ٣س٢ = ٠ ، نهـا(س→٠-) ٣س٢ - س = ٠ ⇐ نهـا(س→٠) قـ(س) = ٠

⇐ قـ متصل عند س = ٠

قـ'+(٠) = ١ - ٦س = ١ ، قـ'-(٠) = ٦س - ١ = -١

⇐ قـ'(٠) غير موجودة

* قـ(١/٣) = ٣(١/٣)٢ - ١/٣ = ٠

نهـا(س→١/٣+) ٣س٢ - س = ٠ ، نهـا(س→١/٣-) س - ٣س٢ = ٠ ⇐ نهـا(س→١/٣) قـ(س) = ٠

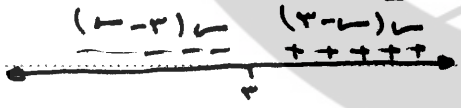
⇐ قـ متصل عند س = ١/٣

قـ'+(١/٣) = ٦ × ١/٣ - ١ = ١ ، قـ'-(١/٣) = ١ - ٦ × ١/٣ = -١

⇐ قـ'+(١/٣) ≠ قـ'-(١/٣) ⇐ قـ'(١/٣) غير موجودة .

وزاري ٢٠١١ ش : ابحث في قابلية قـ عندما س = ٣ ؟ حيث قـ(س) = س | س - ٣ |

الحل | س - ٣ | ⇐ س - ٣ = ٠



⇐ س = ٣

قـ(س) = { س(س - ٣) ، س ≥ ٣
{ س(٣ - س) ، س < ٣

قـ'(س) = { ٢س - ٣ ، س > ٣
{ ٣ - ٢س ، س < ٣

قـ(٣) = ٠ ، نهـا(س→٣+) س(س-٣) = نهـا(س→٣-) س(٣-س) = ٠ ⇐ قـ متصل عند س = ٣

قـ'+(٣) = ٢ × ٣ - ٣ = ٣ ، قـ'-(٣) = ٣ - ٢ × ٣ = -٣ ⇐ قـ غير قابل للاشتقاق عند س = ٣

ملاحظة : إذا لم يتم تعريف المشتقة نستخدم تعريف المشتقة .

تم تحميل هذا الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

* لبقية المسائل ص ١١٩ + ١٢٠ :-

س١ ب) $ص = س^2 (1 - س^3)$

الحل : $\frac{د ص}{د س} = س^2 (-3 س^2) + 2 س (1 - س^3)$ أو $ص = س^2 - س^5$ بالضرب

$= -3 س^4 + 2 س - 2 س^4$

$\frac{د ص}{د س} = 2 س - 5 س^4$

$= -5 س^4 + 2 س$

ب) $ص = 8 س^{-5}$

الحل : $\frac{د ص}{د س} = -40 س^{-6} = \frac{-40}{س^6}$

ج) $ص = (2 س^2 - 4 س + 1)(6 س - 5)$

الحل : $\frac{د ص}{د س} = (2 س^2 - 4 س + 1)(6) + (4 س - 4)(6 س - 5)$

$= 12 س^2 - 24 س + 6 + 24 س^2 - 20 س - 24 س + 20$

$= 36 س^2 - 68 س + 26$

د) $ص = \frac{س^2}{1 - س}$

الحل $\frac{د ص}{د س} = \frac{(1 - س)(2 س) - (س^2)(-1)}{(1 - س)^2}$

$= \frac{2 س - 2 س^2 + س^2}{(1 - س)^2} = \frac{2 س - س^2}{(1 - س)^2}$

هـ) $ص = \frac{5 - 4 س}{2 + 3 س}$

الحل : $\frac{د ص}{د س} = \frac{(2 + 3 س)(4) - (5 - 4 س)(3)}{(2 + 3 س)^2}$

$= \frac{8 + 12 س + 15 - 12 س}{(2 + 3 س)^2} = \frac{23}{(2 + 3 س)^2}$

س٢ ب) $ص = س (س^2 + 2)(1 - 2 س^2)$

$ص = (س^3 + 2 س)(1 - 2 س^2)$

$\frac{د ص}{د س} = (س^3 + 2 س)(-4 س) + (1 - 2 س^2)(3 س^2 + 2)$

$= -4 س^4 - 8 س^2 + 3 س^2 + 2 - 6 س^4 - 4 س^2$

$= -10 س^4 - 9 س^2 + 2$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

ب) $ص = |س-١|(س^٢+س+١)$

الحل: $|س-١| = ٠ \Leftarrow س = ١$

	$س-١$	$١-س$
	$+$	$-$

$$ص = \begin{cases} (س-١)(س^٢+س+١) & ، س \geq ١ \\ (١-س)(س^٢+س+١) & ، س < ١ \end{cases}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \begin{cases} (س-١)(٢س+١)+(١)(س^٢+س+١) & ، س > ١ \\ (١-س)(٢س+١)+(-١)(س^٢+س+١) & ، س < ١ \end{cases}$$

$$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \begin{cases} ٢س^٢-٢س+س-١+س^٢+س+١ & ، س > ١ \\ ٢س+١-٢س^٢-س-س^٢-س-١ & ، س < ١ \end{cases}$$

$$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \begin{cases} ٣س^٢ & ، س > ١ \\ -٣س^٢ & ، س < ١ \end{cases}$$

$\lim_{س \to ١^+}(س-١)(س^٢+س+١) = \lim_{س \to ١^-}(١-س)(س^٢+س+١) =$ صفر $= ص(١)$

$\Leftarrow ص$ متصل عند $س = ١$

$\Leftarrow ص'_+(١) = \lim_{س \to ١^+} \frac{ص(س)-ص(١)}{س-١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{(س-١)(س^٢+س+١)}{س-١} = ٣$

$ص'_-(١) = \lim_{س \to ١^-} \frac{ص(س)-ص(١)}{س-١} = \lim_{س \to ١^-} \frac{(١-س)(س^٢+س+١)}{س-١} = -٣$

$\Leftarrow ص$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ١$

$$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \begin{cases} ٣س^٢ & ، س < ١ \\ -٣س^٢ & ، س > ١ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ١ \end{cases}$$

جـ) $ص = \frac{٨-س+٣س^٤}{٩-س^٢}$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{(٩-س^٢)(-١+٦س^٥) - (٨-س+٣س^٤)(-٩)}{(٩-س^٢)^٢}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-٩+١٢س+٩س-٥٤س^٤+٧٢-٩س+٢٧س^٤}{(٩-س^٢)^٢}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-٢٧س^٤+١٢س+٧٠}{(٩-س^٢)^٢}$$

د) $ص = \frac{س^٢-٤س+١٣}{س(س-١)}$ ، $س \in [١ ، ٤]$

$س^٢-٤س+١٣ = ٠ \Leftarrow (س-٣)(س-١) = ٠$

$س = ١ ، ٣$

	١		٣		٤
	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$$ص = \begin{cases} \frac{س^2 - ٤س + ٣}{س(س-١)} & ، ٣ \leq س \leq ٤ \\ \frac{-(س^2 - ٤س + ٣)}{س(س-١)} & ، ١ < س < ٣ \end{cases}$$

$$ص = \begin{cases} \frac{(س-١)(س-٣)}{س(س-١)} & ، ٣ \leq س \leq ٤ \\ -\frac{(س-١)(س-٣)}{س(س-١)} & ، ١ < س < ٣ \end{cases}$$

$$\Leftarrow ص = \begin{cases} \frac{س-٣}{س} & ، ٣ \leq س \leq ٤ \\ -\frac{(س-٣)}{س} & ، ١ < س < ٣ \end{cases} = \begin{cases} ١ - \frac{٣}{س} & ، ٣ \leq س \leq ٤ \\ -١ + \frac{٣}{س} & ، ١ < س < ٣ \end{cases}$$

$$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \begin{cases} \frac{٣}{س^2} & ، ٣ < س < ٤ \\ -\frac{٣}{س^2} & ، ١ < س < ٣ \end{cases}$$

* المشتقة غير موجودة عند $س = ٣ ، ١$ لأنها طرفا فترة .

* ص متصل عند $س = ٣$

$هـ'_+(٣) = \frac{٣}{٣^2} = \frac{١}{٣}$ ، $هـ'_-(٣) = -\frac{٣}{٣^2} = -\frac{١}{٣}$ $\Leftarrow$ $هـ'(٣)$ غير موجودة .

$$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \begin{cases} \frac{٣}{س^2} & ، ٣ < س < ٤ \\ -\frac{٣}{س^2} & ، ١ < س < ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ١ ، ٣ ، ٤ \end{cases}$$

ج٣ $ل(٣) = -٢$ ، $ل'(٣) = ٤$ أجد $هـ'(٣)$ ؟

أ) $هـ(س) = ٣س^2 - ٥ ل(س)$

$هـ'(س) = ٦س - ٥ ل'(س)$

$هـ'(٣) = ٦ \times ٣ - ٥ ل'(٣)$

$= ١٨ - ٥ \times ٤ = ١٨ - ٢٠ = -٢$

ب) $هـ(س) = \frac{س^2 + ١}{ل(س)}$

$$هـ'(س) = \frac{ل(س) \times ٢س - (س^2 + ١) ل'(س)}{(ل(س))^2}$$

$$هـ'(٣) = \frac{ل(٣) \times ٦ - (٩ + ١) ل'(٣)}{(ل(٣))^2}$$

$$= \frac{(-٢ \times ٦) - ١٠ \times ٤)}{(-٢)^2} = \frac{-٤ - ٨٦}{٤} = \frac{-٣٦}{٤} = -٨$$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

ب) $هـ(س) = \frac{٦}{ل(س)}$

$هـ'(س) = \frac{-٦ \times ل'(س)}{(ل(س))^٢}$

$\Leftarrow هـ'(٣) = \frac{-٦ \times ل'(٣)}{(ل(٣))^٢} = \frac{-٦ \times ٤}{(-٣)^٢} = \frac{-٢٤}{٤} = -٦$

د) $هـ(س) = س^٣ ل(س)$

$هـ'(س) = س^٣ \times ل'(س) + ٣س^٢ \times ل(س)$

$هـ'(٣) = (٣)^٣ \times ل'(٣) + ٣(٣)^٢ \times ل(٣)$

$= ٢٧ \times ٤ + ٢٧ \times ٢$

$= ١٠٨ + ٥٤ = ١٦٢$

س٤) $ل'(-٣) = -١$ ، $ل(-٣) = ١٠$ ، $ه'(-٣) = ٢$ ، $ه(-٣) = -٣$ جد $هـ'(-٣)$ ؟

أ) $هـ(س) = ٢ ل(س) \times ه(س)$

$هـ'(س) = ٢(ل'(س) \times ه(س) + ل(س) \times ه'(س))$

$هـ'(-٣) = ٢(ل'(-٣) \times ه(-٣) + ل(-٣) \times ه'(-٣))$

$= ٢(-١ \times -٣ + ١٠ \times ٢)$

$= ٢(٣ + ٢٠) = ٤٦$

ب) $هـ(س) = \frac{ل(س)}{٤ + ه(س)}$

$هـ'(س) = \frac{(٤ + ه(س))(ل'(س)) - ل(س)(٠ + ه'(س))}{(٤ + ه(س))^٢}$

$هـ'(-٣) = \frac{(٤ + ه(-٣))ل'(-٣) - (ل(-٣))(ه'(-٣))}{(٤ + ه(-٣))^٢}$

$هـ'(-٣) = \frac{(٤ + -٣) \times -١ - (١٠ \times ٢)}{(٤ + -٣)^٢}$

$هـ'(-٣) = \frac{-١ - ٢٠}{١} = \boxed{-٢١}$

س٥ أ) $هـ(س) = \frac{٣}{س^٢} - [٢س]$ ، $س = ١٫٥$

$هـ'(س) = \frac{-٣}{س^٣} - صفر$ لأن $[١٫٥ \times ٢] = [٣٫٤]$

$هـ'(١٫٥) = \frac{-٣}{(١٫٥)^٣} = \frac{-٣}{٣٫٣٧٥} = \frac{-٣٠٠٠}{٣٣٧٥}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

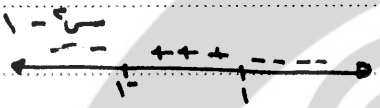
ب) $و(س) = \frac{١ - ٣س}{س^٢ - ٢}$ ، $س = ٣$

$و'(س) = \frac{(س^٢ - ٢)(-٣) - (١ - ٣س)(٢س)}{(س^٢ - ٢)^٢}$

$و'(٣) = \frac{(٩ - ٢)(-٣) - (١ - ٩)(٦)}{٤٩}$

$= \frac{-٢١ + ٤٨}{٤٩} = \frac{٢٧}{٤٩}$

ج) $و(س) = |١ - س^٢|$ ، $س = -٢$



$١ - س^٢ = ٠ \Leftarrow س = \pm ١$

$\Leftarrow و(س) = س^٢ - ١$ عند $س = -٢$

$و'(س) = ٢س$

$\Leftarrow و'(-٢) = ٢ \times -٢ = -٤$

٦) اثبت ان $\frac{د}{د س}(ل(س) م(س) هـ(س)) = ل(س) م(س) هـ'(س) + ل(س) م'(س) هـ(س) + ل'(س) م(س) هـ(س)$

البرهان: افرض $ل \times م = ك$

$\Leftarrow \frac{د}{د س}(ك(س) هـ(س)) = ك(س) \times هـ'(س) + ك'(س) \times هـ(س)$

$ك'(س) = ل(س) \times م'(س) + ل'(س) \times م(س)$

$\Leftarrow = ل(س) م(س) \times هـ'(س) + (ل(س) \times م'(س) + ل'(س) \times م(س)) \times هـ(س)$

$= ل(س) م(س) هـ'(س) + ل(س) م'(س) هـ(س) + ل'(س) م(س) هـ(س)$

لأن $م(س) = و(س) = ل(س)$

$\frac{د}{د س}(ل(س))^٣ = ٣(ل(س))^٢ . ل'(س)$

$\Leftarrow \frac{د}{د س}(ل(س))^٣ = ل(س) ل(س) ل'(س) + ل(س) ل'(س) ل(س) + ل'(س) ل(س) ل(س)$

$= ل^٢ ل' + ل^٢ ل' + ل^٢ ل'$

$= ٣ ل^٢ ل'$

$\Leftarrow = ٣(ل(س))^٢ . ل'(س)$

٨) $و(س) = \begin{cases} ٢س^٢ & ، س \geq ١ \\ ٢س^٣ + ١ & ، س < ١ \end{cases}$ ، عند $س = ١$

$و'(س) = \begin{cases} ٤س & ، س > ١ \\ ٦س^٢ & ، س < ١ \end{cases}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

عند س = ١ ⇐ هـ(١) = ٣ ، $\lim_{س \to 1^+}$ س٢ + ١ = $\lim_{س \to 1^-}$ ٣ س٢ = ٣

⇐ هـ متصل عند س = ١

هـ+(١) = ٦(١)٢ = ٦ ⇐ هـ(١) = ٦

هـ-(١) = ٦(١) = ٦

⇐ هـ(س) = { ٦س ، س ≤ ١
٦س٢ ، س > ١

ج٩ هـ(س) = (س٢ + ٣س) |س| ، جد هـ'(س)

س = ٠

هـ(س) = { س٣ + ٣س٢ ، س ≤ ٠
−س٣ − ٣س٢ ، س > ٠

هـ'(س) = { ٣س٢ + ٦س ، س < ٠
−٣س٢ − ٦س ، س > ٠

هـ(٠) = $\lim_{س \to 0^+}$ س٣ + ٣س٢ = $\lim_{س \to 0^-}$ −س٣ − ٣س٢ = صفر ⇐ هـ متصل عند س = صفر

هـ+(٠) = صفر ، هـ-(٠) = صفر ⇐ هـ'(٠) = صفر

⇐ هـ'(س) = { ٣س٢ + ٦س ، س < ٠
−٣س٢ − ٦س ، س > ٠
صفر ، س = صفر

مثال هـ(س) = { ٣س٢ ، س ≥ ١ قابل للاشتقاق عند س = ١
أ س + ب ، س < ١ أوجد كلا من أ ، ب

هـ'(س) = { ٦س ، س > ١
أ ، س < ١

هـ+(١) = أ هـ-(١) = ٦

بما أن هـ'(١) موجودة ⇐ أ = ٦

هـ قابل للاشتقاق ⇐ هـ متصل عند س = ١

$\lim_{س \to 1^+}$ أ س + ب = $\lim_{س \to 1^-}$ ٣س٢

أ + ب = ٣ ⇐ ٦ + ب = ٣ ⇐ ب = −٣

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

الدرس السادس : المشتقات العليا :

هـ' تسمى المشتقة الثانية وكذلك ص'' ، $\frac{د^٢ص}{د س^٢}$

هـ''' تسمى المشتقة الثالثة وكذلك ص''' ، $\frac{د^٣ص}{د س^٣}$

اما اكبر من المشتقة الثالثة نضعها في قوس صغير مثل $هـ^{(٤)}$ أو $ص^{(٤)}$ وهكذا

مثال : اذا كان هـ(س) = ٣ س^٤ - ٢ س^٣ + ٢ س فجد $هـ^{(٤)}$(س) ؟

الحل : هـ'(س) = ١٢ س^٣ - ٦ س + ٢

هـ''(س) = ٣٦ س^٢ - ٦

هـ'''(س) = ٧٢ س

$هـ^{(٤)}$(س) = ٧٢

مثال : اذا كان هـ(س) = س^ن وكان $هـ^{(٤)}$(س) = ٦٠ (ن-٣) س$^{ن-٤}$

الحل : هـ'(س) = ن س$^{ن-١}$

هـ''(س) = ن (ن-١) س$^{ن-٢}$

هـ'''(س) = ن (ن-١) (ن-٢) س$^{ن-٣}$

$هـ^{(٤)}$(س) = ن (ن-١) (ن-٢) (ن-٣) س$^{ن-٤}$

⇐ ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣) س$^{ن-٤}$ = ٦٠ (ن-٣) س$^{ن-٤}$

⇐ ن (ن-١)(ن-٢) = ٦٠

⇐ ن = ٥ ، ن-١ = ٤ ، ن-٢ = ٣

⇐ ن = ٥

تدريب (٢) ص١٢٢ : هـ(س) = ٣ س^ن ، $هـ^{(٤)}$(س) = ٩ س^٣ فجد ٩

الحل : هـ'(س) = ٣ن س$^{ن-١}$

هـ''(س) = ٣ن (ن-١) س$^{ن-٢}$

هـ'''(س) = ٣ن (ن-١) (ن-٢) س$^{ن-٣}$

$هـ^{(٤)}$(س) = ٣ن (ن-١) (ن-٢) (ن-٣) س$^{ن-٤}$ = ٩ س^٣

⇐ ن-٤ = ٣ ⇐ ن = ٧

٩ = ٣ × ٧ (٧-١)(٧-٢)(٧-٣) = ٢٥٢٠

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

لبقية الأسئلة ص ١٤٣ :-

س ٢) أ) $ص = ٧س^{٣} - \frac{٥}{٢}س^{٢} + س$

$ص' = ٢١س^{٢} - ٥س + ١$

$ص'' = ٤٢س - ٥$

ب) $ص = \frac{س+١}{س}$

$ص' = \frac{س(١) - (س+١)(١)}{س^{٢}} = \frac{س - س - ١}{س^{٢}}$

$= \frac{-١}{س^{٢}}$

$ص'' = \frac{-١ \times ٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

ج) $ص = (س^{٢} + ٣س)|س|$

$|س| \Leftarrow س = ٠$

$ص = \begin{cases} س^{٣} + ٣س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ -س^{٣} - ٣س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$

$ص' = \begin{cases} ٣س^{٢} + ٦س & ، س > ٠ \\ -٣س^{٢} - ٦س & ، س < ٠ \end{cases}$ $ص'(٠) = ص'(٠) = ٠$

$ص'' = \begin{cases} ٦س + ٦ & ، س > ٠ \\ -٦س - ٦ & ، س < ٠ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٠ \end{cases}$ $ص''$ غير متصل عند $س = ٠$ ⬅ $ص'$ غير قابل للاشتقاق

س ٤) $و(س) = (٣س^{٢} + ٢)(س^{٣} - ٢س + ١)$

$و'(س) = (٣س^{٢} + ٢)(٣س^{٢} - ٢) + ٦س(س^{٣} - ٢س + ١)$

$= ٩س^{٤} - ٦س^{٢} + ٦س^{٢} - ٤ + ٦س^{٤} - ١٢س^{٢} + ٦س$

$= ١٥س^{٤} - ١٢س^{٢} + ٦س - ٤$

$و'(١) = ١٥ - ١٢ + ٦ - ٤ = ٥$

$و''(س) = ٦٠س^{٣} - ٢٤س + ٦$

$و''(١) = ٦٠(١)^{٣} - ٢٤(١) + ٦ = ٤٢$

⬅ $و'(١) \times و''(١) = ٥ \times ٤٢ = ٢١٠$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

س٣ $ه(س) = \frac{-٢}{س^٢}$ اثبت ان $ه'(١) = -٤$ $ه''(٢)$

$ه'(س) = \frac{-٢}{س^٢}$

$ه'(١) = \frac{-٢}{١^٢} = -٢$

$ه''(س) = \frac{-٢ \times -٢ س}{س^٤} = \frac{٤}{س^٣}$

$ه''(٢) = \frac{٤}{(٢)^٣} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow ه'(١) = -٢ = -٤ ه''(٢)$

$= -٤ \times \frac{١}{٢} = -٢$

س٤ أ) $ص = س^٥ + س^{-٦}$

$ص' = ٥س^٤ - ٥ س^{-٦}$

$ص'' = ٢٠ س^٣ + ٣٠ س^{-٧}$

$ص''' = ٦٠ س^٢ - ٢١٠ س^{-٨}$

ب) $ص = أ س^٣ + ب س + جـ$

$ص' = ٣أ س^٢ + ب$

$ص'' = ٦أ س$

$ص''' = ٦أ$

س٥ أ) $ه(س) = ٣س^٢ - ٢$

$ه'(س) = ٦س$

$ه''(س) = ٦$

$ه'''(س) = صفر \Leftarrow ه''(٢) = صفر$

ب) $ه(س) = ٦س^٥ - ٤س^٢$

$ه'(س) = ٣٠ س^٤ - ٨س$

$ه''(س) = ١٢٠ س^٣ - ٨$

$ه'''(س) = ٣٦٠ س^٢$

$ه'''(١) = ٣٦٠$

جـ) $ه(س) = \frac{١}{س^٣} \Leftarrow ه'(س) = -٣ س^{-٤}$

$ه''(س) = ١٢ س^{-٥} \Leftarrow ه'''(س) = -٦٠ س^{-٦} \Leftarrow ه^{(٤)}(س) = ٣٦٠ س^{-٧}$

$ه^{(٤)}(٢) = \frac{٣٦٠}{٢^٧} = \frac{٣٦٠}{١٢٨}$

س٦ $ه(س) = س \, ل(س)$

$ه'(س) = س \, ل'(س) + ل(س) \times ١$

$ه''(س) = ١ \times ل'(س) + س \times ل''(س) + ل'(س)$

$= س ل''(س) + ٢ ل'(س)$

$ه'''(س) = س \times ل'''(س) + ١ \times ل''(س)$

$+ ٢ ل''(س)$

$ه'''(س) = س ل'''(س) + ٣ ل''(س)$

مكتبة الوسام AlWesam قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

الدرس السابع : مشتقات المقترانات الدائرية :

قاعدة (١) : اذا كان هـ(س) = جا س ، س ∈ ح فإن هـ'(س) = جتا س

البرهان : هـ'(س) = $\lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{جا ع - جا س}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{2 جتا(\frac{ع+س}{2}) جا(\frac{ع-س}{2})}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} جتا(\frac{ع+س}{2}) \times \lim_{ع \to س} \frac{جا(\frac{ع-س}{2})}{ع-س}$

ارضن ص = $\frac{ع-س}{2}$ ⇐ ع → س ⇐ ص → ٠

$= \lim_{ع \to س} جتا(\frac{ع+س}{2}) \times \lim_{ص \to ٠} \frac{جا ص}{ص}$

$= جتا س \times \frac{1}{1} = جتا س$

قاعدة (٢) اذا كان هـ(س) = جتا س فإن هـ'(س) = - جا س

البرهان : هـ'(س) = $\lim_{ع \to س} \frac{جتا ع - جتا س}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{-2 جا(\frac{ع+س}{2}) جا(\frac{ع-س}{2})}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} -جا(\frac{ع+س}{2}) \times \lim_{ع \to س} \frac{جا(\frac{ع-س}{2})}{ع-س}$ ارضن ص = $\frac{ع-س}{2}$

$= \lim_{ع \to س} -جا(\frac{ع+س}{2}) \times \lim_{ص \to ٠} \frac{جا ص}{ص}$

$= -جا س \times \frac{1}{1}$

$= -جا س$

مثال : جد $\frac{د ص}{د س}$ اذا علمت ان ص = ٣ س - جتا س + جا س

الحل $\frac{د ص}{د س}$ = ٣ + جا س + جتا س

مثال : هـ(س) = ٢ س + ٢ جا س ، جد هـ'($\frac{\pi}{2}$)

هـ'(س) = ٢ + ٢ جتا س

هـ'($\frac{\pi}{2}$) = ٢ + ٢ جتا $\frac{\pi}{2}$ = ٢

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : جد قا(س) اذا علمت ان قا(س) = س² جاس

الحل قا'(س) = س² × جتاس + ٢س × جاس

= س² جتاس + ٢س جاس

مثال : اذا كان ص = ظاس فجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

الحل : ص = $\frac{جاس}{جتاس}$

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{جتاس \times جتاس - جاس \times -جاس}{جتا^{٢}س}$

= $\frac{جتا^{٢}س + جا^{٢}س}{جتا^{٢}س}$ = $\frac{١}{جتا^{٢}س}$

= قا²س

قاعدة : قا(س) = ظاس ⇐ قا'(س) = قا²س

مثال : اذا كان قا(س) = قاس فاثبت ان قا'(س) = قاس ظاس

البرهان : قا(س) = $\frac{١}{جتاس}$

قا'(س) = $\frac{جتاس \times ٠ - ١ \times -جاس}{جتا^{٢}س}$

قا'(س) = $\frac{جاس}{جتا^{٢}س}$ = $\frac{جاس}{جتاس} \times \frac{١}{جتاس}$

= ظاس × قاس

= قاس ظاس

مثال جد قا'(س) اذا علمت ان قا(س) = قتاس

الحل قا'(س) = $\frac{-جتاس}{جا^{٢}س}$ = $\frac{-جتاس}{جاس} \times \frac{١}{جاس}$

= -ظتاس قتاس

مثال اثبت ان $\frac{د ص}{د س}$ = -قتا²س اذا علمت ان ص = ظتاس

الحل ص = ظتاس ⇐ ص = $\frac{جتاس}{جاس}$

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{جاس \times جاس - جتاس \times -جتاس}{جا^{٢}س}$

= $\frac{جا^{٢}س + جتا^{٢}س}{جا^{٢}س}$

= $\frac{١}{جا^{٢}س}$ = قتا²س

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

التمارين والمسائل ص ١٢٩

س ١ أ) ص = ٢ جتا س - ٣ جا س

$\frac{د ص}{د س}$ = -٢ جا س - ٣ جتا س

ب) ص = $\frac{جا س}{س}$

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{س \times جتا س - جا س \times ١}{س^٢}$ = $\frac{س جتا س - جا س}{س^٢}$

ج) ص' = ظا س ظا س - ١

د) ص = $س^٢$ جتا س

$\frac{د ص}{د س}$ = $س^٢ \times$ - جا س + ٢ س $\times$ جتا س

= - $س^٢$ جا س + ٢ س جتا س

هـ) ص = جا^٢ س + جتا^٢ س = ١

ص' = صفر

و) ص = س - ٤ ظتا س + ٢ ظا س

ص' = ١ - ٤ $\times$ - قتا س ظتا س + ٢ $\times$ - قا^٢ س

ص' = ١ + ٤ قتا س ظتا س - ٢ قا^٢ س .

س ٢ أ) هـ (س) = جتا س جا س ، س = $\frac{\pi}{٤}$.

هـ' (س) = جتا س $\times$ جتا س + - جا س $\times$ جا س

= جتا^٢ س - جا^٢ س

هـ' ($\frac{\pi}{٤}$) = جتا^٢ $\frac{\pi}{٤}$ - جا^٢ $\frac{\pi}{٤}$

= $\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ = صفر .

ب) هـ (س) = جا (-س) ، س = $\frac{\pi}{٣}$

هـ' (س) = جا (-س) = - جا س

هـ' (س) = - جتا س

هـ' ($\frac{\pi}{٣}$) = - جتا $\frac{\pi}{٣}$ = - $\frac{١}{٢}$

ج) هـ (س) = $\frac{جا س}{١ + جتا س}$ ، س = $\frac{\pi}{٢}$

هـ' (س) = $\frac{(١ + جتا س) \times جتا س - جا س \times - جا س}{(١ + جتا س)^٢}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$$\Leftarrow \text{ه}'(س) = \frac{\text{جتا}\,س + \text{جتا}^2 س + \text{جا}^2 س}{(1 + \text{جتا}\,س)^2}$$

$$= \frac{\text{جتا}\,س + 1}{(1+\text{جتا}\,س)^2} = \frac{1}{1+\text{جتا}\,س}$$

$$\text{ه}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 + \text{جتا}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

د) $\text{ه}(س) = س\,\text{جتا}\,س$ ، $س = \pi$

$\text{ه}'(س) = س \times -\text{جا}\,س + 1 \times \text{جتا}\,س$

$= -س\,\text{جا}\,س + \text{جتا}\,س$

$\text{ه}'(\pi) = -\pi\,\text{جا}\,\pi + \text{جتا}\,\pi$

$= -1$

٣) $ص = \text{جتا}\,س$ ، $ص = \text{جا}\,س$ حلولٌ لمعادلة $ص'' + ص = صفر$

$ص = \text{جتا}\,س \Leftarrow ص' = -\text{جا}\,س \Leftarrow ص'' = -\text{جتا}\,س$

$ص + ص'' = \text{جتا}\,س - \text{جتا}\,س = صفر$.

$ص = \text{جا}\,س \Leftarrow ص' = \text{جتا}\,س \Leftarrow ص'' = -\text{جا}\,س$

$ص + ص'' = \text{جا}\,س - \text{جا}\,س = صفر$

٤) أ) $\text{ه}(س) = س + \text{جتا}\,س$ $\quad [-2\pi ، 2\pi]$

$\text{ه}'(س) = 1 - \text{جا}\,س = 0$

$\Leftarrow \text{جا}\,س = 1 \Leftarrow س = \frac{\pi}{2} ، -\frac{3\pi}{2}$

ب) $\text{ه}(س) = \text{قا}\,س$

$\text{ه}'(س) = \text{قا}\,س\,\text{ظا}\,س = صفر$

إما $\text{قا}\,س = 0$ مستحيل كما عدا .

أو $\text{ظا}\,س = صفر \Leftarrow س = 0 ، \pi ، -\pi ، 2\pi ، -2\pi$.

$\Leftarrow س = 0 ، \pi ، -\pi$ لأنه $2\pi ، -2\pi$ أطراف فترة ومحذوفا

$\text{ه}(س)$ غير قابل للاشتقاق عند .

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

س٣ ص = أ جاس + ب جتاس اثبت أن (ص')^٢ + ص^٢ = أ^٢ + ب^٢

ص' = أ جتاس - ب جاس

(ص')^٢ = (أ جتاس - ب جاس)^٢ = أ^٢ جتا^٢س - ٢أب جاس جتاس + ب^٢ جا^٢س

ص^٢ = (أ جاس + ب جتاس)^٢ = أ^٢ جا^٢س + ٢أب جاس جتاس + ب^٢ جتا^٢س

(ص')^٢ + ص^٢ = أ^٢ جتا^٢س - ٢أب جاس جتاس + ب^٢ جا^٢س + أ^٢ جا^٢س + ٢أب جاس جتاس + ب^٢ جتا^٢س

= جتا^٢س (أ^٢ + ب^٢) + (أ^٢ + ب^٢) جا^٢س

= (أ^٢ + ب^٢)(جا^٢س + جتا^٢س)

= أ^٢ + ب^٢ . وهو المطلوب

ج ١) ص = قتاس

$\frac{د ص}{د س}$ = - قتاس ظتاس

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ = -((قتاس × - قتاس) + (ظتاس × - قتاس ظتاس))

= -(قتا^٣س - قتاس ظتا^٢س)

= + قتا^٣س + قتاس ظتا^٢س

ب) ص = س جاس - ٣ جتاس

$\frac{د ص}{د س}$ = س جتاس + جاس + ٣ جاس

= س جتاس + ٤ جاس

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ = - س جاس + جتاس + ٤ جتاس

= - س جاس + ٥ جتاس

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

الدرس الثامن : قاعدة السلسلة :

قاعدة : اذا كانت $و = هـ$ قابلية للاشتقاق ، $و$ عند $هـ(س)$ ، $هـ$ عند $س$ وكانت $و = هـ$ قابلة للتركيب فإنه $و \circ هـ$ قابل للاشتقاق ويكون :

$$(و \circ هـ)'(س) = و'(هـ(س)) \times هـ'(س)$$

صورة أخرى : $ص = و(ع)$ ، $ع = هـ(س)$

$$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = و'(ع) \times هـ'(س) = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

مثال : $ص = (س^٢ - ١)^٥$ جد $\frac{د ص}{د س}$

الحل : $\frac{د ص}{د س} = ٥(س^٢ - ١)^٤ \times ٢س$

$= ١٠ س (س^٢ - ١)^٤$

مثال : اذا كانت $و(س) = س^٣ - ٣س$ ، $هـ(س) = ٢س + ١$ جد $(و \circ هـ)'(س)$

الحل : $(و \circ هـ)'(س) = و'(هـ(س)) \times هـ'(س)$ ، $و'(س) = ٣س^٢ - ٣$

$= و'(٢س + ١) \times ٢$ ، $هـ'(س) = ٢$

$= ((٢س + ١)^٢ - ٣) \times ٢$

$= ٢(٣(٤س^٢ + ٤س + ١) - ٣)$

$= ٢(١٢س^٢ + ١٢س + ٣ - ٣)$

$= ٢٤س^٢ + ٢٤س$

مثال : اذا كانت $ص = ع^٢ - ٣ع$ ، $ع = ٢س - ٢$ جد $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$

الحل : $\frac{د ص}{د ع} = ٢ع - ٣$ ، $\frac{د ع}{د س} = ٢$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$= (٢ع - ٣)(٢)$

$= ٢(٢(٢س - ٢) - ٣)$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٢(٤س - ٤ - ٣)$

$= ٨س - ١٤$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = ٨$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

تدريب (١١ ص ١٢٣ : ١) ص = $(س^2 - 2س)^4$ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل : $\frac{د ص}{د س} = 4(س^2 - 2س)^3 (2س^2 - 2)$

$= (12س^2 - 8)(س^2 - 2س)^3$

(٢) و(س) = $س^2 + 5$ ، هـ(س) = $\frac{1}{س}$ فجد (و ○ هـ)′(س)

الحل : (و ○ هـ)′(س) = و′(هـ(س)) × هـ′(س)

$= و'(\frac{1}{س})(\frac{-1}{س^2})$

$= 2(\frac{1}{س})(\frac{-1}{س^2})$

$= (\frac{-2}{س^3})$

نظرية : اذا كان ص = $(هـ(س))^ن$ وكان ص قابلاً للاشتقاق فان

$\frac{د ص}{د س} = ن(هـ(س))^{ن-1} \cdot هـ'(س)$.

البرهان : افرض ع = هـ(س) $\Leftarrow \frac{د ع}{د س} = هـ'(س)$

$\Leftarrow ص = ع^ن \Leftarrow \frac{د ص}{د ع} = ن ع^{ن-1} = ن(هـ(س))^{ن-1}$

$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = ن(هـ(س))^{ن-1} \times هـ'(س)$ وهو المطلوب .

مثال : اذا كان ص = $(ظا س + قا س)^ن$ بين ص′ = ن ص قا س

الحل : ص′ = $ن(ظا س + قا س)^{ن-1} \times (قا^2 س + قا س ظا س)$

$= ن(ظا س + قا س)^{ن-1} \times قا س (قا س + ظا س)$

$= ن قا س (ظا س + قا س)^ن$

$= ن قا س ص$ وهو المطلوب .

مثال : جد $\frac{د ص}{د س}$ اذا علمت ان ص = ظا $(3س + 4)$

الحل : $\frac{د ص}{د س} = قا^2(3س + 4) \times 3$

$= 3 قا^2(3س + 4)$.

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : ص = ظتا (هـ(س)) اثبت ان $\frac{د ص}{د س}$ = - هـ'(س) جا (هـ(س))

الحل : اذا كان ع = هـ(س) ⇐ $\frac{د ع}{د س}$ = هـ'(س)

ص = ظتا ع ⇐ $\frac{د ص}{د ع}$ = - جا ع = - جا هـ(س)

⇐ $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

= - جا ع × هـ'(س)

= - جا هـ(س) × هـ'(س) وهو المطلوب .

مثال : اذا كان ص = جا هـ(س) ، بين ان $\frac{د ص}{د س}$ = هـ'(س) ظتا (هـ(س))

الحل : ع = هـ(س) $\frac{د ع}{د س}$ = هـ'(س)

ص = جا ع ⇐ $\frac{د ص}{د ع}$ = جتا ع ⇐ $\frac{د ص}{د ع}$ = جتا هـ(س)

⇐ $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

= جتا هـ(س) × هـ'(س) وهو المطلوب .

تدريب (٣) ص ٣٥ : أ) و(س) = جا٢س

و'(س) = ٢ جتا ٢س

ب) و(س) = (س٤ - ٣س٢ + ٧)^٧

و'(س) = ٧ (س٤ - ٣س٢ + ٧)^٦ × (٤س٣ - ٦س)

= (٤س٣ - ٦س) (س٤ - ٣س٢ + ٧)^٦

جـ) و(س) = جا^٣ ٥س

و'(س) = ٣ جا^٢ ٥س × ٥ × جتا ٥س

= ١٥ جا^٢ ٥س جتا ٥س

تدريب (٣) ص ١٣٦ : و(س^٣) = $\frac{١}{س}$ فجد و'(٨)

و'(س^٣) × ٣س^٢ = $\frac{-١}{س^٢}$ س^٣ = ٨ ⇐ س = ٢

و'(٨) × ٣(٢)^٢ = $\frac{-١}{(٢)^٢}$

و'(٨) × ١٢ = $\frac{-١}{٤}$

و'(٨) = $\frac{-١}{٤٨}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : اذا كان $ق(س) = (جا س + جتا س)^3$ فجد $ق'(\frac{\pi}{2})$ ؟

الحل : $ق'(س) = 3(جا س + جتا س)^2 \times (جتا س - جا س)$

$\Leftarrow ق'(\frac{\pi}{2}) = 3(جا \frac{\pi}{2} + جتا \frac{\pi}{2})^2 \times (جتا \frac{\pi}{2} - جا \frac{\pi}{2})$

$= 3(1+0)^2 \times (0-1)$

$= 3 \times 1 \times -1 = -3$

مثال : اذا كان $ص = \sqrt{س^2 - 2س}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ ؟

الحل : $ص = (س^2 - 2س)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{2}(س^2 - 2س)^{-\frac{1}{2}} \times (2س - 2)$

$= \frac{2س - 2}{2(س^2 - 2س)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2س - 2}{2\sqrt{س^2 - 2س}}$

بشكل عام للجذر التربيعي فقط

$ص = \sqrt{هـ(س)} \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{هـ'(س)}{2\sqrt{هـ(س)}}$

أي : مشتقة الجذر التربيعي $= \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر نفسه}}$

أما بقية الجذور فيتم تحويلها الى الصورة الاسية ثم نقوم بالاشتقاق .

مثال : اذا كان $ص = س^3 + 6س$ ، $م = 5 - س^2$ فجد $(ص \circ م)''(3)$

الحل : $((ص \circ م)')'(1) = ((ص \circ (م))')'(3)$

$= (ص''(م(3)) \times م')'(3)$

$= (ص''(م(3)) \times م'' + ص'''(م(3)) \times م' \times م')(3)$

$= ص''(م(3)) \times م''(3) + ص'''(م(3)) \times م'(3) \times م'(3)$

$= ص''(-4) \times 10 + ص'''(-4) \times 30 \times 30$

$= 6 \times 45 \times 10 + 6 \times 900$

$= 2700 + 5400 = 8100$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : اذا كان $ق(س) = (س^2 + 3س) = ص$ ، $ق'(4) = 3$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = 1$

الحل : $ق'(س^2 + 3س)(2س + 3) = \frac{د ص}{د س}$

عند $س = 1 \Leftarrow ق'(1^2 + 3 \times 1)(2 \times 1 + 3) = \frac{د ص}{د س}$ $\Big|_{س=1}$

$ق'(4) \times 5 = \frac{د ص}{د س}$

$3 \times 5 = \frac{د ص}{د س}$

$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = 15$

مثال : اذا كان $ق(3س^2 + 4س - 13) = س^3 - س$ ، $س > 0$ فجد $ق'(7)$ ؟

الحل : $ق'(3س^2 + 4س - 13)(6س + 4) = 3س^2$

عند $س = 2 \Leftarrow ق'(7)(6 \times 2 + 4) = 3(2)^2$

$ق'(7)(16) = \frac{12}{16}$

$\Leftarrow ق'(7) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

$ق'(3س^2 + 4س - 13) = ق'(7)$

$3س^2 + 4س - 13 = 7$

$3س^2 + 4س - 20 =$ صفر

$(3س + 10)(س - 2) = 0$

$\Leftarrow س = -\frac{10}{3}$ مرفوض ، $س = 2$

مثال : اذا كان $ق(س) = س^2 - 1$ ، $هـ(س) = 3س + 3$

فجد $\frac{د}{د س}(ق(هـ(3س^2)))$ عند $س = 2$ ؟

الحل $\frac{د}{د س}(ق(هـ(3س^2))) = ق'(هـ(3س^2)) \times هـ'(3س^2) \times 6س$

$\Leftarrow \frac{د}{د س}(ق(هـ(3س^2))) = ق'(هـ(12)) \times هـ'(12) \times 6 \times 2$

$= ق'(29) \times 3 \times 12$

$= 78 \times 36 = 2808$

مثال : اذا كان $ق(س) = 2س^2 + 1$ ، $هـ(س) = \frac{3}{س}$ فجد $(ق \circ هـ)'(س)$ عند $س = 9$ ؟

الحل $(ق \circ هـ)(س) = ق(هـ(س))$

$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س) \times \frac{1}{2\sqrt{س}}$

$= ق'(هـ(3)) \times هـ'(3) \times \frac{1}{2}$

$= ق'(\frac{1}{3}) \times \frac{-6}{9} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{4}{3} \times \frac{-6}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{-4}{9}$

$هـ'(س) = \frac{-6}{س^2}$

$هـ'(3) = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$

$ق'(س) = 4س$

$ق'(\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : اذا كان $ق(س) = \sqrt{س+1}$ ، $ه(س) = |س^2 - 4|$ فجد

$\frac{د}{دس}(ق \circ ه)(س)$ عندما $س = 1$ ؟

الحل $\frac{د}{دس}(ق(ه(س))) = ق'(ه(س)) \times ه'(س)$

$\Leftarrow \frac{د}{دس}(ق(ه(1))) = ق'(ه(1)) \times ه'(1)$

$= ق'(3) \times -2$

$= \frac{1}{2\sqrt{1+3}} \times -2$

$= \frac{-1}{2\sqrt{4}} = \frac{-1}{4}$

$ه(س) = \begin{cases} 3س^2 - 4 & ، س \geq 2 \\ 4 - س^2 & ، س < 2 \end{cases}$

$ه'(س) = \begin{cases} 6س & ، س > 2 \\ -2س & ، س < 2 \end{cases}$

$ق'(س) = \frac{1}{2\sqrt{س+1}}$

مثال : اذا كان $ق(س) = \sqrt{ب س - 1}$ ، $ه(س) = ب س^2$ وكان $(ه \circ ق)'(1) = 8$

فجد قيمة $ب$ ؟

الحل : $(ه \circ ق)'(1) = ه'(ق(1)) \times ق'(1) = 8$

$= ه'(1) \times \frac{ب}{2\sqrt{ب \times 1 - 1}} = 8$

$= 2ب \times 1 = 8$

$= 2ب = \frac{8}{2}$

$\boxed{ب = 4}$

$ق'(س) = \frac{ب}{2\sqrt{ب س - 1}}$

مثال : اذا كان $ق(س) = س^3 - 3س$ ، $س > 0$ ، فجد $ق''(4)$ ؟

الحل $ق'(س^3 - 3س) \times (3س^2 - 3) = 9س^2$

$ق'(س^3 - 3س) \times 2 + ق''(س^3 - 3س) \times (3س^2 - 3)^2 = 18س$

$ق'(4) \times 2 + ق''(4)(25) = 24$

$\frac{144}{5} \times 2 + ق''(4)(25) = 24$

$\frac{288}{5} + 25 ق''(4) = 24$

$25 ق''(4) = 24 - \frac{288}{5}$

$\frac{25}{25} ق''(4) = \frac{72}{25}$

$\boxed{ق''(4) = \frac{72}{125}}$

$ق'(س^3 - 3س) = \frac{9}{2\sqrt{س^3 - 3س - 4}}$

$س^3 - 3س - 4 = 0$

$\Leftarrow \boxed{س = 4}$ ، $س = -1$ ✗

$ق'(4) = \frac{9}{2\sqrt{64 - 12 - 4}} = \frac{9}{2\sqrt{48}} = \frac{9}{2 \times 4\sqrt{3}} = \frac{9}{8\sqrt{3}}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

التمارين ومسائل ص ١٣٧ + ١٣٨ :-

س ٢) ص = $(س^3 + 2س + 1)^{10}$

الحل $\frac{د ص}{د س} = 10(س^3 + 2س + 1)^9 \times (3س^2 + 2)$

$= (30س^2 + 20)(س^3 + 2س + 1)^9$

ب) ص = $(8 - 7س)^{-6}$

الحل ص' = $-6(8 - 7س)^{-7} \times 8$

$= -48(8 - 7س)^{-7}$

ج) ص = $\left(\frac{س^4}{(1 - س^2)^4}\right) = \left(\frac{س}{1 - س^2}\right)^4$

الحل

$\frac{د ص}{د س} = 4\left(\frac{س}{1 - س^2}\right)^3 \left(\frac{(1 - س^2)(1) - (س)(-2س)}{(1 - س^2)^2}\right)$

$= 4\left(\frac{س^3}{(1 - س^2)^3}\right)\left(\frac{1 - س^2 + 2س^2}{(1 - س^2)^2}\right)$

$= 4\left(\frac{س^3}{(1 - س^2)^3}\right)\left(\frac{1 + س^2}{(1 - س^2)^2}\right)$

$= \frac{4س^3(1 + س^2)}{(1 - س^2)^5}$

د) ص = جا $(س^2 - س)$

الحل ص' = جتا $(س^2 - س) \times (2س - 1)$

$= (2س - 1)$ جتا $(س^2 - س)$.

ع) إذا كان ق $(س) = س^2 + 3س$ ، هـ $(س) = س^3 - 4$ ، فجد (ق ○ هـ)' (2) .

الحل: $(ق ○ هـ)'(2) = ق'(هـ(2)) \times هـ'(2)$

$= (2)(هـ(2)) + 3)(3(2)^2)$

$= (2(8 - 4) + 3)(12)$

$= (8 + 3)(12)$

$= 11 \times 12 = 132$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

س٣ $ه(١) = -٢$ ، $ه'(١) = ٢$ ، $هـ'(-٢) = \frac{١}{٢}$ فجد $(هـ \circ ه)'(١)$

الحل : $(هـ \circ ه)'(١) = هـ'(ه(١)) \times ه'(١)$

$= هـ'(-٢) \times ٢$

$= \frac{١}{٢} \times ٢ = ١$

س٤ $ص = حا^{ن}(هـ(س))$ اثبت أن

$\frac{د ص}{د س} = ن\ حا^{ن-١}(هـ(س)) \times جتا\ هـ(س) \times هـ'(س)$

الحل : نفرض $ع = هـ(س) \Leftarrow \frac{د ع}{د س} = هـ'(س)$

$\Leftarrow ص = حا^{ن} ع$

$\frac{د ص}{د ع} = ن\ حا^{ن-١} ع \times جتا ع$

$= ن\ حا^{ن-١}(هـ(س)) \times جتا\ هـ(س)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$= ن\ حا^{ن-١} هـ(س) \times جتا\ هـ(س) \times هـ'(س)$

س٥ $ل(س) = ه(هـ(س))$ ، $هـ(٤) = ٤$ ، $ل'(٤) = ٢$ ، $ه'(٤) = -٥$ فجد $هـ'(٤)$

الحل $ل'(٤) = ه'(هـ(٤)) \times هـ'(٤)$

$ل'(٤) = ه'(٤) \times هـ'(٤)$

$\frac{٢}{-٥} = \frac{-٥}{} \times هـ'(٤)$

$هـ'(٤) = \frac{-٢}{٥}$

س٦ ب) $ص = ظا\ ع \Leftarrow ع = ٤ س^{٣} + س$

الحل : $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$= قا^{٢} ع \times (١٢ س^{٢} + ١)$

$= قا^{٢}(٤ س^{٣} + س)(١٢ س^{٢} + ١)$

ب) $ص = م^{٢} + ٣م$ ، $م = س^{٣} - ٤$

الحل $\frac{د ص}{د م} = ٢م + ٣$ ، $\frac{د م}{د س} = ٣ س^{٢}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = (٣ع^٢ + ٣)(٣ - ع)$

$= (٣(س^٣ - ٤) + ٣)(٣ - ع)$

$= (٣س^٣ - ١٢ + ٣)(٣ - ع)$

$= (٣س^٣ - ٩)(٣ - ع)$

$= ٩س^٣ - ٢٧ - ٣س^٣ ع$

ج٧ $ص = ظتا(س + \frac{\pi}{٤})$ اثبت ان $ص + ص'' = ٠$

الحل: $ص' = -قا^٢(س + \frac{\pi}{٤}) \times ١ = -قا^٢(س + \frac{\pi}{٤})$

$ص'' = -٢ظتا(س + \frac{\pi}{٤})$

$\Leftarrow ص + ص'' = ظتا(س + \frac{\pi}{٤}) - ٢ظتا(س + \frac{\pi}{٤})$

$\Leftarrow ص + ص'' = صفر$.

ج٨ $ص = ظاس + \frac{١}{٣}ظا^٣س$ ، برهن ان: $\frac{دص}{دس} = قا^٤س$

الحل $\frac{دص}{دس} = قا^٢س + ٣ \times \frac{١}{٣}ظا^٢س \times قا^٢س \times ١$

$= قا^٢س + ظا^٢س قا^٢س$

$= قا^٢س(١ + ظا^٢س)$

$= قا^٢س \times قا^٢س = قا^٤س$.

ج٩ أ) $ص = جا^٣٢س$ ، $س = \frac{\pi}{٤}$

$\frac{دص}{دس} = ٦جا٣س \times متا٣س \times ٣$

$= ١٨جا٣س \times متا٣س$

$\frac{دص}{دس}_{س=\frac{\pi}{٤}} = ١٨جا\frac{٣\pi}{٤} متا\frac{٣\pi}{٤}$

$= ١٨ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

$= -٩$

ب) $ص = (س - \frac{١}{س})^٣$ ، $س = ٢$

$\frac{دص}{دس} = ٣(س - \frac{١}{س})^٢(١ + \frac{١}{س^٢})$

$\frac{دص}{دس}_{س=٢} = ٣(٢ - \frac{١}{٢})^٢(١ + \frac{١}{٤})$

$= ٣(\frac{٣}{٢})^٢(\frac{٥}{٤}) = \frac{٢٧}{٤} \times \frac{٥}{٤} = \frac{١٣٥}{١٦}$

تم تحميل هذا الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

جـ) ص = س هـ(س) ، س = ٩ علماً بـ هـ(٩) = -٣ ، هـ'(٩) = -٥ :

الحل : ص' = س × هـ'(س) + ١ × هـ(س)

ص'$_{س=٩}$ = ٩ × هـ'(٩) + ١ × هـ(٩)

= ٩ × -٥ + ١ × -٣

= -٤٥ - ٣ = -٤٨

مثال ٢) ص = جا (٢ - ٤س) جد ص'

ص' = جتا(٣ - ٤س) × ٦ - س

= ٦ - س جتا ٣ - ٤س

ص' = ٦ - س × -جا ٣ - ٤س × ٦ - س + ٦ × جتا ٣ - ٤س

= ٣٦ - س جا ٣ - ٤س + ٦ جتا ٣ - ٤س

ب) ص = س ظا ($\frac{١}{س}$)

ص' = س × قا^{٢}($\frac{١}{س}$) × $\frac{-١}{س^{٢}}$ + ١ × ظا ($\frac{١}{س}$)

= $\frac{-١}{س}$ قا^{٢}($\frac{١}{س}$) + ظا($\frac{١}{س}$)

ص'' = $\frac{-١}{س}$ × ٢ قا($\frac{١}{س}$) × قا($\frac{١}{س}$) ظا($\frac{١}{س}$) × $\frac{-١}{س^{٢}}$ + قا^{٢}($\frac{١}{س}$) × $\frac{-١}{س^{٢}}$ + قا^{٢} × $\frac{-١}{س^{٢}}$

= $\frac{٢}{س^{٣}}$ قا^{٢}($\frac{١}{س}$) ظا($\frac{١}{س}$)

جـ) ص = $\frac{\text{قتا}٣س}{س^{٢}+١}$

ص' = $\frac{(س^{٢}+١)(-٣\text{قتا}٣س\text{ظتا}٣س) - (٣ - ٤س)(\text{قتا}٣س)}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

= $\frac{-٣\text{قتا}٣س\text{ظتا}٣س}{س^{٢}+١}$ - $\frac{٣ - ٤س\,\text{قتا}٣س}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

ملاحظة : إيجاد المشتقة الثانية هنا نتركها لك عزيزي الطالب

د) ص = $\frac{\text{جتا}س - ١}{\text{جتا}س + ١}$

ص' = $\frac{(\text{جتا}س + ١)(-\text{جا}س) - (\text{جتا}س - ١)(-\text{جا}س)}{(\text{جتا}س + ١)^{٢}}$

= $\frac{-\text{جا}س\,\text{جتا}س - \text{جا}س + \text{جا}س\,\text{جتا}س - \text{جا}س}{(\text{جتا}س + ١)^{٢}}$ = $\frac{-٢\text{جا}س}{(\text{جتا}س + ١)^{٢}}$

المشتقة الثانية لك عزيزي الطالب

www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$$ص'' = \frac{٣ قتا^{٣} ٣س + ٣ قتا ٣س ظتا^{٢} ٣س - ٩ س^{٢} قتا ٣س ظتا ٣س}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$$

$$+ \frac{١٨ س^{٣} قتا^{٢} ٣س ظتا ٣س}{(س^{٣}+١)^{٢}} + \frac{١٨ س^{٤} (س^{٣}+١) قتا ٣س}{(س^{٣}+١)^{٢}}$$

$$ص'' = \frac{٣ قتا^{٣} ٣س + ٣ قتا ٣س ظتا^{٢} ٣س - ٩ س^{٢} قتا ٣س ظتا ٣س}{(س^{٣}+١)^{٢}}$$

$$+ \frac{١٨ س^{٤} قتا ٣س}{(س^{٣}+١)^{٣}}$$

١١) $هـ(ها ٢س) = قتا ٣س$ ، $س \in (٠ ، \frac{\pi}{٣}]$ حيث $هـ(\frac{١}{٢})$

$هـ'(ها ٢س) \times صتا ٢س \times ٢ = -٢ قتا ٢س ظتا ٢س$

$ها ٢س = \frac{١}{٢} \Leftarrow ٢س = \frac{\pi}{٦}$

$\Leftarrow هـ'(\frac{١}{٢}) \times صتا \frac{\pi}{٦} \times ٢ = -٢ قتا \frac{\pi}{٦} ظتا \frac{\pi}{٦}$

$هـ'(\frac{١}{٢}) \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٢ = -٢ \times ٢ \times \sqrt{٣}$

$هـ'(\frac{١}{٢}) = -٤$

١٢) $ص = هـ(س^{٢} + ٢س)$ ، $هـ'(٣) = ٥$ حيث $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = ١$

$\frac{د ص}{د س} = هـ'(س^{٢}+٢س) \times (٢س + ٢)$

$\frac{د ص}{د س}_{س=١} = هـ'(٣) \times (٢+٢)$

$= ٥ \times ٤$

$= ٢٠$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

الدرس التاسع : الاشتقاق الضمني :

* نستخدم في المعادلات التي يصعب فيها فصل المتغيرات وايجاد احدها بدلالة الآخر . ويكون الاشتقاق كما مر سابقاً لكنه عند اشتقاق ص نكتب $\frac{د ص}{د س}$.

مثال : $س^٣ + ٢ص - ١٢ = ٠$ جد $\frac{د ص}{د س}$

الحل : $٣ س^٢ + ٢ \frac{د ص}{د س} = ٠$

$\frac{د ص}{د س} = -\frac{٣ س^٢}{٢} \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = -\frac{٣ س^٢}{٢}$

تدريب (١١ : ١) $٤ س^٢ - ٢ ص^٢ = ٩$

الحل : $٨ س - ٢ \times ٢ ص \frac{د ص}{د س} = ٠$

$٨ س - ٤ ص \frac{د ص}{د س} = ٠$

$٤ ص \frac{د ص}{د س} = ٨ س$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٨ س}{٤ ص} = \frac{٢ س}{ص}$

٢) $س^٣ + ص^٣ = ٣ س ص$

الحل : $٣ س^٢ + ٣ ص^٢ \frac{د ص}{د س} = ٣ س \times \frac{د ص}{د س} + ٣ ص$

$٣ ص^٢ \frac{د ص}{د س} - ٣ س \frac{د ص}{د س} = ٣ ص - ٣ س^٢$

$\frac{د ص}{د س} (٣ ص^٢ - ٣ س) = ٣ ص - ٣ س^٢$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٣ ص - ٣ س^٢}{٣ ص^٢ - ٣ س} = \frac{ص - س^٢}{ص^٢ - س}$

٣) $س^٢ = هـ ص$

$٢ س = هـ ص \frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٢ س}{هـ ص}$

تدريب (٢) ١) $هـ ص - جا س = ٢$

$\frac{١}{هـ ص} \times \frac{د ص}{د س} - جتا س = ٠$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$\frac{\frac{دص}{دس}}{ص^{2}} = ظتا\ س$

$\frac{دص}{دس} = ص^{2}\ ظتا\ س$

٤) $ص = ص^{3}\sqrt{٥س^{2}+١}$

$\frac{دص}{دس} = ص^{3} \times \frac{١٠س}{٢\sqrt{٥س^{2}+١}} + ٣ص^{2}\frac{دص}{دس} \times \sqrt{٥س^{2}+١}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١٠س\ ص^{3}}{٢\sqrt{٥س^{2}+١}} + ٣ص^{2}\sqrt{٥س^{2}+١}\ \frac{دص}{دس}$

$\frac{دص}{دس} - ٣ص^{2}\sqrt{٥س^{2}+١}\ \frac{دص}{دس} = \frac{١٠س\ ص^{3}}{٢\sqrt{٥س^{2}+١}}$

$\frac{دص}{دس}(١ - ٣ص^{2}\sqrt{٥س^{2}+١}) = \frac{١٠س\ ص^{3}}{٢\sqrt{٥س^{2}+١}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٥س\ ص^{3}}{(٢\sqrt{٥س^{2}+١})(١ - ٣ص^{2}\sqrt{٥س^{2}+١})}$

تدريب(٣): اذا كان $س = جا\ ص$ ، $ص \in (٠, \frac{\pi}{٢})$

اثبت ان $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{\sqrt{١-س^{2}}}$

البرهان: $١ = ظتا\ ص \cdot \frac{دص}{دس}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{ظتا\ ص}$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{\sqrt{١-س^{2}}}$

$جا^{2}ص + ظتا^{2}ص = ١$

$ظتا^{2}ص = ١ - جا^{2}ص$

$ظتا\ ص = \sqrt{١ - جا^{2}ص}$

$= \sqrt{١-س^{2}}$

وهو المطلوب.

تدريب (٤) $س = جا\ ٢ن$ ، $ص = ظتا\ ٢ن$ جد $\frac{د^{2}ص}{دس^{2}}$ عندما $ن = \frac{\pi}{٤}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$= -جا\ ٢ن \times ٢ \times \frac{١}{ظتا^{2}\ ٢ن \times ٢}$

$= \frac{-٢جا\ ٢ن}{٢ظتا^{2}\ ٢ن} = \frac{-س}{ص^{2}} = \frac{-س}{ص}$

$\frac{د^{2}ص}{دس^{2}} = \frac{ص \times -١ - -س \times \frac{دص}{دس}}{ص^{2}} = \frac{-ص - \frac{-س^{2}}{ص}}{ص^{2}}$ ← اكمل هذا الحل

لطالب

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

التمارين والمسائل ص ١٤٦ :-

١) أ) $٨س^٢ + ص^٢ = ١٠ \Leftarrow ١٦س + ٢ص \frac{دص}{دس} = صفر$

$\Leftarrow \frac{٢ص}{٢ص} \frac{دص}{دس} = \frac{-١٦س}{٢ص}$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{-٨س}{ص}$$

ب) $ص = \sqrt{س^٢ + ٥س^٢}$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٣س^٢ + ١٠س}{٢\sqrt{س^٣ + ٥س^٢}}$$

جـ) $س^٣ - ص^٢ = ٦س ص$

$٣س^٢ - ٣ص^٢ \frac{دص}{دس} = ٦س \times \frac{دص}{دس} + ٦ \times ص$

$-٣ص^٢ \frac{دص}{دس} - ٦س \frac{دص}{دس} = ٦ص - ٣س^٢$

$\frac{دص}{دس} (-٣ص^٢ - ٦س) = ٦ص - ٣س^٢$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٦ص - ٣س^٢}{-٣ص^٢ - ٦س} = \frac{٢ص - س^٢}{-ص^٢ - ٢س}$$

د) $جا(س^٢ ص^٢) = س$

$جتا(س^٢ ص^٢)(٢س ص^٢ + س^٢ \times ٢ص \frac{دص}{دس}) = ١$

$٢س ص^٢ جتا س^٢ ص^٢ + ٢ص س^٢ \frac{دص}{دس} جتا س^٢ ص^٢ = ١$

$(٢ص س^٢ جتا س^٢ ص^٢) \frac{دص}{دس} = ١ - ٢س ص^٢ جتا س^٢ ص^٢$

$$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١ - ٢س ص^٢ جتا س^٢ ص^٢}{٢ص س^٢ جتا س^٢ ص^٢}$$

هـ) $ص^٢ = \frac{س}{س+١} \Leftarrow ٢ص \frac{دص}{دس} = \frac{(س+١)(١) - (س)(١)}{(س+١)^٢}$

$$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢ص(س+١)^٢}$$

٢) أ) $٣س^٢ - ٤ص^٢ = ٦ \Leftarrow ٦س - ٨ص \frac{دص}{دس} = ٠$

$٨ص \frac{دص}{دس} = ٦س$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٦س}{٨ص} = \frac{٣س}{٤ص}$$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$$\frac{د^٢ص}{د س^٢} = \frac{٤ص \times ٣ - ٣س \times ٤ \frac{د ص}{د س}}{(٤ص)^٢}$$

$$= \frac{١٢ص - ١٢س \left(\frac{٣س}{٤ص}\right)}{١٦ص^٢} = \frac{١٢ص - ١٢س \frac{د ص}{د س}}{١٦ص^٢}$$

$$= \frac{٣ \times (ص - س)\left(\frac{٣س}{٤ص}\right)}{٤ \times ١٦ ص^٢} = \frac{٣\left(ص - \frac{٣س^٢}{٤ص}\right)}{٤ ص^٢}$$

$$= \frac{٣(٤ص^٢ - ٣س^٢)}{٤ص^٣} = \frac{١٢ص^٢ - ٩س^٢}{١٦ص^٣}$$

$$= \frac{-٣(٣س^٢ - ٤ص^٢)}{١٦ص^٣} = \frac{-٣ \times ٣^٢}{٨ \times ٢ص^٣} = \boxed{\frac{-٩}{٨ص^٣}}$$

ب) $س^٣ ص^٣ - ٤ = صفر$

$$س^٣ \times ٣ص^٢ \frac{د ص}{د س} + ٣س^٢ \times ص^٣ = ٠$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-٣س^٢ ص^٣}{٣س^٣ ص^٢} = \frac{-ص}{س}$$

$$\frac{د^٢ص}{د س^٢} = \frac{س \times -١ \frac{د ص}{د س} - ص \times ١}{س^٢}$$

$$= \frac{-س\left(\frac{-ص}{س}\right) + ص}{س^٢}$$

$$= \boxed{\frac{٢ص}{س^٢}}$$

جـ) $س = ص ظتا ص$

$$س \times -ص ا ص \frac{د ص}{د س} + ١ \times ظتا ص = \frac{د ص}{د س}$$

$$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} + س ا ص ا ص \frac{د ص}{د س} = ظتا ص$$

$$\frac{د ص}{د س}(١ + س ا ص ا ص) = ظتا ص$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{ظتا ص}{١ + س ا ص ا ص}$$

$$\frac{د^٢ص}{د س^٢} = \frac{(١ + س ا ص ا ص)(-ا ص ا ص) - (ظتا ص)(س \times ظتا ص \frac{د ص}{د س} + ١ \times ا ص ا ص)}{(١ + س ا ص ا ص)^٢}$$

$$= \frac{-ا ص ا ص}{١ + س ا ص ا ص} - \frac{س ظتا^٢ ص \frac{د ص}{د س} + ا ص ا ص ظتا ص}{(١ + س ا ص ا ص)^٢}$$

تم تحميل هذا الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$$\frac{د^٢ص}{د س^٢} = \frac{-\text{حا}ص}{١+س\text{حا}ص} - \frac{س\text{جتا}^٢ص}{(١+س\text{حا}ص)^٢} - \frac{\frac{\text{جتا}ص}{١+س\text{حا}ص} \cdot \text{حا}ص\text{جتا}ص}{(١+س\text{حا}ص)^٢}$$

$$= \frac{-\text{حا}ص}{١+س\text{حا}ص} - \frac{س\text{جتا}^٣ص}{(١+س\text{حا}ص)^٣} - \frac{\text{حا}ص\text{جتا}ص}{(١+س\text{حا}ص)^٢}$$

د) $\text{ظا}ص - \text{حا}س = ٢$

$$\frac{\frac{د ص}{د س}}{\text{جتا}^٢ص} - \text{جتا}س = ٠$$

$$\frac{د ص}{د س} = ٢\text{جتا}س\,\text{جتا}^٢ص$$

$$\frac{د^٢ص}{د س^٢} = ٢\text{جتا}س \times ٢\text{جتا}ص(-\text{جا}ص)\frac{د ص}{د س} + \text{جتا}^٢ص(-٢\text{جا}س)$$

$$= -٤\text{جتا}س\,\text{جتا}ص\,\text{جا}ص\,\frac{د ص}{د س} - ٢\text{جتا}^٢ص\,\text{جا}س$$

$$= -٢\text{جتا}س\,\text{جا}(٢ص) - ٢\text{جتا}^٢ص\,\text{جا}س$$

هـ) $ص + ٢\text{جا}ص = ٢س$ $\quad (١ ، \frac{\pi}{٢})$

$$١ \times \frac{د ص}{د س} + ٢ص + ٢\text{جتا}ص\frac{د ص}{د س} = ٢ \times \frac{د ص}{د س}$$

$$٢ \times ١ \times \frac{د ص}{د س} + ٢ \times \frac{\pi}{٢} + ٢\text{جتا}\frac{\pi}{٢}\frac{د ص}{د س} = ٠$$

$$٢\frac{د ص}{د س} + \pi = ٠$$

$$\frac{د ص}{د س} = -\frac{\pi}{٢}$$

ب) $٢س^٢ - س^٢ص + ص^٣ - ١ = ٠$ $\quad (٢ ، -٣)$

$$٦س^٢ - س^٢ \times \frac{د ص}{د س} - ٢س ص + ٣ص^٢\frac{د ص}{د س} = ٠$$

$$٦(٢)^٢ - (٢)^٢ \times \frac{د ص}{د س} - ٢ \times ٢ \times -٣ + ٣(-٣)^٢\frac{د ص}{د س} = ٠$$

$$٢٤ - ٤\frac{د ص}{د س} + ١٢ + ٢٧\frac{د ص}{د س} = ٠$$

$$٢٣\frac{د ص}{د س} = -١٢ - ٢٤$$

$$\frac{د ص}{د س} = -\frac{٣٦}{٢٣}$$

هـ) $\frac{١}{س} + \frac{٣}{ص} = ١$ $\quad (٦ ، ٢)$

$$-\frac{١}{س^٢} - \frac{٣\frac{د ص}{د س}}{ص^٢} = ٠$$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دس} \times \frac{دس}{دص} = \frac{-١}{س^٢} \times \frac{٣}{ص^٢} = \frac{-٣}{١٢} = -٣$

٤) $س = ظا ص + ٣$ ، $ص = -٢$

$\frac{دس}{دص} = \frac{١}{قا^٢ ص} + ٠ \Leftarrow$ $ص' = \frac{-١}{قا^٢ ص}$

$\Leftarrow ص' = \frac{-ظا ص}{قا ص}$

$\Leftarrow -٢ = \frac{-ظا ص}{قا ص}$

$\Leftarrow ظا ص = ٢ قا ص$

بالتعويض $\Leftarrow ظا ص + قا ص = ٣$

$\frac{٣}{٢} قا ص = ١ \Leftarrow قا ص = \frac{٣}{٢} \Leftarrow$ $\boxed{س = ١}$

$\Leftarrow ظا ص = ٢ قا ص = ٢$

$\Leftarrow$ $\boxed{ص = ٤}$ $\Leftarrow$ النقطة هي $(١ ، ٤)$.

٥) $ص = \sqrt{٥ - س^٢}$ ، جد $\frac{دص}{دس}$ $\Leftarrow ص = (٥ - س^٢)^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢} (٥ - س^٢)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢س$

$= \frac{س}{\sqrt{(٥ - س^٢)^٣}}$ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس} = \frac{س}{\sqrt{(٥ - س^٢)^٣}}$

٦) $س = جا ص$ اثبت أن $ص' = ظا ص قا ص$

$١ = جتا ص \frac{دص}{دس}$

$\Leftarrow ص' = \frac{١}{جتا ص} = قا ص$

$ص' = قا ص ظا ص \frac{دص}{دس}$

$= قا ص ظا ص ص'$

$= قا ص ظا ص قا ص$

$= قا^٢ ص ظا ص$ وهو المطلوب

٧) $س = جا ٢ص = ص جتا ٢س$ $(\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٢})$

$س \times جتا ٢ص \times ٢ \frac{دص}{دس} + ١ \times جا ٢ص = ص \times -جا ٢س \times ٢ + \frac{دص}{دس} \times جتا ٢س$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$\frac{\pi}{4}$ × جتا(٢ × $\frac{\pi}{4}$) × ٢ × $\frac{د ص}{د س}$ + جا(٢ × $\frac{\pi}{4}$) = $\frac{\pi}{4}$ × -جا(٢ × $\frac{\pi}{4}$) × ٢ × $\frac{د ص}{د س}$ + ٢ × جتا × $\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}$ جتا ٢π $\frac{د ص}{د س}$ + جا ٢π = - ٢π جا $\frac{\pi}{4}$ + جتا $\frac{\pi}{4}$ $\frac{د ص}{د س}$

$-\frac{\pi}{4}$ $\frac{د ص}{د س}$ = $-\pi$

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢

ج٣) ص س = جا س اثبت أن س ص'' + ٢ ص' + س ص = صفر

ص × ١ + س × ص' = جتا س

ص + س ص' - جتا س = صفر

ص' + س ص'' + ١ × ص' - - جا س = صفر

س ص'' + ٢ ص' + جا س = صفر

بما أن جا س = س ص

$\Leftarrow$ س ص'' + ٢ ص' + س ص = صفر وهو المطلوب .

ج٤) ص = $ن^{٣}$ + ٢ن ، $\frac{د س}{د ن}$ = ٤ن فجد $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند ن = ١

$\frac{د ص}{د ن}$ = ٣$ن^{٢}$ + ٢

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ن}$ × $\frac{د ن}{د س}$ = ٣$ن^{٢}$ + ٢ × $\frac{١}{٤ن}$

= $\frac{٣ن^{٢} + ٢}{٤ن}$

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = $\frac{٤ن(٦ن) - (٣ن^{٢}+٢)(٤)}{١٦ن^{٢}}$ × $\frac{د ن}{د س}$ لأن = $\frac{٤ن(٦ن \frac{د ن}{د س}) - (٣ن^{٢}+٢)(٤ \frac{د ن}{د س})}{١٦ن^{٢}}$ بأخذ العامل المشترك

= $\frac{٢٤ن^{٢} - ١٢ن^{٢} - ٨}{١٦ن^{٢}}$ × $\frac{١}{٤ن}$

= $\frac{١٢ن^{٢} - ٨}{٤ن \times ١٦ن^{٢}}$

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند ن = ١ = $\frac{١٢ - ٨}{٤ \times ١٦}$ = $\frac{٤}{٦٤}$ = $\frac{١}{١٦}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

أسئلة إضافية ص ١٤٧ + ١٤٨

س١) إذا كان $ه(س) = ظا س$ اثبت أن متوسط التغير $= \frac{قا^2 س \, ظا ه}{ه(١ - ظا س ظا ه)}$ $س_1 = س ، س_2 = س + ه$.

الحل : متوسط التغير $= \frac{ه(س+ه) - ه(س)}{(س+ه) - (س)} = \frac{ظا(س+ه) - ظا س}{ه}$

$= \left(\frac{ظا س + ظا ه}{١ - ظا س ظا ه} - ظا س \right) \times \frac{١}{ه}$ بتوحيد المقامات

$= \frac{ظا س + ظا ه - ظا س + ظا^2 س ظا ه}{١ - ظا س ظا ه} \times \frac{١}{ه}$

$= \frac{ظا ه + ظا^2 س ظا ه}{١ - ظا س ظا ه} \times \frac{١}{ه} = \frac{ظا ه (١ + ظا^2 س)}{١ - ظا س ظا ه} \times \frac{١}{ه}$

$= \frac{ظا ه \times قا^2 س}{١ - ظا س ظا ه} \times \frac{١}{ه} = \frac{ظا ه \, قا^2 س}{ه(١ - ظا س ظا ه)}$ وهو المطلوب .

س٢) إذا $ه(س) = جا ٣س$ ، جد $ه'(\frac{\pi}{٣})$ باستخدام تعريف المشتقة .

الحل : $ه'(\frac{\pi}{٣}) = \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{ه(س) - ه(\frac{\pi}{٣})}{س - \frac{\pi}{٣}} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{جا ٣س - جا ٣ \times \frac{\pi}{٣}}{س - \frac{\pi}{٣}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{جا ٣س - جا \pi}{س - \frac{\pi}{٣}} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{٢ جتا(\frac{٣س + \pi}{٢}) جا(\frac{٣س - \pi}{٢})}{س - \frac{\pi}{٣}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} ٢ جتا(\frac{٣س + \pi}{٢}) \times \frac{جا(\frac{٣س - \pi}{٢})}{س - \frac{\pi}{٣}}$

نفرض $ص = س - \frac{\pi}{٣} \Leftarrow س = ص + \frac{\pi}{٣}$

$س \to \frac{\pi}{٣} \Leftarrow ص \to$ صفر

$\Leftarrow ه'(\frac{\pi}{٣}) = \lim_{ص \to ٠} \frac{جا \frac{٣ص}{٢}}{ص} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} ٢ جتا(\frac{٣س + \pi}{٢})$

$= \frac{٣}{٢} \times ٢ جتا(\pi)$

$= \frac{٣}{٢} \times ٢ \times -١$

$= \frac{٣}{٢} \times -٢ = \boxed{-٣}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

ج ب) $هـ(س) = \begin{cases} س^2 - 2س + 2 & ، \ 0 \leq س \leq 1 \\ [س] + 3س & ، \ 1 < س \leq 3 \end{cases}$

جد $هـ'(س)$

الحل $[س] \Leftarrow س = 0$

$ل = \frac{1}{1} = 1$

$[س] = \begin{cases} 1 & ، \ 1 \leq س < 2 \\ 2 & ، \ 2 \leq س < 3 \\ 3 & ، \ س = 3 \end{cases}$

$\Leftarrow هـ(س) = \begin{cases} س^2 - 2س + 2 & ، \ 0 \leq س \leq 1 \\ 1 + 3س & ، \ 1 < س < 2 \\ 2^2 + 3س & ، \ 2 \leq س < 3 \\ 3 + 3 \times 3 = 12 & ، \ س = 3 \end{cases}$

$هـ'(س) = \begin{cases} 2س - 2 & ، \ 0 < س < 1 \\ 3 & ، \ 1 < س < 2 \\ 3 & ، \ 2 < س < 3 \end{cases}$

$هـ'(0)$ ، $هـ'(3)$ غير موجودة أطراف فترات

عند $س = 1$ غير متصل لأنه $\lim_{س \to 1^+} 3 + 3س \neq \lim_{س \to 1^-} س^2 - 2س + 2$

$\Leftarrow هـ'(1)$ غير موجودة .

عند $س = 2$ غير متصل لأنه $\lim_{س \to 2^+} 2^2 + 3 \neq \lim_{س \to 2^-} 1 + 3س$

$\Leftarrow هـ'(2)$ غير موجودة .

س٣ م) $ص = س \ ظا س$ اثبت أن $ص'' - 2ص ق^2 س = 2 ق^2 س$

$ص' = س \times ق^2 س + 1 \times ظا س = س ق^2 س + ظا س$

$ص'' = س \times ق ا س ظا س \times 2 ق ا س + 1 \times ق^2 س + ق^2 س$

$ص'' = 2س ق^2 س ظا س + 2 ق^2 س$

$ص'' = 2س ظا س \frac{ص}{س} + 2 ق^2 س$

$ص'' - 2ص ق^2 س + 2 ق^2 س$ وهو المطلوب .

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

س٣ ب) $\text{جتا}ص = س$ ، $-١ < س < ١$ اثبت أن $\frac{د ص}{د س} = \frac{-١}{\sqrt{١ - س^٢}}$ ، $ص \in (٠ ، \frac{\pi}{٢})$

الحل $-\text{جا}ص \times \frac{د ص}{د س} = ١$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{-\text{جا}ص} = \frac{-١}{\sqrt{١ - \text{جتا}^٢ ص}}$ لأن $\text{جا}ص = \sqrt{١ - \text{جتا}^٢ ص}$

حسب العلاقة $\text{جا}^٢ ص + \text{جتا}^٢ ص = ١$

$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{-١}{\sqrt{١ - س^٢}}$ وهو المطلوب .

س٤ $ص = ن^٢ - \frac{١}{٣} ن$ ، $س = ن^٢ - ٢ن$ ، جد $\left. \frac{د^٢ ص}{د س^٢} \right|_{ن = ٦}$.

الحل : $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$

$= (٢ن - \frac{١}{٣}) \times (\frac{١}{٢ن - ٢})$

$= \frac{٢ن - \frac{١}{٣}}{٢ن - ٢}$

$\frac{د س}{د ن} = ٢ن - ٢$

$\Leftarrow \frac{د ن}{د س} = \frac{١}{٢ن - ٢}$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{(٢ن - ٢)(٢) \frac{د ن}{د س} - (٢ن - \frac{١}{٣})(١) \frac{د ن}{د س}}{(٢ن - ٢)^٢}$

$= \frac{د ن}{د س} \left(\frac{٢ن^٢ - ٤ن + ٢ - ٢ن + \frac{١}{٣}}{(٢ن - ٢)^٢} \right) \left(\frac{١}{٢ن - ٢} \right) = \left(\frac{-\frac{١١}{٣}}{(٢ن - ٢)^٣} \right)$

$\left. \frac{د^٢ ص}{د س^٢} \right|_{ن = ٦} = \frac{-\frac{١١}{٣}}{(١٠)^٣} = \frac{-\frac{١١}{٣}}{٢(٤)} = \frac{١}{٣} \times \frac{-١١}{٦٤} = \boxed{\frac{-١١}{١٩٢}}$

س٥ $ص = هـ(س)$ ، $ص^٣ = هـ(٢ - ٤س - س)$ ، $هـ'(٦) = ٤$ ، $هـ(٦) = -٤$

جد $\left. \frac{د ص}{د س} \right|_{س = ٢}$

الحل $\frac{د ص}{د س} \times ٣ص^٢ = هـ'(٢ - ٤س - س) \times (٤ - س - ١)$

عند $س = ٢ \Leftarrow ص^٣ = هـ(٦) = -٤$

$ص = \sqrt[٣]{-٤}$

$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} \times ٣ (\sqrt[٣]{-٤})^٢ = هـ'(٦) \times ٧$

$\Leftarrow \left. \frac{د ص}{د س} \right|_{س = ٢} = \frac{٤ \times ٧}{٣ (\sqrt[٣]{-٤})^٢} = \frac{٢٨}{٣ \sqrt[٣]{(-٤)^٢}}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

جـ) $ه(-٢)=١$ ، $ه'(-٢)=٢$ جد $و'(-٢)$

أ) $و(س)=\sqrt{س^٢+٦}\times ه(س)$

$و'(س)=\sqrt{س^٢+٦}\times ه'(س)+\frac{١}{٢\sqrt{س^٢+٦}}\times ه(س)$

$و'(-٢)=\sqrt{(-٢)^٢+٦}\times ه'(-٢)+\frac{١}{٢\sqrt{(-٢)^٢+٦}}\times ه(-٢)$

$=٢\times ٢+\frac{١}{٤}\times ١$

$=٤+\frac{١}{٤}=\boxed{\frac{١٧}{٤}}$

ب) $و(س)=\frac{س^٢-س}{ه^٢(س)}$

$و'(س)=\frac{ه^٢(س)(٢س-١)-(س^٢-س)\times ٢ه(س)\times ه'(س)}{ه^٤(س)}$

$و'(-٢)=\frac{ه^٢(-٢)(-٥)-(٦)\times ٢ه(-٢)ه'(-٢)}{ه^٤(-٢)}$

$و'(-٢)=\frac{(١)^٢(-٥)-٦(٢\times ١)(٢)}{(١)^٤}=\frac{-٥-٢٤}{١}=-٢٩$

ج) $و(س)=ه(س)-\frac{ه(س)}{س^٢}$

$و'(س)=ه'(س)-\left(\frac{س^٢\times ه'(س)-٢س\times ه(س)}{س^٤}\right)$

$و'(-٢)=ه'(-٢)-\left(\frac{(-٢)^٢\times ه'(-٢)-ه(-٢)}{(-٢)^٤}\right)$

$=٢-\left(\frac{٤\times ٢-١}{١٦}\right)$

$=٢-\left(\frac{٧}{١٦}\right)=\frac{٣٢}{١٦}+\frac{٧}{١٦}=\frac{٣٩}{١٦}$

د) $و(س)=ظا(\pi ه(س))$

$و'(س)=ق^٢(\pi ه(س))\times(\pi ه'(س))$

$و'(٣)=ق^٢(\pi ه(-١))\times(\pi ه'(-٢))$

$=ق^٢(\pi)\times \pi(٢)$

$=(-١)^٢\times ٢\pi=٢\pi$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

س٧ ق(ص) = ط(ص) هـ(ص) ، هـ(١) = $\frac{\pi}{2}$ ، هـ'(١) = ٠ ، هـ''(١) = ٣

جد ق''(١)

الحل : ق'(ص) = جتا هـ(ص) × هـ'(ص)

ق''(ص) = جتا هـ(ص) × هـ''(ص) + هـ'(ص) × - جا هـ(ص) × هـ'(ص)

ق''(١) = جتا هـ(١) × ٣ + صفر × - جا هـ(١) × صفر

= جتا $\frac{\pi}{2}$ × ٣

= ٠ × ٣ = ٠

س٨ ق(س) = $س^{٣}$ + ٢س ، هـ(س) = ٣ - $س^{٢}$ ، هـ'(س) = - ٦س

١) (ق ٥ هـ)'(١) = (ق'(هـ(١)))'

= ق''(هـ(١)) × هـ'(١)

= ق''(٣) × ٦

= ١٨ × ٦ = ١٠٨

ق'(س) = $٣س^{٢}$ + ٢

ق''(س) = ٦س

ق''' = ٦

٢) (ق ٥ هـ)''(١) = (ق'(هـ(١)))''

= (ق''(هـ(١)) × هـ'(١))'

= ق''(هـ(١)) × هـ'(١) + هـ'(١) × ق''(هـ(١)) × هـ'(١)

= ق''(٣) × ٦ × ٦ + ٦ × ٦

= ١٨ × ٦ + $٦^{٢}$

= ١٠٨ + $١٦^{٢}$ = ٤٢٤

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info