الوحدة الثانية

التفاضل

١- متوسط التغير

٢- المشتقة الاولى

٣- الاتصال والاشتقاق

٤- قواعد الاشتقاق (١)

٥- قواعد الاشتقاق (٢)

٦- المشتقات العليا

٧- مشتقة الاقترانات الدائرية

٨- قاعدة السلسلة

٧- الاشتقاق الضمني

٨- حلول تدريبات وتمارين الكتاب جميعها

١١- اسئلة الوزارة (٢٠٠٨-٢٠١٦)

١٢- اوراق عمل شاملة على كل درس

مكتبة الوسام
ALWESAM

ناجح الجمزاوي

المعلم :ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

الدرس الأول

متوسط التغير

الأقران هـ(س) = ص

① التغير في س يرمز له بالرمز Δس
وتقرأ دلتا س ← Δس = س٢ - س١
أو يرمز لها بالرمز هـ
هـ = Δس

② التغير في الأقران = التغير في إصادات
ويرمز له بالرمز Δص أي أن
Δص = ص٢ - ص١
= هـ(س٢) - هـ(س١)

مثال ①
إذا كان هـ(س) = س٣ - ٤ وتغيرت
س من ١ الى ٤ أوجد
① التغير في السينات
② التغير في الصادات

الحل
① Δس = س٢ - س١ = ٤ - ١ = ٣

② Δص = هـ(س٢) - هـ(س١) = هـ(٤) - هـ(١)
= ٤٢ - ٤ - (١٣ - ٤) = ١٦ - ٤ + ٣
= ١٥

مثال ②
إذا كان
هـ(س) = { |س٢ + ١| ، س > ٢
[٣س + ١] ، س ≤ ٢ }
وتغيرت س من ١ إلى ٢٫٥ أوجد
① Δس ② التغير في الأقران

الحل
① Δس = س٢ - س١ = ٢٫٥ - ١ = ١٫٥

② التغير في الأقران = Δص
= هـ(س٢) - هـ(س١)
= هـ(٢٫٥) - هـ(١)
= |٢٫٥٢ + ١| - [٣ × ٢٫٥ + ١]
= |٧ + ١| - [٨٫٥]
= ٨ - ٤ = ٤

متوسط التغير

صورة أخرى قسمة التغير في الاقتران على التغير في السينات.

متوسط التغير = التغير في الصادات / التغير في السينات

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ حيث $س_2 \neq س_1$

$= \frac{\Delta هـ}{\Delta س} = \frac{هـ(س_2) - هـ(س_1)}{س_2 - س_1}$

$= \frac{هـ(س_1 + هـ) - هـ(س_1)}{هـ}$

$= \frac{هـ(س_1 + \Delta س) - هـ(س_1)}{\Delta س}$

حيث $\Delta س = س_2 - س_1$

$س_2 = س_1 + \Delta س$

$= س_1 + هـ$

مثال ①

إذا كان $هـ(س) = س^2 + ٥$ فأوجد متوسط التغير للاقتران عندما تتغير س من $س_1 = ١$ إلى $س_2 = ٣$

الحل

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_2) - هـ(س_1)}{س_2 - س_1}$

$= \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{(٣^2 + ٥) - (١^2 + ٥)}{٢} = \frac{١٤ - ٦}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$

مثال ②

$هـ(س) = س^2 + \sqrt{س - ١}$ أجب متوسط التغير في الفترة $[٢ ، ١٠]$

الحل

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_2) - هـ(س_1)}{س_2 - س_1}$

$= \frac{هـ(١٠) - هـ(٢)}{١٠ - ٢} = \frac{١٠٠ + \sqrt{١٠ - ١} - (٤ + \sqrt{٢ - ١})}{٨}$

$= \frac{١٠٠ + ٣ - (٤ + ١)}{٨} = \frac{١٠٣ - ٥}{٨} = \frac{٩٨}{٨}$

ملاحظة

① عندما يطلب في السؤال إيجاد مقدار التغير في الاقتران $هـ(س)$ بحذف $\Delta ص = \Delta هـ = هـ(س_2) - هـ(س_1)$

② متوسط التغير للاقتران الثابت دائماً = صفر

③ متوسط التغير للاقتران الخطي $هـ(س) = أ س + ب$ يساوي معامل $س = أ$

مثال ③

$ق(س) = ٣س + |٤س + ١١|$ أحسب متوسط التغير في الاقتران $ق(س)$ عندما $س_١ = -٢$ ، $\Delta س = ٤$

الحل

$س_١ = -٢$ ، $\Delta س = ٤ \Leftarrow س_٢ = س_١ + \Delta س$

$س_٢ = -٢ + ٤ = ٢$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{ق(٢) - ق(-٢)}{٢ - (-٢)}$$

$$= \frac{(٣ \times ٢ + |٤ \times ٢ + ١١|) - (٣ \times -٢ + |٤ \times -٢ + ١١|)}{٤}$$

$$= \frac{٦ + ٥ - (-٦ + |-٨ + ١١|)}{٤} = \frac{١١ - (-٦ + ٣)}{٤}$$

$$= \frac{١١ + ٢}{٤} = \frac{١٤}{٤} = \frac{٧}{٢}$$

مثال ④

اذا كان $ق(س) = س^٢ + ٢$ احسب متوسط التغير للاقتران $ق(س)$ عندما تتغير $س$ من ٣ إلى $٣ + هـ$

الحل

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{ق(٣ + هـ) - ق(٣)}{٣ + هـ - ٣}$$

$$= \frac{(٣ + هـ)^٢ + ٢ - (٣^٢ + ٢)}{هـ}$$

$$= \frac{٩ + ٦هـ + هـ^٢ + ٢ - ١١}{هـ} = \frac{٦هـ + هـ^٢}{هـ}$$

$$= \frac{هـ(٦ + هـ)}{هـ} = ٦ + هـ$$

مثال ⑤

اذا كان $ص = ق(س)$ وكانت $\Delta ص = ٣س^٢(\Delta س)^٢ - ٥س\Delta س$

احسب متوسط التغير عندما $س = ٢$ ، $\Delta س = ٣$

الحل

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٣س^٢ \times (\Delta س)^٢ - ٥س\Delta س}{\Delta س}$$

$$= \frac{\Delta س(٣س^٢ \times \Delta س) - ٥س}{\Delta س}$$

$$= ٣س^٢ \times \Delta س - ٥س$$

$$= ٣(٢)^٢ \times ٣ - ٥ \times ٢$$

$$= ١٢ \times ٣ - ١٠ = ٣٦ - ١٠ = ٢٦$$

مثال ⑥

ليكن $ك(س) = س^٢$ احسب متوسط التغير للاقتران $ك(س)$ بدلالة $\Delta س$

الحل

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ك(س_٢) - ك(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$\Leftarrow$ يتبع الحل

وسام الوسام AL WESSAM
الوسام ناجح الجمزاوي

← تابع الحل

$= \frac{س^٢ - س^١}{س^٢ - س^١} = \frac{(س^٢ - س^١)(س^٢ + س^١)}{(س^٢ - س^١)}$

$= س^٢ + س^١$ لكن $س^٢ = س^١ + د س$

$\frac{د ص}{د س} = س^١ + س^١ + د س$

$= ٢ س^١ + د س$

مثال ⑦ س١ عامة صـ٤٢

اذا كان $ق(س) = ظا س$ فاثبت أن متوسط التغير للاقتران $ق(س)$ يساوي $\frac{قا^٢ س \, ظا س}{هـ(١ - ظا س ظا هـ)}$

الحل

$\frac{د ص}{د س} = \frac{ق(س^٢) - ق(س^١)}{س^٢ - س^١} = \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$

$= \frac{ظا(س+هـ) - ظا س}{هـ}$

لكن $ظا(أ+ب) = \frac{ظا أ + ظا ب}{١ - ظا أ ظا ب}$

$\Leftarrow \frac{\frac{ظا س + ظا هـ}{١ - ظا س ظا هـ} - ظا س}{هـ}$

$= \frac{ظا س + ظا هـ - ظا س + ظا^٢ س ظا هـ}{هـ(١ - ظا س ظا هـ)}$

$= \frac{ظا هـ + ظا^٢ س ظا هـ}{هـ(١ - ظا س ظا هـ)}$

$= \frac{ظا هـ(١ + ظا^٢ س)}{هـ(١ - ظا س ظا هـ)}$

$= \frac{ظا هـ \, قا^٢ س}{هـ(١ - ظا س ظا هـ)}$

تدريب

اذا كان $ق(س) = ظتا س$ فاثبت أن

$\frac{د ص}{د س} = \frac{- ظا هـ \, قا^٢ س}{هـ \, ظا س(ظا س + ظا هـ)}$

مثال ⑧

اذا كان متوسط التغير للاقتران $ق(س)$ في الفترة $[١ ، ٣]$ يساوي (٥) وكان $هـ(س) = ٢ س + ق(س) + ١$ فاوجد متوسط التغير للاقتران $هـ(س)$ في الفترة $[١ ، ٣]$

الحل

$\frac{د ص}{د س}$ لـ $ق = \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = ٥$

$\Leftarrow ق(٣) - ق(١) = ٥ \times ٢ = ١٠$

← يتبع الحل

← يتبع الحل

متوسط التغير لـ هـ = $\frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{(٢\times٣ + د(٣)+١) - (٢\times١ + د(١)+١)}{٢}$

$= \frac{٧ + د(٣) - ٣ - د(١)}{٢}$

$= \frac{٤ + د(٣) - د(١)}{٢} = \frac{٤+١٠}{٢} = ٧$

مثال ⑨

اذا كان هـ(س) = د(٣س) + س^{٢}
وكان مقدار التغير في د(س) في الفترة [٣ ، ٦] يساوي (٤) فجد متوسط التغير في هـ(س) في الفترة [١ ، ٢]

الحل

التغير في د(س) = د(٦) - د(٣) = ٤

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ لـ هـ(س) = $\frac{هـ(٢) - هـ(١)}{٢ - ١}$

$= \frac{(د(٦)+٤) - (د(٣)+١)}{١}$

$= \frac{د(٦)+٤ - د(٣) - ١}{١}$

$= د(٦) - د(٣) + ٣$

$= ٤ + ٣ = ٧$

مثال ⑩

اذا كان د(س) = س^{٢} + هـ(س)

هـ(س) = { س^{٣} + ١ ; ١ ≤ س < ٥
١٠ ; ٥ ≤ س ≤ ٧

اوجد مقدار التغير في الاقتران د(س) في الفترة [١ ، ٥]

الحل

مقدار التغير في الاقتران
= $\Delta ص$ = د(٥) - د(١)
= ٥^{٢} + هـ(٥) - (١^{٢} + هـ(١))
= ٢٥ + ١٠ - (١ + ٢)
= ٣٥ - ٣ = ٣٢

مثال ⑪

اذا كان متوسط التغير في الاقتران د(س) في الفترة [١ ، ٣] يساوي (٥) وكان د(١) × د(٣) = ١٢
وكان هـ(س) = $\frac{١}{د(س)}$

جد قيمة متوسط التغير للاقتران هـ(س) في الفترة نفسها

الحل

متوسط التغير في د = $\frac{د(٣) - د(١)}{٣ - ١} = ٥$

← يتبع الحل

وسام الوسام AWSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

$\Leftarrow$ $هـ(٣) - هـ(١) = ١٠$

متوسط التغير $هـ(س) = \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{\frac{١}{هـ(٣)} - \frac{١}{هـ(١)}}{٢}$ بتوحيد مقامات

$= \frac{هـ(١) - هـ(٣)}{هـ(٣) \times هـ(١)} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{-١٠}{١٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{-٥}{١٢}$

مثال (١٢)

اذا كان متوسط التغير للاقتران $هـ$ في الفترة $[١، ٢]$ يساوي ٣ وفي الفترة $[٥، ٤]$ هو ٨ اوجد متوسط التغير في الفترة $[١، ٥]$

الحل

في الفترة $[١، ٤]$ $\Leftarrow$

$\frac{د هـ}{د س} = \frac{هـ(٤) - هـ(١)}{٤ - ١} = ٣$

$\Leftarrow$ $هـ(٤) - هـ(١) = ٣$ ---①

$\frac{د هـ}{د س}$ في الفترة $[٤، ٥]$

$= \frac{هـ(٥) - هـ(٤)}{١} = ٨$

$\Leftarrow$ $هـ(٥) - هـ(٤) = ٨$ ---②

بجمع ① + ②

$هـ(٥) - هـ(١) = ١١$

$\frac{د هـ}{د س}$ في الفترة $[١، ٥]$

$= \frac{هـ(٥) - هـ(١)}{٤} = \frac{١١}{٤}$

مثال (١٣)

اذا كان متوسط تغير $هـ(س)$ في $[١، ٥]$ يساوي ٢، متوسط تغير $هـ(س)$ في $[١، ٥]$ يساوي ٤ وكان $هـ(س) = س \cdot هـ(س)$ فجد $هـ(١)$

الحل

$\frac{د هـ}{د س}$ في $[١، ٥] = \frac{هـ(٥) - هـ(١)}{٥ - ١} = ٣$

$\Leftarrow$ $هـ(٥) - هـ(١) = ١٢$ ---①

$\frac{د هـ}{د س}$ في $[١، ٥] = \frac{هـ(٥) - هـ(١)}{٤} = ٤$

$\Leftarrow$ $هـ(٥) - هـ(١) = ٨$ ---②

$\Leftarrow$ $هـ(٥) = ٨ + هـ(١)$ بتعويضها في ①

$هـ(٥) - هـ(١) = ١٢$

$٥ هـ(٥) - هـ(١) = ١٢$

$٥(٨ + هـ(١)) - هـ(١) = ١٢$

لكنه $هـ(١) = ١ \times هـ(١)$

$هـ(١) = هـ(١)$

$\Leftarrow$ $٥(٨ + هـ(١)) - هـ(١) = ١٢$

$٤٠ + ٥ هـ(١) - هـ(١) = ١٢$

$٤ هـ(١) = -٢٨$

$هـ(١) = \frac{-٢٨}{٤} = -٧$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٤) س٣ تمارين ومسائل ص٨٧
اذا كان ق(س) = ٢س^{٢} − ٣س + ٤
وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [١، ٣] يساوي ٣
جد الثابت ٢ ؟

الحل

متوسط التغير لـ ق(س) = $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$ = ٣

$= \frac{(٢(٣)^{٢} - ٣(٣) + ٤) - (٢(١)^{٢} - ٣(١) + ٤)}{٢}$

$= \frac{١٨ - ٩ + ٤ - ٢ + ٣ - ٤}{٢} = ٣$

$٨ + ٢ = ٦$

$٨ = ٤ \Leftarrow ٢ = \frac{١٢}{٨}$

مثال (١٥)

اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{س^{٢} - ٩} & ٢ \le س \le ٤ \\ ١١ - ٢س & ٤ < س \le ٦ \end{cases}$

فاوجد قيمة ٢ (حيث ٢ > ٠) التي تجعل متوسط التغير ق في [٢، ٦] يساوي $-\frac{١}{٣}$ ؟

الحل

متوسط التغير ق = $\frac{ق(٦) - ق(٢)}{٦ - ٢}$

$= \frac{(١١ - ٢(٦)) - \sqrt{٢^{٢} - ٩}}{٦ - ٢} = -\frac{١}{٣}$

$= \frac{-١ - \sqrt{٢^{٢} - ٩}}{٦ - ٢} = -\frac{١}{٣}$ ضرب تبادلي

$-٣\sqrt{٢^{٢} - ٩} = -٢ - ٦$

$-٣\sqrt{٢^{٢} - ٩} = -٢ - ٦$ تربيع الطرفين

$٩(٢^{٢} - ٩) = (-٢ - ٦)^{٢}$

$٩٢^{٢} - ٨١ = ٢^{٢} + ١٢٢ + ٣٦$

$٩٢^{٢} - ٢^{٢} - ١٢٢ - ٣٦ - ٨١ = ٠$

$(\div ٢) \quad ٨٢^{٢} - ١٢٢ - ١١٧ = ٠$

$٤٢^{٢} - ٦٢ - ٥٩ = ٠$

$(٢ - ٣)(٤٢ + ١٥) = ٠$

$٢ = ٣ \quad ٤٢ + ١٥ = ٠$

$\Leftarrow ٢ = -\frac{١٥}{٤}$ تهمل

مثال (١٦)

اذا كان متوسط تغير ق(س) = $\frac{٢}{س + ٢}$
عندما تتغير س من صفر الى ٣
يساوي (−٢) فجد ٢

الحل

متوسط تغير = $\frac{ق(٣) - ق(٠)}{٣ - ٠} = -٢$

$\frac{\frac{٢}{٥} - \frac{٢}{٢}}{٣} = -٢$

← يتبع الكل

← تابع الحل

$\frac{ب}{٥} - \frac{ب}{ج} = -٦$ بتوحيد المقام

$\frac{ب ج - ب ٥}{١٠} = -٦ \Leftarrow -٣ب = -٦٠$

$\Leftarrow ب = ٢٠$

مثال (١٧)

اذا كان متوسط تغير $ق(س)$ في $[ج، ٥]$ يساوي (-٦) وكان $ق(ج) + ق(٥) = ٤$ جد متوسط تغير $ل(س) = ٢أس + ق(س)$ في $[ج، ٥]$

الحل

متوسط تغير $ق = \frac{ق(٥) - ق(ج)}{ج - ٥} = -٦$

$\Leftarrow \boxed{ق(٥) - ق(ج) = ١٨}$

متوسط تغير $ل = \frac{ل(٥) - ل(ج)}{ج - ٥}$

$= \frac{٧٨ + ق^{٢}(٥) - (٧ج + ق^{٢}(ج))}{٣}$

$= \frac{٣٥ + ق^{٢}(٥) - ١٤ - ق^{٢}(ج)}{٣}$

$= \frac{ق^{٢}(٥) - ق^{٢}(ج)}{٣} + \frac{٣٥ - ١٤}{٣}$

$= \frac{(ق(٥) - ق(ج))(ق(٥) + ق(ج))}{٣} + ٧$

$= \frac{-١٨ \times ٤}{٣} + ٧$

$= -٢٤ + ٧ = -١٧$

مثال (١٨)

احسب قيمة متوسط لتغير في حجم مكعب من الثلج عندما يوضع في الشمس حيث تتغير طول ضلعه من ٣ سم الى ١ سم في الدقيقة

الحل

هنا يجب تكوين العلاقة وهي حجم المكعب

$ق(س) = س^{٣} =$ حجم المكعب

$س_{١} = ٣$ ، $س_{٢} = ١$

متوسط التغير $= \frac{ق(١) - ق(٣)}{١ - ٣}$

$= \frac{١^{٣} - ٣^{٣}}{-٢} = \frac{١ - ٢٧}{-٢} = \frac{-٢٦}{-٢}$

$= ١٣$

ملاحظة

في الاسئلة التي لا تعطى العلاقة هنا يجب تكوين قاعدة العلاقة حسب السؤال من معطيات المجهول والمعلوم

مثال (١٩)

اجد متوسط التغير في مساحة مربع عندما يتغير طول ضلعه من ٣ سم إلى ٥ سم.

الحل

مساحة المربع = م(س) = س^{٢}

متوسط التغير = $\frac{م(٥) - م(٣)}{٥ - ٣}$

= $\frac{٥^{٢} - ٣^{٢}}{٢}$ = $\frac{٢٥ - ٩}{٢}$ = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨

مثال (٢٠)

اجد متوسط التغير في مساحة دائرة عندما يتغير نصف قطرها من ٤ سم إلى ٦ سم.

الحل

م(س) = مساحة الدائرة

= π نق^{٢}

متوسط التغير = $\frac{م(٦) - م(٤)}{٦ - ٤}$

= $\frac{\pi ٦^{٢} - \pi ٤^{٢}}{٢}$

= $\frac{\pi ٣٦ - \pi ١٦}{٢}$ = $\frac{\pi ٢٠}{٢}$

= ١٠ π

مثال (٢١)

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها اذا زاد طول ضلعها من ٥ سم الى ٥,٠٤ سم فجد معدل التغير في مساحتها.

الحل

م = س^{٢}

التغير في المساحة = Δ م

= م(٥,٠٤) − م(٥)

= (٥,٠٤)^{٢} − ٥^{٢}

= ٢٥,٠٨ − ٢٥ = ٠,٠٨ سم^{٢}

مثال (٢٢)

اذا كان ل(س) = س هـ(س) وكان متوسط التغير للاقتران ل(س) في [−٢، ٤] يساوي ١٢ ل(٤) = ٦، اوجد قيمة هـ(−٢).

الحل

متوسط تغير ل = $\frac{ل(٤) - ل(-٢)}{٤ - (-٢)}$ = ١٢

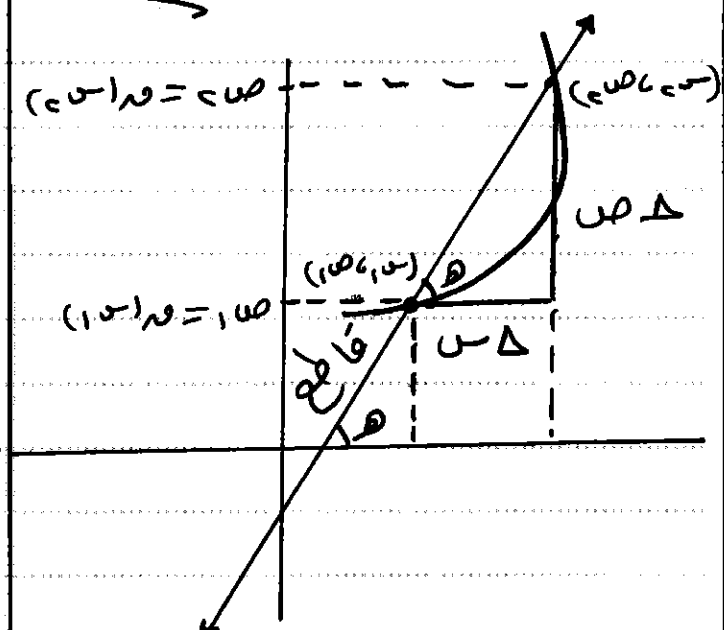
$\frac{٦ - (-٢) هـ(-٢)}{٦}$ = ١٢

⇐ ٦ + ٢ هـ(−٢) = ٧٢

٢ هـ(−٢) = ٦٦

⇐ هـ(−٢) = ٣٣

التفسير الهندسي لمتوسط التغير



ميل القاطع $= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$

$= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = ظا\ هـ$

حيث هـ : الزاوية التي يصنعها القاطع مع محور السينات الموجب

معادلة القاطع هي

$ص - ص_1 = م(س - س_1)$

مثال ①

جد ميل القاطع الواصل بين النقطتين $(-3، ق(-3))$ ، $(1، ق(1))$ لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^2 - س + 2$

الحل

ميل القاطع = متوسط التغير

$= \frac{ق(1) - ق(-3)}{1 - (-3)}$

$= \frac{(1^2 - 1 + 2) - ((-3)^2 - (-3) + 2)}{4}$

$= \frac{2 - 8}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$

مثال ②

اذا كان القاطع يمر بالنقطتين $(2، ق(2))$ ، $(3، ق(3))$ ويصنع زاوية $120°$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات جد متوسط التغير لأي اقتران $ق(س)$ عندما تتغير س من $س = 2$ إلى $س = 3$

الحل

متوسط التغير = ميل القاطع

$= ظا\ 120° = -ظا\ 60$

$= -\sqrt{3}$

مثال ③

اذا كان $ق(س) = 2س^2 - 1$ وكان ميل القاطع المار بالنقطتين $(0.1، ق(0.1))$ ، $(م، ق(م))$ يساوي 6 فاوجد قيمة م

يتبع الحل ←

تابع الكل ←

ميل القاطع $= \frac{ق(٣) - ق(٠)}{٣ - ٠} = ٦$

$\frac{(٣ب^{٢} - ١) - (٠ب^{٢} - ١)}{٣ - ٠} = ٦$

$٣ب^{٢} - ١ - ١ + ٠ب^{٢} = ١٨$

$٣ب^{٢} = ١٨$

$ب^{٢} = ٦$

$ب^{٢} - ٦ = ٠ \Leftarrow ب^{٢}(ب - ٣)(ب + ٣) = ٠$

$ب = ٠$ أو $ب = ٣$

مثال ④

اذا كان ميل القاطع المار بالنقطتين $(٣، ق(٣))$ ، $(٥، ق(٥))$ التي تقع على $ق(س) = ٣س^{٢} + ٢س + ١$ يصنع زاوية قدرها ١٣٥° مع محور السينات الموجب أوجد $ب$؟

الحل

ميل القاطع $=$ متوسط التغير $= ظا ١٣٥$

$= -ظا ٤٥ = -١$

$\frac{ق(٥) - ق(٣)}{٥ - ٣} = -١$

$\frac{٣ب^{٢} + ١٥ + ١ - (٩ + ٣ب + ١)}{٢} = -١$

$٣ب^{٢} + ١٦ - ٩ - ٣ب - ١٠ = -٢$

$٣ب^{٢} + ١٦ + ٦ = ٠$

$\frac{٣ب^{٢}}{٣} + \frac{١٦}{٣} = \frac{-٨}{٣}$ $\quad ب = -\frac{١}{٢}$

التفسير الفيزيائي لمتوسط التغير

ليكن ف(ن) اقتران إزاحة في الفترة الزمنية $[ن_{١}، ن_{٢}]$

السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = ع$

$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_{٢}) - ف(ن_{١})}{ن_{٢} - ن_{١}}$

$= \frac{ف(ن_{١} + \Delta ن) - ف(ن_{١})}{\Delta ن}$

$= \frac{ف(ن_{١} + هـ) - ف(ن_{١})}{هـ}$

مثال ①

يتحرك جسيم حسب العلاقة $ف(ن) = ٢ن^{٢} - ١$ حيث ن الزمن بالثواني ف: الإزاحة بالأمتار احسب السرعة المتوسطة عندما تتغير ن من (١) إلى (٢) ثانية

الحل

$ع = \frac{ف(٢) - ف(١)}{٢ - ١}$

$= \frac{(٢ب^{٢} - ١) - (١ب^{٢} - ١)}{١}$

$= ٨ - ١ - ١ = ٦$

مثال ④

يتحرك جسم حسب العلاقة

$$ف(ن) = \begin{cases} ن^2 + 2 & ، ن \leq 2 \\ 3ن - ب & ، ن > 2 \end{cases}$$

وكانت السرعة المتوسطة له في الفترة الزمنية $[1، 3]$ تساوي 9 م/ث فاوجد الثابت ب ؟

الحل

$$ع = \frac{ف(3) - ف(1)}{3 - 1} = 9$$

$$\frac{3(2) - ب - (1)^2 + 2}{2} = 9$$

$$9 - ب - 3 = 18$$

$$-ب - 7 = 18 \Leftarrow -ب = 11$$

$$\Leftarrow ب = -11$$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ② ص٨٤

اذا كان $هـ(س) = س^{٣} - [\frac{١}{٢}س]$ حيث متوسط التغير في الفترات هـ اذا تغيرت س من ٣ الى $س_{٢} = ٣,٤$

الحل

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(٣,٤) - هـ(٣)}{٣,٤ - ٣}$$

$$= \frac{(٣,٤)^{٣} - [\frac{١}{٢}(٣,٤)^{٢}] - [٣^{٣} - [\frac{١}{٢}(٣)^{٢}]}{٠,٤}$$

$$= \frac{(٣,٤)^{٣} - [\frac{١}{٢}(٣,٤)^{٢}] - [٣^{٣} - [\frac{١}{٢}(٣)^{٢}]}{٠,٤}$$

$$= \frac{(١٢,١٦٧ - ١) - (١٣,٨٤٨ - ١)}{٠,٤}$$

$$= \frac{-٠,٦٥٧ ١}{٠,٤} = ١٦,٥٧$$

تدريب ③ ص٨٥

اذا كان القاطع المار بالنقطتين $(٣, هـ(٣))$ ، $(٣,٦, هـ(٣,٦))$ يصنع زاوية قياسها ١٢٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، جد متوسط تغيره اذا تغيرت س من $س_{١} = ٣$ الى $س_{٢} = ٣,٦$

الحل

ميل القاطع $= ظا ١٢٠$

$= -ظا ٦٠ = -\sqrt{٣}$

= متوسط التغير

تدريب ④ ص٨٦

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث يكون بعده $(ف)$ بالأمتار عن نقطة ثابتة $(و)$ بعد ن ثانية معطى بالعلاقة

$ف(ن) = ٢ن^{٢} - ٢ن + ٢٠$

جد السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية $[٦, ٨]$

الحل

$$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٦) - ف(٨)}{٦ - ٨}$$

$$= \frac{(٢(٦)^{٢} - ٢(٦) + ٢٠) - (٢(٨)^{٢} - ٢(٨) + ٢٠)}{-٢}$$

$$= \frac{٨٠ - ١٢٤}{-٢} = \frac{٥٦}{٤} = ١٤$$

مكتبة الوسام ALWESAM الوسام: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل ص٨٧

① السؤال الأول

اذا كان $ق(س) = ع س^{٢} + س - ١$
وكان متوسط التغير في ق يساوي ٤
عندما يتغير من $س_{١}$ الى $س_{١} + ١$
احسب قيمة $س_{١}$

الحل

$$\frac{ق(س_{١}+١) - ق(س_{١})}{(س_{١}+١) - س_{١}} = ٤$$

$$= \frac{ع(س_{١}+١)^{٢} + (س_{١}+١) - ١ - (ع س_{١}^{٢} + س_{١} - ١)}{١} = ٤$$

$$= ع(س_{١}^{٢} + ٢س_{١} + ١) + س_{١} + ١ - ع س_{١}^{٢} - س_{١} + ١ = ٤$$

$$ع س_{١}^{٢} + ٢ع س_{١} + ع + ٢ - ع س_{١}^{٢} = ٤$$

$$٢ع س_{١} + ع + ٢ = ٤$$

$$٢ع س_{١} = ٤ - ٢ - ع$$

$$س_{١} = \frac{٢ - ع}{٢ع}$$

السؤال الثاني

اذا كان $ق(س) = س^{٢} - ٢$ فجد متوسط التغير في ق عندما تتغير س من ٣ الى $٣ + هـ$ بدلالة هـ

الحل

$$\frac{ص\Delta}{س\Delta} = \frac{ق(٣+هـ) - ق(٣)}{٣ + هـ - ٣}$$

$$= \frac{[(٣+هـ)^{٢} - ٢] - [٩ - ٢]}{هـ}$$

$$= \frac{٩ + ٦هـ + هـ^{٢} - ٢ - ٧}{هـ} = \frac{هـ^{٢} + ٦هـ}{هـ}$$

$$= \frac{هـ(هـ + ٦)}{هـ} = هـ + ٦$$

السؤال الثالث (اكمل حل المدرس)

السؤال الرابع

تحرك جسيم في مستوى ديكارتي على منحنى الاقتران ق حيث النقطة $P(س، ص)$ اي النقطة ب $(٢، ٥)$
اذا كانت $\Delta س = ٠و١$ ، $\Delta ص = ٠و٨$
فجد احداثيتي النقطة P

الحل

$\Delta ص = ٠و٨ = ص_{٢} - ص_{١}$

$٠و٨ = ٥ - ص_{١} \Leftarrow ص_{١} = ٤و٢$

$\Delta س = ٠و١ = س_{٢} - س_{١}$

$٠و١ = ٢ - س_{١} \Leftarrow س_{١} = ١و٩$

احداثيتي P $(١و٩ ، ٤و٢)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس

اذا كان متوسط التغير في الأقتران هـ على الفترة $[-١، ٣]$ يساوي -٤ حيث متوسط التغير الأقتران هـ حيث $هـ(س) = ٢هـ(س) - ٣س^٢$ على الفترة نفسها

الحل

متوسط تغير $هـ = \frac{هـ(٣) - هـ(-١)}{٣ - -١} = -٤$

$\boxed{هـ(٣) - هـ(-١) = -١٦}$

متوسط تغير $هـ = \frac{هـ(٣) - هـ(-١)}{٣ - -١}$

$= \frac{٢هـ(٣) - ٣(٣)^٢ - (٢هـ(-١) - ٣(-١)^٢)}{٤}$

$= \frac{٢هـ(٣) - ٢٧ - ٢هـ(-١) + ٣}{٤}$

$= \frac{٢(هـ(٣) - هـ(-١)) - ٢٤}{٤}$

$= \frac{٢ \times -١٦ - ٢٤}{٤} = \frac{-٥٦}{٤}$

$= -١٤$

السؤال السادس

صفيحة معدنية على شكل مثلث قائم الزاوية محافظة على شكلها، اذا زاد طول ضلعها فإن ٥ سم / ث، جد معدل التغير في مساحتها

الحل

$م(س) = س$ ، $س$: طول الضلع

معدل التغير في المساحة $= \frac{١}{٢} م$

$\frac{١}{٢} م = \frac{١}{٢}(٥,٠)(٣) - (٥)(٣)$

$= ٤,٥ - ٢٧,٠ = ٢٢,٥$ سم^٢ / ث

السؤال السابع

خذف جسيم رأسيًا لأعلى بحيث يكون بعده ف بالأمتار عن سطح الأرض بعد ن ثانية بالعلاقة $ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^٢$

جد

أ) السرعة المتوسطة في الفترة $[١، ٤]$

$ع = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٤) - ف(١)}{٤ - ١}$

$= \frac{(٤٠ \times ٤ - ٥(٤)^٢) - (٤٠ \times ١ - ٥(١)^٢)}{٣}$

$= \frac{٨٠ - ٣٥}{٣} = \frac{٤٥}{٣} = ١٥$

ب) $\frac{ف(٥ن) - ف(٠)}{٥ن} =$

$= \frac{٤٠(٥ن) - ٥(٥ن)^٢ - صفر}{٥ن} = ٤٠ - ٥ن$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

(١) وزارة (٢٠١٠) صيفية

اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة (ن) وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) دائما (٢) فاوجد قيمة ن

الحل
متوسط التغير دائما يساوي (٢)
فان ق(س) اقتران خطي درجة أولى
ن = ١

---

(٢) وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا تحرك جسم في مستوى إحداثي على منحنى الاقتران ق(س) من النقطة ل(١، ٣) الى النقطة م(٠، ق(٠)) وكانت سرعته المتوسطة بين النقطتين ل، م هي ٥ سم/د
اوجد ق(٠)

الحل
$\frac{ق(٠) - ٣-}{٠ - ٢} = ٥$
$ق(٠) + ٣ = -١٠$
$ق(٠) = -١٣$

(٣) وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كان متوسط التغير في الاقتران ق على الفترة [٣، ٧] يساوي (٨) اوجد متوسط التغير للاقتران هـ حيث هـ(س) = ١ + $\frac{١}{٢}$ ق(س)

الحل
متوسط تغير ق = $\frac{ق(٧) - ق(٣)}{٧ - ٣} = ٨$
$ق(٧) - ق(٣) = ٣٢$
متوسط تغير هـ = $\frac{هـ(٧) - هـ(٣)}{٧ - ٣}$
$= \frac{(١ + \frac{١}{٢}ق(٧)) - (١ + \frac{١}{٢}هـ(٣))}{٤}$
$= \frac{١ + \frac{١}{٢}ق(٧) - ١ - \frac{١}{٢}هـ(٣)}{٤}$
$= \frac{\frac{١}{٢}(ق(٧) - هـ(٣))}{٤}$
$= \frac{\frac{١}{٢} \times ٣٢}{٤} = ٤$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

④ وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كان متوسط التغير في الأقتران هـ على الفترة [١، ٤] يساوي ٣ وكان هـ(١) + هـ(٤) = ٢ فأوجد متوسط التغير في هـ(س) = هـ²(س) على [١، ٤]

الحل

متوسط تغير هـ = $\frac{هـ(٤) - هـ(١)}{٤ - ١} = ٣$

$\boxed{هـ(٤) - هـ(١) = ٩}$

متوسط تغير هـ² = $\frac{هـ^{٢}(٤) - هـ^{٢}(١)}{٤ - ١}$

$= \frac{(هـ(٤) - هـ(١))(هـ(٤) + هـ(١))}{٣}$

$= \frac{٩ \times ٢}{٣} = \frac{١٨}{٣} = ٦$

⑤ وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان متوسط التغير للأقتران هـ(س) في [١، ٣] يساوي ٥، وكان هـ(س) = ٢س + هـ(س) + ١ فأوجد متوسط التغير هـ(س) في [١، ٣]

الحل

متوسط تغير هـ = $\frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١} = ٥$

$\Leftarrow هـ(٣) - هـ(١) = ١٠$

متوسط تغير هـ = $\frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{(٢ + هـ(٣) + ٢ \times ٢) - (١ + (٢ هـ(١) + ١ \times ٢) + ١)}{٢}$

$= \frac{هـ(٣) + ٧ - هـ(١) - ٣}{٢}$

$= \frac{[هـ(٣) - هـ(١)] + ٤}{٢}$

$\Leftarrow \frac{١٠ + ٤}{٢} = ٧$

⑥ وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كان متوسط التغير في الأقتران هـ(س) = ٩س² - ١ في الفترة [-١، ٣] يساوي ٤ أوجد قيمة ٩

الحل

$\frac{هـ(٣) - هـ(-١)}{٣ - (-١)} = ٤$

$\frac{(٩(٣)^{٢} - ١) - (٩(-١)^{٢} - ١)}{٤} = ٤$

$\frac{٨٩ - ٩ - ١}{٤} = ٤$

$\frac{٧٩}{٤} = ١٦$

$٩ = ٢$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑦ وارة (٢٠١٣) صفحة

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ٤ن^٢ - ٢ن - ١ اوجد السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية [١، ٣]

الحل

$$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٣) - ف(١)}{٣ - ١}$$

$$= \frac{(٤(٣)^٢ - ٢(٣) - ١) - (٤(١)^٢ - ٢(١) - ١)}{٢}$$

$$= \frac{٣٦ - ٦ - ١ - (١)}{٢}$$

$$= \frac{٣٦ - ٨}{٢} = \frac{٢٨}{٢} = ١٤$$

⑧ وارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كان المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطتين (١، ق(١)) ، (٤، ٢) يصنع زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ راديان مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فجد ق(١)

الحل

ميل المماس = ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ = $\frac{ق(١) - ٤}{١ - ٤}$

$$-١ = \frac{ق(١) - ٤}{-٣}$$

$$ق(١) - ٤ = ٣$$

$$ق(١) = ٥$$

⑨ وارة (٢٠١٤) صيفية

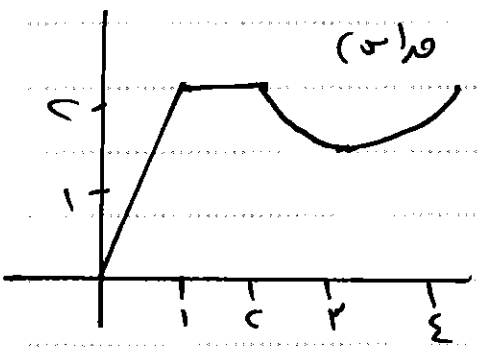
اذا كان ق(س) = $(س^٢ + س)^{-١}$ فجد مقدار التغير في قيمة الاقتران ق(س) اذا تغيرت س من ٣ = ١ الى س = ٢

$$\Delta ق = \Delta ص = ق(٢) - ق(١)$$

$$= (٢^٢ + ٢)^{-١} - (١^٢ + ١)^{-١}$$

$$= \frac{١}{٦} - \frac{١}{٢ \times ٢} = \frac{-٢}{٦} = \frac{-١}{٣}$$

⑩ وارة (٢٠١٥) شتوية



بالاعتماد على الشكل أوجد متوسط التغير في الفترة [٠، ٤]

الحل

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٤) - ق(٠)}{٤ - ٠}$$

$$= \frac{٢ - ٠}{٤} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

(١١) وزارة (٢٠١٦) شتوية

اذا كان متوسط التغير في الاقتران $d(س)$ على الفترة $[٢، ٥]$ يساوي ٧ وكان متوسط تغيره في الفترة $[٥، ٩]$ يساوي ١٤، فجد متوسط تغير $d(س)$ في الفترة $[٢، ٩]$

الحل

① متوسط تغيره في $[٢، ٥]$

$$\frac{d(٥) - d(٢)}{٥ - ٢} = ٧ \Leftarrow d(٥) - d(٢) = ٢١ \quad \cdots ①$$

② في الفترة $[٥، ٩]$

$$\frac{d(٩) - d(٥)}{٩ - ٥} = ١٤$$

$$d(٩) - d(٥) = ٥٦ \quad \cdots ②$$

بجمع ① + ②

$$\Rightarrow d(٩) - d(٢) = ٧٧$$

③ في الفترة $[٢، ٩]$

$$= \frac{d(٩) - d(٢)}{٩ - ٢}$$

$$= \frac{٧٧}{٧} = ١١$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ورقة عمل

متوسط التغير

السؤال الأول

(أ) اذا كان $\begin{cases} [س-١] & س \le ٢ \\ ١+س^{٢} & س > ٢ \end{cases}$ = ص(س)

اوجد متوسط التغير عندما س١ = صفر

٥ س = ٥

الجواب = $\frac{١٢}{٥}$

(ب) اذا كان ص(س) = $س^{٢}+٣س$

اوجد متوسط تغير ص(س) عندما تتغير س من ٢ الى ٢+هـ

الجواب ٧+هـ

(ج) اذا كان متوسط التغير في الفترة [-٤، ١] يساوي (٣) وكان ص(١) = ٢ اوجد ص(-٤)

الجواب = -١٣

السؤال الثاني

(أ) اذا كان متوسط تغير ص(س) في [-٢، ٢] يساوي ٦ فجد متوسط تغير ل(س) = $س^{٢}$ × ص(س) في [-٢، ٢]

ج = ٢٤

(ب) اذا كان متوسط تغير $ص(س) = \sqrt{٢س+١}$ في [٠، ب] يساوي $\frac{١}{٢}$ فجد ب

ج : ب = ٤

(ج) اذا كان متوسط تغير ص(س) = $٢س^{٢}+٣س$ في [٣، ٣+أ] يساوي ١١ فما قيمة أ ؟

ج : أ = ١

(د) اذا كان متوسط تغير ص(س) = $٤س^{٢}-٩$ في [ب، ٢] يساوي (-٤) اوجد قيمة ب ؟

ب = -٣

مكتبة الوسام ALWESAM

السؤال الثالث

(م) اذا كان متوسط التغير للاقتران ه في الفترة [١، ٣] يساوي (٧) وفي الفترة [٣، ٧] يساوي (٤) أوجد متوسط التغير للاقتران ه في [١، ٧]

ج = ٥

(ن) اذا كان متوسط التغير ه(س) في الفترة [-١، ٢] يساوي (٥)، وعرّف الاقتران ه(س) = ه(س-١) + ٣ك - ٢ على الفترة [٠، ٣]، فأوجد متوسط التغير للاقتران ه(س) على [٠، ٣]

الجواب = ٨

(هـ) $$ه = \begin{cases} ٣ + \text{جا}س & ، س \le \frac{\pi}{٢} \\ ١ - \text{ظا}س & ، \frac{\pi}{٢} < س < \pi \end{cases}$$

اجب متوسط التغير ه(س) في الفترة $[\frac{\pi}{٢}، \pi]$

الجواب = $\frac{-٢}{\pi}$

(و) اذا كان ه(س) = ٢س^٢ - ١ فأوجد ميل القاطع لمنحنى ه(س) المار بالنقطتين (٢، ه(٢)) ، (-١، ه(-١))

الجواب = ٢

السؤال الرابع

(م) اذا كان متوسط تغير ه في [١، ٥] يساوي ٧ وكان ل(س) = ٢س ه(س) حيث ل(س) غير بالنقطة (١، ٢) فجد متوسط تغير ل(س) في [١، ٥]

الجواب = ٢٨

(ن) اذا كان ه(س) = ٣س + ن يمر بالنقطة (٢، ٤) ومتوسط التغير في الفترة [س١، س٢] يساوي ٨ اوجد قاعدة الاقتران

الجواب (٨س - ١٢)

(هـ) اذا كان متوسط التغير للاقتران ه في الفترة [-١، ٣] يساوي (٤) وكان ه(٣) + ه(-١) = ١، وكان متوسط التغير للاقتران ه(س) في [-١، ٣] يساوي ٥، وكان ه(٣) + ه(-١) = ٢ اجب متوسط التغير للاقتران م(س) = ه^٢(س) - ه(س)

الجواب = ٦

مكتبة القسم ALWESAM ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس

(٣) اذا كان متوسط تغير د(س) في [٢، ٥] يساوي -٦ وكان د(١) + د(٥) = ٤ حيث متوسط تغير ل(س) = ٧ س + د(س) في [٢، ٥]

الجواب = -١٧

---

(١) اذا كان متوسط التغير لكل من قترانين د(س) = ٤ على الفترة [١، ٣] وكان

$(\int_{1}^{3} د(س)\,دس)^2 + \int_{1}^{3} [د(س)]^2\,دس + (\int_{1}^{3} د(س)\,دس)^2 = 10$

اوجد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $\int_{1}^{3} د(س)\,دس$ على [١، ٣]

الجواب = $\frac{4}{5}$

---

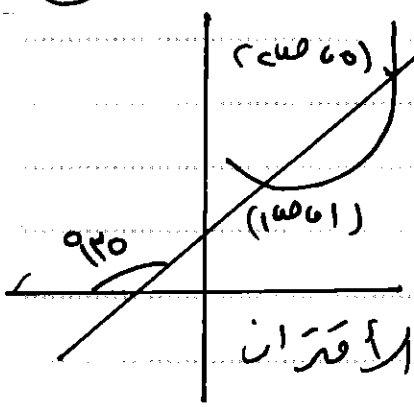
(٥) اذا كان القاطع المار بالنقطتين (٢، د(٢)) ، (٥، د(٥)) يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع محور السينات الموجب فجد متوسط تغير د اذا تغيرت من ٢ الى ٥ ؟

الجواب = $\frac{1}{27}$

السؤال السادس

(٢) مثلث متساوي الساقين زاوية رأسه ٦٠° طول ضلع الساعة ص جد متوسط تغير المساحة عندما تتغير طول ضلعه س من ٢ الى ٤

مساعدة: مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الارتفاع



جد متوسط تغير الاقتران د(س) في الفترة [١، ٥]

الجواب = ١

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الثاني
المشتقة الأولى

رموز المشتقة الأولى

اذا كان ص = ق(س) فان رموز المشتقة الأولى هي

ص' ، $\frac{د ص}{د س}$ ، ق'(س)

$\frac{د}{د س}$ (ق(س))

تعريف المشتقة الأولى

ميل القاطع = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

ميل المماس = $\lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

يسمى ميل المماس بالمشتقة الأولى

⇐ المشتقة الأولى = نهاية متوسط التغير

= معدل التغير

$\frac{د ص}{د س}$: هي معدل تغير ص بالنسبة لـ س

قوانين المشتقة باستخدام التعريف

① $ق'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$

② $ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

يفضل استخدامها للأقترانات الكسرية ، والجذرية والتكعيبية فما فوقه .

ملاحظة

اذا كانت نهاية متوسط التغير موجودة فان ق'(س) موجودة ويقال ان ق(س) قابل للأشتقاق

واذا كانت نهاية متوسط التغير غير موجودة فان ق'(س) غير موجودة

ويقال ان ق(س) غير قابل للأشتقاق

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام ناجح الجمزاوي

ملاحظات

① اذا كانت $\text{ه}'(\text{أ})$ موجودة فان $\text{ه}(\text{س})$ قابل للاشتقاق عند $\text{س} = \text{أ}$، $\text{أ} \in \text{ح}$

② المشتقة غير موجودة عند اطراف الفترات.

③ عند نقاط التعيب يكون الاقتران قابلاً للاشتقاق اذا كانت مشتقة من اليمين تساوي المشتقة من اليسار

المشتقة الأولى عند نقطة

المشتقة الأولى للاقتران $\text{ه}(\text{س})$ عند النقطة $\text{س} = \text{س}_1$ هي

① $\text{ه}'(\text{س}_1) = \text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\text{ه}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{ه}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$

② $\text{ه}'(\text{س}_1) = \text{نهـا}_{\text{ع} \to \text{س}_1} \dfrac{\text{ه}(\text{ع}) - \text{ه}(\text{س}_1)}{\text{ع} - \text{س}_1}$

③ $\text{ه}'(\text{س}_1) = \text{نهـا}_{\text{س}_2 \to \text{س}_1} \dfrac{\text{ه}(\text{س}_2) - \text{ه}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

نفضل عند حساب المشتقة الأولى عند نقطة استخدام القانون

$\text{ه}'(\text{س}_1) = \text{نهـا}_{\text{ع} \to \text{س}_1} \dfrac{\text{ه}(\text{ع}) - \text{ه}(\text{س}_1)}{\text{ع} - \text{س}_1}$

أمثلة

$\text{ه}'(\text{ه}) = \text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\text{ه}(\text{ه} + \text{هـ}) - \text{ه}(\text{ه})}{\text{هـ}}$

$\text{ه}'(\text{ع}) = \text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\text{ه}(\text{ع} + \text{هـ}) - \text{ه}(\text{ع})}{\text{هـ}}$

أو

$\text{ه}'(\text{ه}) = \text{نهـا}_{\text{ع} \to \text{ه}} \dfrac{\text{ه}(\text{ع}) - \text{ه}(\text{ه})}{\text{ع} - \text{ه}}$

$\text{ه}'(1) = \text{نهـا}_{\text{ع} \to 1} \dfrac{\text{ه}(\text{ع}) - \text{ه}(1)}{\text{ع} - 1}$

وهكذا ـ ـ ـ ـ

مؤسسة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ①

$ق(س) = ٢س^{٢} + ٥س - ٢$ حيث $ق(١)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل

$$ق'(١) = \lim_{ع \to ١} \frac{ق(ع) - ق(١)}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{٢ع^{٢} + ٥ع - ٢ - (٢(١)^{٢} + ٥(١) - ٢)}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{٢ع^{٢} + ٥ع - ٢ - ٥}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{٢ع^{٢} + ٥ع - ٧}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{(٢ع + ٧)(ع - ١)}{ع - ١}$$

$= ٢ \times ١ + ٧ = ٩$

ملاحظة هامة

في الحالة استخدام القانون

$$ق'(م) = \lim_{س \to م} \frac{ق(س) - ق(م)}{س - م}$$

مثال ②

$ق(س) = ظا س$ حيث $ق(\frac{\pi}{٤})$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل

$$ق'(\frac{\pi}{٤}) = \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ق(س) - ق(\frac{\pi}{٤})}{س - \frac{\pi}{٤}}$$

$$ق'(\frac{\pi}{٤}) = \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظا س - ظا \frac{\pi}{٤}}{س - \frac{\pi}{٤}}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظا س - ١}{س - \frac{\pi}{٤}}$$

$ص = س - \frac{\pi}{٤} \Rightarrow س = ص + \frac{\pi}{٤}$

$س \to \frac{\pi}{٤}$ ، $ص \to ٠$

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{ظا(ص + \frac{\pi}{٤}) - ١}{ص}$$

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{\frac{ظا ص + ظا \frac{\pi}{٤}}{١ - ظا ص ظا \frac{\pi}{٤}} - ١}{ص}$$ (بوضع ظا $\frac{\pi}{٤} = ١$)

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{\frac{ظا ص + ١}{١ - ظا ص} - ١}{ص}$$

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{ظا ص + ١ - ١ + ظا ص}{١ - ظا ص} \times \frac{١}{ص}$$

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{٢ ظا ص}{ص} \times \lim_{ص \to ٠} \frac{١}{١ - ظا ص}$$

$= ٢ \times ١ + \frac{١}{١ - ٠} = ٣$

طريقة أخرى

باستخدام

$$\text{هـ}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{نها}_{\text{ه}\to 0} \frac{\text{هـ}\left(\frac{\pi}{4}+\text{ه}\right)-\text{هـ}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\text{ه}}$$

أكمل الحل ـ ـ ـ ـ ـ

مثال ③

هـ(س) = س^{2} − ٣س − ٢ أوجد هـ'(س)

باستخدام تعريف المشتقة

الحل

$$\text{هـ}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{هـ}(\text{ع})-\text{هـ}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^{2}-٣\text{ع}-٢-(\text{س}^{2}-٣\text{س}-٢)}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^{2}-\text{س}^{2}-٣\text{ع}+٣\text{س}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}+\text{س})-٣(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} (\text{ع}+\text{س}-٣)$$

$$= \text{س}+\text{س}-٣$$

$$= ٢\text{س}-٣$$

مثال ④

هـ(س) = $\sqrt[3]{\text{س}}$ حيث هـ(س) باستخدام تعريف المشتقة

الحل

$$\text{هـ}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{هـ}(\text{ع})-\text{هـ}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt[3]{\text{ع}}-\sqrt[3]{\text{س}}}{\text{ع}-\text{س}}$$ مرافقة تكعيبي

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt[3]{\text{ع}}-\sqrt[3]{\text{س}}}{\text{ع}-\text{س}} \times \frac{(\sqrt[3]{\text{ع}})^{2}+\sqrt[3]{\text{ع}}\sqrt[3]{\text{س}}+(\sqrt[3]{\text{س}})^{2}}{(\sqrt[3]{\text{ع}})^{2}+\sqrt[3]{\text{ع}}\sqrt[3]{\text{س}}+(\sqrt[3]{\text{س}})^{2}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}-\text{س}}{(\text{ع}-\text{س})\left((\sqrt[3]{\text{ع}})^{2}+\sqrt[3]{\text{ع}}\sqrt[3]{\text{س}}+(\sqrt[3]{\text{س}})^{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt[3]{\text{س}})^{2}+(\sqrt[3]{\text{س}})^{2}+(\sqrt[3]{\text{س}})^{2}} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{\text{س}})^{2}}$$

مثال ⑤

اذا كان $ه(س) = \frac{س^2}{س^3+1}$

اوجد $ه'(1)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل

$$ه'(1) = \lim_{س \to 1} \frac{ه(س) - ه(1)}{س - 1}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{\frac{س^2}{س^3+1} - \frac{1 \times 2}{1^3+1}}{س - 1}$$ توحيد المقام

$$= \lim_{س \to 1} \frac{\frac{2س}{س^3+1} - 1}{س - 1}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{2س - س^3 - 1}{(س^3+1)(س-1)}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{-(س^3 - 2س + 1)}{(س^3+1)(س-1)} \times \frac{1}{س-1}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{-(س-1)(س-1)}{(س^3+1)(س-1)} \times \frac{1}{س-1}$$

$$= \frac{-(1-1)}{1^3+1} = صفر$$

مثال ⑥

$ه(س) = ظتا^2 س$ محدد

$ه'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل

$$ه'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ظتا^2 ع - ظتا^2 س}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ظتا ع - ظتا س)(ظتا ع + ظتا س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{-ق^2(\frac{ع+س}{2}) ق^2(\frac{ع-س}{2}) \times (ظتا ع + ظتا س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{-ق^2(ع+س) ق^2(ع-س) \times (ظتا ع + ظتا س)}{2(ع-س)}$$

$$= \lim_{ع \to س} -ق^2(ع+س) \times \lim_{ع \to س} \frac{ق^2(ع-س)}{2(ع-س)} \times \lim_{ع \to س} (ظتا ع + ظتا س)$$

$$= -ق^2(س+س) \times 1 \times (ظتا س + ظتا س)$$

$$= -ق^2(2س) \times 2 ظتا س$$

$$= -4 ق^2 س ظتا س$$

$$= -4 ق^2 س \frac{ق س}{ج ا س}$$

مثال ⑦

$ق(س) = س^{٢} + ٨س$ اوجد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} + ٨ع - س^{٢} - ٨س}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٨ع - ٨س}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٨(ع - س)}{ع - س}$$

$$= (س + س) + ٨$$

$$= ٢س + ٨$$

مثال ⑧

اذا كانت $ص = س^{٢}\sqrt{س + ١}$

اوجد $\frac{د ص}{د س}$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢}\sqrt{ع + ١} - س^{٢}\sqrt{س + ١}}{ع - س}$$

باضافة وطرح $س^{٢}\sqrt{ع + ١}$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢}\sqrt{ع + ١} - س^{٢}\sqrt{ع + ١} + س^{٢}\sqrt{ع + ١} - س^{٢}\sqrt{س + ١}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع + ١}(ع^{٢} - س^{٢})}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{س^{٢}(\sqrt{ع + ١} - \sqrt{س + ١})}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع + ١}(ع - س)(ع + س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{س^{٢}(\sqrt{ع + ١} - \sqrt{س + ١})}{ع - س}$$

ضرب وقسمة كل حد بمرافق بسطه

$$= \lim_{ع \to س} \sqrt{ع + ١}(ع + س) + \lim_{ع \to س} \frac{س^{٢}(ع + ١ - س - ١)}{(ع - س)(\sqrt{ع + ١} + \sqrt{س + ١})}$$

$$= ٢س\sqrt{س + ١} + \lim_{ع \to س} \frac{س^{٢}(ع - س)}{(ع - س)(\sqrt{ع + ١} + \sqrt{س + ١})}$$

$$= ٢س\sqrt{س + ١} + \lim_{ع \to س} \frac{س^{٢}}{\sqrt{ع + ١} + \sqrt{س + ١}}$$

$$= ٢س\sqrt{س + ١} + \frac{س^{٢}}{٢\sqrt{س + ١}}$$

مكتبة الهدى ALWEDAM
للعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑨ س٩٧ الكتاب ص

اذا كان ل(س) = (س − ٢) × هـ(س)
حيث هـ(س) اقترانٌ متصلٌ عند س = ٢
استخدم تعريف المشتقة في اثبات ان

هـ(٢) = ل'(٢)

الحل

$$ل'(٢) = \lim_{ع \to ٢} \frac{ل(ع) - ل(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \lim_{ع \to ٢} \frac{(ع - ٢) \times هـ(ع) - (٢ - ٢) هـ(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \lim_{ع \to ٢} \frac{(ع - ٢) \times هـ(ع)}{ع - ٢} - ٠$$

$$= \lim_{ع \to ٢} \frac{(ع - ٢) \times هـ(ع)}{ع - ٢}$$

$$= هـ(٢)$$

$$\Leftarrow ل'(٢) = هـ(٢)$$

مثال ⑩

اذا كان ل(س) = هـ٢(س) اثبت
باستخدام تعريف المشتقة أن
ل'(س) = ٢ هـ(س) × هـ'(س)

الحل

$$ل'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ل(ع) - ل(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{هـ٢(ع) - هـ٢(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(هـ(ع) - هـ(س))(هـ(ع) + هـ(س))}{(ع - س)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} \times \lim_{ع \to س} (هـ(ع) + هـ(س))$$

$$= هـ'(س) \times ٢ هـ(س)$$

مثال ⑪

اذا كان هـ(س) = $\frac{س}{ل(س)}$
باستخدام تعريف المشتقة اثبت أن
$هـ'(س) = \frac{ل(س) - س\, ل'(س)}{ل٢(س)}$

الحل

$$هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{ع}{ل(ع)} - \frac{س}{ل(س)}}{ع - س}$$

← يتبع الحل

توصيه المعلم

$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع\,ل(س) - س\,ل(ع)}{ل(ع)\,ل(س)(ع - س)}$$

اضافة وطرح $س\,ل(س)$.

$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع\,ل(س) - س\,ل(س) + س\,ل(س) - س\,ل(ع)}{ل(ع)\,ل(س)(ع - س)}$$

$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ل(س)(ع - س)}{ل(ع)\,ل(س)(ع - س)} + \text{نها}_{ع \to س} \frac{س(ل(س) - ل(ع))}{(ع - س)\,ل(ع)\,ل(س)}$$

العكس

$$= \frac{1}{ل(س)} - \text{نها}_{ع \to س} \frac{س(ل(ع) - ل(س))}{(ع - س)\,ل(ع)\,ل(س)}$$

$$= \frac{1}{ل(س)} - \text{نها}_{ع \to س} \frac{س}{ل(ع)\,ل(س)} \times \frac{ل(ع) - ل(س)}{(ع - س)}$$

$$= \frac{1}{ل(س)} - \frac{س}{ل(س)\,ل(س)} \times ل'(س)$$

$$= \frac{1}{ل(س)} - \frac{س\,ل'(س)}{ل^2(س)}$$

ملاحظه هامه جداً

في اسئلة الاضافات والطرح نستطيع معرفتها من خلال وجود مقدارين معلومين في الرموز $س ع^2$ ، $س^2 ع$ ، $ع\,و(س)$ ، $س\,و(ع)$ وهكذا ـ ـ ـ ـ

ويتم اضافة وطرح مقدار بمقدار واحد مثل $س\,و(س)$ ، أو $ع\,و(ع)$ والعكس

مثال (١٣)

اثبت ان

$$\text{نها}_{ع \to س} \frac{ع\,ق(س) - س\,ق(ع)}{ع - س} = ق(س) - س\,ق'(س)$$ حيث ق ثابت

الحل

اضافة وطرح $س\,ق(س)$

$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع\,ق(س) - س\,ق(س) + س\,ق(س) - س\,ق(ع)}{ع - س}$$

$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ق(س)(ع - س)}{ع - س} + \text{نها}_{ع \to س} س \left(\frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}\right)$$

$$= ق(س) - س\,ق'(س)$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)
اذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س فاثبت أن
هنا $\lim_{ع \to س} \frac{٣ع\,ق(س) - ٣س\,ق(ع)}{ع - س}$
$= ٣ق(س) - ٣س\,ق'(س)$

الحل
نضيف ونطرح $٣س\,ق(س)$

$= \text{هنا}_{ع \to س} \frac{٣ع\,ق(س) - ٣س\,ق(س) + ٣س\,ق(س) - ٣س\,ق(ع)}{ع - س}$

$= \text{هنا}_{ع \to س} \frac{٣ق(س)(ع - س)}{ع - س} - \text{هنا}_{ع \to س} \frac{٣س(ق(ع) - ق(س))}{ع - س}$

$= ٣ق(س) - ٣س \times ق'(س)$

مثال (١٤)
$ق(س) = \frac{١}{\sqrt{٤س + ١}}$ اوجد $ق'(٢)$
باستخدام التعريف

الحل
$ق'(٢) = \text{هنا}_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢}$

$= \text{هنا}_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{\sqrt{٤س + ١}} - \frac{١}{٣}}{س - ٢}$ توحيد المقام

$= \text{هنا}_{س \to ٢} \frac{٣ - \sqrt{٤س + ١}}{٣\sqrt{٤س + ١}} \times \frac{١}{س - ٢}$

$= \text{هنا}_{س \to ٢} \frac{٣ - \sqrt{٤س + ١}}{٣\sqrt{٤س + ١}(س - ٢)} \times \frac{٣ + \sqrt{٤س + ١}}{٣ + \sqrt{٤س + ١}}$

$= \text{هنا}_{س \to ٢} \frac{٣ - (٤س + ١)}{٣\sqrt{٤س + ١}(س - ٢)(٣ + \sqrt{٤س + ١})}$

$= \text{هنا}_{س \to ٢} \frac{٣ - ٤س - ١}{٣\sqrt{٤س + ١}(س - ٢)(٣ + \sqrt{٤س + ١})}$

$= \text{هنا}_{س \to ٢} \frac{٢ - ٤س}{٣\sqrt{٤س + ١}(س - ٢)(٣ + \sqrt{٤س + ١})}$

$= \text{هنا}_{س \to ٢} \frac{-٤(٢ - س)}{٣\sqrt{٤س + ١}(س - ٢)(٣ + \sqrt{٤س + ١})}$

$= \frac{-٤}{(٣ + ٣)(٣ \times ٣)} = \frac{-٤}{٥٤}$

$= \frac{-٢}{٢٧}$

مثال (١٥)
اذا كان $ق(٣) = ٤$ ، $ق'(٣) = ٥$
وكان $ل(س) = س^{٢} ق(س)$ فجد $ل'(٣)$
باستخدام تعريف المشتقة

الحل
$ل'(٣) = \text{هنا}_{س \to ٣} \frac{ل(س) - ل(٣)}{س - ٣}$

← يتبع الحل

مكتبة الوسام العلمية ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

$$\text{لـ}(س) = \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^{٢} \text{ق}(س) - ٣^{٢} \text{ق}(٣)}{س - ٣}$$

باضافة وطرح $٩ \text{ق}(س)$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{س^{٢} \text{ق}(س) - ٩ \text{ق}(س) + ٩ \text{ق}(س) - ٩ \text{ق}(٣)}{س - ٣}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \text{ق}(س) \frac{(س^{٢} - ٩)}{س - ٣} + \text{نهـا}_{س \to ٣} ٩ \left(\frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(٣)}{س - ٣} \right)$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \text{ق}(س) \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣} + \text{نهـا}_{س \to ٣} ٩ \left(\frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(٣)}{س - ٣} \right)$$

$$= ٦ \text{ق}(٣) + ٩ \text{ق}'(٣)$$

$$= ٦ \times ٤ + ٩ \times ٥$$

$$= ٢٤ + ٤٥ = ٦٩$$

مثال (١٦)

اذا كانت $\text{ق}'(١) = ٣$ جد قيمة كل مما يلي

① $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{س - ١}$

الحل $= \text{ق}'(١) = ٣$

② $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{١ - س}$

الحل $= - \text{ق}'(١) = -٣$

③ $\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\text{ق}(١ + هـ) - \text{ق}(١)}{هـ}$

الحل $= \text{ق}'(١) = ٣$

④ $\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\text{ق}(١ + ٢هـ) - \text{ق}(١)}{هـ}$

الحل نفرض $و = ٢هـ \Leftarrow هـ = \frac{و}{٢}$

$هـ \to ٠ \Leftrightarrow و \to ٠$

$$= \text{نهـا}_{و \to ٠} \frac{\text{ق}(١ + و) - \text{ق}(١)}{\frac{و}{٢}}$$

$$= ٢ \text{ق}'(١) = ٢ \times ٣ = ٦$$

⑤ $\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\text{ق}(١ - هـ) - \text{ق}(١)}{هـ}$

الحل

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\text{ق}(١ + (-هـ)) - \text{ق}(١)}{هـ}$$

$$= -١ \times \text{ق}'(١) = -٣$$

⑥ $\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\text{ق}(١ + هـ) - \text{ق}(١ - هـ)}{هـ}$

طرح واضافة $\text{ق}(١)$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\text{ق}(١ + هـ) - \text{ق}(١)}{هـ} - \left(\frac{\text{ق}(١ - هـ) - \text{ق}(١)}{-هـ} \right)$$

$$= \text{ق}'(١) - - \text{ق}'(١)$$

$$= ٢ \text{ق}'(١) = ٢ \times ٣ = ٦$$

مكتبة العلم ALILM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٧)

استخدم تعريف المشتقة الأولى لايجاد قـ(س) للاقتران
قـ(س) = س جا٢س

الحل

$$قـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{قـ(ع) - قـ(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع جا٢ع - س جا٢س}{ع - س}$$

باضافة وطرح ع جا٢س

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع جا٢ع - ع جا٢س + ع جا٢س - س جا٢س}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} ع \frac{(جا٢ع - جا٢س)}{ع - س} + \frac{جا٢س (ع - س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} ع \times ٢ \frac{ضتا(ع + س) جا(ع - س)}{(ع - س)} + جا٢س$$

$$= ٢س ضتا(س + س) \times ١ + جا٢س$$

$$= ٢س ضتا٢س \times ١ + جا٢س$$

$$= ٢س ضتا٢س + جا٢س$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٧)

اذا كان ق(٢) = ٤ ، ق(٢) = ٣

جد $\lim_{س \to ٢} \frac{٣س ق(س) - ٤}{س - ٢}$

الحل

اضافة وطرح ٦ق(س)

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٣س ق(س) - ٦ق(س) + ٦ق(س) - ٤}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٣ق(س)(س - ٢)}{س - ٢} + \lim_{س \to ٢} \frac{٦ق(س) - ٤}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} ٣ق(س) + \lim_{س \to ٢} ٦ \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢}$

$= ٣ق(٢) + ٦ق'(٢)$

$= ٣ \times ٤ + ٦ \times ٢ = ١٢ + ١٨$

$= ٣٠$

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ٩

① لتكن $ق(س) = س^٣ + س - ٢$

جد ق'(-٣) باستخدام التعريف

الحل

$ق'(-٣) = \lim_{س \to -٣} \frac{ق(س) - ق(-٣)}{س + ٣}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{س^٣ + س - (-٣)^٣ - (-٣)}{س + ٣}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{س^٣ + س + ٢٧ + ٣}{س + ٣}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{س^٣ + س + ٣٠}{س + ٣}$

قسمة تركيبية

	١	٠	١	٣٠
-٣		-٣	٩	-٣٠
	١	-٣	١٠	٠

$= \lim_{س \to -٣} \frac{(س + ٣)(س^٢ - ٣س + ١٠)}{س + ٣}$

$= (-٣)^٢ - ٣(-٣) + ١٠$

$= ٩ + ٩ + ١٠ = ٢٨$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

← تابع تدريب ①

ⓒ اذا كان ق'(٠) = −٦

ق'(٠) = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٠) - ق(٥هـ)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٠+٥هـ) - ق(٠)}{هـ}$

نفرض و = ٥هـ ⇐ هـ = $\frac{و}{٥}$

هـ → ٠ ⇐ و → ٠

= − $\lim_{و \to ٠} \frac{ق(٠+و) - ق(٠)}{\frac{و}{٥} \times ٥}$

= − $\frac{٥}{٥}$ × ق'(٠)

= − $\frac{٥}{٥}$ × −٦ = ١٥

تدريب ⓒ ص ٩١

ق(س) = س + ٧س جـ

ق(٤) باستخدام التعريف

الحل

ق'(٤) = $\lim_{س \to ٤} \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤}$

= $\lim_{س \to ٤} \frac{س + ٧س - (٤+٤)}{س - ٤}$

= $\lim_{س \to ٤} \frac{س + ٧س - ٦}{س - ٤}$

= $\lim_{س \to ٤} \frac{(س-١)(س+٦) + ٧س}{س - ٤}$

ضرب بالمرافق

= $\lim_{س \to ٤} \frac{(س-١)(س+٦) + ٧س}{س - ٤} \times \frac{(س-١)(س+٦) - ٧س}{(س-١)(س+٦) - ٧س}$

= $\lim_{س \to ٤} \frac{(س-١)^٢ (س+٦)^٢ - ٤٩س^٢}{(س-٤)((س-١)(س+٦) + ٧س)}$

= $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٤ + ١٢س^٣ + ٣٦س^٢ - ٤٩س^٢}{(س-٤)(س^٢ + ٥س - ٦ + ٧س)}$

= $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٤ + ١٢س^٣ - ١٣س^٢ + ٣٦}{(س-٤)(س^٢ + ١٢س - ٦)}$

= $\lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(س+٢)(س-٩)}{(س-٤)((س-١)(س+٦) + ٧س)}$

= $\frac{٤-٩}{(٤-١)(٤+٦) + ٤٧}$ = $\frac{-٥}{٤٠ + ٤٧}$ = $\frac{٥}{٤}$

مكتبة العلم ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

تدريب ④ ص٩١

$ل(س) = \frac{س}{٢+س}$

اوجد $ل'(-١)$ باستخدام التعريف

الحل

$ل'(-١) = \lim_{س \to -١} \frac{ل(س) - ل(-١)}{س + ١}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{\frac{س}{٢+س} - \frac{-١}{٢+-١}}{س + ١}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{\frac{س}{٢+س} + \frac{١}{١}}{س + ١}$ توحيد مقام

$= \lim_{س \to -١} \frac{س + ٢ + س}{٢+س} \times \frac{١}{س+١}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{٢س+٢}{٢+س} \times \frac{١}{س+١}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{٢(س+١)}{٢+س} \times \frac{١}{س+١}$

$= \frac{٢}{٢+-١} = ٢$

تدريب ⑤ ص٩٦

اذا كان $ق(س) = \frac{س^٢}{١-س}$ $س \neq ١$

فجد $ق'(س)$ باستخدام التعريف

$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{ع^٢}{١-ع} - \frac{س^٢}{١-س}}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ - ع^٢س - س^٢ + ع س^٢}{(١-ع)(١-س)}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ - س^٢ + ع س^٢ - ع^٢ س}{(١-ع)(١-س)(ع-س)}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع-س)(ع+س)}{(١-ع)(١-س)(ع-س)} + \lim_{ع \to س} \frac{ع س (س-ع)}{(١-ع)(١-س)(ع-س)}$ (-١)

$= \frac{س+س}{(١-س)(١-س)} + \frac{-س \times س}{(١-س)(١-س)}$

$= \frac{٢س - س^٢}{(١-س)^٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل ص ٩٧

السؤال الأول

اصبح مشتقة الأولى لكل اقتران مستخدماً التعريف عند قيم س المذكورة

ب) $ق(س) = س^3 + 2س - 1$ ، $س = 5$

الحل

$$ق'(5) = \text{نها}_{س \to 5} \frac{ق(س) - ق(5)}{س - 5}$$

$$= \text{نها}_{س \to 5} \frac{س^3 + 2س - 1 - (5^3 + 2(5) - 1)}{س - 5}$$

$$= \text{نها}_{س \to 5} \frac{س^3 + 2س - 134}{س - 5}$$

$$= \text{نها}_{س \to 5} \frac{س^2 + 5س + 27}{1}$$

قسمة تركيبية

	1	0	2	−135
5		5	25	135
	1	5	27	0

$$= (5)^2 + 5(5) + 27 = 25 + 25 + 27 = 77$$

ج) $ه(س) = \frac{1}{4س - 3}$ ، $س = -2$

الحل

$$ه'(-2) = \text{نها}_{س \to -2} \frac{ه(س) - ه(-2)}{س + 2}$$

$$= \text{نها}_{س \to -2} \frac{\frac{1}{4س - 3} - \frac{1}{-11}}{س + 2}$$

$$= \text{نها}_{س \to -2} \frac{11 + 4س - 3}{11(4س - 3)} \quad \text{وحيد مقام}$$

$$= \text{نها}_{س \to -2} \frac{8 + 4س}{11(4س - 3)} \times \frac{1}{س + 2}$$

$$= \text{نها}_{س \to -2} \frac{4(س + 2)}{11(4س - 3)} \times \frac{1}{س + 2}$$

$$= \frac{4}{11 \times -11} = \frac{4}{-121}$$

السؤال الثاني

جد $\frac{ص}{س}$ لكل من الاقترانات التالية مستخدماً تعريف المشتقة

ب) $ص = \sqrt{س + 2}$ ، $س = 2$

الحل

$$ص' = \text{نها}_{س \to 2} \frac{ق(س) - ق(2)}{س - 2}$$

يتبع الحل ←

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع+ج} - \sqrt{س+ج}}{ع - س}$

ضرب مرافقه

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع+ج} - \sqrt{س+ج}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{ع+ج} + \sqrt{س+ج}}{\sqrt{ع+ج} + \sqrt{س+ج}}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع + ج - س - ج}{(ع - س)(\sqrt{ع+ج} + \sqrt{س+ج})}$

$= \frac{1}{\sqrt{س+ج} + \sqrt{س+ج}} = \frac{1}{2\sqrt{س+ج}}$

---

① $ص = ٥س^{٢} - \frac{٤}{س}$ $\quad س \neq ٠$

الكل

$ق'(س) = \text{نها}_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{٥ع^{٢} - \frac{٤}{ع} - ٥س^{٢} + \frac{٤}{س}}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \left(\frac{٥ع^{٢} - ٥س^{٢}}{ع - س}\right) - \left(\frac{\frac{٤}{ع} - \frac{٤}{س}}{ع - س}\right)$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{٥(ع - س)(ع + س)}{ع - س} - \text{نها}_{ع \to س} \frac{\frac{س - ع}{ع س}}{ع - س}$ (ق)

$= ٥(س + س) + \frac{٤}{س^{٢}}$

$= ١٠س + \frac{٤}{س^{٢}}$

السؤال الثالث

اذا كان ق قابلاً للاشتقاق فاثبت ان

(أ) $\text{نها}_{ه \to ٠} \frac{ق(س+ه) - ق(س-ه)}{ه} = ٢ق'(س)$

الكل

باضافة وطرح $ق(س)$

$\text{نها}_{ه \to ٠} \frac{ق(س+ه) - ق(س) + ق(س) - ق(س-ه)}{ه}$

$= ق'(س) - \text{نها}_{ه \to ٠} \frac{ق(س-ه) + ق(س)}{ه}$ بفرض $و = -ه$

$= ق'(س) + ق'(س)$

$= ٢ق'(س)$

(ب) $\text{نها}_{ع \to س} \frac{س ق(ع) - ع ق(س)}{ع - س} = ق(س) - س ق'(س)$

الكل

باضافة وطرح $س ق(س)$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع ق(ع) - س ق(س) + س ق(س) - س ق(ع)}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ق(س)(ع - س) - س(ق(ع) - ق(س))}{ع - س}$

$= ق(س) - س \times ق'(س)$

⑥ نها $\frac{٣ع^{٣}\,ق(ع) - ٣س\,ق(س)}{ع - س}$ ، ع ← س

$= ٣ق(س) + ٣س\,ق'(س)$

الحل

اضافة وطرح $٢س\,ق(ع)$

نها $\frac{٣ع^{٣}\,ق(ع) - ٣س\,ق(ع) + ٣س\,ق(ع) - ٣س\,ق(س)}{ع - س}$

$= نها \frac{٣ق(ع)(ع^{٣} - س^{٣})}{ع - س} + ٣س\,نها \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$= ٣ق(س) + ٣س\,ق'(س)$

السؤال الرابع

اذا كان $ق'(٤) = ٦$ جد

نها $\frac{ق(٤ - ٢هـ) - ق(٤ + ٥هـ)}{هـ}$

الحل

اضافة وطرح $ق(٤)$

نها $\frac{ق(٤ - ٢هـ) - ق(٤) + ق(٤) - ق(٤ + ٥هـ)}{هـ}$

هـ ← ٠

نها $\frac{ق(٤ - ٢هـ) - ق(٤)}{هـ}$ − نها $\frac{ق(٤ + ٥هـ) - ق(٤)}{هـ}$

جد نها $\frac{ق(٤ - ٢هـ) - ق(٤)}{هـ}$

نفرض و $= -٢هـ$ ⇐ $هـ = \frac{و}{-٢}$

هـ ← ٠ ⇐ و ← ٠

$= نها \frac{ق(٤ + و) - ق(٤)}{\frac{و}{-٢}}$

$= -٢\,ق'(٤) = -٢ \times ٦$

$= -١٢$

جد نها $\frac{ق(٤ + ٥هـ) - ق(٤)}{هـ}$

نفرض و $= ٥هـ$ ⇐ $هـ = \frac{و}{٥}$

هـ ← ٠ ⇐ و ← ٠

$= نها \frac{ق(٤ + و) - ق(٤)}{\frac{و}{٥}}$

$= ٥\,ق'(٤) = ٥ \times ٦ = ٣٠$

الجواب

$= -١٢ + ٣٠ = ١٨$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

س٣ تمارين مراجعة ص ١٤٧

(٩) استخدم تعريف المشتقة لايجاد هـ' $(\frac{\pi}{٣})$ علما بان هـ(س) = حا٣س

الحل

$$هـ'(\frac{\pi}{٣}) = \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{هـ(س) - هـ(\frac{\pi}{٣})}{س - \frac{\pi}{٣}}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{حا٣س - حا\pi}{س - \frac{\pi}{٣}}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{حا٣س - ٠}{س - \frac{\pi}{٣}}$$

نفرض ص = س $- \frac{\pi}{٣}$

$\Leftarrow$ س = ص $+ \frac{\pi}{٣}$, س $\to \frac{\pi}{٣}$

ص $\to$ ٠

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{حا٣(ص + \frac{\pi}{٣})}{ص}$$

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{حا(٣ص + \pi)}{ص} = -\frac{حا٣ص}{ص}$$

$$= -٣$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٠) شتوية

إذا كان $هـ$ قابلاً للاشتقاق عند جميع قيم $س$ وكان $د(س) = س^٢ هـ(س)$ أوجد $د'(س)$ باستخدام التعريف

الحل

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ هـ(ع) - س^٢ هـ(س)}{ع - س}$$

بإضافة وطرح $س^٢ هـ(ع)$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ هـ(ع) - س^٢ هـ(ع) + س^٢ هـ(ع) - س^٢ هـ(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} هـ(ع)\frac{(ع^٢ - س^٢)}{ع - س} + س^٢ \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} هـ(ع)(ع + س) + س^٢ هـ'(س)$$

$$= هـ(س)(س + س) + س^٢ هـ'(س)$$

$$= ٢س هـ(س) + س^٢ هـ'(س)$$

② وزارة (٢٠٠٨) صيفية

$هـ(س) = \sqrt{١ + ٣ - ٢س}$ جد $هـ'(س)$ باستخدام التعريف

الحل

$$هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{١ + ٣ - ٢ع} - \sqrt{١ + ٣ - ٢س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{١ + ٣ - ٢ع} - \sqrt{١ + ٣ - ٢س}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{١ + ٣ - ٢ع} + \sqrt{١ + ٣ - ٢س}}{\sqrt{١ + ٣ - ٢ع} + \sqrt{١ + ٣ - ٢س}}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٣ - ٢ع - ٣ + ٢س}{(ع - س)(\sqrt{١ + ٣ - ٢ع} + \sqrt{١ + ٣ - ٢س})}$$

$$= \frac{-٢}{\sqrt{١ + ٣ - ٢س} + \sqrt{١ + ٣ - ٢س}}$$

$$= \frac{-٢}{٢\sqrt{١ + ٣ - ٢س}}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

③ وزارة (٢٠١٠) شتوية
اذا كان $ق(س) = \frac{1}{\sqrt{س}} + ٢$
جد $ق'(١)$ باستخدام التعريف

الحل
$ق'(١) = \lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\frac{1}{\sqrt{س}} + ٢ - \frac{1}{1} - ٢}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{1 - \sqrt{س}}{\sqrt{س}} \times \frac{1}{س - ١}$ توحيد المقام

$= \lim_{س \to ١} \frac{1 - س}{\sqrt{س}} \times \frac{1}{س - ١} \times \frac{1}{1 + \sqrt{س}}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{-(س - ١)}{\sqrt{س}} \times \frac{1}{س - ١} \times \frac{1}{1 + \sqrt{س}}$

$= \frac{-1}{1 \times (1 + 1)} = -\frac{1}{2}$

④ وزارة (٢٠١٩) صيفية
اذا كان $ق(س) = س - \sqrt{س}$
جد $ق'(٤)$ باستخدام التعريف

الحل
$ق'(٤) = \lim_{س \to ٤} \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س - \sqrt{س} - ٤ + \sqrt{٤}}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{س - ٤} + \lim_{س \to ٤} \frac{٢ - \sqrt{س}}{س - ٤}$

$= ١ + \lim_{س \to ٤} \frac{٢ - \sqrt{س}}{س - ٤} \times \frac{٢ + \sqrt{س}}{٢ + \sqrt{س}}$

$= ١ + \lim_{س \to ٤} \frac{٤ - س}{(س - ٤)(٢ + \sqrt{س})}$

$= ١ + \frac{-1}{٤ + ٢} = ١ - \frac{1}{٤}$

$= \frac{٣}{٤}$

⑤ وزارة (٢٠١٠) شتوية
اذا كان $ق(س) = \sqrt{س} + \frac{1}{س}$
جد $ق'(١)$ باستخدام التعريف

الحل
$ق'(١) = \lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} + \frac{1}{س} - ٢}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} + \lim_{س \to ١} \frac{\frac{1}{س} - ١}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} \times \frac{\sqrt{س} + ١}{\sqrt{س} + ١} + \lim_{س \to ١} \frac{\frac{1 - س}{س}}{س - ١}$ يضرب

تابع الحل

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} - 1}{س - 1} \times \frac{\sqrt{س} + 1}{\sqrt{س} + 1} + \text{نها}_{س \to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{س}}}{1}$$

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{س - 1}{(س-1)(\sqrt{س}+1)} + \text{نها}_{س \to 1} \frac{1}{2\sqrt{س}}$$

$$= \frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

---

⑥ وزارة (٢٠١٠) صيفية

اذا كان $ق(س) = \frac{3}{س} + 1$ جد $ق'(\frac{1}{2})$ باستخدام التعريف

الحل

$$ق'(\frac{1}{2}) = \text{نها}_{س \to \frac{1}{2}} \frac{ق(س) - ق(\frac{1}{2})}{س - \frac{1}{2}}$$

$$= \text{نها}_{س \to \frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{س} + 1 - \frac{3}{\frac{1}{2}} - 1}{س - \frac{1}{2}}$$

$$= \text{نها}_{س \to \frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{س} - \frac{6}{1}}{س - \frac{1}{2}} = \text{نها}_{س \to \frac{1}{2}} \frac{3 - 6س}{س}$$

$$= \text{نها}_{س \to \frac{1}{2}} \frac{6(\frac{1}{2} - س)}{س} \times \frac{1}{\frac{1}{2} - س}$$

$$= \frac{6 \times 1}{\frac{1}{2}} = 12$$

---

⑦ وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كان $ق(س) = 1 + \frac{2}{س - 3}$

جد $ق'(1)$ باستخدام التعريف

الحل

$$ق'(1) = \text{نها}_{س \to 1} \frac{ق(س) - ق(1)}{س - 1}$$

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{1 + \frac{2}{س-3} - 1 - \frac{2}{1-3}}{س - 1}$$

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{\frac{2}{س-3} + 1}{س - 1}$$ توحيد مقام

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{2 + س - 3}{س - 3} \times \frac{1}{س - 1}$$

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{س - 1}{س - 3} \times \frac{1}{س - 1}$$

$$= \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

⑧ وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كان $ق(س) = \frac{1}{\sqrt{3س+1}}$ حيث $ق(٩)$ باستخدام التعريف

الحل

$$ق'(٩) = \lim_{س \to ٩} \frac{ق(س) - ق(٩)}{س - ٩}$$

$$= \lim_{س \to ٩} \frac{\frac{1}{\sqrt{3س+1}} - \frac{1}{\sqrt{3+1}}}{س - ٩}$$

$$= \lim_{س \to ٩} \frac{٤ - \sqrt{3س+1}}{٤(\sqrt{3س+1})(س-٩)}$$

$$= \lim_{س \to ٩} \frac{٣ - 3س}{٤(\sqrt{3س+1})(س-٩)} \times \frac{٤+\sqrt{3س+1}}{٤+\sqrt{3س+1}} \times \frac{1}{س-٩}$$

$$= \lim_{س \to ٩} \frac{-3(س-١)}{٤(3س+1)(٤+\sqrt{3س+1})(س-٩)}$$

$$= \frac{-1}{٤(٣+1)(٤+٤)}$$

$$= \frac{-1}{٩٦} = -\frac{1}{١٤٤}$$

⑨ وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان $ق(س) = \sqrt{3س+1} + ج$ حيث $س > -١$ فجد $ق'(س)$ باستخدام التعريف

الحل

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{3ع+1} - \sqrt{3س+1}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{3ع+1} - \sqrt{3س+1}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{3ع+1} + \sqrt{3س+1}}{\sqrt{3ع+1} + \sqrt{3س+1}}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{3ع - 3س}{(ع-س)(\sqrt{3ع+1} + \sqrt{3س+1})}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3س+1} + \sqrt{3س+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3س+1}}$$

⑩ وزارة (٢٠١٣) شتوية

اذا كان $ق(س) = س^٣ + ١$ فجد $ق'(س)$ باستخدام التعريف

الحل

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

يتبع ← الحل

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

= نهـا $\frac{ع^3 - س^3}{ع - س}$ ، $ع \to س$

= نهـا $\frac{ع^3 - س^3}{ع - س}$ ، $ع \to س$

= نهـا $\frac{(ع - س)(ع^2 + ع س + س^2)}{ع - س}$ ، $ع \to س$

$= س^2 + س^2 + س^2 = 3س^2$

---

(١١) وزارة (٢٠١٣) صيفية

اذا كان $و(س) = ع + \sqrt{7} س$ ، $س > 0$

جد $و'(س)$ باستخدام التعريف

الحل

$و'(س) =$ نهـا $\frac{و(ع) - و(س)}{ع - س}$ ، $ع \to س$

= نهـا $\frac{ع + \sqrt{7} ع - س - \sqrt{7} س}{ع - س}$

= نهـا $\frac{ع - س}{ع - س} +$ نهـا $\frac{\sqrt{7} ع - \sqrt{7} س}{ع - س} \times \frac{\sqrt{7} ع + \sqrt{7} س}{\sqrt{7} ع + \sqrt{7} س}$ ، $ع \to س$

= نهـا $\frac{ع - س}{ع - س} +$ نهـا $\frac{7 ع - 7 س}{(ع - س)(\sqrt{7} ع + \sqrt{7} س)}$ ، $ع \to س$

$= 1 + \frac{1}{\sqrt{7} س + \sqrt{7} س}$

$= 1 + \frac{1}{\sqrt{7} س}$

---

(١٢) وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كان $و(س) = \frac{س^2}{1 - س}$

جد $و'(-2)$ باستخدام التعريف

الحل

$و'(-2) =$ نهـا $\frac{و(س) - و(-2)}{س + 2}$ ، $س \to -2$

= نهـا $\frac{\frac{س^2}{1 - س} - \frac{4}{3}}{س + 2}$ ، $س \to -2$

= نهـا $\frac{3س^2 - 4 + 4س}{(1 - س)(3)}$ ، $س \to -2$

= نهـا $\frac{3س^2 + 4س - 4}{3(1 - س)} \times \frac{1}{س + 2}$ ، $س \to -2$

= نهـا $\frac{(3س - 2)(س + 2)}{3(1 - س)} \times \frac{1}{س + 2}$ ، $س \to -2$

$= \frac{-6 - 2}{3(1 + 2)} = \frac{-8}{9}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٣) وزارة (٢٠١٤) صيفية

$ق(س) = س^{٣} + \frac{٣}{س}$ حيث ق(-١) باستخدام التعريف

الحل

$ق'(-١) = \lim_{س \to -١} \frac{ق(س) - ق(-١)}{س + ١}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{س^{٣} + \frac{٣}{س} - (-١ + ٣)}{س + ١}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{س^{٤} + ٣ - س + ٣}{س(س+١)}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{س^{٤} - ١}{س(س+١)} + \lim_{س \to -١} \frac{٣ + ٣س}{س(س+١)}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{(س-١)(س+١)}{س(س+١)} + \lim_{س \to -١} \frac{٣(١+س)}{س(س+١)}$

$= -١ - ١ + \lim_{س \to -١} \frac{٣}{س}$

$= -٢ + \frac{٣}{-١}$

$= -٥$

(١٤) وزارة (٢٠١٥) شتوية

$ق(س) = س + \sqrt{س}$ حيث ق(٤) باستخدام التعريف

الحل

$ق'(٤) = \lim_{س \to ٤} \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س + \sqrt{س} - ٤ - ٢}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{س - ٤} + \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$

$= ١ + \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س} + ٢}{\sqrt{س} + ٢}$

$= ١ + \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{(س-٤)(\sqrt{س}+٢)}$

$= ١ + \frac{١}{٤ + ٤} = ١ + \frac{١}{٤}$

$= \frac{٥}{٤}$

(١٥) وزارة (٢٠١٥) صيفية

$ق(س) = س\sqrt{س+١}$ حيث ق(٣) باستخدام التعريف

← يتبع الحل

مكتبة الإسلام ADVESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

الحل

$$\text{ه}'(٣) = \text{نها}_{س \to ٣} \frac{\text{ه}(س) - \text{ه}(٣)}{س - ٣}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٢س+١} - ٦}{س - ٣}$$

$ص = \sqrt{٢س+١}$ $\quad ص^٢ = ٢س+١$

$$س = \frac{ص^٢ - ١}{٢}$$

$س \to ٣ \Leftarrow ص \to ٦$

$$= \text{نها}_{ص \to ٦} \frac{\frac{(ص^٢-١)}{٢} - ٦}{ص - ٦}$$

$$= \text{نها}_{ص \to ٦} \frac{ص^٢ - ١ - ١٢}{٢(ص - ٦)}$$

$$= \text{نها}_{ص \to ٦} \frac{ص^٢ - ١٣}{٢(ص - ٦)}$$

	١	٠	١	٦-
٦		٤	٤	٦
	١	٤	٣	٠

$$\text{نها}_{ص \to ٦} \frac{(ص-٦)(ص^٢+٤ص+٣)}{٢(ص-٦)(ص+٢)}$$

$$= \frac{٦^٢ + ٤ \times ٦ + ٣}{٢ \times ٨} = \frac{٦٣}{١٦}$$

(١٦) وزارة (٢٠١٦) صيفي

اذا كان $\text{ه}(س) = \frac{٤س}{١ - ٣س}$

$س \neq \frac{١}{٣}$

صيغة $\text{ه}(س)$ باستخدام التعريف

الحل

$$\text{ه}'(س) = \text{نها}_{ع \to س} \frac{\text{ه}(ع) - \text{ه}(س)}{ع - س}$$

$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{\frac{٤ع}{١ - ٣ع} - \frac{٤س}{١ - ٣س}}{ع - س}$$

$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{٤ع - ١٢ع س - ٤س + ١٢س ع}{(١ - ٣ع)(١ - ٣س)(ع - س)}$$

$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{٤(ع - س)}{(١ - ٣ع)(١ - ٣س)(ع - س)} \times \frac{١}{ع - س}$$

$$= \frac{٤}{(١ - ٣س)(١ - ٣س)}$$

$$= \frac{٤}{(١ - ٣س)^٢}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

المشتقة للأقتران المتشعبة

لايجاد مشتقة اقتران عند نقطة التشعب P

نجد المشتقة من اليمين

$$\text{هـ}'_+(P) = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{\text{هـ}(P+\text{هـ}) - \text{هـ}(P)}{\text{هـ}}$$

نجد المشتقة من اليسار

$$\text{هـ}'_-(P) = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{\text{هـ}(P+\text{هـ}) - \text{هـ}(P)}{\text{هـ}}$$

أو نستخدم القانون الثاني

$$\text{هـ}'_+(P) = \lim_{\text{ع} \to P^+} \frac{\text{هـ}(\text{ع}) - \text{هـ}(P)}{\text{ع} - P}$$

$$\text{هـ}'(P) = \lim_{\text{ع} \to P} \frac{\text{هـ}(\text{ع}) - \text{هـ}(P)}{\text{ع} - P}$$

① اذا كانت $\text{هـ}'_+(P) = \text{هـ}'_-(P)$

فان $\text{هـ}'(P)$ موجودة

② اذا كانت $\text{هـ}'_+(P) \neq \text{هـ}'_-(P)$

فان $\text{هـ}'(P)$ غير موجودة

مثال ①

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt[4]{\text{س}} + 1 & ; \text{س} \leq 1 \\ \frac{1}{\text{س}} + 1 & ; \text{س} > 1 \end{cases}$$

ابحث قابلية $\text{هـ}(\text{س})$ للاشتقاق عند $\text{س} = 1$

الحل

$$\text{هـ}'_+(1) = \lim_{\text{ع} \to 1^+} \frac{\text{هـ}(\text{ع}) - \text{هـ}(1)}{\text{ع} - 1}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to 1^+} \frac{\frac{1}{\text{ع}} + 1 - 2}{\text{ع} - 1} = \lim_{\text{ع} \to 1^+} \frac{\frac{1}{\text{ع}} - 1}{\text{ع} - 1}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to 1^+} \frac{\frac{1 - \text{ع}}{\text{ع}}}{\text{ع} - 1} = \lim_{\text{ع} \to 1^+} \frac{-1}{\text{ع}} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\text{هـ}'_-(1) = \lim_{\text{ع} \to 1^-} \frac{\text{هـ}(\text{ع}) - \text{هـ}(1)}{\text{ع} - 1}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to 1^-} \frac{\sqrt[4]{\text{ع}} + 1 - 2}{\text{ع} - 1}$$

نفرض $\text{ص} = \sqrt[4]{\text{ع}}$

$\leftarrow \text{ص}^4 = \text{ع} \leftarrow \text{ع} \to 1^- \leftarrow \text{ص} \to 1^-$

$$\text{هـ}'(1) = \lim \frac{\text{ص} - 1}{\text{ص}^4 - 1} \leftarrow \text{يتبع}$$

مكتبة الإسلام
ALISLAM
المعلم ناجح الجمزاوي

← يتبع نهاية $\frac{ص-1}{ص^{\frac{1}{2}}-1}$ عندما $ص \to 1$

$= \text{نها}_{ص \to 1} \frac{ص-1}{(ص^{\frac{1}{4}}-1)(ص^{\frac{1}{4}}+1)(ص^{\frac{1}{2}}+1)}$

$= \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$

وبما أن $\text{هـ}'_+(1) \neq \text{هـ}'_-(1)$

⇐ $\text{هـ}(س)$ غير قابل للاشتقاق عند $س = 1$

مثال ⑤

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} س^2 + 12س & ، س < 2 \\ [\frac{1}{2}س](س^2 - 4) & ، 2 \leq س < 4 \end{cases}$$

اثبت قابلية $\text{هـ}(س)$ للاشتقاق عند $س = 2$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل

نعيد تعريف الاقتران

$|س+2|$: $+$ عند $س > -2$، $-$ عند $س < -2$، صفر عند $س = -2$

$[\frac{1}{2}س]$: صفر عند $0 \leq س < 2$، 1 عند $2 \leq س < 4$

$\text{هـ}(س) = \begin{cases} 1 & ، س < 2 \\ 4س & ، 2 < س < 4 \\ \text{غير موجودة} & ، س = 4 \end{cases}$

طرف قفزة

$\text{هـ}(س) = \begin{cases} س+2 & ، س < -2 \\ -س-2 & ، -2 \leq س < 2 \\ س^2 - 4 & ، 2 < س < 4 \\ 56 & ، س = 4 \end{cases}$

⇐

$\text{هـ}(س) = \begin{cases} س+2 & ، س < -2 \\ -س-2 & ، -2 \leq س < 2 \\ س^2 - 4 & ، 2 < س < 4 \\ 56 & ، س = 4 \end{cases}$

① عند $س = 2$ ، $\text{هـ}(س) = س + 2$

$\text{هـ}'(س) = \text{نها}_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع+2-س-2}{ع-س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع-س}{ع-س} = 1$

② عند $(2, 4)$

$\text{هـ}'(س) = \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع^2 - 4 - س^2 + 4}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{(ع-س)(ع+س)}{ع-س}$

$= 2(س+س) = 2 \times 2س = 4س$

③ عند $س = 2$

$\text{هـ}'(2) = 4 \times 2 = 8$

$\text{هـ}'_+(2) = 1$

$\text{هـ}'_-(2)$ غير موجودة

$\text{هـ}'(س) = \begin{cases} 1 & ، س < 2 \\ 4س & ، 2 < س < 4 \\ \text{غير موجودة} & ، س = 4 \end{cases}$

طرف قفزة

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ③
اجب في قابلية الاشتقاق للاقتران
$ق(س) = |س^2 - 9|$ عند $س = 3$
باستخدام التعريف :.

الحل
نعيد تعريف الاقتران

$س^2 - 9 = 0 \leftarrow س = \pm 3$

	-3		3	
$س^2 - 9$	+	−	+	

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 - 9 & س \geq 3 \text{ أو } س \leq -3 \\ 9 - س^2 & -3 < س < 3 \end{cases}$$

$$ق'_+(3) = \text{نها}_{ع \to 3} \frac{ق(ع) - ق(3)}{ع - 3}$$
$$= \frac{ع^2 - 9 - 9 + 9}{ع - 3}$$
$$= \text{نها}_{ع \to 3} \frac{(ع - 3)(ع + 3)}{ع - 3}$$
$$= 3 + 3$$
$$= 6$$

$$ق'_-(3) = \text{نها}_{ع \to 3} \frac{ق(ع) - ق(3)}{ع - 3}$$
$$= \text{نها}_{ع \to 3} \frac{9 - ع^2 - (9 - 9)}{ع - 3}$$
$$= \text{نها}_{ع \to 3} \frac{(3 - ع)(3 + ع)}{ع - 3}$$
$$= -(3 + 3)$$
$$= -6$$

$ق'_+(3) \neq ق'_-(3)$

$ق(س)$ غير قابل للاشتقاق عند $س = 3$

مثال ④
$ق(س) = س^2 [\![س]\!]$ $\quad س = 0$

الحل

$[\![س]\!]$

	-1		0		1		2
$[\![س]\!]$	-1		0		1		2

$$ق(س) = \begin{cases} -س^2 & -1 \leq س < 0 \\ 0 & 0 \leq س < 1 \end{cases}$$

$$ق'_+(0) = \text{نها}_{س \to 0^+} \frac{ق(س) - ق(0)}{س - 0} = \text{صفر}$$

$$ق'_-(0) = \text{نها}_{س \to 0^-} \frac{-س^2 - 0}{س} = \text{صفر}$$

$\Leftarrow ق'(0) = \text{صفر}$

مكتبة السلام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

اذا كان التغير في $\overrightarrow{ق}$ قرانا $\overrightarrow{ف}(س)$
$س^{٣}\overrightarrow{ت} - ٥س^{٢}\overrightarrow{ت} + ٥س\overrightarrow{ت}$ فجد
$ف'(٢)$

الحل

$ف'(س) = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ف}{\Delta س}$

$ف'(س) = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{س^{٣}\overrightarrow{ت} - ٥س^{٢}\overrightarrow{ت} + ٥س\overrightarrow{ت}}{\Delta س}$

$= \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta س(س^{٣} - ٥س^{٢} + ٥س)}{\Delta س}$

$= س^{٣} - ٥س^{٢} + ٥س$

$ف'(٢) = ٢^{٣} - ٥(٢)^{٢} + ٥(٢) = ٨ - ٢٠ + ١٠ = -٢$

مثال ⑥

اثبت ان $\lim_{س \to ٣} \frac{ف(س-١) - ف(٢)}{ف(٤س) - ف(٦)} = \frac{ف'(٢)}{٤ف'(٦)}$

الحل

بالضرب كل من البسط والمقام
في $س - ٣$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{ف(س-١) - ف(٢)}{س - ٣}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{ف(٤س) - ف(٦)}{س - ٣}$

البسط

نفرض $ص = س - ١ \Leftarrow س = ص + ١$

$س \to ٣ \Leftarrow ص = ٢$

$\lim_{ص \to ٢} \frac{ف(ص) - ف(٢)}{ص + ١ - ٣} = \lim_{ص \to ٢} \frac{ف(ص) - ف(٢)}{ص - ٢} = ف'(٢)$

المقام

نفرض $ص = ٤س \quad س = \frac{ص}{٤}$

$س \to ٣ \Leftarrow ص \to ٦$

$\lim_{ص \to ٦} \frac{ف(ص) - ف(٦)}{\frac{ص}{٤} - ٣} = \lim_{ص \to ٦} \frac{ف(ص) - ف(٦)}{\frac{ص - ١٢}{٤}}$

$= ٤ \lim_{ص \to ٦} \frac{ف(ص) - ف(٦)}{ص - ٦} = ٤ف'(٦)$

$\therefore$ الجواب $\frac{ف'(٢)}{٤ف'(٦)}$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

تدريبات وتمارين الكتاب

تدريب ④ ص٩٤

لتكن $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ & ، س \le ٢ \\ س^٢ + ٤س - ٥ & ، س > ٢ \end{cases}$

احسب $د'(٤)$ ، $د'(١)$ ، $د'(٢)$ ان وجدت باستخدام تعريف المشتقة

الحل

$$د'(٤) = \lim_{س \to ٤} \frac{د(س) - د(٤)}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ + ٤س - ٥ - (٤^٢ + ٤ \times ٤ - ٥)}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ + ٤س - ٥ - ٢٧}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ + ٤س - ٣٢}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٨)}{س - ٤}$$

$$= ٤ + ٨ = ١٢$$

$$د'(١) = \lim_{س \to ١} \frac{د(س) - د(١)}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١ - ٠}{س - ١} =$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ١)}{س - ١} = ١ + ١ = ٢$$

$د'(٢)$ نجد

$$① \quad د'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ + ٤س - ٥ - (٧)}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ + ٤س - ١٢}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{(س + ٦)(س - ٢)}{س - ٢} = ٨$$

$$② \quad د'_-(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{س^٢ - ١ - ٣}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢} = ٤$$

$د'_+(٢) \neq د'_-(٢)$

$د'(٢)$ غير موجود

$د(س)$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٢$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

عارضية وفيل

س١

⑤ $د(س) = \begin{cases} س^2 + س & ، 0 \le س < 1 \\ 3س - 1 & ، 1 \le س \le 5 \end{cases}$

عند $س = 0$ ، $س = 1$ ، $س = 5$

$هـ(س)$ (0، 0) (1، 2) (5، 14)

$هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^2 + ع - س^2 - س}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^2 - س^2}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} + 1$

$= س + س + 1 = 2س + 1$

$\Leftarrow هـ'(1) = 2(1) + 1 = 3$

⑥ $هـ'_+(1) = \lim_{س \to 1^+} \frac{هـ(س) - هـ(1)}{س - 1}$

$= \lim_{س \to 1^+} \frac{3س - 1 - 2}{س - 1}$

$= \lim_{س \to 1^+} \frac{3(س - 1)}{س - 1}$

$= 3$

الجواب

عند $س = 0$ ، 5 غير موجودة

لأنه طرفي مختلفان

عند $س = 1$

$هـ'_+(1) \neq هـ'_-(1)$

غير قابل للاشتقاق عند $س = 1$

---

⑦

$ل(س) = س^2 |س^2 - 2|$

عند $س = \sqrt{3}$ ، $س = -\sqrt{3}$

الكل

$س$	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$
$س^2 - 2$	+	+	0	−	+

$هـ(س) = \begin{cases} س^4 - 2س^2 & ، س \le \sqrt{2} \text{ أو } س \ge \sqrt{3} \\ 2س^2 - س^4 & ، \sqrt{2} < س < \sqrt{3} \end{cases}$

عند $س = \sqrt{2}$

$هـ'_+(\sqrt{2}) = \lim_{س \to \sqrt{2}^+} \frac{هـ(س) - هـ(\sqrt{2})}{س - \sqrt{2}}$

$= \lim_{س \to \sqrt{2}^+} \frac{2س^2 - س^4 - (2)(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^4}{س - \sqrt{2}}$

$= \lim_{س \to \sqrت{2}^+} \frac{0}{س - \sqrt{2}}$

يتبع الكل

تابع الحل

$$ل'(ب^{٣}) = \text{نها}_{س \to ب} \frac{س^{٥} - ب^{٥} - ٠}{س - ب^{٣}}$$

$$= \frac{س^{٢}(س^{٢} - ب^{٢})}{س - ب^{٣}}$$

$$= \text{نها}_{س \to ب} \frac{س^{٢}(س - ب)(س + ب)(س^{٢} + ب^{٢})}{س - ب^{٣}}$$

$$= (ب^{٣})^{٢} (٣ ب^{٣})$$

$$= ٩ ب^{٤}$$

$$ل'(ب^{٣}) = \text{نها}_{س \to ب} \frac{س^{٥} - ب^{٥} - ٠}{س - ب^{٣}}$$

$$= \text{نها}_{س \to ب} \frac{س^{٢}(س - ب)(س^{٢} + ب^{٢})}{س - ب^{٣}}$$

$$\text{نها}_{س \to ب} \frac{س^{٢}(س - ب)(س + ب)(س^{٢} + ب^{٢}) + س + ب}{س - ب^{٣}}$$

$$= - ب^{٣} (ب^{٢} + ب^{٢} + ب^{٢})$$

$$= - ٦ ب^{٣}$$

$ل'(ب^{٣})$ غير موجودة

وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كان $ه(س) = س |س - ٣|$
فاحث في قابلية اشتقاق $ه(س)$ عندما $س = ٣$ باستخدام التعريف

الحل

$$|س - ٣| \quad \frac{س - ٣ + ٣ - س}{٣}$$

$$ه(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٣س & س \geq ٣ \\ ٣س - س^{٢} & س < ٣ \end{cases}$$

$$ه'_{+}(٣) = \text{نها}_{س \to ٣^{+}} \frac{ه(س) - ه(٣)}{س - ٣}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٣^{+}} \frac{س^{٢} - ٣س - ٠}{س - ٣} \cdot \text{نها}_{س \to ٣^{+}} \frac{س(س - ٣)}{س - ٣}$$

$$= ٣$$

$$ه'_{-}(٣) = \text{نها}_{س \to ٣^{-}} \frac{ه(س) - ه(٣)}{س - ٣}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٣^{-}} \frac{٣س - س^{٢} - ٠}{س - ٣} = -٣$$

$$ه'_{+}(٣) \neq ه'_{-}(٣)$$

$ه(س)$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٣$

مكتبة الوسام ALWSSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الثالث

الأتصال و الأشتقاق

نظرية : وزارة ٩٤، ٢٠٠١، ٢٠٠٣

اذا كان $ق(س)$ قابلاً للاشتقاق عند $س = س_1$ ، فانه متصل عند هذه النقطة

المطلوب :-

اثبات ان $ق(س_1)$ متصل عند $س_1$ ..

اي اثبات ان $\lim_{س \to س_1} ق(س) = ق(س_1)$

البرهان :

$ق(س) - ق(س_1) = ق(س) - ق(س_1)$

$= \frac{ق(س) - ق(س_1)}{س - س_1} \times (س - س_1)$

نأخذ نهاية الطرفين

$\lim_{س \to س_1} [ق(س) - ق(س_1)] = \lim_{س \to س_1} \frac{ق(س) - ق(س_1)}{س - س_1} \times (س - س_1)$

$\lim_{س \to س_1} ق(س) - \lim_{س \to س_1} ق(س_1) = ق'(س_1) \times صفر$

$\lim_{س \to س_1} ق(س) - \lim_{س \to س_1} ق(س_1) = صفر$

$\lim_{س \to س_1} ق(س) - ق(س_1) = صفر$

$\lim_{س \to س_1} ق(س) = ق(س_1)$ ← متصل

ملاحظات هامة

① حتى يكون الأقتران قابل للأشتقاق يجب ان يكون متصلاً

ق (٢) موجود ← متصل عند $س = ٢$

② ليس كل اقتران متصل قابل للأشتقاق (عكس النظرية غير صحيح)

مثال على الملاحظة

$ق(س) = |س - ٢|$ متصل عند $س = ٢$

لكنه غير قابل للاشتقاق عند $س = ٢$

نظرية ②

اذا كان $ق(س)$ غير متصل عند $س = س_1$ فانه غير قابل للاشتقاق عند $س = س_1$

(التنبيه)

① $ق(س)$ قابل للاشتقاق ← متصل

② $ق(س)$ متصل ← قابل للاشتقاق / غير قابل للاشتقاق

③ $ق(س)$ غير متصل ← غير قابل للاشتقاق

ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال ①

اذا كان $هـ(1)=3$ ، $2هـ(1)=14$
اوجد $\lim_{س\to 1}\left(\frac{\sqrt{7س+3}-هـ(س)}{س-1}\right)$

الحل

$2هـ(1)=14 \Leftarrow هـ(1)=7$
بما أن $هـ(1)$ موجود $\Leftarrow هـ(س)$ متصل عند $س=1$
$\Leftarrow \lim_{س\to 1} هـ(س)=هـ(1)$
$\Leftarrow \lim_{س\to 1} هـ(س)=7$
$\Leftarrow$ النهاية $=\frac{\sqrt{4}-7}{1}=2-1=1$

مثال ②

اذا كان $هـ(3)=4$ ، $هـ(3)=7$
فاوجد النهاية $\lim_{س\to 3}\frac{2هـ(س)-3}{س-3}$

الحل

بما أن $هـ(3)=7$
$\Leftarrow هـ$ قابل للاشتقاق عند $س=3$
$\Leftarrow هـ$ متصل عند $س=3$ (نظرية)
$\Leftarrow \lim_{س\to 3} هـ(س)=هـ(3)=4$
النهاية $=2\times 4-3=8-3=5$

مثال ③

$$هـ(س)=\begin{cases}\frac{2}{س+1} & س\le 0\\ |3س+2|-1 & س>0\end{cases}$$

باستخدام تعريف المشتقة ابحث قابلية $هـ(س)$ للاشتقاق عند $س=0$

الحل

$$\lim_{س\to 0^-}\frac{\frac{2}{س+1}-2}{س}=\lim_{س\to 0^-}\frac{2-2(س+1)}{س(س+1)}=\lim_{س\to 0^-}\frac{-2س}{س(س+1)}=-2$$

$$\lim_{س\to 0^+}\frac{|3س+2|-2}{س}=\lim_{س\to 0^+}\frac{3س+2-2}{س}=3$$

$\Leftarrow$ النهايتان غير متساويتين
$\Leftarrow هـ(س)$ غير قابل للاشتقاق عند $س=0$

مثال ④

$$هـ(س)=\begin{cases}|3س+2|-1 & س\le 0\\ \frac{2}{س+1} & س>0\end{cases}$$

ابحث قابلية $هـ(س)$ للاشتقاق عند $س=0$

الحل

$$\lim_{س\to 0^-}\frac{|3س+2|-2}{س}=\lim_{س\to 0^-}\frac{3س+2-2}{س}=3$$

$$\lim_{س\to 0^+}\frac{\frac{2}{س+1}-2}{س}=\lim_{س\to 0^+}\frac{2-2(س+1)}{س(س+1)}=\lim_{س\to 0^+}\frac{-2س}{س(س+1)}=-2$$

$\Leftarrow$ النهايتان غير متساويتين
$\Leftarrow هـ(س)$ غير قابل للاشتقاق عند $س=0$

مركز الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

① نبحث اولاً بالاتصال عند س = ٠

$\lim_{س \to 0^+} ق(س) = ٢ \times ٠ + ٢ = ٢ = ق(٠)$

$\lim_{س \to 0^-} ق(س) = \frac{٢}{١+٠} = ٢ = ق(٠)$

$\Leftarrow$ متصل عند س = ٠

② نجد المشتقة من اليمين واليسار باستخدام تعريف المشتقة

$ق'_+(٠) = \lim_{س \to 0^+} \frac{ق(س) - ق(٠)}{س - ٠}$

$= \lim_{س \to 0^+} \frac{٢س + ٢ - ٢}{س} = \lim_{س \to 0^+} \frac{٢س}{س}$

$= ٢$

$ق'_-(٠) = \lim_{س \to 0^-} \frac{ق(س) - ق(٠)}{س - ٠}$

$= \lim_{س \to 0^-} \frac{\frac{٢}{١+س} - ٢}{س}$

$= \lim_{س \to 0^-} \frac{٢ - ٢(١+س)}{س(١+س)} = \lim_{س \to 0^-} \frac{-٢س}{س} = -٢$

$ق'_+(٠) \neq ق'_-(٠)$

$ق(س)$ غير قابل للاشتقاق عند س = ٠

مثال ⑤

اذا كان ق أقترانا قابل للاشتقاق عند س = ١ وكان $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(١+هـ)}{هـ} = ٥$ حيث ق(١) ، ق'(١)

الحل

بما ان ق قابل للاشتقاق $\Rightarrow$ ق متصل

$ق(١) = \lim_{هـ \to 0} ق(١+هـ)$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(١+هـ)}{هـ} \times هـ$

$ق(١) = ٥ \times ٠ = ٠$

$ق'(١) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(١+هـ) - ٠}{هـ}$

$= ٥$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

$$ق(س) = \begin{cases} \sqrt{٧س^{٢}+٥} & س \geq ٢ \\ \frac{٨}{٣س} + ٧س & س < ٢ \end{cases}$$

اجب قابلية الاشتقاق عند $س = ٢$

الحل

نبحث في الاتصال عند $س = ٢$

$$\text{نها}_{س \to ٢^{+}} \sqrt{٧س^{٢}+٥} = \sqrt{٧ \times ٤ + ٥} = \sqrt{٣٣} = ٥$$

$$\text{نها}_{س \to ٢^{-}} \frac{٨}{٣س} + ٧س = \frac{٨}{٨} + ٧ \times ٢ = ١ + ١٤ = ١٥$$

نها $ق(س)$ غير موجودة $س \to ٢$

$ق(س)$ غير متصل عند $س = ٢$

$\Leftarrow ق(س)$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٢$

مثال ⑦

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{١}{٤}س + \frac{١}{٤} & س > ١ \\ \sqrt{س} & س \leq ١ \end{cases}$$

اجب قابلية اشتقاق $ق(س)$ عند $س = ١$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل

① $ق(١) = ١$

$$\Leftarrow \begin{cases} \text{نها}_{س \to ١^{+}} ق(س) = ١ \\ \text{نها}_{س \to ١^{-}} ق(س) = ١ \end{cases}$$

$\Leftarrow$ نها $ق(س) = ق(١)$ متصل عند $س = ١$

② $ق'_{+}(١) = \text{نها}_{س \to ١^{+}} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١}$

$$= \text{نها}_{س \to ١^{+}} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} \times \frac{\sqrt{س}+١}{\sqrt{س}+١}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١^{+}} \frac{س - ١}{(س-١)(\sqrt{س}+١)} = \frac{١}{٤}$$

$$ق'_{-}(١) = \text{نها}_{س \to ١^{-}} \frac{\frac{١}{٤}س + \frac{١}{٤} - ١}{س - ١}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١^{-}} \frac{\frac{١}{٤}س - \frac{١}{٤}}{س - ١}$$

$$= \text{نها}_{س \to ١^{-}} \frac{\frac{١}{٤}(س-١)}{س-١} = \frac{١}{٤}$$

$ق'_{+}(١) = ق'_{-}(١)$

$\Leftarrow ق'(١)$ موجودة $= \frac{١}{٤}$

مكتبة البوصلة ALBOSLA SAM
الوصلة: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص١٠١

لتكن $f(س) = \begin{cases} س^2+1 & س \le 4 \\ 3س-1 & س > 4 \end{cases}$

① اثبت ان $f(س)$ متصلة عند $س=4$

② اثبت ان f قابلة للاشتقاق عند $س=4$

الحل

① $f(4) = 4^2+1 = 17$

$\lim_{س \to 4^-} (3س-1) = 12-1 = 11$

$\lim_{س \to 4^+} س^2+1 = 17$

$\lim_{س \to 4^-} f(س)$ غير موجود

$\lim_{س \to 4^+}$

$\therefore f(س)$ غير متصلة عند $س=4$

$\therefore f(س)$ غير قابلة للاشتقاق عند $س=4$

تدريب ② ص١٠١

$$f(س) = \begin{cases} س^3+س & ، س \le 2 \\ 2س^2+2 & ، 2 < س \le 5 \end{cases}$$

اثبت ان f قابلة للاشتقاق عند $س=2$

الحل

① $f(2) = 2(2)^2+2 = 10$

$\lim_{س \to 2^+} س^2+2 = 10$

$\lim_{س \to 2^-} س^3+س = 8+2 = 10$

$\therefore$ متصلة عند $س=2$

② $f'(2^+) = \lim_{س \to 2^+} \frac{f(س)-f(2)}{س-2}$

$= \lim_{س \to 2^+} \frac{2س^2+2-10}{س-2} = \lim_{س \to 2^+} \frac{2س^2-8}{س-2}$

$= \lim_{س \to 2^+} \frac{2(س-2)(س+2)}{س-2} = 8$

$f'(2^-) = \lim_{س \to 2^-} \frac{س^3+س-10}{س-2}$

قسمة تركيبية

	1	0	1	-10
2		2	4	10
	1	2	5	0

$= \lim_{س \to 2^-} \frac{(س-2)(س^2+2س+5)}{س-2}$

$= 4+4+5 = 13$

$\therefore f'(2)$ غير موجود

تمارين وسائل الكتاب
ص ١٠٤

السؤال الأول

اجب في قابلية اشتقاق كل اقتران مما يأتي عند قيم س (قيمة س) المبينة ازاء كل منها.

(أ) $هـ(س) = \frac{س}{س-٢}$ ، $س = ٢$

الحل

$هـ(٢)$ غير معرفة

$\Leftarrow هـ(س)$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٢$

(ب) $هـ(س) = [\![٢ - ٣س]\!]$

عند $س = -٢$ ، $س = \frac{١}{٢}$

الحل

طول الدرجة $= \frac{١}{٣}$

$هـ(س) = \begin{cases} ٨ & ، \ د س \to -٢ \\ ٧ & ، \ د س \to \frac{٥}{٣} \\ \vdots & \\ صفر & ، \ د س \to \frac{٢}{٣} \end{cases}$

$هـ(-٢^+) \neq هـ(-٢^-)$

$\therefore هـ(س)$ غير متصل عند $س = -٢$

$\therefore هـ(س)$ غير قابل للاشتقاق عند $س = -٢$

عند $س = \frac{١}{٢}$

$هـ(س)$ متصل

$هـ'(\frac{١}{٢}) = \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{هـ(س) - هـ(\frac{١}{٢})}{س - \frac{١}{٢}}$

$= \lim \frac{صفر - صفر}{س - \frac{١}{٢}} = صفر$

(ج) $ل(س) = |س^٢| [\![س]\!]$ ، $س = ٠$

الحل : $|س^٢| = س^٢$

$[\![س]\!] = \begin{cases} -١ & ، \ -١ \leq س < ٠ \\ ٠ & ، \ ٠ \leq س < ١ \end{cases}$

$ل(س) = \begin{cases} -س^٢ & ، \ -١ \leq س < ٠ \\ ٠ & ، \ ٠ \leq س < ١ \end{cases}$

نبحث اتصال $ل(س)$ عند $س = ٠$

$ل(٠) = صفر$

$\lim_{س \to ٠^+} ل(س) = صفر$

$\lim_{س \to ٠^-} ل(س) = -(٠)^٢ = صفر$

$\therefore$ متصل عند $س = ٠$

$\Leftarrow$ تابع الحل

$ل'_+(٠) = \text{نها}_{س \to ٠^+} \frac{ل(س) - ل(٠)}{س - ٠}$

$= \text{نها}_{س \to ٠^+} \frac{صفر - صفر}{س} = صفر$

$ل'_-(٠) = \text{نها}_{س \to ٠^-} \frac{-س^٢ - ٠}{س} = صفر$

$\Leftarrow ل'(٠) = صفر$

---

⑤ $د(س) = \begin{cases} س^٢ & س \leq ١ \\ ٣س^٢ - ٣س + ٥ & س > ١ \end{cases}$

عند $س = ١$

نبحث الاتصال عند $س = ١$

$د(١) = ٣(١)^٢ - ٣(١) + ٥$

$= ٥$

$\text{نها}_{س \to ١^+} ٣س^٢ - ٣س + ٥ = ٥$

$\text{نها}_{س \to ١^-} س^٢ = ١$

$\text{نها}_{س \to ١} د(س)$ غير موجود

$\Leftarrow$ غير متصل عند $س = ١$

$د(س)$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ١$

---

⑥ $و(س) = \begin{cases} \frac{١}{س} & س \leq ١ \\ -\frac{١}{٢}س^٢ + \frac{٣}{٢} & س > ١ \end{cases}$

عند $س = -١$ ، $س = ١$

① عند $س = -١$ (قاعدة واحدة)

$و(س)$ متصل عند $س = -١$

$و'(-١) = \text{نها}_{س \to -١} \frac{و(س) - و(-١)}{س + ١}$

$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{(-\frac{١}{٢}س^٢ + \frac{٣}{٢}) - (-\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢})}{س + ١}$

$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{-\frac{١}{٢}س^٢ + \frac{١}{٢}}{س + ١}$

$= \text{نها}_{س \to -١} \frac{-\frac{١}{٢}(س^٢ - ١)}{س + ١} = \text{نها}_{س \to -١} \frac{-\frac{١}{٢}(س - ١)(س + ١)}{س + ١}$

$= -\frac{١}{٢}(-١ - ١) = +١$

② عند $س = ١$ لتعلقه تشعب

$و(١) = \frac{١}{١} = ١$

$\text{نها}_{س \to ١^+} و(س) = ١$

$\text{نها}_{س \to ١^-} و(س) = -\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} = ١$

$\Leftarrow$ متصل عند $س = ١$

يتبع اكل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

← تابع الحل

$$وَ'_+(1) = \text{نها}_{س \to 1^+} \frac{و(س) - و(1)}{س - 1}$$

$$= \text{نها}_{س \to 1^+} \frac{\frac{1}{س} - \frac{1}{1}}{س - 1} = \text{نها}_{س \to 1^+} \frac{\frac{1 - س}{س}}{س - 1} \quad (1)$$

$$= \frac{-1}{1} = -1$$

$$وَ'_-(1) = \text{نها}_{س \to 1^-} \frac{و(س) - و(1)}{س - 1}$$

$$= \text{نها}_{س \to 1^-} \frac{-\frac{1}{2}س^2 + \frac{3}{2} - 1}{س - 1}$$

$$= \text{نها}_{س \to 1^-} \frac{-\frac{1}{2}س^2 + \frac{1}{2}}{س - 1}$$

$$= \text{نها}_{س \to 1^-} \frac{-\frac{1}{2}(س^2 - 1)}{س - 1} = \text{نها}_{س \to 1^-} \frac{-\frac{1}{2}(س-1)(س+1)}{س - 1}$$

$$= -\frac{1}{2}(1+1) = -1$$

$\therefore$ وَ(1) = −1

السؤال الثاني

$$ه(س) = \begin{cases} ب س^2 - ب س & س \geq 2 \\ 4 - ب س^3 + ب س & س < 2 \end{cases}$$

جد قيمة كل من ب ، ب اللذين يجعلان ه(ج) موجودة

الحل

ه(س) متصل عند س = 2

$$\text{نها}_{س \to 2^-} ه(س) = \text{نها}_{س \to 2^+} ه(س)$$

$$4ب - 2ب + 8ب - 4 = 2ب - 4ب$$

$$4ب + 6ب - 4 = 2ب - 4ب$$

$$\Leftarrow 4ب + 6ب = 4 \quad \cdots (1)$$

$$ه'(س) = \begin{cases} 2ب س - ب & س \geq 2 \\ -3ب س^2 + ب & س < 2 \end{cases}$$

$$ه'_+(2) = ه'_-(2)$$

$$4ب - ب = -12ب + ب$$

$$3ب = -11ب$$

$$\Leftarrow 14ب = 0 \quad \cdots (2)$$

$$4ب + 6ب = 4 \quad \times -3$$

$$14ب = 0 \quad \times 2$$

$$-18ب - 12ب = -12$$

$$28ب + 12ب = 0$$

$$-6ب = -12 \Leftarrow ب = 2$$

نعوض في (2)

$$14 \times 2 + ب = 0$$

$$ب = -28$$

$$\frac{ب}{3} = \frac{28}{3} \Leftarrow ب = 11$$

مكتبة السام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

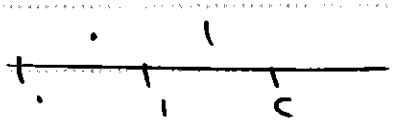
السؤال الثالث

$$هـ(س) = \begin{cases} [س] & ١ \le س < ٤ \\ س - ١٣ & ٤ \le س \le ٤ \end{cases}$$

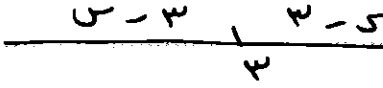
اثبت ان $هـ$ قابلة للاشتقاق عند ما يمكن.

الحل

$[س]$



$س - ١٣$



$$هـ(س) = \begin{cases} ١ & ١ \le س < ٢ \\ ٣ - س & ٢ \le س < ٣ \\ س - ٣ & ٣ \le س \le ٤ \end{cases}$$

$هـ(س)$ متصل عند $س = ٢ ، س = ٣$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ، & ١ < س < ٢ \\ -١ & ٢ < س < ٣ \\ ١ & ٣ < س < ٤ \end{cases}$$

$هـ(١)$ ، $هـ(٤)$ غير موجودة اطراف

$هـ \in ٥$

$هـ(٢)$ غير موجودة $هـ'(٢) \neq هـ'(٢)$

$هـ(٣)$ غير موجودة $هـ'(٣) \neq هـ'(٣)$

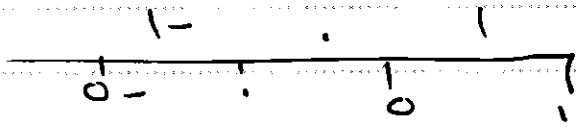
السؤال الرابع

اذا كان $ل(س) = \dfrac{[\frac{س}{٥}] - س}{س + ١}$

اثبت ان $ل$ قابلة للاشتقاق عند $س = -٢ ، س = ٥$

الحل

$[\frac{س}{٥}]$ طول الدرجة $= ٥$



$$= \begin{cases} \dfrac{-١ - س}{س + ١} & -٥ \le س < ٠ \\ \dfrac{-س}{س + ١} & ٠ \le س < ٥ \\ \dfrac{١ - س}{س + ١} & ٥ \le س < ١٠ \end{cases}$$

عند $س = -٢$ (داخل فترة)

$$ل(س) = \frac{-١ - س}{س + ١}$$

$ل(س)$ متصل عند $س = -٢$

$ل'(س) =$ صفر $ل'(-٢) = ٠$

$ل(س)$ غير متصل عند $س = ٥$

لأن $\lim_{س \to ٥^+} ل(س) \neq \lim_{س \to ٥^-} ل(س)$

$\Leftarrow ل(س)$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٥$

مكتبة الهندسة AWESAM
الموقع: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠١٠)

اذا كان $هـ(س)$ اقترانًا قابل للاشتقاق عند $س = ٢$، وكانت $٣هـ(٢) = ٩$ وكانت $\lim_{س \to ٢} ل هـ(س) = ٤$ فاوجد قيمة ل؟

الحل

$هـ$ قابل للاشتقاق عند $س = ٢$
$\Leftarrow هـ$ متصل عند $س = ٢$
وبما أن $هـ(٢) = ٣$ فان
$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٣$
$ل \times \lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٤$
$ل \times ٣ = ٤ \Leftarrow ل = \frac{٤}{٣}$

وزارة (٢٠١٦) شتوية

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} أس^{٢} + أس - ٢ & ، س \le ٢ \\ أس + ب - س & ، ٢ < س < ٤ \end{cases}$

$س \in (٠، ٤)$ اكتب في صابلية الاقترانات $هـ(س)$ للاشتقاق عند $س = ٢$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل

$أس - ٢$ | $س^{٢} + أس - ٢$ | $أس + ب - س$
٤ | ١ | ٢ | ٠

① لبحث اتصال $هـ$ عند $س = ٢$

$هـ(٢) = ٢أ + ٢ - ٢ = ٢أ$

$\lim_{س \to ٢^{+}} هـ(س) = ٢أ + ٢ - ٢ = ٢أ$ ليكن ليمين

$\lim_{س \to ٢^{-}} هـ(س) = ٢أ + ٢ - ٢ = ٢أ$ ليكن ليسار

$\lim_{س \to ٢^{+}} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} هـ(س) = هـ(٢) \Leftarrow$ متصل

$هـ'_{+}(٢) = \lim_{س \to ٢^{+}} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^{+}} \frac{أس^{٢} + س - ٢ - ٢أ}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^{+}} \frac{أس^{٢} - ٢أ}{س - ٢} + \frac{س - ٢}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^{+}} \frac{أ(س^{٢} - ٤)}{(س - ٢)} + ١$

$= \lim_{س \to ٢^{+}} \frac{أ(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)} + ١$

$= ٤أ + ١$

$هـ'_{-}(٢) = \lim_{س \to ٢^{-}} \frac{أس + ب - س - ٢أ}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^{-}} \frac{أس - ٢أ}{س - ٢} + \frac{ب - س}{س - ٢}$

$= ٢أ - ١$

$هـ'_{+}(٢) \neq هـ'_{-}(٢) \Leftarrow هـ'(٢)$ غير موجودة

ورقة عمل
تعريف المشتقة

① اذا كان التغير في الاقتران $ق(س) = ٥هـ س^{٣} + ٢هـ س$ احسب $ق'(س)$

② اذا كان متوسط التغير في الاقتران $ق(س)$ يساوي $(س+هـ)^{٢} - ٥س$ حيث $هـ = ٥س$ أوجد $ق'(٢)$ ؟

③ اذا كان $ق(س+هـ) = ٣س هـ^{٢} + ٢س هـ + ق(س)$ وكانت $ق'(٢) = ١٢$ أوجد قيمة $م$

④ اذا كان $ق(٣) = ١$ و $ق'(٣) = ٤$ وكان $هـ(س) = س\, ق(س)$ جد $هـ'(٣)$ باستخدام تعريف المشتقة

⑤ $ق(س) =$ قتاس جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

⑥ $ق(س) = \begin{cases} س - \sqrt{س} & ، س \geq ١ \\ \frac{١}{س} - [س] & ، ١ > س \geq ٢ \end{cases}$

جد $ق'(١)$ باستخدام تعريف المشتقة

⑦ اذا كان $ق(س)$ اقترانا قابلا للاشتقاق عند $س$ فاثبت أن

$$\frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \frac{ق'(س)}{س} + \frac{ق(س)}{س^{٢}}$$

حيث $ع \neq س$

⑧ $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{٣ - س} & س \leq -١ \\ ا س + ١٣ & س > -١ \end{cases}$

جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

⑨ اذا كانت $ق(س) = \frac{١}{٣م - ٣س}$ $س \neq \frac{٣}{م}$

وكانت $ق'(١) = ٢$ أوجد قيمة $م$

مكتبة العلم ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

(١٠) اذا كان ق(س+ص) = ٣ق(س) × ق(ص)
وكان ق(٠) = قـ(٠) = ١ اثبت
أن قـ(س) = ق(س) باستخدام
تعريف المشتقة

(١١) اذا كان ق(س) = |س - ٢| + |س|
فبين ان قـ(٠) غير موجودة

(١٢) ليكن ق(س) = س |جاس| حيث
س ∈ [٠ ، ٢π] اكتب قابلية
الاقتران ق للاشتقاق عند
س = π باستخدام تعريف المشتقة

(١٣) ق(س) = { ١ - س² + ٤س ، س < ١
{ س هـ(س) + ١٠ ، س ≥ ١
وكان هـ(س) قابلاً للاشتقاق
هـ(١) = هـ(١) = ٢ فاحث
في قابلية ق(س) للاشتقاق
عند س = ١

(١٤) اذا كان قـ(٤) = ٦ أوجد
$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٤ - ٢هـ) - ق(٤ + ٥هـ)}{هـ}$

(١٥) اذا كان ق(س) = س² |س| - ٧
اوجد قـ(س) باستخدام التعريف

(١٦) اذا كان ق(س) = $\frac{جا س}{س}$
اوجد قـ(س) باستخدام تعريف المشتقة

(١٧) اذا كان هـ(س) = $\sqrt[٣]{س}$
١. بين ان هـ(س) متصل عند س = ٠
٢. استخدم تعريف المشتقة لإثبات
ان هـ(س) غير قابل للاشتقاق
عند س = ٠

(١٨) ق(س) = { ٤س + ٣ ، س < -١
{ س² + ١ ، س ≥ -١
هـ(س) = { ٥ - ٣س² ، س < -١
{ ٢س + ١ ، س ≥ -١
وكان ل(س) = ق(س) + هـ(س)
اكتب قابلية ل(س) للاشتقاق
عند س = -١

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٩) اذا كان $ه(س) = |٤ - س^{٢}|$ متصلاً على ح فجد جميع قيم س التي لا يكون عندها الاقتران $ه(س)$ قابلاً للاشتقاق وفيما السبب ؟

(٢٠) اذا كانت $ص = ٥ س جا س - ٤ (٥ س)^{٣}$
فجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = \frac{\pi}{٣}$

(٢١) اذا كان $ه(س) = ٥^{٧ س}$
فجد $ه'(١)$ باستخدام تعريف المشتقة
(ساعدة تعرف $ص = ٥^{س}$)

(٢٢) اذا كانت $م(س) = \frac{س^{٢}}{ه(س)}$
اوجد $م'(٣)$ باستخدام التعريف
اذا كانت $ه(٣) = ٢$ ، $ه'(٣) = ٦$

(٢٣) اذا كان
$ه(س+ص) = ه(س) + ه(ص) - ٩ س ص$
وكانت $\lim_{ص \to ٠} \frac{ه(ص)}{ص} = ٧$ اوجد $ه'(س)$ ؟

(٢٤) اثبت أن
$\lim_{س \to ٢} \frac{ه(س+٥) - ه(س-٣)}{س - ٢} = ٥ ه'(س)$

(٢٥) اذا كان $ه(١) = ٣$ ، $ه'(١) = -٢$
فجد $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} ه(س) - ٣}{س - ١}$

(٢٦) اذا كان $ه(٢) = ٧$ فجد
(أ) $\lim_{س \to ٢} \frac{ه(س) - ه(٢)}{س^{٢} + س - ٦}$
(ب) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{ه(٢) - ه(س)}$

(٢٧) اذا كان
$ه(س) = ٣ س^{٣} + ب س^{٢} + ج س + د$
فاثبت أن
$ه'(س) = ٩ س^{٢} + ٦ ب س + ج$

مكتبة الوسام AWeSAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

(٢٨) اذا كان هـ(٣) = ٥ ، هـ(٣) = ٧
فجد هـا (٦ هـ(س) − ٤ س^٢)
س ← ٣

(٢٩) اذا كان هـ(٣) = ٨ فجد

① هـا = (هـ(٣+هـ) − هـ(٣)) / هـ ، هـ ← ٠

② هـا = (هـ(٣+٥هـ) − هـ(٣)) / ٤هـ ، هـ ← ٠

③ هـا = (هـ(٣) − هـ(٣+٢هـ)) / ٥هـ ، هـ ← ٠

④ هـا = ٧هـ / (هـ(٣+هـ) − هـ(٣)) ، هـ ← ٠

⑤ هـا = (هـ(٣+هـ) − هـ(٣−هـ)) / هـ ، هـ ← ٠

⑥ هـا = (هـ(٣+٥هـ) − هـ(٣−٤هـ)) / هـ ، هـ ← ٠

(٣٠) استخدم تعريف المشتقة لايجاد مشتقة كل اقتران ثم الأقتران الثابت عند النقطة المبينة

① هـ(س) = س^٣ + ٤س + ٤ عند س = ٤

② هـ(س) = س^٣ + ٨/س^٢ عند س = ١

③ هـ(س) = ٥س / (١ + ٢س) عند س = ٠

④ هـ(س) = √(س^٢ + ٩) س = ٤

⑤ هـ(س) = ∛(٥س + ٢٧) س = ١

⑥ هـ(س) = { س^٢ + ٤ ، س ≤ ٢ ؛ ٤س + ٤ ، س > ٢ } س = ٢

⑦ هـ(س) = |س^٢ − ٥س| س = ٥

⑧ هـ(س) = ضتا س س = π/٢

⑨ هـ(س) = ٤س^٢ [س] س = ٠

⑩ هـ(س) = س √(س + ١) س = ٣

⑪ هـ(س) = ١/س + √(٧س) س = ٤

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الرابع

قواعد الاشتقاق

قواعد الاشتقاق ①

قاعدة (١)

اذا كان ق(س) = جـ ، حيث جـ ثابتة
فان ق'(س) = صفر

فمشتقة الثابت = صفر

البرهان

ق(س) = جـ

ق'(س) = $\lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{جـ - جـ}{ع - س}$ = صفر

مثال ①

ق(س) = ١٤ ← ق'(س) = صفر

ق(س) = $\frac{٢٣}{\sqrt{٢}}$ ← ق'(س) = صفر

ق(س) = $\sqrt{١٨}$ ← ق'(س) = صفر

ق(س) = $-\frac{٥}{٩}$ ← ق'(س) = صفر

مثال ②

هـ(س) = ٥ ظتاس حاس
حيث هـ'$(\frac{\pi}{٢})$

الحل

هـ(س) = ٥ × $\frac{١}{\text{حاس}}$ × حاس

= ٥

هـ'(س) = صفر

مثال ③

ص = $\sqrt[٣]{\text{ظتاس} - \text{قتاس}}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل

١ + ظتا٢س = قتا٢س

ظتا٢س - قتا٢س = -١

← ص = $\sqrt[٣]{-١}$ = -١

$\frac{د ص}{د س}$ = صفر

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

قاعدة (٢) وزارة (٢٠٠٢)

اذا كان $ه(س) = س^{ن}$ ، ن عدد صحيح موجب فان

$$ه'(س) = ن س^{ن-١}$$

البرهان

$ه(س) = س^{ن}$

$$ه'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{ن} - س^{ن}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع^{ن-١} + س ع^{ن-٢} + س^{٢} ع^{ن-٣} + \dots + س^{ن-١})}{ع - س}$$

$$= س^{ن-١} + س س^{ن-٢} + س^{٢} س^{ن-٣} + \dots + س^{ن-١}$$

$$= \underbrace{س^{ن-١} + س^{ن-١} + \dots + س^{ن-١}}_{\text{ن مرة}}$$

$$= ن س^{ن-١}$$

ملاحظة: عليك استخدام الصيغة الطويلة لايجاد $\lim_{ع \to س} \frac{ع^{ن} - س^{ن}}{ع - س}$

مثال ①

اذا كانت $ه(س) = س^{١٨}$ اثبت باستخدام تعريف المشتقة أن $ه'(س) = ١٨ س^{١٧}$

الحل

$$ه'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{١٨} - س^{١٨}}{ع - س}$$

بالقسمة الطويلة

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع^{١٧} + س ع^{١٦} + \dots + س^{١٧})}{ع - س}$$

$$= س^{١٧} + س س^{١٦} + س^{٢} س^{١٥} + \dots + س^{١٧}$$

$$= \underbrace{س^{١٧} + س^{١٧} + \dots + س^{١٧}}_{\text{١٨ مرة}}$$

$$= ١٨ س^{١٧}$$

مثال ②

$ص = س^{٢٠} \Leftarrow ص' = ٢٠ س^{١٩}$

$ص = \pi^{٣} \Leftarrow ص' = صفر$

$ص = س^{٢٥} \Leftarrow ص' = ٢٥ س^{٢٤}$

$ص = س^{٢} \Leftarrow ص' = ٢ س$

$ص = س^{٤} \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = ٤ س^{٣}$

مكتبة العلم ALWESAM الاستاذ ناجح الجمزاوي

مثال ③

$ص = س^{٣} |س^{٢}|$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ | $_{س=١}$

الحل

$|س^{٢}| = س^{٢}$

$\leftarrow ص = س^{٣} \times س^{٢} = س^{٥}$

$\leftarrow \frac{د ص}{د س} = ٥ س^{٤}$

$\leftarrow \frac{د ص}{د س}|_{س=١} = ٥(١)^{٤} = ٥$

ملاحظه هامة

① $|س^{ن}| = س^{ن}$ اذا كان ن زوجي

② اذا كانت ن عدد فردي فان

$|س^{ن}| = \begin{cases} -س^{ن} & س < ٠ \\ س^{ن} & س \geq ٠ \end{cases}$

قاعدة ③

اذا كانت $ه(س) = ٢ \times هـ(س)$ حيث $هـ(س)$ اقتران قابل للاشتقاق فان

$ه'(س) = ٢ \times هـ'(س)$

واشتقاق الثابت × اقتران = الثابت × اشتقاق الاقتران

البرهان

$ه(س) = ٢ \times هـ(س)$

$ه'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٢ هـ(ع) - ٢ هـ(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٢(هـ(ع) - هـ(س))}{ع - س}$

$= ٢ \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$

$= ٢ \times هـ'(س)$

أمثلة

$ص = -٦ س^{٤} \leftarrow ص' = -٦ \times ٤ س^{٣}$

$= -٢٤ س^{٣}$

$ص = ٩ س \leftarrow ص' = ٩ \times ١ = ٩$

$ص = (٢ + ٥) س^{٤} \leftarrow ص' = ٤(٢ + ٥) س^{٣}$

$ص = \frac{س^{٥}}{٧} \leftarrow ص' = \frac{٥ س^{٤}}{٧}$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظه

مشتقه $\frac{\text{اقتران}}{\text{عدد}} = \frac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{العدد نفسه}}$

مثال

$ص = \frac{س^٨}{١٠} \leftarrow ص' = \frac{٨ س^٧}{١٠}$

ملاحظه

صنائع فرق بين $ه'(١)$ وبين $(ه(١))'$

$ه'(١)$ = مشتقه $ه(س)$ ثم تعوض $س = ١$

$(ه(١))'$ = التعويض ثم الاشتقاق
= (عدد ثابت)'
= صفر

مثال ⑤

اذا كان $ه(س) = ٤ - س^٣$ اوجد

① $ه'(٢)$ ② $(ه(٢))'$

الحل

① $ه(س) = ١٢ س^٢$
$ه'(٢) = ١٢ (٢)^٢ = ٤٨$

② $ه(٢) = ٤ - ٢^٣ = -٤$
$(ه(٢))' = (-٤)' =$ صفر

مثال ⑥

اذا كان $ه(س) = P \times ل(س)$
وكان $ه'(٣) = ٨$ ، $ل'(٣) = ٤$
جد قيمة P .

الحل

$ه'(س) = P \times ل'(س)$
$ه'(٣) = P \times ل'(٣)$
$٨ = ٤ \times P \Leftarrow P = \frac{٨}{٤} = ٢$

قاعدة ④

اذا كان $ه(س) = ل(س) \pm هـ(س)$
فإن
$ه'(س) = ل'(س) \pm هـ'(س)$

البرهان

$ه'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ل(ع) + هـ(ع) - ل(س) - هـ(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ل(ع) - ل(س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$

$= ل'(س) + هـ'(س)$

وبنفس الطريقة الطرح

مثال ①

$ص = س^3 + 5س^2 \Rightarrow ص' = 3س^2 + 10س$

$ص = 3س^2 - س + حا\frac{\pi}{2}$

$ص' = 6س - 1$

$ص = 5س^3 - 7س + 1$

$ص' = 15س^2 - 7$

ملاحظة

$ص = ب س + ت$ فان $ص' = ب$

مشتقة الأقتران الخطي = معامل س

مثال ②

$ه(س) = 3ب س + و(س)$ وكانت $و'(1) = 2$ ، $ه'(1) = 3$ جد الثابت ب ؟

الحل

$ه'(س) = 3ب + و'(س)$

$ه'(1) = 3ب + و'(1)$

$3 = 3ب + 2$

$1 = 3ب$

$ب = \frac{1}{3}$

مثال ③

$ه(س) = س^3 (س^2 + 3س + 1)$ اوجد $ه'(1)$

الحل

$ه(س) = س^5 + 3س^4 + س^3$

$ه'(س) = 5س^4 + 12س^3 + 3س^2$

$ه'(1) = 5 + 12 + 3 = 20$

مثال ④

اذا كان $ه(س)$ قابل للاشتقاق وكان $ه(2) = 5$ ، $ه'(2) = -3$ ، $و(2) = 4$

$هـ'(2) =$ صفر جد

① $(ه - هـ)'(2)$

$= ه'(2) - هـ'(2) = -3 - 0 = -3$

② $(3ه + 2هـ)'(2) = 3ه'(2) - 2هـ'(2)$

$= 3 \times -3 + 2 \times 0 = -9$

③ $((3ه \times هـ)(س))'(2) = (2 \times 5 + 2 \times 4)$

$=$ صفر

مثال ⑤

اذا كان $ل(س) = 7 - 4س^2 + \frac{ه(س)}{3}$

$ه'(2) = -3$ جد $ل'(2)$

الحل

$ل'(س) = 0 - 8س + \frac{ه'(س)}{3}$

$ل'(2) = -8 \times 2 + \frac{ه'(2)}{3} = -8 + \frac{-3}{3}$

$= -8 - 1 = -9$

مكتبة الوسام ALWESSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ٦
اذا كانت $و(س) = ٢س^{٣} - ٤س + ٥$
وكانت $و'(٢) = ٥$ فما قيمة ٢ ؟

الحل
$و'(س) = ٢ \times ٣ س - ٤$
$و'(٢) = ٢ \times ٣ \times ٢ - ٤ = ٨$
$٣ = ٢ \Leftarrow ١٢ = ٤٢$

مثال ٧
اذا كانت $و(س) = \frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{١}{٢} س^{٢} + ٢س + ٥$
فجد اصفار المشتقة $و'(س)$ ؟

الحل
$و'(س) = \frac{١}{٣} \times ٣ س^{٢} - \frac{١}{٢} \times ٢ س + ٢$
$و'(س) = س^{٢} - س + ٢ = ٠$
$(س - ٢)(س + ١) = ٠$
$س = ٢ ، س = -١$
اصفار المشتقة هي
$\{٢ ، -١\}$

مثال ٨
اذا كان $ل(س) = ٢م(س) - ٣س^{٢} + هـ(س)$
وكان $ل'(س) = ٢هـ(س)$ $،$ $ل'(١) = ٤$ فجد
$م'(١)$ ؟

الحل
$ل'(١) = ٤ \Rightarrow ٢هـ'(١) = ٤$
$\Leftarrow هـ'(١) = ٢$

$ل'(س) = ٢م'(س) - ٦س + هـ'(س)$
$ل'(١) = ٢م'(١) - ٦ + هـ'(١)$
$٤ = ٢م'(١) - ٦ + ٢$
$٤ = ٢م'(١) - ٤$
$\Leftarrow ٢م'(١) = ٨ \Leftarrow م'(١) = ٤$

مثال ٩
اذا كان
$و(س) = ٢هـ(س) - ٤س^{٢} + ٢٠$
وكانت $هـ'(٢) = ٣$ فجد $و'(٢)$ ؟

الحل
$و'(س) = ٢هـ'(س) - ٨س$
$و'(٢) = ٢هـ'(٢) - ٨ \times ٢$
$= ٢ \times ٣ - ١٦ = ٦ - ١٦ = ١٠$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص١٠٨

جد مشتقة كل من الاقترانات التالية

ب) $هـ(س) = ٣ل \leftarrow هـ'(س) = صفر$

ج) $هـ(س) = -٤س^{٣} \leftarrow هـ'(س) = -١٢س^{٢}$

د) $هـ(س) = \frac{س}{\pi} \leftarrow هـ'(س) = \frac{١}{\pi}$

تدريب ② ص١١٠

جد $هـ'(س)$ لكل مما يأتي

ا) $هـ(س) = \frac{١}{٢}(س^{٤} + ٧)$

$هـ'(س) = \frac{١}{٢}(٤س^{٣}) = ٢س^{٣}$

ج) $هـ(س) = ٩س^{٣} + ٥س^{٢} + ٣س + ٤$

$هـ'(س) = ٢٧س^{٢} + ١٠س + ٣$

تمارين وسائل ص١١١

① جد المشتقة الأولى لكل مما يلي

ا) $هـ(س) = ٤ \quad هـ'(س) = صفر$

ب) $هـ(س) = \pi^{٣} \quad هـ'(س) = صفر$

د) $ص = -٣س^{١٢} \quad ص' = -٣٦س^{١١}$

ه) $ل(س) = \frac{١}{٢}هـ(س) \leftarrow ل'(س) = \frac{١}{٢}هـ'(س)$

② جد $\frac{د ص}{د س}$:

ا) $ص = ١ - ٣س^{٢}، \quad ص' = -٦س$

ب) $ص = ٦س^{٢} - ٥س^{٢} + س + ٩$

$ص' = ١٨س^{٢} - ١٠س + ١$

د) $ص = \frac{س^{٢} + ١}{٥}$

$ص' = \frac{٢س}{٥}$

ه) $ص = \frac{١}{٤}س^{٤} - \frac{١}{٣}س^{٣} + \frac{١}{٢}س^{٢} - س + ١$

$ص' = س^{٣} - س^{٢} + س - ١$

← يتبع حل تمارين وسائل

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

س٣ جد $\frac{ص}{س}$ عند النقطة المبينة

(أ) $ص = \frac{س^٤}{٤}$ ، $س = -٢$

$\frac{ص}{س} = \frac{٤س^٣}{٤} = س^٣$

$\left|\frac{ص}{س}\right|_{س=-٢} = (-٢)^٣ = -٨$

(ب) $ص = س^٢ + |٣س - ١٢|$ ، $س = ٥$

الحل

$ص = س^٢ + ٣س - ١٢$

لأن $٣س - ١٢ < ٠$

$\frac{ص}{س} = ٢س + ٣$ ، $\left|\frac{ص}{س}\right|_{س=٥} = ٢ \times ٥ + ٣$

$= ١٣$

(ج) $ص = ٨س^٢ - [\frac{١}{٤}س + ٣]$ ، $س = ١,٢$

$= ٨س^٢ - ٣$

لأن $[\frac{١}{٤}س + ٣]$

$\frac{ص}{س} = ١٦س$

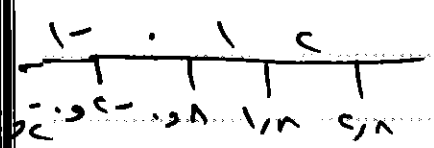
$\left|\frac{ص}{س}\right|_{١,٢} = ١٦ \times ١,٢ = ١٩,٢$

(د) $ص = س + [س + ٢,٥] - |س - ١|$

$س = ١$

$|س - ١| = \begin{cases} س - ١ & \\ ١ - س & \end{cases}$

$[س + ٢,٥]$



$ص = س + س - ١ - (-س + ١)$

$= س + س - ١ + س = ٣س - ١$

$\frac{ص}{س} = ٣$

س٤

إذا كان $ل'(٢) = ٤$ ، $هـ'(٢) = -٥$

جد $و'(٢)$ في كل مما يأتي

أ) $و(س) = ٥ل(س) + ٢هـ(س)$

الحل

$و'(س) = ٥ل'(س) + ٢هـ'(س)$

$و'(٢) = ٥ \times ٤ + ٢ \times -٥$

$= ٢٠ - ١٠ = ١٠$

ب) $و(س) = ل(س) - ٣هـ(س)$

$و'(س) = ل'(س) - ٣هـ'(س)$

$و'(٢) = ل'(٢) - ٣هـ'(٢)$

$= ٤ - ٣ \times -٥$

$= ٤ + ١٥$

$= ١٩$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الخامس

قواعد الاشتقاق ②

قاعدة الضرب

اذا كان $ق(س) = هـ(س) \times ل(س)$
فإن

$ق'(س) = هـ(س) \times ل'(س) + ل(س) \times هـ'(س)$
$=$ الاول $\times$ مشتقة الثاني $+$ الثاني $\times$ مشتقة الأول

ملاحظة
المشتقة لا توزع على الضرب

مثال ①
$ق(س) = س^{٢} (س^{٣} - ٤س)$
الأول — الثاني

الحل
$ق'(س) = س^{٢} (٣س^{٢} - ٤) + (س^{٣} - ٤س) \times ٢س$
الاول $\times$ مشتقة الثاني $+$ الثاني $\times$ مشتقة الاول
$= ٣س^{٤} - ٤س^{٢} + ٢س^{٤} - ٨س^{٢}$
$= ٥س^{٤} - ١٢س^{٢}$

طريقة أخرى قبل الأقواس
$ق(س) = س^{٥} - ٤س^{٣}$
$ق'(س) = ٥س^{٤} - ١٢س^{٢}$

مثال ②
$ص = (س^{٢} + ١)(س + ٣)(س - ٣)$
$\frac{د ص}{د س}$

الحل $س^{٢} + ١ = س^{٢}$
$ص = س^{٢} (س^{٢} - ٩)$
$ص' = س^{٢} \times ٢س + (س^{٢} - ٩) \times ٢س$
$= ٢س^{٣} + ٢س^{٣} - ١٨س$
$= ٤س^{٣} - ١٨س$

طريقة أخرى
$ص = س^{٤} - ٩س^{٢}$
$ص' = ٤س^{٣} - ١٨س$

مثال ③
اذا كان $ق(س) = س^{٢} هـ(س) - ٥س + ١$
وكان $هـ(٣) = ٤$, $هـ'(٣) = ٨$ جد $ق'(٣)$

الحل
$٤ هـ'(٣) = ٨ \Leftarrow هـ'(٣) = ٢$
$ق'(س) = س^{٢} \times هـ'(س) + هـ(س) \times ٢س - ٥$
$ق'(٣) = ٩ \times هـ'(٣) + هـ(٣) \times ٢ \times ٣ - ٥$
$= ٩ \times ٢ + ٨ \times ٢ \times ٣ - ٥$
$= ١٨ + ٤٨ - ٥ =$
$= ٦١$

مثال ④

هـ(س) = س² هـ(س) · م(س)

وكان هـ(١) = −٣ ، هـ'(١) = ١/٢

م(١) = ٣ ، م'(١) = −١

اوجد هـ'(١) ؟

الحل

هـ(س) = س² هـ(س) · م(س)

الأول — الثاني

هـ'(س) = س² هـ'(س) × م'(س) + م(س) × (س² × هـ'(س) + هـ(س) × ٢س)

لأن س² هـ(س) فتحقق حاصل ضرب

هـ'(١) = ١² هـ'(١) × م'(١) + م(١) × (١² × هـ'(١) + هـ(١) × ٢ × ١)

= ١ × −٣ × ١ + ٣ (١ × ١/٢ + −٣ × ٢)

= −٣ + ٣ (١/٢ − ٤)

= −٣ + ٣ × −٧/٢ = −٣ − ٢١/٢ = −٢٧/٢

مثال ⑤ سؤال في الكتاب

اذا كان هـ(س) = هـ(س) × ل(س) × م(س)

اوجد هـ'(س)

الحل هـ(س) = (هـ × ل) × م

الأول — الثاني

هـ'(س) = (هـ × ل) × م' + م × (هـ × ل)'

= هـ × ل × م' + م × (هـ × ل' + ل × هـ')

= هـ × ل × م' + م × هـ × ل' + م × ل × هـ'

مثال ⑥

اذا كان هـ(س) = س³ هـ(س) + ل(س)

وكان هـ(٢) = ل(٢) = ٣ وكان

هـ'(٢) = ل'(٢) = ٤ جد هـ'(٢)

الحل

هـ'(س) = س³ × هـ'(س) + هـ(س) × ٣س² + ل'(س)

هـ'(٢) = ٢³ × ٤ + ٣ × ٢² (٣) + ٤

= ٨ × ٤ + ٣ × ٤ × ٣ + ٤

= ٣٢ + ٣٦ + ٤ = ٧٢

مثال ⑦

اذا كان هـ(س) × هـ(س) = ٤

جد هـ'(٢) اذا كان هـ(٢) = ١

هـ'(٢) = ٢

الحل

هـ(س) × هـ'(س) + هـ(س) × هـ'(س) = ٠

هـ(٢) × هـ'(٢) + هـ(٢) × هـ'(٢) = ٠

١ × ٢ + هـ(٢) × هـ'(٢) = ٠

نجد هـ(٢) ومن ثم نعوض س = ٢ في المعادلة الأصلية

هـ(٢) × هـ(٢) = ٤

١ × هـ(٢) = ٤ ⟸ هـ(٢) = ١/٤

⟸ ١ × ٢ + ٤ × هـ'(٢) = ٠

٢ + ٤ هـ'(٢) = ٠

٤ هـ'(٢) = −٢ ⟸ هـ'(٢) = −٢/٤ = −١/٢

مثال (٨)

اذا كان $ق(س) = هـ(س) \cdot ل(س)$

اثبت أن

$$\frac{ق'(س)}{ق(س)} = \frac{هـ'(س)}{هـ(س)} + \frac{ل'(س)}{ل(س)}$$

الحل

$ق'(س) = هـ(س) \times ل'(س) + ل(س) \times هـ'(س)$

بالقسمة على $ق(س)$

$$\frac{ق'(س)}{ق(س)} = \frac{هـ(س) \times ل'(س)}{ق(س)} + \frac{ل(س) \times هـ'(س)}{ق(س)}$$

لكن $ق(س) = هـ(س) \times ل(س)$

$$\frac{ق'(س)}{ق(س)} = \frac{هـ(س) \times ل'(س)}{هـ(س) \times ل(س)} + \frac{ل(س) \times هـ'(س)}{هـ(س) \times ل(س)}$$

$$\frac{ق'(س)}{ق(س)} = \frac{ل'(س)}{ل(س)} + \frac{هـ'(س)}{هـ(س)}$$

تدريب

$ق(س) = (س - ا)(س - ب)(س - ج)$

اثبت أن

$$\frac{ق'(س)}{ق(س)} = \frac{١}{س - ا} + \frac{١}{س - ب} + \frac{١}{س - ج}$$

مثال (٩)

اذا كانت $ص = ا س^٢ + ب س + ج$

اثبت ان

$$\left(\frac{د ص}{د س}\right)^٢ = ٤ ا ص + ب^٢ - ٤ ا ج$$

الحل

$$\frac{د ص}{د س} = ٢ ا س + ب$$

$$\left(\frac{د ص}{د س}\right)^٢ = (٢ ا س + ب)^٢$$

$$= ٤ ا^٢ س^٢ + ٤ ا ب س + ب^٢$$

$$= ٤ ا (ا س^٢ + ب س) + ب^٢$$

لكن $ص = ا س^٢ + ب س + ج$

$\Leftarrow ا س^٢ + ب س = ص - ج$

بالتعويض

$$\left(\frac{د ص}{د س}\right)^٢ = ٤ ا (ص - ج) + ب^٢$$

$$= ٤ ا ص - ٤ ا ج + ب^٢$$

وهو المطلوب

مكتبة العلم ALILESAM
الاستاذ: ناجح الجمزاوي

قاعدة القسمة

اذا كان ق(س) = $\frac{ل(س)}{هـ(س)}$ هـ(س) ≠ ٠

حيث ل ، هـ اقترانيه قابلين للاشتقاق

ق'(س) = $\frac{هـ(س) \times ل'(س) - ل(س) \times هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

= $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

المشتقة الاول على القسمة

مثال ①

ق(س) = $\frac{٣س + ١}{س^{٢} - ٢}$ جد ق'(س)

الحل

ق'(س) = $\frac{(س^{٢}-٢) \times ٣ - (٣س+١) \times ٢س}{(س^{٢}-٢)^{٢}}$

= $\frac{٣س^{٢} - ٦ - ٦س^{٢} - ٢س}{(س^{٢}-٢)^{٢}}$

= $\frac{-٣س^{٢} - ٢س - ٦}{(س^{٢}-٢)^{٢}}$

مثال ②

ق(س) = $\frac{١}{س}$ جد ق'(٢)

الحل

ق'(س) = $\frac{س \times ٠ - ١ \times ١}{س^{٢}}$

= $\frac{-١}{س^{٢}}$

ق'(٢) = $\frac{-١}{٤}$

مثال ③

ق(س) = $\frac{س + ٥}{٦ - ٢س}$ اوجد ق'(٢)

الحل

ق'(س) = $\frac{(٦-٢س) \times ١ - (س+٥) \times -٢}{(٦-٢س)^{٢}}$

ق'(٢) = $\frac{(٦-٢ \times ٢) \times ١ - (٢+٥) \times -٢}{(٦-٢ \times ٢)^{٢}}$

= $\frac{٢ \times ١ - ١٤ \times -٢}{٢^{٢}}$

= $\frac{٢ + ١٤}{٤} = \frac{١٦}{٤}$

= ٤

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

مثال ④

اذا كان هـ(س) = $\frac{\text{ق س}}{\text{ق(س)}}$

وكان ق(١) = ٣ ، قَ(١) = ٢
هـَ(١) = ٦ ، اوجد قيمة الثابت ق ؟

الحل

هـَ(س) = $\frac{\text{ق(س)} \times \text{ق} - \text{ق س} \times \text{قَ(س)}}{(\text{ق(س)})^{٢}}$

هـَ(١) = $\frac{\text{ق(١)} \times \text{ق} - \text{ق} \times ١ \times \text{قَ(١)}}{(\text{ق(١)})^{٢}}$

٦ = $\frac{٣ \text{ق} - ٢ \text{ق}}{٩}$

٦ × ٩ = ٣ق - ٢ق = ق

ق = ٥٤

مثال ⑤

ق(س) = $\frac{(٣س - ١)(س + ٢)}{س^{٢} + ١}$

جد قَ(١)

الحل

(٣س - ١)(س + ١) = ٣س^٢ + ٥س - ٢

ق(س) = $\frac{٣س^{٢} + ٥س - ٢}{س^{٢} + ١}$

قَ(س) = $\frac{(س^{٢}+١) \times (٥+٦س) - (٣س^{٢}+٥س-٢) \times ٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

قَ(١) = $\frac{٢ \times ١١ - ٦ \times ٢}{٢} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$

مثال ⑥

ق(س) = $\frac{٤س^{٢} + ٣}{س + هـ(س)}$ ، هـ(١) = ١ ، قَ(١) = ٢

اوجد هـَ(١) ؟

الحل

قَ(س) = $\frac{(س + هـ(س)) \times ٨س - (٤س^{٢}+٣)(١ + هـَ(س))}{(س + هـ(س))^{٢}}$

قَ(١) = $\frac{(١ + هـ(١)) \times ٨ \times ١ - (٤(١)^{٢}+٣)(١ + هـَ(١))}{(١ + هـ(١))^{٢}}$

٢ = $\frac{(١+١) \times ٨ - ٧(١ + هـَ(١))}{(١+١)^{٢}}$

٨ = ١٦ - ٧ - ٧هـَ(١)

٧هـَ(١) = ٩ - ٨

٧هـَ(١) = ١

هـَ(١) = $\frac{١}{٧}$ ⟵

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑦

اذا كان $ه(س) = \frac{٣ - ٢س}{س^{٢} هـ(س) + ٥}$

وكان $هـ(٢) = ٦$ ، $هـ'(٢) = ٢$

نجد $ه'(٢)$ ؟

الحل

$$ه'(س) = \frac{(س^{٢} هـ(س) + ٥)(-٢) - (٣ - ٢س)(س^{٢} هـ'(س) + هـ(س) \times ٢س)}{(س^{٢} هـ(س) + ٥)^{٢}}$$

$$ه'(٢) = \frac{(٤ \times ٦ + ٥)(-٢) - (-٤)(٤ \times ٢ + ٦ \times ٤)}{(٤ \times ٦ + ٥)^{٢}}$$

$$= \frac{-٢ \times ٢٩ + ٢٤ \times ١ + ٢}{(٢٩)^{٢}} = \frac{-٦}{٨٤١}$$

مثال ⑧

اذا كان $(١ + س^{٢}) ه(س) + ١٢ = ٤ س^{٣}$

فاوجد $ه'(-١)$

الحل

$$(١ + س^{٢}) \times ه'(س) + ه(س) \times ٢س = ١٢ س^{٢}$$

$$(١ + (-١)^{٢}) \times ه'(-١) + ه(-١) \times -٢ = ١٢ (-١)^{٢}$$

$$٢ \times ه'(-١) - ٢ ه(-١) = ١٢ \quad \text{---①}$$

نجد $ه(-١)$ بالتعويض

$$(١ + ١^{٢}) ه(١) + ١٢ = ٤ (١)^{٣}$$

$$٢ ه(١) + ١٢ = ٤$$

$$٢ ه(١) = -٨ \Leftarrow ه(١) = -٤$$

بتعويضها في ①

$$٢ \times ه'(-١) - ٢ \times -٨ = ١٢$$

$$٢ ه'(-١) + ١٦ = ١٢$$

$$٢ ه'(-١) = -٤ \Leftarrow ه'(-١) = \frac{-٤}{٢} = -٢$$

مثال ⑨

$ه(س) = \frac{ب + ٤}{س^{٢}}$ وكان $ه'(٢) = ١$

اوجد قيمة الثابت ب ؟

الحل

$$ه'(س) = \frac{س^{٢} \times ٠ - (ب + ٤) \times ٢س}{(س^{٢})^{٢}}$$

$$ه'(٢) = \frac{-(ب + ٤) \times ٢ \times ٢}{(٤)^{٢}}$$

$$١ = \frac{-٤ب - ١٦}{١٦}$$

$$١٦ = -٤ب - ١٦$$

$$-٤ب = ٣٢$$

$$ب = \frac{٣٢}{-٤} = -٨$$

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ: ناجح الجمزاوي

مثال (١٠)

اذا كان $ه(س) = \frac{ل(س)}{هـ(س)}$ $هـ(س) \neq 0$

وكان كلاً من $ل(س)$، $هـ(س)$ قابلاً للاشتقاق عند $س = ا$، $ه(ا) = صفر$

اثبت أن $ه(ا) = \frac{ل'(ا)}{هـ'(ا)}$

الحل

نجعل $ل(س)$ موضع القانون

$ل(س) = ه(س) \times هـ(س)$

$ل'(س) = ه(س) \times هـ'(س) + هـ(س) \times ه'(س)$

$ل'(ا) = ه(ا) \times هـ'(ا) + هـ(ا) \times ه'(ا)$

لكن $ه(ا) = صفر$

$\Leftarrow ل'(ا) = ه(ا) \times هـ'(ا)$

$\Leftarrow ه(ا) = \frac{ل'(ا)}{هـ'(ا)}$

مثال (١١)

اذا كان $ه(س) = \frac{س}{س^٢ + ١}$

أوجد اصفار المشتقة $ه'(س)$

الحل

$ه'(س) = \frac{(س^٢+١) \times ١ - س \times ٢س}{(س^٢+١)^٢}$

$= \frac{س^٢ + ١ - ٢س^٢}{(س^٢+١)^٢}$

نجعل البسط = صفر

$س^٢ + ١ - ٢س^٢ = ٠$

$١ - س^٢ = ٠ \Leftarrow س^٢ = ١$

$س = \pm ١$

اصفار المشتقة $\{-١، ١\}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

نتيجة ①

اذا كان $ق(س) = \frac{ب}{هـ(س)}$ $هـ(س) \neq 0$

حيث $هـ(س)$ قابل للاشتقاق

فإن $ق'(س) = \frac{-ب \times هـ'(س)}{(هـ(س))^{2}}$

أي أن

$$\left(\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}\right)' = \frac{-\text{الثابت} \times \text{اشتقاق الاقتران}}{(\text{الاقتران})^{2}}$$

البرهان

$$ق'(س) = \frac{هـ(س) \times صفر - ب \times هـ'(س)}{(هـ(س))^{2}}$$

$$= \frac{-ب \times هـ'(س)}{(هـ(س))^{2}}$$

مثال ⑫

① $ق(س) = \frac{-٤}{س^{٢} - س}$

$$ق'(س) = \frac{-(-٤) \times (٢س - ١)}{(س^{٢} - س)^{2}}$$

$$= \frac{٤(٢س - ١)}{(س^{٢} - س)^{2}}$$

② $ص = \frac{١}{س}$

$$ص' = \frac{-١ \times ١}{س^{٢}} = \frac{-١}{س^{٢}}$$

③ $ص = \frac{-٣}{س^{٣}}$

$$ص' = \frac{-(-٣) \times ٣س^{٢}}{(س^{٣})^{2}} = \frac{٩س^{٢}}{س^{٦}}$$

$$= \frac{٩}{س^{٤}}$$

ملاحظة هامة

① $ص = \frac{٤س^{٢} + ٥س + ٥}{٧}$

$ص' = \frac{٨س + ٥}{٧}$ نشتقه قطعة البسط

② $ص = \frac{٧}{٤س^{٢} + ٥س + ٥}$ نستخدم النتيجة

$$ص' = \frac{-٧(٨س + ٥)}{(٤س^{٢} + ٥س + ٥)^{2}}$$

مكتبة العلم ALILESAM العلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

اذا كان $ق(١) = ٣$ ، $ق'(١) = -١$
$هـ(١) = ٢$ ، $هـ'(١) = ٥$ أوجد ما يلي

① $(ق \cdot هـ)'(١)$

$= ق(١) \times هـ'(١) + هـ(١) \times ق'(١)$
$= ٣ \times ٥ + ٢ \times -١ = ١٣$

② $\left(\frac{هـ}{ق}\right)'(١)$

$= \frac{ق(١) \times هـ'(١) - هـ(١) \times ق'(١)}{(ق(١))^{٢}}$
$= \frac{٣ \times ٥ - ٢ \times -١}{٣^{٢}} = \frac{١٧}{٩}$

③ $\left(\frac{٧}{ق}\right)'(١) = \frac{-٧ \times ق'(١)}{(ق(١))^{٢}}$
$= \frac{-٧ \times -١}{٣^{٢}} = \frac{٧}{٩}$

④ $\left(\frac{ق(١)}{هـ}\right)'(١) = \left(\frac{٣}{هـ}\right)'(١)$
$= \frac{-٣ \times هـ'(١)}{هـ^{٢}(١)} = \frac{-٣ \times ٥}{٤} = \frac{-١٥}{٤}$

⑤ $\left(\frac{هـ'(١)}{ق(١)}\right)'(١) = \left(\frac{٥}{٣}\right)' =$ صفر

⑥ $\left(\frac{ق}{هـ'(١)}\right)'(١) = \left(\frac{ق}{٥}\right)'(١)$
$= \frac{ق'(١)}{٥} = \frac{-١}{٥}$

⑦ اذا كان $ل(س) = س \cdot ق(س) - \frac{١}{هـ(س)}$
فاوجد $ل'(١)$

الحل

$ل'(س) = س \times ق'(س) + ق(س) \times ١ - \frac{-١ \times هـ'(س)}{هـ^{٢}(س)}$

$ل'(١) = ١ \times ق'(١) + ق(١) \times ١ + \frac{هـ'(١)}{هـ^{٢}(١)}$

$= -١ + ٣ + \frac{٥}{٤} = ٢ + \frac{٥}{٤} = \frac{١٣}{٤}$

مثال (١٤)

اذا كان $ق(س) \times هـ(س) = ١$
وكان $هـ(١) = ٣$ ، $هـ'(١) = ٥$
اوجد $ق'(١)$.

الحل

$ق(س) \times هـ'(س) + هـ(س) \times ق'(س) = ٠$
$ق(١) \times هـ'(١) + هـ(١) \times ق'(١) = ٠$
نجد $ق(١)$ بتعويض $هـ(١) = ٣$
$ق(١) \times ٣ = ١ \Leftarrow ق(١) = \frac{١}{٣}$
$\frac{١}{٣} \times ٥ + ٣ \times ق'(١) = ٠$
$٣ ق'(١) = \frac{-٥}{٣}$
$ق'(١) = \frac{\frac{-٥}{٣}}{٣} = \frac{-٥}{٩}$

نتيجة ③ (وزارة ٢٠١٥) شوهي

اذا كان $ه(س) = س^{ن}$ حيث ن : عدد صحيح سالب فان

$ه'(س) = ن\, س^{ن-1}$

البرهان

نفرض ان $ن = -م$ حيث $م \in ص^{+}$

$\leftarrow ه(س) = س^{-م} = \frac{1}{س^{م}}$

$ه'(س) = \frac{-1 \times م س^{م-1}}{(س^{م})^{2}} = \frac{-م س^{م-1}}{س^{2م}}$

$= -م س^{م-1-2م} = -م س^{-م-1}$

$= ن\, س^{ن-1}$ لكن $ن = -م$

مثال ⑮

① $ص = س^{-8} \leftarrow ص' = -8 س^{-9}$

$= \frac{-8}{س^{9}}$

② $ص = 3 س^{-9} = -27 س^{-10} = \frac{-27}{س^{10}}$

③ $ص = 4 س^{4} + \frac{7}{س^{2}}$

$ص' = 16 س^{3} - \frac{7}{س^{3}}$

مثال ⑯

اذا كان $ه(2) = 3$ ، $ه'(2) = 2$

$ل(2) = 4$ ، $ل'(2) = 1$ جد ما يلي

① $(ه \cdot ل)'(2)$

$= ه(2) \times ل'(2) + ل(2) \times ه'(2)$

$= 3 \times 1 + 4 \times 2$

$= 3 + 8 = 11$

② $(ه(2) \times ل(2))' =$ صفر

③ $(ه + 3ل)'(2)$

$= ه'(2) + 3ل'(2) = 2 + 3 \times 1$

$= 5$

④ $(2ه - ٥ل)'(2)$

$= 2ه'(2) - ٥ل'(2)$

$= 2 \times 2 - ٥ \times 1 = 4 - ٥ = -1$

⑤ $\left(\frac{ه}{ل}\right)'(2) = \frac{ل(2) \times ه'(2) - ه(2) \times ل'(2)}{(ل(2))^{2}}$

$= \frac{4 \times 2 - 3 \times 1}{16} = \frac{8-3}{16} = \frac{5}{16}$

⑥ $\left(\frac{ه(2)}{ل(2)}\right)' =$ (ثابتة) $=$ صفر

معدل التغير

$\frac{د ص}{د س}$ = معدل تغير ص بالنسبة لـ س

$\frac{د م}{د ن}$ = معدل تغير م بالنسبة لـ ن

مثال ①

جد معدل التغير في مساحة المربع بالنسبة إلى طول ضلعه عندما يكون طول ضلعه ٥ سم ؟

الحل

نفرض أن م : مساحة المربع
س : طول ضلعه

المطلوب $\frac{د م}{د س}\Big|_{س=٥}$

$م = س^{٢}$ مساحة المربع = (الضلع)^{٢}

$\frac{د م}{د س} = ٢س$

$\frac{د م}{د س}\Big|_{س=٥} = ٢ \times ٥ = ١٠$

مثال ②

متوازي مستطيلات ارتفاعه مثلا طوله وعرضه ثلث ارتفاعه اوجد معدل التغير في حجمه بالنسبة لأرتفاعه عندما يكون ارتفاعه ٤ سم .

الحل

نفرض حجم متوازي المستطيلات = ح
وارتفاعه = س
المطلوب معدل تغير حجمه بالنسبة لأرتفاعه $\frac{د ح}{د س}\Big|_{س=٤}$

ارتفاعه مثلا طوله س = ٢ × الطول
⟸ الطول = $\frac{١}{٢}$ س

العرض = $\frac{١}{٣}$ س

حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

ح = $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{١}{٣}$ س × س

$= \frac{١}{٦} س^{٣}$

$\frac{د ح}{د س} = \frac{١}{٦} \times ٣ س^{٢} = \frac{١}{٢} س^{٢}$

$\frac{د ح}{د س}\Big|_{س=٤} = \frac{١}{٢} \times ٤^{٢} = \frac{١}{٢} \times ١٦$

$= ٨$

مكتبة العلم ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ③

صفيحة معدنية على شكل المستطيل تتمدد بانتظام بحيث يبقى طولها يساوي ثلاثة أمثال عرضها جد معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة إلى طولها عندما يكون طولها ١٥ سم ؟

الحل

نفرض ان م : مساحة المستطيل
س = طولها ص = عرضها

المطلوب $\frac{د م}{د س}\Big|_{س=١٥}$

م = س × ص لكن س = ٣ ص
ص = $\frac{١}{٣}$ س

$\Leftarrow$ م = س × $\frac{١}{٣}$ س = $\frac{١}{٣}$ س^{٢}

$\frac{د م}{د س}$ = $\frac{١}{٣}$ × ٢ × س

$\frac{د م}{د س}\Big|$ = $\frac{١}{٣}$ × ٢ × ١٥
س=١٥

= $\frac{٣٠}{٣}$ = ١٠

مثال ④

اسطوانة دائرية قائمة حجمها ثابت جد معدل تغير ارتفاعها بالنسبة إلى طول نصف قطر قاعدتها

الحل

ح : حجم الاسطوانه (ثابت)
نق : نصف القطر
ع : الارتفاع
المطلوب $\frac{د ع}{د نق}$

ح = π نق^{٢} ع نحل ع فنضع القانون

ع = $\frac{ح}{π نق^{٢}}$

$\frac{د ع}{د نق}$ = $\frac{-ح × ٢ × π × نق}{(π نق^{٢})^{٢}}$

مثال ⑤

اسطوانة دائرية ارتفاعها ضعف نصف قطرها جد معدل تغير حجمها بالنسبة لنصف قطرها عندما يكون نصف قطرها ٥ سم ؟

الحل

ح : حجم الأسطوانه ع : ارتفاعها
نق : نصف قطرها

← يتبع الحل

مكتبة الأوسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

← تابع الحل

المطلوب $\frac{ك ح}{ك ن}$ | $_{ن=٥}$

$ح = \pi ن^{٢} ع$ لكن $ع = ٢ ن$

$ح = \pi ن^{٢} \times ٢ ن = ٢ \pi ن^{٣}$

$\frac{ك ح}{ك ن} = ٦ \pi ن^{٢}$

$\frac{ك ح}{ك ن}$ | $_{ن=٥} = ٦ \pi \times ٥^{٢} = ٦ \pi \times ٢٥$

$= ١٥٠ \pi$

مثال ⑥

مخروط من الثلج ارتفاعة ثلاثة امثال نصف قطر قاعدته ، اخذ المخروط بالذوبان ، بحيث يحافظ على شكله بمعدل تغير حجم المخروط بالنسبة الى ارتفاعة عندما يكون نصف قطره ١٠ سم

الحل

ح : حجم المخروط ، ن : نصف القطر

ع : الارتفاع

المطلوب $\frac{ك ح}{ك ع}$ | $_{ع=١٠}$

$ح = \frac{\pi}{٣} ن^{٢} ع$ ، $ع = ٣ ن$

$\Rightarrow ن = \frac{ع}{٣}$

$ح = \frac{\pi}{٣} (\frac{ع}{٣})^{٢} \times ع$

$= \frac{\pi}{٣} \times \frac{ع^{٢}}{٩} \times ع = \frac{\pi}{٢٧} ع^{٣}$

$\frac{ك ح}{ك ع} = \frac{\pi}{٢٧} \times ٣ ع^{٢}$

$= \frac{\pi}{٩} ع^{٢}$

عندما $ن = ١٠ \Leftarrow ع = ٣ \times ١٠ = ٣٠$

$\frac{ك ح}{ك ع} = \frac{\pi}{٩} (٣٠)^{٢} = \frac{\pi}{٩} \times ٩٠٠$

$= \frac{\pi}{١٠٠}$

مثال ⑦

اذا كانت العلاقة $\frac{١}{ع} = \frac{١}{س} + \frac{١}{ص}$ تربط بين البعد البؤري (ع) لعدسة محدبة س ، ص بعدان بعد جسم موضوع امام العدسة وبعد الصورة المتكونة له من مركز العدسة على الترتيب اذا كانت ع = ٢ سم

① صيغة عامة لايجاد معدل تغير ص بالنسبة لـ س

② معدل تغير ص بالنسبة لـ س عندما تكون س = ١٢ سم

الحل $ع = ٢ \Leftarrow \frac{١}{٢} = \frac{١}{س} + \frac{١}{ص}$

$\Rightarrow \frac{١}{ص} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{س} = \frac{س - ٢}{٢ س}$

$\Rightarrow ص = \frac{٢ س}{س - ٢}$

$\frac{ك ص}{ك س} = \frac{(س-٢) \times ٢ - ٢ س \times (١)}{(س-٢)^{٢}}$

$= \frac{-٤}{(س-٢)^{٢}}$

② $\frac{ك ص}{ك س}$ | $_{س=١٢} = \frac{-٤}{(١٢-٢)^{٢}} = \frac{-٤}{١٠^{٢}} = \frac{-٤}{١٠٠}$

$= \frac{-١}{٢٥}$

مشتقة الاقترانات المتشعبة

الخطوات

لايجاد مشتقة اقتران متشعب

① نشتق كل قاعدة على حدا حسب قواعد الاشتقاق.

② نبحث في الاتصال عند نقطة التشعب
- ① اذا كان غير متصل فهو غير قابل للاشتقاق عندها
- ② اذا كان متصلاً فنقوم بايجاد المشتقة من اليمين والمشتقة من اليسار

مثال ①

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} 1-3س & س \le 1 \\ 5س-2 & س > 1 \end{cases}$$

اوجد قا(١)

الحل

نبحث في اتصال قا(س) عند س = ١

نهـا قا(س) = نهـا ٥س - ٢ = ٥-٢ = ٣
س → ١+ — س > ١

نهـا قا(س) = نهـا ١-٣س = ١-٣ = -٢
س → ١- — س < ١

قا(س) غير متصل عند س = ١

← قا(١) غير موجودة

$$\text{قا}'(س) = \begin{cases} -3 & س < 1 \\ \text{غير موجودة} & س = 1 \\ 5 & س > 1 \end{cases}$$

مثال ②

$$\text{قا}(س) = \begin{cases} \frac{1}{س} + 3س & س < 1 \\ 2س + 2 & س \ge 1 \end{cases}$$

اوجد قا(س)

الحل

نبحث في اتصال س = ١

نهـا قا(س) = ٢×١+٢ = ٤
س → ١+

نهـا قا(س) = $\frac{1}{1}$ + ٣×١ = ٤
س → ١-

قا(١) = ٢×١+٢ = ٤

متصل عند س = ١

قا(١) = ٢ ، قا'(١) = $\frac{-1}{س^2}$ + ٢
= $\frac{-1}{1}$ + ٣ = ٢

$$\text{قا}'(س) = \begin{cases} \frac{-1}{س^2} + 2 & س < 1 \\ 2 & س = 1 \\ 2 & س > 1 \end{cases}$$

=

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ③

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٧ & س < ١ \\ ٤ س & س \geq ١ \end{cases}$$

جد $\text{ه}'_{+}(١)$ ، $\text{ه}'_{-}(١)$

الحل

بما ان $\text{ه}(١)$ موجودة

$\leftarrow$ ه(س) متصل عند $س = ١$

$$\text{نها}_{س \to ١^{+}} \text{ه}(س) = \text{نها}_{س \to ١^{-}} \text{ه}(س)$$

$$\text{نها}_{س \to ١^{+}} \text{ب}س^{٢} + ح = \text{نها}_{س \to ١^{-}} ٣س + ٢$$

$$ب + ح = ٣ + ح \quad \cdots (١)$$

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} ب & س < ١ \\ ح & س \geq ١ \end{cases}$$

لكن $\text{ه}(١) = ٤$

$$\text{ه}'_{+}(١) = ٤ \Leftarrow ب = ٤$$

$$ب = ٢$$

$$\text{ه}'_{-}(١) = ٤ \Leftarrow ح = ٤$$

بالتعويض في (١)

$$ب + ح = ٣ + ح$$

$$٢ + ح = ٣ + ٤ \Leftarrow ٧ = ٥ + ٢$$

$$٥ = ٥$$

اكمل

نبحث في الاتصال عند $س = ١$

$$\text{نها}_{س \to ١} \text{ه}(س) = ٤ \times ١ = ٤$$

$$\text{ه}(١) = ١^{٢} + ٧ = ٨$$

غير متصل عند $س = ١$

$\leftarrow$ ه(س) غير موجودة .

عند $س = ١^{+}$

$$\text{ه}(١) = ٨ \quad \text{نها}_{س \to ١^{+}} \text{ه}(س) = ١ + ٧ = ٨$$

متصل عند $س = ١^{+}$

$$\text{ه}(س) = ٣س^{٢}$$

$$\text{ه}'(١^{+}) = ٣(١)^{٢} = ٣$$

مثال ④

$$\text{اذا كان ه}(س) = \begin{cases} ب س^{٢} + ٥ & س \geq ١ \\ ح س + ٣ & س < ١ \end{cases}$$

وكانت $\text{ه}'(١) = ٤$

اوجد القوانين ب ، ٥ ، ح ؟

الحل

بما ان $\text{ه}(١)$ موجودة

$\leftarrow$ ه(س) متصل عند $س = ١$

$$\text{نها}_{س \to ١^{+}} \text{ه}(س) = \text{نها}_{س \to ١^{-}} \text{ه}(س)$$

$$\text{نها}_{س \to ١^{+}} \text{ب}س^{٢} + ٥ = \text{نها}_{س \to ١^{-}} ح س + ٣$$

$$ب + ٥ = ح + ٣ \quad \cdots (١)$$

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} ب & س < ١ \\ ح & س \geq ١ \end{cases}$$

لكن $\text{ه}'(١) = ٤$

$$\text{ه}'_{+}(١) = ٤ \Leftarrow ب = ٤$$

$$ب = ٢$$

$$\text{ه}'_{-}(١) = ٤ \Leftarrow ح = ٤$$

بالتعويض في (١)

$$ب + ٥ = ح + ٣$$

$$٢ + ٥ = ٤ + ٣ \Leftarrow ٧ = ٥ + ٢$$

$$٥ = ٥$$

ملاحظة

تكون المشتقة غير موجودة في الحالات التالية

① اطراف الفترات المغلقة

② عند نقط عدم الاتصال

③ المشتقة من اليمين $\neq$ المشتقة من اليسار

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي Software

مثال ⑤

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} س^{٣}+٤ & ١ \le س < ٢ \\ ٥س & ٢ \le س < ٤ \end{cases}$$

جد هـ(س) ثم جد مجموعة قيم س التي يكون عندها هـ(س) غير موجودة

الحل

نبحث الاتصال عند س = ٢

$\text{هـا}(س) = ١٠$ ، هـ(٢) = ١٠

$س \to ٢^{+}$

$\text{هـا}(س) = ٢ \times ٤ = ١٢$

$س \to ٢^{-}$

غير متصل عند س = ٢

هـ(٢) غير موجودة

$$\text{حـ}(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ١ \le س < ٢ \\ ٥س & ٢ \le س < ٤ \\ \text{غير موجودة} & ١ \le س < ٤ \end{cases}$$

قيم س هي $\{١، ٢، ٤\}$

١، ٢ أطراف فترة

مثال ⑥

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} س^{٢}+١ & س \neq ٢ \\ ٧ & س = ٢ \end{cases}$$

جد هـ(٢)

الحل

هـ(٢) = ٧ ، $\text{هـا}(س) = ٢^{٢}+١ = ٥$

$س \to ٢$

هـ غير متصل عند س = ٢

هـ(٢) غير موجودة

مثال ⑦

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} س^{٢}+١ & س \neq ٢ \\ ٥ & س = ٢ \end{cases}$$

جد هـ(٢)

الحل

هـ(٢) = ٥ ، $\text{هـا}(س) = ٥$

$س \to ٢$

متصل عند س = ٢

هـ(س) = ٢س

هـ(٢) = ٢ × ٢ = ٤

هـ(٢) تعني ان ≠ ٢

صل النهاية

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑧

$$\text{حد}(س) = \begin{cases} \frac{س^2-9}{س-3} & س \neq 3 \\ 6 & س = 3 \end{cases}$$

جد حد (٣)

الحل

حد (٣) = ٦

$$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{س^2-9}{س-3} = \text{نهـا}_{س \to 3} \frac{(س-3)(س+3)}{س-3}$$

$$= 3+3 = 6$$

$$\text{حد}(س) = \begin{cases} س+3 & س \neq 3 \\ 6 & س = 2 \end{cases}$$

$$\text{حد}'(س) = \begin{cases} 1 & س \neq 3 \\ 0 & س = 3 \end{cases}$$

حد' (٣) = ١

مثال ⑨

اذا كان $\text{حد}(س) = \begin{cases} 5-3س^2 & س \leq -1 \\ 1+ج س & س > -1 \end{cases}$

$\text{هـ}(س) = \begin{cases} 4س+3 & س \geq -1 \\ س^2+1 & س < -1 \end{cases}$

وكان ل(س) = حد(س) + هـ(س)

① اكتب اتصال ل(س) عند س = -١

② قابلية ل(س) للاشتقاق عند س = -١

الحل

نوحد الاقترانين

$$ل(س) = \begin{cases} 8-3س^2+4س & س \leq -1 \\ ج س^2+س+2 & س > -1 \end{cases}$$

①

ل(-١) = -٢ + ١ + ٢ = ١

نهـا (ج س^٢ + س + ٢) = ١

س ← -١+

نهـا (٨ - ٣س^٢ + ٤س) = ٨ - ٣ - ٤ = ١

س ← -١-

∴ نهـا ل(س) = ل(-١) = ١

س ← -١

∴ ل(س) متصل عند س = -١

② ل'(س) = ٢ج س + ج

ل'(-١) = -٢ج + ج = ١٠ = صح

ل'(-١)+ = ٤ + ٦ = ١٠

ل'(-١)- = -٦ - ٤ = -١٠

ل'(-١)+ ≠ ل'(-١)-

∴ ل'(-١) غير موجودة

$$ل'(س) = \begin{cases} -6س+4 & س < -1 \\ 2ج س + ج & س > -1 \\ \text{غير موجودة} & س = -1 \end{cases}$$

مشتقة أقصى ان القيمة المطلقة

لإيجاد مشتقة اقصى ان القيمة المطلقة يجب ان نعيد تعريف القيمة المطلقة ثم نبحث في الاتصال والاشتقاقية.

ملاحظة هامة جداً

لإيجاد مشتقة اقصى ان يتضمن قيمة مطلقة عند نقطة تعوض فنحصل على احد الحالات:

① التعويض موجب نأخذ القاعدة كما هي ثم نشتق

② التعويض سالب نعكس القاعدة (نضربها بسالب) ثم نشتق

③ التعويض صفر نعيد تعريف القيمة المطلقة ونبحث في الاتصال ونبحث بالمشتقة من اليمين ومن اليسار

مثال ①

$ق(س) = |س^٤ + س^٣ - ٧|$ اوجد $ق'(٢)$ ، $ق'(١)$

الحل

عند $س = ٢$ التعويض موجب.

القاعدة كما هي

$ق(س) = س^٤ + س^٢ - ٧$

$ق'(س) = ٤س^٣ + ٣س^٢$

$ق'(٢) = ٤ \times ٨ + ٣ \times ٤ = ٣٢ + ١٢ = ٤٤$

عند $س = ١$ التعويض سالب

نضرب القاعدة في سالب

$ق(س) = -س^٤ - س^٣ + ٧$

$ق'(س) = -٤س^٣ - ٣س^٢$

$ق'(١) = -٤ - ٣ = -٧$

مثال ②

$ق(س) = ٤س^٢ - س|س - ٣|$

عند $ق'(١)$

عند $س = ٢$ التعويض ناتج سالب

نعكس القاعدة

$ق(س) = ٤س^٢ - س(٣ - س)$

$= ٤س^٢ - ٣س + س^٢$

$= ٥س^٢ - ٣س$

$ق'(س) = ١٠س - ٣$

$ق'(٢) = ١٠ \times ٢ - ٣$

$= ٢٠ - ٣ = ١٧$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ③

$هـ(س) = |س - ١٥| - |٣ - س|$

اوجد $هـ'(٢)$

الحل

التعويض عند $س = ٢$ سالب نفكر

القاعدة $|س - ١٥|$

التعويض $س = ٢$ موجب في القاعدة

$|٣ - س|$ نبقى كما هي.

$هـ(س) = ٥ - س - (٣ - س)$

$= ٥ - ك - ٣ + ك = ٢$

$هـ'(س) =$ صفر

مثال ④

$هـ(س) = |س - ٢|$ اوجد $هـ'(س)$ ؟

الحل

$|س - ٢|$

	$س - ٢$	$٢ - س$
	+	−
	٢	

$$هـ(س) = \begin{cases} س - ٢ & س \geq ٢ \\ ٢ - س & س < ٢ \end{cases}$$

$هـ(٢) =$ صفر

$هـ'(س - ٢) =$ صفر $\Rightarrow هـ'(٢ - س) =$ صفر

$\Leftarrow هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$

$هـ'_+(س) = ١ \quad هـ'_+(٢) = ١$

$هـ'_-(س) = -١ \quad هـ'_-(٢) = -١$

$\Leftarrow هـ(٢)$ غير موجودة

$$هـ'(س) = \begin{cases} ١ & س > ٢ \\ -١ & س < ٢ \end{cases}$$

غير موجودة $س = ٢$

مثال ⑤

اذا كان $هـ(س) = |٣ - ٢س|$ فاوجد $هـ'(\frac{٤}{٣})$

الحل

عند $س = \frac{٤}{٣}$ التعويض موجب

$\Leftarrow هـ(س) = ٣ - ٢س$

$هـ'(س) = -٢ \Leftarrow هـ'(\frac{٤}{٣}) = -٢$

مثال ⑥

$هـ(س) = ٢س|س|$ اوجد $هـ'(س)$ ثم اوجد $هـ'(٠)$ ؟

الحل

$|س|$

	$س$	$-س$
	−	+
	٠	

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢س^٢ & س \geq ٠ \\ -٢س^٢ & س < ٠ \end{cases}$$

$هـ(٠) =$ صفر $\Rightarrow$ لها $هـ'(س) =$ صفر $\Leftarrow$ لها $هـ'(س) =$ صفر

متصل عند $س = ٠$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٤س & س > ٠ \\ \text{صفر} & س = ٠ \\ -٤س & س < ٠ \end{cases}$$

$هـ'_+(٠) = ٠ \quad هـ'_-(٠) =$ صفر

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (٧)

$ه(س) = س^{٧} |س^{٢}|$ حيث $ه(١)$

الحل

$ه(س) = س^{٧} \times س^{٢}$ لأن $|س^{٢}| = س^{٢}$

$ه(س) = س^{٩}$

$ه'(س) = ٩ س^{٨}$ $\quad ه'(١) = ٩$

مثال (٨)

$ه(س) = |س - ٢| - |س|$ بين ان $ه'(٠)$ غير موجودة

الحل

$|س - ٢|$: $س - ٢$ عند $س = ٢$

$|س|$: $-س$ عند $س = ٠$

$|س - ٢| - |س|$: -٢ ، $-٢س + ٢$ ، ٢ عند ٠ و ٢

$$ه(س) = \begin{cases} ٢ & س \le ٠ \\ -٢س + ٢ & ٠ < س < ٢ \\ -٢ & س \ge ٢ \end{cases}$$

$ه(٠) = ٢$ $\quad$ $ه'_{+}(٠) = -٢ + ٠ = -٢$

$ه'_{-}(٠) = ٠$ $\quad$ $ه'_{+}(٠) \neq ه'_{-}(٠)$ $\quad$ $ه$ غير قابلة للاشتقاق عند $س = ٠$

$ه'_{-}(٢) = ٠$ $\quad$ $ه'_{+}(٢) = ٠$ $\quad$ $ه'(٢) = ٠$

$ه$ قابلة للاشتقاق عند $س = ٢$

$$ه'(س) = \begin{cases} ٠ & س < ٠ \\ -٢ & ٠ < س < ٢ \\ ٠ & س > ٢ \end{cases}$$

$ه'(س)$ غير موجودة $\quad س = ٠ ، ٢$

مثال (٩) س ٤ فرع (ج) الكتاب ص ١١٩

إذا كانت $ص = \dfrac{|س^{٢} - ٤س + ٣|}{س(س - ١)}$

$س \in [٠ ، ٤]$ أوجد $\dfrac{د ص}{د س}$ ؟

الحل

$س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠ \quad (س - ٣)(س - ١) = ٠$

$س = ٣ ، س = ١$

	٠		١		٣		٤
$س^{٢} - ٤س + ٣$	$+$	$+$	٠	$-$	٠	$+$	$+$

$$ص = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٤س + ٣}{س(س - ١)} & ٠ < س \le ٣ \\ \dfrac{-(س^{٢} - ٤س + ٣)}{س(س - ١)} & ٣ \le س < ٤ \end{cases}$$

$$ص = \begin{cases} \dfrac{(س - ٣)(س - ١)}{س(س - ١)} & ٠ < س \le ٣ \\ -\dfrac{(س - ٣)(س - ١)}{س(س - ١)} & ٣ \le س < ٤ \end{cases}$$

$$ص = \begin{cases} \dfrac{س - ٣}{س} & ٠ < س \le ٣ \\ -\dfrac{س - ٣}{س} & ٣ \le س < ٤ \end{cases}$$

$ه'(٤)$ غير موجودة لأنها طرف فترة يتبع الكل

مكتبة الوسام
الوسام: ناجح الجمزاوي

$هـ(٣) = صفر$

$\lim_{س \to ٣^+} \frac{س - ٣}{س} = صفر$ ، $\lim_{س \to ٣^-} \frac{س + ٣}{س} = صفر$

$\therefore \lim_{س \to ٣} هـ(س) = هـ(٣) = صفر$

$\therefore هـ$ متصل عند $س = ٣$

$\frac{د ص}{د س} = \begin{cases} \frac{س ٢ - ١ - (س + ٣)(١ ٢)}{س^٢} & ١ د س د ٣ \\ \frac{س ١٢ - (س - ٣)(١ ٢)}{س^٢} & ٣ د س د ٤ \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{-٣}{س^٢} & ١ د س د ٣ \\ \frac{٣}{س^٢} & ٣ د س د ٤ \\ \text{غير موجودة} & س = ٣ \end{cases}$

$هـ'_+(٣) = \frac{٣}{٩}$ ، $هـ'_-(٣) = \frac{-٣}{٩}$

$\therefore هـ'(٣)$ غير موجودة

مثال (١٠)

$هـ(س) = |س^٢ - ٥س + ٦| - \sqrt{س^٢ - ٦س + ٩}$

اوجد $هـ'(١)$ ؟

الحل

$هـ(س) = |س^٢ - ٥س + ٦| - \sqrt{(س - ٣)^٢}$

$= |س^٢ - ٥س + ٦| - |س - ٣|$

عند $س = ١$

$\therefore هـ(س) = س^٢ - ٥س + ٦ - (-س + ٣)$

$= س^٢ - ٥س + ٦ + س - ٣$

$= س^٢ - ٤س + ٣$

$هـ'(س) = ٢س - ٤$

$هـ'(١) = ٢ - ٤ = -٢$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مشتقة اقتران أكبر عدد صحيح

① لإيجاد مشتقة اقتران يتضمن أكبر عدد صحيح عند نقطة نعوض فنحصل على احدى الحالتين

② التعويض كسر، نأخذ صحيح هذا الكسر، ثم نشتقه

③ التعويض عدد صحيح نعيد التعريف ونبحث في الاتصال والاشتقاقية

④ اذا طلب ق'(س) بشكل عام نعيد التعريف ونبحث في الاتصال والاشتقاقية

مثال ①

ق(س) = ٢س^{٢} + [٢س + ١] س
اوجد ق'(١و٢)

الحل

عند س = ١و٢ ← ٢س + ١ = ٢(١و٢) + ١ = ٣و٤ = [٣و٤] = ٣

نعوضها بدل [٢س + ١]

← ق(س) = ٢س^{٢} + ٣س
ق'(س) = ٤س + ٣
ق'(١و٢) = ٤(١و٢) + ٣
= ٨و٧

مثال ②

ق(س) = ٣س^{٢} |س + ٢| − ٥س [س − ٣]
اوجد ق'(١و٥)

الحل

عند س = ١و٥ ← |س + ٢| = س + ٢
التعويض موجب
[س − ٣] = [١و٥ − ٣] = [−١و٥] = −٢

← ق(س) = ٣س^{٢}(س + ٢) − ٥س(−٢)
= ٣س^{٣} + ٦س^{٢} + ١٠س

ق'(س) = ٩س^{٢} + ١٢س + ١٠
ق'(١و٥) = ٩(١و٥)^{٢} + ١٢(١و٥) + ١٠

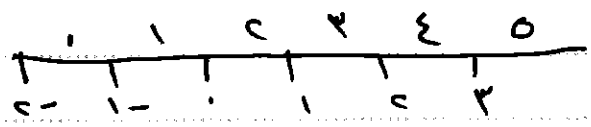
مكتبة الوفاء
ALWEFAA
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ③

اذا كان هـ(س) = [س + ٢] ، س ∈ [٠ ، ٣]
اوجد هـ (س) ؟

الحل

س = -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ طول الدرجة = ١



هـ(س) = { ٢ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ٣ ، ١ ≤ س < ٢ ؛ ٤ ، ٢ ≤ س < ٣ ؛ ٥ ، س = ٣ }

هـ(١) = ٣ ، نهـ هـ(س) = ٣ ، نهـ هـ(س) = ٢
س → ١⁻ ، س → ١⁺ ، نهـ هـ(س) = ٢
س → ١

نهـ هـ(س) غير موجودة ← هـ غير متصل عند س = ٢
س → ١

هـ(١) ، هـ(٢) غير موجودة
هـ(٠) ، هـ(٣) غير موجودة اطراف فترة

هـ(س) = { صفر ، ٠ ≤ س < ١ ؛ صفر ، ١ ≤ س < ٢ ؛ صفر ، ٢ ≤ س < ٣ ؛ غير موجودة ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

ملاحظة هامة

الأقتران أكبر عدد صحيح اذا كان لوحدة فقط فان فستقته إما صفر أو غير موجودة

١. اذا كان ناتج التعويض عدد صحيح فان هـ غير موجودة

٢. اذا كان ناتج التعويض كسر فان هـ = صفر

مثال ④

هـ(س) = (٣س + [س]) / |س - ١| ، هـ(١٫٥) = ؟

الحل

عند س = ١٫٥ ← [١٫٥] = ١

|١٫٥ - ١| موجبة

هـ(س) = (٣س + ١) / (١ - س)

هـ(س) = (٣(١ + س) - ٢(١ - س)) / (١ - س)^٢

هـ(١٫٥) = (٣(١ + ١٫٥) - ٢(١ - ١٫٥)) / (١ - ١٫٥)^٢

= ٥ / ٤

مثال ⑤

اذا كان $ق(س) = [س+٧] - [س] + |٤س|$
حيث $س \in (-٥٫٥ - ١)$ جد $ق'(-٣)$

الحل

$ق(س) = [س] + ٧ - [س] + |٤س|$
$ق(س) = ٧ + |٤س|$
عند $س = -٣$ التعويض سالب

$ق(س) = ٧ - ٤س$
$ق'(س) = -٤ \leftarrow ق'(-٣) = -٤$

مثال ⑥

$$ق(س) = \left| \frac{س^٢ - ٣}{١ - س} \right|$$

جد $ق'(٢)$

الحل

عند $س = ٢$
$|٤ - ٣|$ التعويض موجب
$|١ - س|$ التعويض سالب

$$\Rightarrow ق(س) = \frac{س^٢ - ٣}{-س + ١}$$

$$ق'(س) = \frac{(-١)(٢س) - (س^٢ - ٣)(-١)}{(-س + ١)^٢}$$

$$ق'(٢) = \frac{-٤ + ١}{١} = -٣$$

مثال ⑦

$$ق(س) = \frac{|(٤س + ٥)(س^٣ + ١)|}{[س + ٦٫٥ + ٠]}$$

جد $ق'(٠)$

الحل

عند $س = ٠$ التعويض في $|س^٣ + ١|$ موجب
$[٠ + ٦٫٥] = ١$

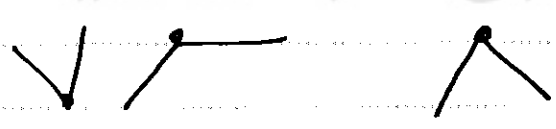
$$ق(س) = \frac{(٤س + ٥)(س^٣ + ١)}{١}$$

$ق(س) = ٤س^٤ + ٥س^٣ + ٤س + ٥$
$ق'(س) = ١٦س^٣ + ١٥س^٢ + ٤$
$ق'(٠) = ٠ + ٠ + ٤ = ٤$

ملاحظة هامة

$ق(س)$ تكون غير موجودة في حالة $ق(س)$ عند الحالات التالية

① اطراف الفترات المغلقة
② عند نقط الانفصال ○ للدوائر
③ عند الرؤوس المدببة



مكتبة العلم AWESAM العلم ناجح الجمزاوي

مثال (٨)

$$ق(س) = \frac{|س^{٢} + ٢|}{[س + ٢ ، ٥ ،]} + \frac{[س - ٣ ، ٥ ،]}{س^{٢}}$$

جد ق' (٢)

الحل

عند س = ٢

$|س^{٢} + ٢| = س^{٢} + ٢$ لتعويض موجب

$[س + ٢ ، ٥ ،] = [٢ + ٢ ، ٥ ،] = ٢$

$[٢ - ٣ ، ٥ ،] = [-١ ، ٥ ،] = ١$

$$\Leftarrow ق(س) = \frac{س^{٢} + ٢}{٢} + \frac{١}{س^{٢}}$$

$$ق'(س) = \frac{٢ س}{٢} - \frac{٢ \times ١ \times س}{س^{٤}}$$

$$= س - \frac{٢}{س^{٣}}$$

$$ق'(٢) = ٢ - \frac{٢}{٨}$$

$$= ٢ - \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{٨}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{٧}{٤}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص١١٣

① $ه(س) = (٤س^٢ - ١)(٧س^٣ + س)$
$= ٢٨س^٥ + ٤س^٣ - ٧س^٣ - س$

$ه'(س) = ١٤٠س^٤ + ١٢س^٢ - ٢١س^٢ - ١$
$= ١٤٠س^٤ - ٩س^٢ - ١$

② اذا كان
$ه(س) = (٣س^٢ + ٦)(٢س - \frac{١}{٤})$
جد $ه'(س)$

الحل
$ه(س) = ٦س^٣ - \frac{٣}{٤}س^٢ + ١٢س - \frac{٦}{٤}$

$ه'(س) = ١٨س^٢ - \frac{٦}{٤}س + ١٢$

تدريب ② ص١١٤

اذا كان $ص = \frac{٤س + ١}{س^٢ - ٥}$ جد $\frac{د ص}{د س}$

الحل
$ص' = \frac{(س^٢ - ٥) \times ٤ - (٤س + ١) \times ٢س}{(س^٢ - ٥)^٢}$

تدريب ③ ص١١٥

جد $ه'(س)$ لكل مما يأتي

① $ه(س) = \frac{٥}{س^٣}$

$ه'(س) = \frac{-٥ \times ٣س^٢}{س^٦} = \frac{-١٥}{س^٤}$

② $ه(س) = \frac{٧ - س^٢}{س^٣}$

$ه'(س) = \frac{س^٣ \times -٢س - (٧ - س^٢) \times ٣س^٢}{(س^٣)^٢}$

تدريب ④ ص١١٨

$ه(س) = \begin{cases} \frac{٢}{س} & س < ١ \\ س + ١ & س \geq ١ \end{cases}$

جد $ه'(س)$

الحل
نبحث اتصال عند $س = ١$
$ه(١) = ٢$ ، $\lim_{س \to ١^+} ه(س) = ١ + ١ = ٢$ متصل
$\lim_{س \to ١^-} ه(س) = \frac{٢}{١} = ٢$

$ه'(١) = \frac{-٢}{١} = -٢$
$ه'(١) = ١ \leftarrow ه'(١)$ غير موجودة

$ه'(س) = \begin{cases} \frac{-٢}{س^٢} & س < ١ \\ ١ & س > ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \end{cases}$

تمارين ومسائل ص١١٩

س١ جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية

أ) $ص = س^2(1 - ص^3)$

$= س^2 - س^5$

$ص' = 2س - 5س^4$

ب) $ص = 8س^{-5}$

$ص' = -40 س^{-6}$

ج) $ص = (3س^2 - 4س + 1)(6س - 5)$

$ص' = (6س - 4)(6س - 5) + 6(3س^2 - 4س + 1)$

ء) $ص = \frac{س^2}{1 - س}$

$ص' = \frac{(1-س)(2س - 4) - (-1)س^2}{(1-س)^2}$

هـ) $ص = \frac{4س - 5}{3س + 2}$

$ص' = \frac{4(3س+2) - 3(4س - 5)}{(3س+2)^2}$

س٢ جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية

أ) $ص = س(س^2 + 2)(1 - 2س^2)$

الحل

$ص = (س^3 + 2س)(1 - 2س^2)$

$ص' = (س^3 + 2س)(-4س) + (1 - 2س^2)(3س^2 + 2)$

ب) $ص = |س - 1|(س^2 + س + 1)$

الحل

$|س-1|$	$س - 1$	$1 - س$
	1	

$ه(س) = \begin{cases} (س-1)(س^2+س+1) & س \geq 1 \\ (1-س)(س^2+س+1) & س < 1 \end{cases}$

$ه'(س) = \begin{cases} 3س^2 - 1 & س > 1 \\ 1 - 3س^2 & س < 1 \end{cases}$

عند $س = 1$ $ه(1) =$ صفر

$ه'_+(1) = 3 - 1 = 2$ ، $ه'_-(1) = 1 - 3 = -2$

$\because ه'_+(1) \neq ه'_-(1)$ $\therefore$ غير قابل للاشتقاق عند $س = 1$

$ه'(س) = 3س^2 \Rightarrow ه'_+(1) = 3$

$ه'(س) = 1 - 3س^2 \Rightarrow ه'_-(1) = -2$

$\because ه'_+(1) \neq ه'_-(1)$ $\therefore ه'(1)$ غير موجودة

$ه'(س) = \begin{cases} 3س^2 & س > 1 \\ \text{غير موجودة} & س = 1 \\ 1 - 3س^2 & س < 1 \end{cases}$

تابع س٢

د) ص = $\frac{٨ - س + ٣س^{٢}}{٢ - ٩س}$

ص' = $\frac{(٢ - ٩س)(-١ + ٦س) - (٨ - س + ٣س^{٢}) \times -٩}{(٢ - ٩س)^{٢}}$

يجب التبسيط

س٣ اذا كان ل(س) قابلاً للاشتقاق
وكان ل(٣) = -٢ ، ل'(٣) = ٤
فجد هـ'(٣) في كل مما يأتي

م) هـ(س) = ٣س^٢ - ٥ ل(س)

الحل
هـ'(س) = ٦س - ٥ ل'(س)
هـ'(٣) = ٦ × ٣ - ٥ ل'(٣)
= ١٨ - ٥ × ٤
= ١٨ - ٢٠ = -٢

ل) هـ(س) = $\frac{٢س + ١}{ل(س)}$

الحل
هـ'(س) = $\frac{ل(س) \times ٢ - (٢س + ١) \times ل'(س)}{(ل(س))^{٢}}$
هـ'(٣) = $\frac{ل(٣) \times ٢ - (٧) \times ل'(٣)}{(ل(٣))^{٢}}$

هـ'(٣) = $\frac{-٢ \times ٢ - ٧ \times ٤}{(-٢)^{٢}}$

= $\frac{-٤ - ٢٨}{٤} = \frac{-٣٢}{٤} = -٨$

د) هـ(س) = $\frac{٦}{ل(س)}$

الحل
هـ'(س) = $\frac{-٦ \times ل'(س)}{(ل(س))^{٢}}$
هـ'(٣) = $\frac{-٦ \times ل'(٣)}{(ل(٣))^{٢}}$

= $\frac{-٦ \times ٤}{(-٢)^{٢}} = \frac{-٢٤}{٤} = -٦$

ى) هـ(س) = س^٣ ل(س)

هـ'(س) = س^٣ × ل'(س) + ل(س) × ٣س^٢
هـ'(٣) = ٣^٣ × ل'(٣) + ل(٣) × ٣(٣)^٢
= ٢٧ × ٤ + -٢ × ٢٧
= ١٠٨ - ٥٤ = ٥٤

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

س٤

إذا كان ل(س) ، هـ(س) قابلين للأشتقاق ، وكان ل'(-٣) = -١
ل(-٣) = ١٠ ، هـ(-٣) = ٢
هـ'(-٣) = -٣ جد ق'(-٣) في كل مما يأتي

أ) ق(س) = ٢ ل(س) × هـ(س)

الحل

ق'(س) = ٢ (ل(س) × هـ'(س) + هـ(س) × ل'(س))

= ٢ (ل(-٣) × هـ'(-٣) + هـ(-٣) × ل'(-٣))

= ٢ (١٠ × ٢ + -٣ × -١)

= ٢ (٢٠ + ٣) = ٢ × ٢٣ = ٤٦

ب) ق(س) = $\frac{\text{ل(س)}}{٤ + \text{هـ(س)}}$

الحل

ق'(س) = $\frac{(٤ + \text{هـ(س)}) \times \text{ل'(س)} - \text{ل(س)} \times \text{هـ'(س)}}{(٤ + \text{هـ(س)})^{٢}}$

ق'(-٣) = $\frac{(٤ + \text{هـ(-٣)}) \times \text{ل'(-٣)} - \text{ل(-٣)} \times \text{هـ'(-٣)}}{(٤ + \text{هـ(-٣)})^{٢}}$

= $\frac{(٤ + ٣-) \times ١- - ١٠ \times ٢}{(٤ + ٣-)^{٢}}$

= $\frac{١- - ٢٠}{١^{٢}}$ = -٢١

س٥

جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية عند النقط المبينة إزاء كل منها

أ) ق(س) = $\frac{٣}{\text{س}} - [\![\text{س}]\!]$ س = ١,٢

[١,٢ ، ٢] = [٤ ، ٢] = ٢

ق(س) = $\frac{٣}{\text{س}} - ٢$

ق(س) = $\frac{-٣}{\text{س}^{٢}}$ ⇐ ق'(١,٢) = $\frac{-٣}{(١,٢)^{٢}}$

= $\frac{-٣}{١,٤٤}$

ب) ق(س) = $\frac{٣\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} - ٢}$ س = ٣

ق'(س) = $\frac{(\text{س}^{٢}-٢) \times ٣- - (٣\text{س} - ١) \times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢}-٢)^{٢}}$

ق'(٣) = $\frac{٧ \times ٣- - ٨ \times ٦-}{٧^{٢}}$ = $\frac{٢١+٤٨}{٤٩}$

= $\frac{٧٢}{٤٩}$

جـ) ق(س) = | ١ - س^{٢} | س = -٢

الحل

ناتج التعويض سالب

⇐ ق(س) = -١ + س^{٢}

ق'(س) = ٢ س

ق'(-٢) = ٢ × -٢

= -٤

ALWSAM العلم ناجح الجمزاوي

س٦

اذا كان ل ، م ، هـ اقترانات قابله للاشتقاق عند س ، فاستخدم قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين لإثبات

$\frac{د}{د س}$ (ل(س) م(س) هـ(س)) =

ل(س) م(س) هـ'(س) + ل(س) هـ(س) م'(س) +

م(س) هـ(س) ل'(س)

الحل

$\frac{د}{د س}$ ((ل × م) × هـ)
① ②

$\frac{د}{د(س)}$ (ل × م) × هـ + هـ (ل × م' + م × ل')

= ل × م × هـ' + هـ × ل × م' + هـ × م × ل'

س٧

اذا كان م(س) = هـ(س) = ل(س)

اعتمد على إسقال (٦) لإثبات أن

$\frac{د}{د س}$ (ل(س))^{٣} = ٣ (ل(س))^{٢} × ل'(س)

الحل

$\frac{د}{د س}$ ((ل(س))^{٣})

= ل × ل × ل' + ل × ل × ل' + ل × ل × ل'

= ٣ ل^{٢} × ل'

= ٣ (ل(س))^{٢} × ل'(س)

س٨

اذا كان هـ(س) = $\begin{cases} ٣س^{٢} & س \leq ١ \\ س^{٣}+١ & س > ١ \end{cases}$

فاثبت ان قابلية الاقتران هـ للاشتقاق عند س = ١ ، ثم أكتب قاعدة هـ'(س)

الحل

نبحث الاتصال عند س = ١

هـ(١) = ٣(١)^{٢} = ٣

نهـ(س) = ٣ ، نهـ(س) = ٣
س ← ١$^{+}$ ، س ← ١$^{-}$

متصل عند س = ١

هـ'$_{+}$(س) = ٦ س ⇐ هـ'$_{+}$(١) = ٦

هـ'$_{-}$(س) = ٦ س ⇐ هـ'$_{-}$(١) = ٦

⇐ هـ'(١) = ٦

هـ'(س) = $\begin{cases} ٦س & س \leq ١ \\ ٦س^{٢} & س > ١ \\ ٦ & س = ١ \end{cases}$

س٩

اذا كان هـ(س) = $\int_{س}^{س^{٢}} (س^{٢}+٣س)$ أس

فجد هـ'(س)

الحل

هـ(س) = $\int_{س}^{٠} (س^{٢}+٣س)$ أس + $\int_{٠}^{س^{٢}} (س^{٢}+٣س)$ أس

هـ'(س) = $\begin{cases} -(س^{٢}+٣س) & س < ٠ \\ (س^{٢}+٣س) \times ٢س & س \geq ٠ \end{cases}$

← يتبع الحل

مكتبة العلم ALWESAM للعلم: ناجح الجمزاوي

$$هـ(س) = \begin{cases} -س^3 - 3س^2 & س \le 0 \\ س^3 + 3س^2 & س > 0 \end{cases}$$

$$هـ'(س) = \begin{cases} -3س^2 - 6س & س < 0 \\ 3س^2 + 6س & س > 0 \\ \text{صفر} & س = 0 \end{cases}$$

متصل عند $س = 0$

$هـ'_+(0) = 0 \quad هـ'_-(0) = \text{صفر}$

س١٠

$$هـ(س) = \begin{cases} 3س^2 & س \le 1 \\ 6س + ب & س > 1 \end{cases}$$

قابلاً للاشتقاق عند $س = 1$

جد $ب$ ، $ب$ ؟

الحل

$$هـ'(س) = \begin{cases} 6س & س < 1 \\ ب & س > 1 \end{cases}$$

$هـ'_-(1) = هـ'_+(1)$

$6 \times 1 = ب \Leftarrow ب = 6$

$هـ$ متصل عند $س = 1$

$\lim_{س \to 1^-} هـ(س) = \lim_{س \to 1^+} هـ(س)$

$3 \times 1^2 = 6 \times 1 + ج$

$3 = 6 + ج$

$3 = 6 + ج$

$ج = -3$

عاشر مراجعة ص١٤٨

س٦

اذا كان $هـ(س)$ اقترانًا قابلاً للاشتقاق عند $س = -2$

$هـ(-2) = 1$ ، $هـ'(-2) = 2$

جد $هـ'(-2)$ حيث كل مما يأتي

(أ) $هـ(س) = \frac{هـ(س)}{س}$

الحل

$$هـ'(س) = \frac{س \times هـ'(س) - هـ(س) \times 1}{س^2}$$

$$هـ'(-2) = \frac{-2 \times هـ'(-2) - هـ(-2)}{(-2)^2}$$

$$= 2 - \left(\frac{-2 \times 2 - 1}{4}\right)$$

$$= 2 - \left(\frac{-5}{4}\right) = 2 + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{13}{4}$$

س٩

$ح = \frac{4}{3} \pi نق^3$

$\frac{دح}{دنق} = \frac{4}{3} \pi \times 3 نق^2$

$= 4 \pi نق^2$ = مساحة سطحها

مكتبة العلم ALWESAM العلم: ناجح الجمزاوي

فرع ⑨ السؤال الأول

$ق(س) = |٢ - ٢س|$ فاوجد

$ق'(١)$

الحل

$٢ - ٢س = ٠$ ، $-٢س = -٢$ ، $س = ١$

	<١	$=١$	>١
$٢ - ٢س$	+	٠	−

$ق'(١)$ = صفر

لما $ق(س)$ = صفر ، لما $ق(س) = ٠$

$س \to ١^+$ ، $س \to ١$

حصل عند $س = ١$

$$ق'(س) = \begin{cases} -٢ & س < ١ \\ ٢ & س > ١ \end{cases}$$

$ق'(س)$ = غير موجودة عند $س = ١$

$ق'(١^+) \neq ق'(١^-)$

س اختياري ص ١٥

$$ق(س) = \begin{cases} ٣أس^٢ + بس & س \leq ٢ \\ أس^٢ + ٩بس - ١٢ & س > ٢ \end{cases}$$

جد $أ$ ، $ب$ التي تجعل $ق'(٢)$ موجودة

الحل

$$ق'(س) = \begin{cases} ٦أس + ب & س < ٢ \\ ٢أس + ٩ب & س > ٢ \end{cases}$$

$ق'(٢^+) = ق'(٢^-)$

$٤أ + ٩ب = ١٢أ + ب$

$٨أ - ب = ٠$ ..... ①

لما $أس^٢ + بس = لما أس^٢ + ٩بس - ١٢$

$س \to ٢^-$ ، $س \to ٢^+$

$٤أ + ٢ب = ٤أ + ١٨ب - ١٢$

$١٦ب - ٤أ = ١٢$ ..... ②

$٨أ - ب = ٠$ ×٤

$١٦ب - ٤أ = ١٢$

$٤أ + ٤ب = ٠$

$١٦ب - ٤أ = ١٢$

$١٢ب = ١٢$

$ب = ١ \Leftarrow أ = -١$

مكتبة الإسلام ALISLAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٨) شتوية

اذا كان $هـ(س) = \frac{[ق(س+١)]}{ل(س)}$

$هـ(\frac{١}{٣}) = ٢$ ، $هـ'(\frac{١}{٣}) = -١$

فاوجد قيمة $ل'(\frac{١}{٣})$

الحل

نعوض $س = \frac{١}{٣}$ في $[ق(\frac{١}{٣}+١)] = ١$

$\Leftarrow هـ(س) = \frac{١}{ل(س)}$

$\Leftarrow هـ'(س) = \frac{-١ \times ل'(س)}{(ل(س))^{٢}}$

$\Leftarrow هـ'(\frac{١}{٣}) = \frac{-١ \times ل'(\frac{١}{٣})}{(ل(\frac{١}{٣}))^{٢}}$

لكنه $هـ(\frac{١}{٣}) = \frac{[ق(\frac{١}{٣}+١)]}{ل(\frac{١}{٣})}$

$\Leftarrow ٢ \times ل(\frac{١}{٣}) = ١$

$ل(\frac{١}{٣}) = \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow هـ'(س) = \frac{-ل'(س)}{(ل(س))^{٢}}$

$\Leftarrow هـ'(\frac{١}{٣}) = \frac{-ل'(\frac{١}{٣})}{(ل(\frac{١}{٣}))^{٢}}$

$-١ = \frac{-ل'(\frac{١}{٣})}{(\frac{١}{٢})^{٢}} \Leftarrow ل'(\frac{١}{٣}) = \frac{١}{٤}$

② وزارة (٢٠١٨) صيفية

اذا كان $هـ(س) = \frac{ل(س)}{س^{٢}+١}$

وكان $هـ(٢) = -١$ ، $هـ'(٢) = ٣$

فاوجد $ل'(٢)$ ؟

الحل

$هـ'(س) = \frac{(س^{٢}+١) \times ل'(س) - ل(س) \times ٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

$هـ'(٢) = \frac{٥ \times ل'(٢) - ل(٢) \times ٤}{٢٥}$ ... (١)

لكنه $هـ(٢) = \frac{ل(٢)}{٥} \Leftarrow ل(٢) = ٥ \times -١ = -٥$

نعوضها في (١)

$٣ = \frac{٥ \times ل'(٢) - -٥ \times ٤}{٢٥}$

$٧٥ = ٥ \times ل'(٢) + ٢٠$

$٥٥ = ٥ ل'(٢)$

$\Leftarrow ل'(٢) = ١١$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

③ وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا كان $ه(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+٢ & س<١ \\ ٥ & س=١ \\ ٦س+١ & س>١ \end{cases}$

فجد $ه'(١)$

الحل

نبحث اتصال $ه$ عند $س=١$

$ه(١) = ٥$

$\lim_{س \to ١^{+}} ه(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ١^{-}} ه(س) = ٧$

$\therefore$ غير متصل $\Leftarrow$ $ه'(١)$ غير موجودة

④ وزارة (٢٠٠٩) صيفية

اذا كان $ه(س) = [س] \times |س|$

حيث $س \in (-٣ ، ٢)$ فاوجد

$ه'(-\frac{٥}{٢})$

الحل

$[-\frac{٥}{٢}] = [-٢,٥] = -٣$

$|-\frac{٥}{٢}| = \frac{٥}{٢}$ التعويض سالب $= -س$

$ه(س) = -٣ \times -س = ٣س$

$ه'(س) = ٣$

$ه'(-\frac{٥}{٢}) = ٣$

⑤ وزارة (٢٠١٠) شتوية

اذا كان $ه(س) = [س+٧] - [س] + |س|$

حيث $س \in (-٥ ، -١)$ فجد $ه'(-٣)$

الحل

$ه(س) = [س] + ٧ - [س] + |س|$

$= ٧ + |س|$

بتعويض -٣ في $|س|$ سالب $\Leftarrow$

$ه(س) = ٧ - س$

$ه'(س) = -١$

$ه'(-٣) = -١$

⑥ وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كان $ه(س) = \begin{cases} \frac{س^{٣}-١}{س-١} & س \neq ١ \\ ٣ & س=١ \end{cases}$

فاوجد $ه'(١)$

الحل

$ه(١) = ٣$ ، $\lim_{س \to ١} ه(س) = \lim_{س \to ١} \frac{س^{٣}-١}{س-١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س+١)}{س-١} = ٢$

غير متصل عند $س=١$

$\therefore ه'(١)$ غير موجودة

⑦ وزارة (٢٠١٤) صيفية

① اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٢س^{٢}+ب س-٦ & س \le ٢ \\ ٥س+ب^{٢} & س > ٢ \end{cases}$

قابلاً للاشتقاق عند $س = ٢$

اوجد $ا$ ، $ب$ ؟

الحل

$هـ(س) = \begin{cases} ٢ا س+ب & س \le ٢ \\ ٥ & س > ٢ \end{cases}$

$هـ_{+}(٢) = هـ_{-}(٢)$

$٤ا + ب = ٥$ ---- ①

$هـ$ متصل عند $س = ٢$

$\therefore ٢ا س^{٢}+ب س - ٦ = ٥س+ب^{٢}$

$س \to ٢$

$٤ا+٢ب-٦ = ١٠+ب^{٢}$

$٤ا = ١٦ \Leftarrow ا = ٤$

نعوض في ①

$٤ \times ٤ + ب = ٥$

$١٦ + ب = ٥$

$ب = -١١$

② $هـ(س) = \dfrac{س^{٢}}{ل(س)}$ ، $ل(١) = -٣$ ، $ل'(١) = -٩$ جد $هـ'(١)$

الحل

$هـ'(س) = \dfrac{ل(س) \times ٢س - س^{٢} \times ل'(س)}{(ل(س))^{٢}}$

$هـ'(١) = \dfrac{ل(١) \times ٢ - ١ \times ل'(١)}{(ل(١))^{٢}}$

$= \dfrac{-٣ \times ٢ + ٩}{٩} = \dfrac{٣}{٩} = \dfrac{١}{٣}$

---

⑧ وزارة (٢٠١٣) شتوية

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٢ا س^{٣}-٢ب س & س \ge ١ \\ ٢س^{٢}-٦ب س-٨ & س < ١ \end{cases}$

اقترانا قابلاً للاشتقاق عند $س = ١$

جد قيمة $ا$ ، $ب$

الحل

$هـ(س) = \begin{cases} ٦ا س^{٢}-٢ب & س \ge ١ \\ ٤س-٦ب & س < ١ \end{cases}$

$هـ_{+}(١) = هـ_{-}(١)$

$٦ا - ٢ب = ٤ - ٦ب$

$٦ا + ٤ب = صفر$ ---- ①

$هـ$ متصل عند $س = ١$

$\therefore ٢ا س^{٣}-٢ب س = ٢س^{٢}-٦ب س-٨$

$س \to ١^{+}$ ، $س \to ١^{-}$

$٢ا - ٢ب = ٢ - ٦ب - ٨$

$٤ب = -٨ \Leftarrow ب = -٢$ نعوض في ①

$ا + ٤ = صفر \Leftarrow ا = -٤$

⑨ وزارة (٢٠١٣) صيفية

اذا كان $ق(س) = س\, ق(س) + ١$
فاوجد $ق'(٢)$

الحل

$ق(س) - س\, ق(س) = ١$
$ق(س)(١ - س) = ١$
$\Rightarrow ق(س) = \frac{١}{١-س}$
$ق'(س) = \frac{-١ \times ١}{(١-س)^{٢}}$
$ق'(٢) = \frac{١}{(١-٢)^{٢}} = \frac{١}{١} = ١$

⑩ وزارة (٢٠١٤) شتوية

① اذا كان $ق(س) = \frac{م(س)}{ل(س)(س^{٢}+١)}$
وكان $م(١) = -٢$
$م'(١) = ل(١) = -١$ ، $ق'(١) = ٣$
فجد $ل'(١)$

الحل

$ق'(س) = \frac{ل(س)(س^{٢}+١)\, ٢م'(س) - م(س)[ل(س)\times ٢س + (س^{٢}+١)\times ل'(س)]}{(ل(س)(س^{٢}+١))^{٢}}$
$ق'(١) = \frac{ل(١)\times ٢ \times ٢م'(١) - م(١)[ل(١)\times ٢ + ٢ \times ل'(١)]}{(ل(١)\times ٢)^{٢}}$

$ق'(١) = \frac{-١ \times ٢ \times ٢ - (-٢)(-١ \times ٢ + ٢ \times ل'(١))}{(-١ \times ٢)^{٢}}$

$= \frac{-٤ - ٤ - ٢ل'(١)}{٤} = ٣$
$-٨ - ٢ل'(١) = ١٢$
$-٢ل'(١) = ٢٠$
$ل'(١) = -١٠$

② اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} + ٢س & س < ٢ \\ ٩س^{٢} + ٩س - ١٤ & س \geq ٢ \end{cases}$
وكانت $ق'(٢)$ موجودة فجد ٣ ، $ب$

الحل

$ق(س) = \begin{cases} ٦س + ب & س < ٢ \\ ١٨س + ٩ & س \geq ٢ \end{cases}$

$ق'(٢) = ق'^{+}(٢)$
$٦ \times ٢ + ب = ١٨ \times ٢ + ٩$
$١٢ + ب = ٣٦ + ٩$
$ب = ٣٣ - ١٢ = ٢١$ ... (١)

$ق$ متصل عند $س = ٢$

$\Rightarrow$ يتبع الحل

هنا $أ س^3 + ب س = هنا أ س^2 + 9 ب س - 12$

$س \to 2$ $\quad$ $س \to 2^+$

$8أ + 2ب = 8أ + 18ب - 12$

$16أ - 4ب = 12$ ... (ج)

$8أ - 8ب = 0$ $\quad$ $\times -2$

$16أ - 4ب = 12$

$-16أ + 16ب = 0$

$16أ - 4ب = 12$

$12ب = -12$

$ب = -1$ نعوضها في (١)

$أ + 8 = 0$

$أ = -8 \Leftarrow ب = 1$

---

(١١) وزارة (٢٠١٤) صيفية

$ق(س) = \begin{cases} أ س^2 - ب س & س \le 2 \\ 4 - ب س^3 + أ س & س > 2 \end{cases}$

وكانت $ق(2)$ موجودة أوجد $أ ، ب$

الحل

$ق(س) = \begin{cases} 2أ س - ب & س > 2 \\ -3ب س^2 + أ & س > 2 \end{cases}$

$ق(2^+) = ق(2^-)$

$-3ب(2)^2 + أ = 2أ(2) - ب$

$-12ب + أ = 4أ - ب$

$0 = أ - 11ب$ ... (١)

$ق$ متصل عند $س = 2$

هنا $أ س^2 - ب س = هنا 4 - ب س^3 + أ س$

$س \to 2^-$ $\quad$ $س \to 2^+$

$4أ - 2ب = 4 - 8ب + 2أ$

$2أ + 6ب = 4$ ... (٢)

$0 = أ - 11ب$ $\quad$ $\times -2$

$4 = 2أ + 6ب$

$-2أ + 22ب = 0$

$4 = 2أ + 6ب$

$28ب = 4$

$ب = \frac{1}{7}$ نعوضها في (١)

$0 = أ - \frac{11}{7}$

$أ = \frac{11}{7}$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

③ اذا كان $ق(س) = \frac{ل(س)}{س\ هـ(س)}$

وكان $ق'(٢) = ل(٢) = -٣$

$ل'(٢) = هـ(٢) = ١$ ، $هـ'(٢)$

الكل

$$ق'(س) = \frac{س\ هـ(س)\ ل'(س) - ل(س)[س\ هـ'(س) + هـ(س)\ ١]}{(س\ هـ(س))^{٢}}$$

$$ق'(٢) = \frac{٢ \times هـ(٢) \times ل'(٢) - ل(٢)[٢ \times هـ'(٢) + هـ(٢)]}{(٢\ هـ(٢))^{٢}}$$

$$ق'(٢) = \frac{٢ \times ١ \times ١ - (-٣)[٢\ هـ'(٢) + ١]}{(٢ \times ١)^{٢}} = \frac{٣}{٤}$$

$$-١٢ = ٢ + ٣[٢\ هـ'(٢) + ١]$$

$$-١٢ = ٢ + ٦\ هـ'(٢) + ٣$$

$$-١٢ - ٥ = ٦\ هـ'(٢)$$

$$هـ'(٢) = \frac{-١٧}{٦}$$

⑫ وزارة (٢٠١٥) شتوية

①

اثبت انه اذا كان $ق(س) = س^{ن}$

حيث $س \neq ٠$ ، ن عدد صحيح سالب

فان $ق'(س) = ن\ س^{ن-١}$

الكل صفحة (٨٦) الدوسيه

② لتكن $ق(س) = س\ |جا س|$

$س \in [٠ ، ٢\pi]$ اثبت قابلية ق للاشتقاق عند $س = \pi$

الكل $|جا س|$

	٠		π		٢π
جا س		$-$	٠	$+$	

$$ق(س) = \begin{cases} س\ جا س & ، ٠ \leq س \leq \pi \\ -س\ جا س & ، \pi \leq س \leq ٢\pi \end{cases}$$

$هـ(س) = ق(س) - ق(\pi) = س\ جا س$

$س \to \pi^{+}$ $\Leftarrow$ $هـ(س) = -س\ جا س$

$س \to \pi^{-}$ $\Leftarrow$ $هـ(س) = صفر$

$ق'(\pi) = صفر$ $\Leftarrow$ ق قابلة للاشتقاق عند $س = \pi$

$$ق'(س) = \begin{cases} س\ جتا س + جا س & ، ٠ < س < \pi \\ -(س\ جتا س + جا س) & ، \pi < س < ٢\pi \end{cases}$$

$ق'(\pi^{+}) = -(\pi\ جتا \pi + جا \pi) = \pi$

$ق'(\pi^{-}) = \pi\ جتا \pi + جا \pi = -\pi$

$\Leftarrow ق'(\pi)$ غير موجودة

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٣) وزارة (٢٠١٥) صيفية

اذا كانت ص = $\frac{|س^2 - ٥س + ٤|}{س(س-١)}$

س ∈ [٥،١]

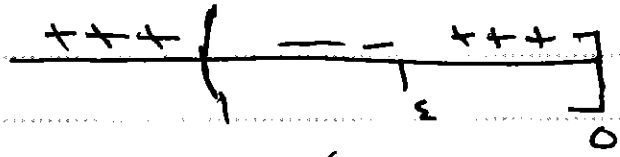
اوجد $\frac{د ص}{د س}$ ؟

الحل

$|س^2 - ٥س + ٤|$

$س^2 - ٥س + ٤ = (س-٤)(س-١)$

س = ٤ ، س = ١



$ه(س) = \begin{cases} \frac{-(س-٤)(س-١)}{س(س-١)} & ١ < س < ٤ \\ \frac{(س-٤)(س-١)}{س(س-١)} & ٤ \le س < ٥ \end{cases}$

$ه(س) = \begin{cases} \frac{-س+٤}{س} & ١ < س < ٤ \\ \frac{س-٤}{س} & ٤ \le س < ٥ \end{cases}$

عند س = ٤ ، ه(٤) = صفر

$\lim_{س \to ٤^+} \frac{ه(س) - ه(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{ه(س) - ه(٤)}{س - ٤}$ = صفر

ه قابل للاشتقاق عند س = ٤

ه′(س) = $\frac{س^2 - ١ - (س+٤)(٢س)}{س^2}$

= $\frac{-س^2 + س + ٤}{س^2} = \frac{-٤}{س^2}$

ه′(٤) = $\frac{-٤}{١٦} = \frac{-١}{٤}$

ه′(س) = $\frac{٢س^2 - ١ - (س-٤)(٢س)}{س^2}$

= $\frac{س^2 - س + ٤}{س^2} = \frac{٤}{س^2}$

ه′(٤) = $\frac{٤}{١٦} = \frac{١}{٤}$

ه′(٤) غير موجودة

$ه′(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{س^2} & ١ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} & س = ٤ \\ \frac{٤}{س^2} & ٤ < س < ٥ \end{cases}$

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ: ناجح الجمزاوي

(١٤) وزارة (٢٠١٦) صيفية

اذا كان $\text{هـ}(س) = \begin{cases} ٢أس^{٢} + ٤ب س - ٨ & س < ١ \\ ٣أس^{٢} - ب س + ٢ & س \geq ١ \end{cases}$

وكانت $\text{هـ}'(١)$ موجودة ، فجد أ ، ب ؟

الحل

$\text{هـ}'(س) = \begin{cases} ٢أس + ٤ب & س < ١ \\ ٣أس^{٢} - ب & س > ١ \end{cases}$

$\text{هـ}'_{+}(١) = \text{هـ}'_{-}(١)$

$٢أ + ٤ب = ٣أ - ب$

$أ - ٥ب = ٠$ ---- (١)

هـ متصل عند س = ١

$\therefore ٢أ + ٤ب - ٨ = أ + ٢ب + ٢$

$س \to ١^{+}$

$\therefore ٣أ - ب + ٢ = أ + ٢ب + ٢$

$س \to ١^{-}$

$\therefore ٢أ - ٣ب + ٦ = ٠$

$٥ب = ١٠$ $\boxed{ب = ٢}$

بتعويضها في (١)

$أ - ١٠ = ٠$

$أ = ١٠$

مكتبة الوسام ALWESAM
للعلم: ناجح الجمزاوي

ورقة عمل
قواعد الاشتقاق

① اذا كان $ق(س) = ٣س - \frac{م}{س}$
وكان $ق'(٣) = ٢$ أوجد م ؟
$م = -٩$

② اذا كان $هـ(س) = س\ ق(س)$
وكان $ق(٢) = -١$ ، $هـ'(٢) = ٥$
جد $ق'(٢)$
$ق'(٢) = ٣$

③ اذا كان $ق(س) = \frac{س\ هـ(س)}{س+٢}$ ، $س \neq -٢$
وكان $هـ(١) = -٢$ ، $هـ'(١) = ٣$
جد $ق'(١)$ ؟؟ $ق'(١) = \frac{٥}{٩}$

④ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} & س \leq ٢ \\ ٤س & س > ٢ \end{cases}$
اوجد $ق'(٢)$
ج : غير موجودة

⑤ اذا كان $ق(س) = س + [س]$ ، $س \in [-٢ ، ٠]$
فاوجد $ق'(-١)$
$ق'(-١) = ٢$

⑥ $ق(س) = \frac{[س]}{س}$ حيث $س \in [-٢ ، -١)$
اوجد $ق'(س)$ الجواب $(\frac{-٢}{س^{٢}})$

⑦ $ق(س) = \frac{٥}{هـ(س)}$ ، $هـ'(٣) = ٤$
$ق(٣) = ١$ ، اوجد $ق'(٣)$ ؟
الجواب $\frac{-٤}{٥}$

⑧ $ق(س) = [١-س] \times |١-س|$
ادرس مابليه $ق(س)$ للاشتقاق عند $س = ١$

⑨ $ق(س) = \begin{cases} س^{٣} - ٢س + ١٠ & س < ١ \\ ٢س^{٢} + ٢ & س \geq ١ \end{cases}$
وكان $هـ(١) = ٤$ ، $هـ'(١) = ٨$
ادرس مابليه $ق(س)$ للاشتقاق عند $س = ١$

⑩ اذا كان $ل(س) \times هـ(س) = م$
حيث م ثابت وكان $هـ'(٢) = ٣$
$هـ(٢) = -٢$ ، $م = ٢$ جد $ل'(٢)$
$ج = \frac{-٣}{٤}$

⑪ اذا كان $ق(س) = س|س^{٢} - ٦س + ٩|$
تعريف المشتقة ادرس مابليه $ق(س)$ للاشتقاق عند $س = ٣$

(١٢) اذا كان $ق(س) = |س^{٢} - ٢ب س - ٣|$ غير قابل للاشتقاق عند النقطة $(-١، ق(-١))$ فأوجد قيمة $ب$

$ب = ٢$

---

(١٣) اذا كان
$ق(س) = |س^{٢} - ٣س + ٢| [٣س + ٥٫٠]$

اوجد $ق'(٣)$

---

(١٤) $ق(س) = \begin{cases} |س - ٢| & ١ \le س < ٤ \\ س [٢س] & ٤ \le س < ٥ \end{cases}$

اوجد $ق'(س)$

---

(١٥) اذا كان $ق(س) = |٣ - س|$

اوجد $(ق^{٢})'(١)$

---

(١٦) $ق(س) = \begin{cases} |س - ١٣| & س \ge ٣ \\ [س] & ١ < س < ٣ \\ س^{٢} & س \le ١ \end{cases}$

اوجد $ق'(س)$

---

(١٧) بدأ شخص ينفخ بالون على شكل كرة، وجد قاعدة عامة لحساب معدل تغير حجم البالون بالنسبة الى نصف قطرة، ثم جد معدل تغير الحجم عندما $نق = ١٠$ سم

---

(١٨) $ق(س) = \begin{cases} س^{٣} - ٣س + ٤ & -٢ \le س \le ١ \\ [٢س] & ١ < س < ٢ \\ |٧ - ٢س| & ٢ \le س \le ٦ \end{cases}$

جد $ق(س)$ لكل $س \in [-٢، ٦]$

---

(١٩) اذا كان $ق(س) = \dfrac{|س^{٢} - ٥س + ٦|}{س(س - ٢)}$

$س \in (٢، ٦]$

اوجد $ق'(س)$.

---

(٢٠) اذا كان

$ق(س) = \begin{cases} س^{٣} + ب س & س \le ١ \\ ا س^{٢} + ٣س & س > ١ \end{cases}$

قابلاً للاشتقاق عند $س = ١$

جد قيمة $ب$، $ا$.

$ب = ٣$، $ا = ١$

---

(٢١) $ق(س) = [س + ٢] - [س] + \dfrac{١}{س}$

جد $ق'(١)$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٢٢) اذا كان

$$هـ(س) = \frac{[\![[\![\frac{س}{٢}]\!]]\!]}{٥ - س}$$

اوجد هـ(٣).

---

(٢٣) اسطوانه دائريه قائمة ارتفاعها يساوي ٤ امثال طول قطر قاعدتها جد معدل التغير في حجمها بالنسبة لارتفاعها عندما تكون مساحة القاعدة = ٩π سم٢ ؟

(٢٤)
$$هـ(س) = \begin{cases} ٩س^{٢} - ٦س + ٥ & س \leq ١ \\ ٣س^{٢} + ٢س + ١ & س > ١ \end{cases}$$

وكانت هـ'(١) موجودة فاوجد ٩، ب ؟

(٢٥) $هـ(س) = |س^{٢} + ٥س| [\![\frac{س}{٢} + ٤]\!]$

اوجد هـ'(١)

(٢٦) اذا كان $هـ(س) = \frac{[\![٣س + ١]\!]}{س \, ه(س) + ٢س}$

وكانت ه(١) = ١ ، ه'(١) = ٢

(٢٧) اذا كان $هـ(س) = \frac{س^{٢} \, ه(س)}{ل(س) + ٤س^{٢}}$

وكان ه(١) = ل'(١) = ٢

ل(١) = هـ'(١) = ٣

فاوجد هـ'(١)

(٢٨)
$$هـ(س) = \begin{cases} ٩س^{٢} - ٦س + ٥ & س \leq ١ \\ ٣س^{٢} + ٢س + ١ & س > ١ \end{cases}$$

وكانت هـ'(١) موجودة فاوجد قيمة ٩، ب ؟

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس السادس

المشتقات العليا

اذا كان ص = ق(س) فان المشتقه الأولى = ق'(س) = ص' = $\frac{د ص}{د س}$

المشتقة الثانيه = ق''(س) = ص'' = $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$

المشتقة الثالثه = ق'''(س) = ص''' = $\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}}$

$= \frac{د^{٣}(ق(س))}{د س^{٣}}$

أو يمكن ق'''(س) = $ق^{(٣)}$(س)

ملاحظه

اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجه ن على الصوره

ق(س) = $أ س^{ن}$ + ... ـ ـ ـ

فان المشتقة النونيه = أ ن !

اما المشتقه رقم (ن + ١) وما بعدها = صفر

مثال ①

ق(س) = $س^{٦} - ٤ س^{٥} + ٣ س^{٢} - ٥ س + ٦$

اوجد $ق^{(٤)}$(س) ؟

الحل

ق'(س) = $٦ س^{٥} - ٢٠ س^{٤} + ٦ س - ٥$

ق''(س) = $٣٠ س^{٤} - ٨٠ س^{٣} + ٦$

ق'''(س) = $١٢٠ س^{٣} - ٢٤٠ س^{٢}$

$ق^{(٤)}$(س) = $٣٦٠ س^{٢} - ٤٨٠ س$

مثال ②

ق(س) = $\frac{١}{س^{٣}}$ اوجد $ق^{(٤)}$(١)

الحل

ق(س) = $س^{-٣}$

ق'(س) = $-٣ س^{-٤}$

ق''(س) = $+١٢ س^{-٥}$

ق'''(س) = $-٦٠ س^{-٦}$

$ق^{(٤)}$(س) = $+٣٦٠ س^{-٧}$ = $\frac{٣٦٠}{س^{٧}}$

$ق^{(٤)}$(١) = ٣٦٠

مكتبة العلم ALWESAM الاستاذ ناجح الجمزاوي

مثال ③

$ه(س) = (س^2 - ٣)(٢س + ٤)$ جد $ه'(٢)$

الحل

$ه(س) = ٢س^3 + ٤س^2 - ٦س - ١٢$

$ه'(س) = ٦س^2 + ٨س - ٦$

$ه''(س) = ١٢س + ٨$

$ه''(٢) = ١٢ \times ٢ + ٨ = ٢٤ + ٨$

$= ٣٢$

مثال ④

$ه(س) = ٢س^3 + ٣س^2 - ٢$ اوجد

① هنا $\frac{ه'(س+هـ) - ه'(س)}{هـ}$ هـ ← .

② هنا $\frac{هـ}{ه''(هـ - ١) - ه''(-١)}$ هـ ← .

الحل

① بما $\frac{ه'(س+هـ) - ه'(س)}{هـ} = ه''(س)$ هـ ← .

$ه'(س) = ٦س^2 + ٣$

$ه''(س) = ١٢س$ ، $ه''(س) = ١٢$

② هنا $\frac{١}{\frac{ه''(هـ+-١) - ه''(-١)}{هـ}}$ هـ ← .

$= \frac{١}{ه''(-١)} = \frac{١}{١٢}$

مثال ⑤

اذا كان $ه(س) = \frac{س^2}{س}$ اثبت أن

$ه'(١) = ٤ \times ه''(٢)$

الحل

$ه'(س) = \frac{س^2}{س^2}$

$ه''(س) = \frac{-٢ \times ٤ س}{(س^2)^2} = \frac{٤ س}{س^4} = \frac{٤}{س^3}$

$ه'(١) = \frac{٤}{١} = ٤$

$٤ \times ه''(٢) = ٤ \times \frac{٤}{٨} = \frac{١٦}{٨} = ٢$

$\leftarrow ه'(١) = ٤ \times ه''(٢)$

$٤ = ٤$

مثال ⑥

اذا كان $ه(س) = س^3$ ، $هـ(١) = -١$

$هـ'(١) = ٢$ فجد $(ه \cdot هـ)'(١)$

الحل

$(ه \cdot هـ)'(١) = ه'(١) \times هـ(١) + هـ(١) \times ه''(١)$

$ه'(س) = ٣س^2 \Leftarrow ه''(س) = ٦س$

$ه'(١) = ٣$ $ه''(١) = ٦$

$(ه \cdot هـ)'(١) = ٣ \times ٢ + -١ \times ٦$

$= ٦ - ٦$

$=$ صفر

مكتبة العلم ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٧)

اذا كان $هـ(٤) = ٥$ ، $هـ'(٤) = -١$
$هـ''(٤) = ٢$ فما قيمة $\left(\frac{هـ}{هـ'}\right)'(٤)$

الحل

$$\left(\frac{هـ}{هـ'}\right)'(٤) = \frac{هـ'(٤)\,هـ'(٤) - هـ(٤)\,هـ''(٤)}{(هـ'(٤))^{٢}}$$

$$= \frac{(-١)(-١) - ٥(٢)}{(-١)^{٢}} = -٩$$

مثال (٨)

اذا كان $هـ(س) = س^{ن+٢}$ ، ن عدد صحيح
وكانت $هـ^{(٣)}(س) = ١٢٠\, س^{ن-١}$ أوجد
قيمة ن ؟

الحل

$هـ(س) = (ن+٢)\, س^{ن+١}$

$هـ'(س) = (ن+٢)(ن+١)\, س^{ن}$

$هـ''(س) = (ن+٢)(ن+١)(ن)\, س^{ن-١}$

$هـ^{(٣)}(س) = (ن+٢)(ن+١)(ن)(ن-١)\, س^{ن-٢}$

$\Leftarrow (ن+٢)(ن+١)(ن) = ١٢٠$

$٧ \times ٦ \times ٥ = ١٢٠$

$ن = ٥$

١٢٠ عداد متتالية حاصل ضربها = ١٢٠

$١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩$

مثال (٩)

اذا كان $هـ(س) = ٢س^{٣} - \frac{١}{٢}س^{٢} + ٤$
وكانت $هـ''(١) = ١١$ فجد الثابت ٢ ؟

الحل

$هـ'(س) = ٦٢س^{٢} - س$

$هـ''(س) = ١٢٢س - ١$

$هـ''(١) = ١١$

$١٢٢ - ١ = ١١ \Leftarrow ١٢٢ = ١٢$

$٢ = ٢ \Leftarrow$

مثال (١٠)

جد قاعدة كثير حدود من الدرجة الثانية
بحيث يكون $هـ(٠) = -١$ ، $هـ'(١) = ٠$
$هـ''(١) = ٢$

الحل

نفرض ان $هـ(س) = ٢س^{٢} + ب س + ٥$

$هـ(٠) = -١ \leftarrow -١ = ٠ + ٠ + ٥$

$\leftarrow ٥ = -١$

$هـ'(س) = ٢٢س + ب$

$هـ'(١) = ٢٢ + ب = ٠ \quad \cdots (١)$

$هـ''(س) = ٢٢ \Leftarrow هـ''(١) = ٢$

$٢٢ = ٢ \leftarrow ٢ = ٢$

نعوضها في (١)

$٢ \times ٢ + ب = ٠$

$ب = -٤$

$هـ(س) = س^{٢} - ٤س - ١$

مثال (١١)

اذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{ن} - ٢^{ن}}{س - ٢} = ١٢$

فما قيمة ن ؟

الحل

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{ن} - ٢^{ن}}{س - ٢} = |(س^{ن})'|_{س=٢} = ١٢$

$ن س^{ن-١} |_{س=٢} = ن(٢)^{ن-١} = ١٢$

$ن(٢)^{ن-١} = ٣ \times ٢^{٢}$

$ن = ٣$

مثال (١٢)

$ه(س) = |س^{٢} - ١| \cdot ه^{(٣)}(س)$

الحل

$س^{٢} - ١ = ٠$

	$س^{٢}-١$		$١-س^{٢}$		$س^{٢}-١$
	+		−		+
		-١		$+١$	

$ه(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & س \in]-\infty, -١] \cup [١, \infty[\\ ١ - س^{٢} & س \in]-١, ١[\end{cases}$

$ه(٠) = ٠$

$\lim_{س \to ٠^{+}} ه(س) = \lim_{س \to ٠^{-}} ه(س) =$ صفر

$س \to ٠$

ه قابل للاشتقاق عند $س = ٠$

$ه'(س) = \begin{cases} ٢س & س \in]-\infty, -١] \cup [١, \infty[\\ -٢س & س \in]-١, ١[\\ \text{غير موجودة} & س = -١ ، ١ \end{cases}$

ملاحظة

اذا كانت $ه'(أ)$ غير موجودة فان $ه''(أ)$، $ه^{(٣)}(أ)$ ---- غير موجودة دون حل

$ه''(س) = \begin{cases} ٢ & س \in]-\infty, -١] \cup [١, \infty[\\ -٢ & س \in]-١, ١[\\ \text{غير موجودة} & س = -١ ، ١ \end{cases}$

$ه^{(٣)}(س) = \begin{cases} \text{صفر} & س \in]-\infty, -١] \cup [١, \infty[\\ \text{صفر} & س \in]-١, ١[\\ \text{غير موجودة} & س = -١ ، ١ \end{cases}$

مثال (١٣)

$ه(س) = |س^{٣}| \cdot ه^{(٠)}$، $ه'(٠)$

الحل

$|س^{٣}| \to س^{٣} = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$\frac{س^{٣} - ٠^{٣}}{س - ٠}$

$ه(س) = \begin{cases} -س^{٣} & س < ٠ \\ س^{٣} & س \geq ٠ \end{cases}$ ← يتبع

منتدى الوسام ALWESAM
الاستاذ: ناجح الجمزاوي

تابع حل مثال (١٣)

(١) $ه(٠) = ٠$

$\lim_{س \to ٠^+} \frac{ه(س) - ه(٠)}{س - ٠} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{ه(س) - ه(٠)}{س - ٠}$ = صفر

$ه$ متصل عند $س = ٠$

$$ه'(س) = \begin{cases} -٣س^٢ & س < ٠ \\ ٣س^٢ & س \geq ٠ \end{cases}$$

وضعنا صفر لأن $ه'(٠) = ٠$

$ه'_+(٠) = ه'_-(٠)$

(٢) $ه'(٠)$ = صفر

$\lim_{س \to ٠^+} \frac{ه'(س) - ه'(٠)}{س - ٠} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{ه'(س) - ه'(٠)}{س - ٠}$ = صفر

$ه'(س)$ متصل عند $س = ٠$

$$ه''(س) = \begin{cases} -٦س & س < ٠ \\ ٦س & س \geq ٠ \end{cases}$$

$ه''(٠) =$ صفر لذلك وضعنا صفر

(٣) $ه''(٠)$ = صفر

$\lim_{س \to ٠^+} \frac{ه''(س) - ه''(٠)}{س - ٠} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{ه''(س) - ه''(٠)}{س - ٠}$

$ه''(س)$ متصل عند $س = ٠$

$$ه'''(س) = \begin{cases} -٦ & س < ٠ \\ ٦ & س > ٠ \end{cases}$$

غير موجودة عند $س = ٠$

$ه'''_+(٠) \neq ه'''_-(٠)$

مثال (١٤)

اذا كان $ل(س) = ه(س) \times هـ(س)$

$ه(س) = هـ'(س)$ ، $هـ(س) = ه'(س)$

اثبت أن

$ل''(س) = ٤ ل(س)$

الحل

$ل'(س) = ه(س) \times هـ'(س) + هـ(س) \times ه'(س)$

لكي يوضح $ه(س) = هـ'(س)$ ، $هـ(س) = ه'(س)$

$ل'(س) = \underbrace{ه(س) \times ه'(س)}_{\text{ضرب}} + \underbrace{هـ(س) \times هـ'(س)}_{\text{ضرب}}$

$ل''(س) =$

$ه(س) \times ه''(س) + ه'(س) \times ه'(س) + هـ(س) \times هـ''(س) + هـ'(س) \times هـ'(س)$

$ه(س) \times هـ''(س) + ه'(س) \times هـ'(س) + هـ(س) \times ه''(س) + هـ'(س) \times ه'(س)$

$= ٤ ه(س) \times هـ(س)$

$= ٤ ل(س)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٥)

$$هـ(س) = \begin{cases} حـ س^{٣} + ١ & س \leq ١ \\ \frac{م س^{٣}}{س - ١} + ب س & س > ١ \end{cases}$$

هـ(١) ، هـ'(١) موجودة أوجد م ، ب ، حـ

الحل

$$هـ(س) = \begin{cases} حـ س^{٣} - ١ & س \leq ١ \\ \frac{م س^{٣}}{س - ١} + ب س & س > ١ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} حـ س^{٢} - ١ & س \leq ١ \\ م س^{٢} + ب س & س > ١ \end{cases}$$

هـ(١) موجودة ⇒ هـ متصل عند س = ١

$$\text{نهـا}_{س \to ١^-} حـ س^{٣} - ١ = \text{نهـا}_{س \to ١^+} م س^{٢} + ب س$$

$$حـ - ١ = م + ب \quad \cdots (١)$$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٣ حـ س^{٢} & س < ١ \\ ٢ م س + ب & س > ١ \end{cases}$$

$$هـ'_{+}(١) = هـ'_{-}(١)$$

$$٣ حـ = ٢ م + ب \quad \cdots (٢)$$

$$هـ(١) = هـ'(١)$$

$$حـ = ٢ م + ب \quad \cdots (٣)$$

(١) - (٣) ⇐

$$حـ - ١ - ٣ حـ = م + ب - ٢ م - ب$$

$$-٢ حـ - ١ = -م$$

$$م = ٢ حـ + ١ \quad \cdots (٤)$$

(٤) في (٢)

$$٣ حـ = ٢ (٢ حـ + ١) + ب$$

$$٣ حـ = ٤ حـ + ٢ + ب$$

$$ب = -حـ - ٢$$

(٤) ، (٣) في (١)

$$حـ - ١ = ٢ حـ + ١ - حـ - ٢ - ٢$$

$$حـ - ١ = حـ - ٢$$

$$٠ = -١$$ ×

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٣ حـ س^{٢} & س < ١ \\ ٢ م س + ب & س > ١ \end{cases}$$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٩ س^{٢} & س < ١ \\ ٢ م س + ب & س > ١ \end{cases}$$

$$هـ'_{+}(١) = هـ'_{-}(١)$$

$$٩ = ٢ م + ب \quad \cdots (١)$$

$$هـ(١) = هـ'(١)$$

$$٩ = م + ب \quad \cdots (٢)$$

(١) - (٢) ⇐

$$٩ - ٩ = ٢ م + ب - م - ب$$

$$٠ = م$$

$$م = ٥ حـ \Leftarrow ٠ = ٥ حـ$$

$$حـ = \frac{م}{٥}$$

نعوضها في (٢)

$$م = ٩ \quad ٥ حـ = ٩ \quad حـ = \frac{٩}{٥}$$

نعوضها في (١)

$$\frac{٩}{٥} - ١ = ب + \frac{٩}{٥}$$

$$ب = \frac{-٣}{٥} - \frac{٩}{٥} = \frac{-١٢}{٥}$$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٦)

اذا كان ص = $P س^{ن} + \frac{ن}{س^{ن-١}}$

اثبت أن $س^{٢} \times \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ن(ن-١)$ ص

الحل

$ص = P س^{ن} + ب س^{-ن+١}$

$\frac{د ص}{د س} = ن P س^{ن-١} + ل(-ن+١) س^{-ن}$

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ن(ن-١) P س^{ن-٢} + ب(-ن+١)(-ن) س^{-ن-١}$

$= ن(ن-١) P س^{ن-٢} + ل(ن-١)(ن) س^{-ن-١}$

بالضرب في $س^{٢}$

$س^{٢} \times \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} =$

$ن(ن-١) P س^{ن-٢} \times س^{٢} + ب(ن-١)(ن) س^{-ن-١} \times س^{٢}$

$= ن(ن-١) P س^{ن} + ل(ن-١)(ن) س^{-ن+١}$

$= ن(ن-١)[P س^{ن} + ل س^{-ن+١}]$

$= ن(ن-١) \times ص$

مثال (١٧)

اذا كان ل(س) = ه(س) × هـ(س) وكانت ه'(س) × هـ'(س) = ح ثابت وكانت ه''، هـ'' معرفه اثبت ان

$\frac{ل''}{ل} = \frac{ه''}{ه} + \frac{هـ''}{هـ}$

الحل

ل = ه × هـ ← ل' = ه × هـ' + هـ × ه'

ل'' = ه × هـ'' + هـ' × ه' + ه' × هـ' + ه'' × هـ

لكن ه' × هـ' = ح

← ل'' = ه × هـ'' + هـ × ه'' + ٢ح

ل''' = ه × هـ''' + هـ'' × ه' + هـ × ه'' + ه'' × هـ

لكن ه' × هـ'' = ح بالاشتقاق

ه' × هـ'' + هـ' × ه'' = ٠

ل''' = ه × هـ''' + هـ × ه'''

بالقسمة على ه × هـ

$\frac{ل'''}{ه \times هـ} = \frac{ه \times هـ'''}{ه \times هـ} + \frac{هـ \times ه'''}{ه \times هـ}$

$\frac{ل'''}{ل} = \frac{هـ'''}{هـ} + \frac{ه'''}{ه}$

AWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ١٢٢

جد المشتقة الثانية للاقترانات

ق(س) = ٧س^{٣} - ٥س^{٢} + س
ثم جد ق''(-٢)

الحل

ق'(س) = ٢١س^{٢} - ١٠س + ١
ق''(س) = ٤٢س - ١٠
ق''(-٢) = ٤٢(-٢) - ١٠
= -٨٤ - ١٠ = -٩٤

تدريب ② ص ١٢٢

اذا كان ق(س) = ٣س^{ن}
وكان ق$^{(٤)}$(س) = ٢٤س^{٣}
اوجد قيمة ٢ ؟

الحل

ق'(س) = ٣ن س$^{ن-١}$
ق''(س) = ٣ن(ن-١) س$^{ن-٢}$
ق'''(س) = ٣ن(ن-١)(ن-٢) س$^{ن-٣}$
ق$^{(٤)}$(س) = ٣ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣) س$^{ن-٤}$
= ٢٤س^{٣}

ن - ٤ = ٣ ⇐ ن = ٧

٢٤ = ٢(٧)(٦)(٥)(٤) = ٢
٢ = ٤ × ٥ × ٦ × ٢١
٢ = ١٢٠ × ٢١
٢ = ٢٥٢٠

تمارين ومسائل

ص ١٢٣

① جد المشتقة الثانية لكل من الاقترانات التالية

ا) ص = ٧س^{٣} - $\frac{٥}{٢}$س^{٢} + س

ص' = ٢١س^{٢} - ٥س + ١
ص'' = ٤٢س - ٥

ب) ص = $\frac{س+١}{س}$ = ١ + $\frac{١}{س}$

ص' = $\frac{-١}{س^{٢}}$
ص'' = $\frac{+٢س}{س^{٤}}$ = $\frac{٢}{س^{٣}}$

ج) ص = (س^{٤} + ٣س)(س + ١)

⇐ يتبع الحل

مكتبة الإمام
الإمام ناجح الجمزاوي

ص = { (س٢ + ٣س)س س ≥ ٠
      (س٢ + ٣س) × -س س < ٠

ص = { س٣ + ٣س٢ س ≥ ٠
      -س٣ - ٣س٢ س < ٠

ص' = { ٣س٢ + ٦س س ≥ ٠
       -٣س٢ - ٦س س < ٠

ص' = { ٦س + ٦ س > ٠
       غير موجودة س = ٠
       -٦س - ٦ س < ٠

عند س = ٠ : هـ'+(٠) ≠ هـ'-(٠)

---

(٢)
هـ(س) = (٣س٢ + ٢)(س٣ - ٣س + ١)
اثبت ان
هـ(١) × هـ'(١) = ١٠

هـ'(س) = (٣س٢ + ٢) × (٣س٢ - ٣)
+ (س٣ - ٣س + ١) × ٦س
هـ'(١) = (٣ + ٢)(٣ - ٣) + (١ - ٣ + ١) × ٦
= ٥ × ١ + ٠ × ٦ = ٥

هـ''(س) = (٣س٢ + ٢) × ٦س + (٣س٢ - ٣) × ٦س
+ (س٣ - ٣س + ١) × ٦ + ٦س
× (٣س٢ - ٣)

هـ''(١) = ٥ × ٦ + ٠ × ٦ + ١ × ٦ + ٦
= ٤٢
هـ(١) × هـ'(١) = ٥ × ٤٢ = ١٠

---

(٣) اذا كان هـ(س) = ٤ / س
فاثبت ان هـ(١) = -٤ هـ(٢)

الحل
هـ(س) = ٤ / س هـ(١) = -٤

هـ'(س) = -٤ / س٢
هـ'(س) = -٤ / ٤ = -١ / س٢
هـ'(٢) = -١ / ٤ = ١ / ٤
هـ(١) = -٤ × ١ / ٤ = -٤
-٤ = -٤

---

(٤) جد مشتقة الدالة لكل من الاقترانات التالية.

١) ص = س٥ + س٦
ص' = ٥س٤ - ٦س٥
ص'' = ٢٠س٣ + ٣٠س٤
ص''' = ٦٠س٢ - ١٢٠س٣

ب) ص = ٣س٣ + ٥س + ٤
ص' = ٣ × ٣س٢ + ٥
ص'' = ٦ × ٣س
ص''' = ٦ × ٣

(٥) حد قيمة فأي

أ) $هـ''(٢)$ حيث $هـ(س) = ٣س^{٢} - ٢$

الحل

$هـ'(س) = ٦س$

$هـ''(س) = ٦$

$هـ''(س) =$ صفر $\quad هـ''(٢) =$ صفر

ب) $هـ''(١)$ حيث $هـ(س) = ٦س^{٥} - ٤س^{٣}$

الحل

$هـ'(س) = ٣٠س^{٤} - ٨س$

$هـ''(س) = ١٢٠س^{٢} - ٨$

$هـ'''(س) = ٢٦٠س^{٣}$ $\quad هـ'''(١) = ٢٦٠$

ج) $هـ^{(٤)}(١)$ حيث $هـ(س) = \frac{١}{س^{٣}}$

الحل

$هـ'(س) = \frac{-٣س^{٤}}{س^{٦}} = \frac{-٣}{س^{٤}}$

$هـ''(س) = \frac{+٣ \times ٤س^{٣}}{س^{٨}} = \frac{١٢}{س^{٥}}$

$هـ'''(س) = \frac{-١٢ \times ٥س^{٤}}{س^{١٠}} = \frac{-٦٠}{س^{٦}}$

$هـ^{(٤)}(س) = \frac{+٦٠ \times ٦س^{٥}}{س^{١٤}} = \frac{+٣٦٠}{س^{٧}}$

$هـ^{(٤)}(١) = ٣٦٠$

(٦) اذا كان كل من ل ، ل' ، ل'' قابلاً للأشتقاق عند س ، كان

$هـ(س) = س$ ل$(س)$

فجد $هـ'(س)$ ، $هـ''(س)$

الحل

$هـ'(س) = س \times$ ل$'(س) +$ ل$(س) \times ١$

$هـ''(س) = س \times$ ل$''(س) +$ ل$'(س) \times ١ +$ ل$'(س)$

$هـ'''(س) = س \times$ ل$'''(س) +$ ل$''(س) \times ١$
$+$ ل$''(س) +$ ل$''(س)$

$= س$ ل$'''(س) + ٣$ ل$''(س)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

اختبار ذاتي ص ١٤٩

س١ فرع ٤

$هـ(س) = س \times [٢ - \frac{س}{٣}]$

فاوجد $هـ'(٣)$

الحل

طول المدرجة $= ٣$

$٢ - \frac{س}{٣} = ٠ \Leftarrow س = ٦$

	٠		١	
		٠		٦
		٣		

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢س - ١ & ٠ < س \le ٣ \\ ٠,٢س & ٣ < س \le ٦ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} س & ٠ < س \le ٣ \\ صفر & ٣ < س \le ٦ \end{cases}$$

$هـ(٣) = ٣$

$هـ(س) = صفر$ ، $هـ(س) = ٠$

$س \to ٣^+$ ، $س \to ٣^-$

غير متصل عند $س = ٣$

$هـ'(٣)$ غير موجودة

فرع ٦

$ص(س) = س^٢ هـ(س)$

$هـ(٣) = ٦$ ، $هـ'(٣) = ٥$ اوجد $ص'(٣)$

الحل

$ص'(س) = س^٢ هـ'(س) + هـ(س) \times ٢س$

$ص'(٣) = ٩ هـ'(٣) + هـ(٣) \times ٦$

$= ٩ \times ٥ + ٦ \times ٦$

$= ٤٥ + ٣٦ = ٨١$

فرع ٧

$هـ(٤) = ٥$ ، $هـ'(٤) = -١$

$هـ''(٤) = ٢$ فاوجد $(\frac{هـ}{هـ'})'(٤)$

الحل

$$(\frac{هـ}{هـ'})'(٤) = \frac{هـ' \times هـ' - هـ \times هـ''}{(هـ'(٤))^٢}$$

$$= \frac{هـ'(٤) \times هـ'(٤) - هـ(٤) \times هـ''(٤)}{(هـ'(٤))^٢}$$

$$= \frac{(-١) \times (-١) - ٥ \times ٢}{(-١)^٢}$$

$$= \frac{١ - ١٠}{١} = -٩$$

اسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كان $هـ(س) = س^{ن}$ ن عدد صحيح موجب وكان $هـ^{(٣)}(س) = ٢٤س$ فجد قيمة ن ؟

الحل

$هـ(س) = ن س^{ن-١}$

$هـ'(س) = ن(ن-١) س^{ن-٢}$

$هـ''(س) = ن(ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣}$

$= ٢٤س$

$ن-٣ = ١ \Leftarrow ن = ٤$

$٤(٤-١)(٤-٢) = ٢٤$

$٢٤ \times ٢ \times ٤ = ٢٤ \Leftarrow ٢٤ = ٢٤$

② وزارة (٢٠١٢) صيفية

$هـ(س) = س^{ن}$ حيث ن عدد صحيح وكانت $هـ''(س) = ١٢٠ س^{ن-٣}$ فما قيمة ن

الحل

$هـ(س) = ن س^{ن-١}$

$هـ'(س) = ن(ن-١) س^{ن-٢}$

$هـ''(س) = ن(ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣}$

$١٢٠ = ن(ن-١)(ن-٢) \quad ن = ٦$

③ وزارة (٢٠١٦) صيفية

اذا كان $هـ(س) = \frac{١}{٤} س^{ن}$ ن ∈ ع وكان $هـ^{(٤)}(س) = (١+٢ب) س^{٣}$ حيث ب الثابت ٢

الحل

$هـ(س) = \frac{١}{٤} ن س^{ن-١}$

$هـ'(س) = \frac{ن}{٤}(ن-١) س^{ن-٢}$

$هـ''(س) = \frac{ن}{٤}(ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣}$

$هـ^{(٤)}(س) = \frac{ن}{٤}(ن-١)(ن-٢)(ن-٣) س^{ن-٤}$

$= (١+٢ب) س^{٣}$

$ن-٤ = ٣ \Leftarrow ن = ٧$

$\frac{٧}{٤}(٧-١)(٧-٢)(٧-٣) = ١+٢ب$

$= \frac{٧}{٤} \times ٦ \times ٥ \times ٤$

$= ١٠٥$

$٢ب = ١٠٤$

مكتبة الوسام ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ورقة عمل المشتقات العليا

س١ اذا كان $ق(س) = \frac{1}{3} س^{ن}$
وكانت $ق''(س) = ٤٠ س^{ن-٣}$
فجد قيمة ن

س٢ $ق(س) = ٢ س^{ن}$ وكانت
$ق^{(٤)}(س) = ٢٤$ فجد قيمة ٢

س٣ اذا كان $ق'(١) = ٢$ ، $ق(١) = ٣$
$هـ'(١) = -١$ ، $هـ''(١) = ١$
فاوجد ما يلي

① $(ق \cdot هـ)'(١)$

② $\left(\frac{ق}{هـ'}\right)'(١)$

③ $(س^{٣} + ٤ هـ)'(١)$

س٤ اذا كان $ق(س) = س^{٢} هـ(س) + س^{٣}$
فاوجد $ق''(١)$ علمًا بان $هـ(١) = ٢$
$هـ'(١) = -١$ ، $هـ''(١) = ٢$

س٥ اذا كان $ق(س) = \frac{٣}{س^{٢} هـ(س)}$

فاوجد $ق''(١)$
علمًا بان $هـ(١) = ١$ ، $هـ'(١) = ٢$
$هـ''(١) = -١$

س٥ $ق(س) = |س^{٣} - س|$
اوجد $ق''(١)$

س٦ $ق(س) = \begin{cases} ٢ س^{٢} - ن س + ٥ & س \le ٢ \\ س^{٣} + ح & س > ٢ \end{cases}$

جد ٢ ، ن ، ح التي تجعل $ق''(٢)$
موجودة

س٧
اذا كان $ق(س) = س^{٥}$ حاصل
$\lim_{س \to ١} \frac{ق'(س) - ق'(١)}{س^{٢} - ٢ س}$

س٨
$ق(س) = \frac{|س^{٢} - ٤ س + ٥|}{س(س - ١)}$
اوجد $ق''(س)$ ؟

مركز الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

الدرس السابع

مشتقة الاقترانات الدائرية

قاعدة ①

اذا كان $ق(س) = جا س$ فإن
$ق'(س) = جتا س$

البرهان

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{جا ع - جا س}{ع - س}$$ وحسب القانون

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢ جتا \frac{ع+س}{٢} جا \frac{ع-س}{٢}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} جتا \frac{ع+س}{٢} \times \lim_{ع \to س} \frac{جا \frac{ع-س}{٢}}{\frac{ع-س}{٢}}$$

نفرض $ص = ع - س$

$ع \to س$ فإن $ص \to ٠$

$$= جتا \frac{س+س}{٢} \times \lim_{ص \to ٠} \frac{جا \frac{ص}{٢}}{\frac{ص}{٢}}$$

$$= جتا س \times \frac{١}{٢} \times ٢$$

$$= جتا س$$

قاعدة ②

اذا كان $ق(س) = جتا س$ فإن
$ق'(س) = -جا س$

البرهان

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{جتا ع - جتا س}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{-٢ جا \frac{ع+س}{٢} جا \frac{ع-س}{٢}}{ع - س}$$

نفرض $ص = ع - س$

$ع \to س$ ، $ص \to ٠$

$$= \lim_{ص \to ٠} -٢ جا \frac{ع+س}{٢} \frac{جا \frac{ص}{٢}}{ص}$$

$$= -٢ جا \frac{س+س}{٢} \times \frac{١}{٢}$$

$$= -٢ جا س \times \frac{١}{٢}$$

$$= -جا س$$

مكتبة الوسام
المعلم ناجح الجمزاوي

قاعدة ③

اذا كان ه(س) = ظاس
فإن ه'(س) = قا٢س

البرهان

ه(س) = ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

ه'(س) = $\frac{\text{جتاس} \times \text{جتاس} - \text{جاس} \times -\text{جاس}}{\text{جتا٢س}}$

ه'(س) = $\frac{\text{جتا٢س} + \text{جا٢س}}{\text{جتا٢س}}$

= $\frac{1}{\text{جتا٢س}}$ = $\left(\frac{1}{\text{جتاس}}\right)^2$

= قا٢س

قاعدة ④

اذا كان ه(س) = ظتاس فإن
ه'(س) = - قتا٢س

البرهان

ه(س) = ظتاس = $\frac{1}{\text{ظاس}}$

ه'(س) = $\frac{-1 \times \text{قاس}}{(\text{ظاس})^2}$

= $\frac{-1}{\frac{\text{جتا٢س}}{\text{جا٢س}}}$ = $\frac{-1}{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}$ = $\frac{-1}{\text{جا٢س}}$

= - قتا٢س

قاعدة ⑤

اذا كان ه(س) = قاس فإن
ه'(س) = قاس ظاس

البرهان

ه(س) = قاس = $\frac{1}{\text{جتاس}}$

ه'(س) = $\frac{-1 \times -\text{جاس}}{\text{جتا٢س}}$

= $+\frac{1}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

= قاس ظاس

قاعدة ⑥

ه(س) = قتاس فإن
ه'(س) = - قتاس ظتاس

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

هـ(س)	هَ(س)
حاس	جتاس
جتاس	- حاس
ظاس	قاس
ظتاس	- قتاس
قاس	قاس ظاس
قتاس	- قتاس ظتاس

تذكير

حاس + جتاس = ١
١ + ظاس = قاس
١ + ظتاس = قتاس
حا٢س = ٢ حاس جتاس
جتا٢س = جتاس - حاس
= ١ - ٢ حاس
= ٢ جتاس - ١

ملاحظة هامة

حاP - حاب = ٢ جتا (P+ب)/٢ حا (P-ب)/٢
جتاP - جتاب = -٢ حا (P+ب)/٢ حا (P-ب)/٢
لكن
ظاP - ظاب ، ظتاP - ظتاب
قاP - قاب ، قتاP - قتاب
نقوم بتحويلها بدلالة حا ، جتا
ومن ثم توحيد المقام

مثال ①

اذا كان هـ(س) = ظاس جد هَ(س) باستخدام تعريف المشتقة

الحل

هَ(س) = نها (هـ(ع) - هـ(س)) / (ع - س) ، ع ← س

= نها (ظاع - ظاس) / (ع - س) = نها (حاع/جتاع - حاس/جتاس) / (ع - س) ، ع ← س

توحيد المقامات

= نها (حاع جتاس - جتاع حاس) / (جتاع جتاس (ع - س)) × ١ ، ع ← س

لكن حا(ع - س) = حاع جتاس - جتاس جتاع

← يتبع الحل

$= \text{نها}_{س \to ع} \frac{\text{حا}(ع-س)}{ع-س} \times \frac{1}{\text{حتا}ع \text{حتا}س}$

نفرض ص $= ع - س$

$ع \to س \Rightarrow$ ص $\to 0$

$= \text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{حا ص}}{ص} \times \frac{1}{\text{حتا}س \text{حتا}س}$

$= \frac{1}{\text{حتا}^2 س} = \text{قا}^2 س$

مثال ②

استخدم تعريف المشتقة لإيجاد $\text{ه}'(س)$ للاقتران $\text{ه}(س) = \text{ظا}س$

الحل

$\text{ه}'(س) = \text{نها}_{ع \to س} \frac{\text{ه}(ع) - \text{ه}(س)}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{\text{ظا}ع - \text{ظا}س}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{\frac{1}{\text{حتا}ع} - \frac{1}{\text{حتا}س}}{ع - س}$

لتوحيد المقامات

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{\frac{\text{حتا}س - \text{حتا}ع}{\text{حتا}ع \text{حتا}س}}{ع - س} \times \frac{1}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{-2 \text{حا}\frac{ع+س}{2} \text{حا}\frac{س-ع}{2}}{\text{حتا}ع \text{حتا}س} \times \frac{1}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{-2 \text{حا}(س+ع) \text{حا}(س-ع)}{\text{حتا}ع \text{حتا}س} \times \frac{1}{ع - س}$

$= + \frac{2 \text{حا}س}{\text{حتا}س \text{حتا}س}$

$= 2 \text{ظا}س \text{قا}س$

مثال ③

$\text{ه}(س) = س \text{حا}س$ استخدم تعريف المشتقة لإثبات أن

$\text{ه}'(س) = س \text{حتا}س + \text{حا}س$

الحل

$\text{ه}'(س) = \text{نها}_{ع \to س} \frac{\text{ه}(ع) - \text{ه}(س)}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع \text{حا}ع - س \text{حا}س}{ع - س}$

نضيف ونطرح ع حاس

$\Leftarrow$ يتبع الحل

مكتبة المعلم AWAESAM المعلم ناجح الجمزاوي

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع \text{ جا} ع - ع \text{ جا} س + ع \text{ جا} س - س \text{ جا} س}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} ع \frac{(\text{جا} ع - \text{جا} س)}{ع - س} + \frac{\text{جا} س (ع - س)}{ع - س}$

$= س \text{ نها}_{ع \to س} \text{ جتا} \frac{ع + س}{2} \frac{\text{جا} \frac{ع - س}{2}}{\frac{ع - س}{2}} + \text{جا} س$

$= س \text{ جتا} س + \text{جا} س$

مثال ④

$ه(س) = \text{جا} س \text{ جتا} س$ أوجد $ه'(\frac{\pi}{2})$

الحل

$ه'(س) = \text{جا} س \times - \text{جا} س + \text{جتا} س \times \text{جتا} س$

$= - \text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س$

$= - \text{جا}^2 \frac{\pi}{2} + \text{جتا}^2 \frac{\pi}{2} = -1 + 0$

$= -1$

مثال ⑤

① $ص = ق \text{ ظا} س - 7 س$

$ص' = ق \text{ قا}^2 س \text{ ظا} س - 7$

② $ص = \text{قا} س + \text{جتا} \frac{\pi}{2} + \text{ظا} \frac{\pi}{4}$

$ص' = \text{قا} س \text{ ظا} س + 0 + 0$

② $ص = \text{جا} ٩ + \text{جتا} س$ ٩ ثابت

$ص' = \text{صفر} - \text{جا} س$

④ $ه(س) = \text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س$

الكل $ه(س) = 1$

$ه'(س) = \text{صفر}$

⑤ $ه(س) = \text{جا} س$ أوجد $ه'(س)$

الكل

$ه(س) = \text{جا} س = - \text{جا} س$

$ه'(س) = - \text{جتا} س$

⑥ $ه(س) = س \text{ جتا} س$ أوجد $ه'(\pi)$

الكل

$ه'(س) = س \times - \text{جا} س + \text{جتا} س \times 1$

$ه'(\pi) = \pi \times - \text{جا} \pi + \text{جتا} \pi$

$= 0 - 1 = -1$

مثال ⑥

$ه(س) = 2س - \text{ظا} س$ $س \in [0, \frac{\pi}{2})$

أوجد قيم س التي تجعل $ه'(س) = \text{صفر}$

الحل

$ه'(س) = 2 - \text{قا}^2 س = 0$

$\leftarrow \text{قا}^2 س = 2 \leftarrow \text{قا} س = \pm \sqrt{2}$

في الربع الأول $\text{قا} س = \sqrt{2}$

$\leftarrow س = \frac{\pi}{4}$

مثال ⑦

اذا كانت ص = ظتا س جد $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ بدلالة ص ؟

الحل

$\frac{د ص}{د س} = -$ ظتا س ظا س

$\frac{د^2 ص}{د س^2} = -$ ظا س × $-$ ظتا س + ظا س $\times$ ظتا س ظا س

$= +$ ظتا^2 س $-$ ظا س ظتا^2 س

$=$ ص$^2 -$ ظا س (١ $-$ ظتا^2 س)

$=$ ص$^2 -$ ظا س + ظتا^2 س

$=$ ص$^2 -$ ص + ص^2

$= 2$ ص$^2 -$ ص

مثال ⑧

ليكن و(س) = س | جا س |

س ∈ [٠ ، ٢ط] ادرس قابلية الاقتران و للاشتقاق عند س = ط

الحل

| جا س | ← جا س = صفر

س = ٠ ، ط ، ٢ط

	٠		ط		٢ط
جا س		+	٠	−	٠	+

و(س) = { س جا س ، ٠ ≤ س ≤ ط ; −س جا س ، ط < س < ٢ط }

نبحث الاتصال عند س = ط

و(ط) = ط جا ط = صفر

نها س جا س = نها س جا س = صفر
س ← ط$^+$ ، س ← ط$^-$

و متصل عند س = ط

و'(س) = { س جتا س + جا س × ١ ، ٠ < س < ط ; −س جتا س − جا س × ١ ، ط < س < ٢ط ; غير موجود ، س = ٠ ، ٢ط }

و'$_+$(ط) = −ط جتا ط − جا ط × ١
= ط

و'$_-$(ط) = ط جتا ط + جا ط × ١
= −ط

و'$_+$(ط) ≠ و'$_-$(ط)

غير قابل للاشتقاق عند س = ط

مكتبة العلم ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑨ سؤال ⑤ الكتاب ص ١٢٩

ص = أ حاس + ب جتاس

اثبت ان

(ص')² + ص² = أ² + ب²

الحل

الطرف الايمن = (ص')² + ص²

(أ جتاس − ب حاس)² + (أ حاس + ب جتاس)²

= أ² جتا²س − ٢أب جتاس حاس + ب² حا²س + أ² حا²س + ٢أب حاس جتاس + ب² جتا²س

أ² (جتا²س + حا²س) + ب² (حا²س + جتا²س)

= ١ × أ² + ب² × ١

= أ² + ب²

مثال ⑩

اذا كان ص = جتاس اثبت أن

(ص')² − ص ص'' = ١

الحل

ص' = − حاس ، ص'' = − جتاس

(− حاس)² − جتاس (− جتاس)

= حا²س + جتا²س

= ١

مثال ⑪

ص = حاس + جتاس

اثبت ان

(ص')² + ص² = ٢

الحل

ص' = جتاس − حاس

(جتاس − حاس)² + (حاس + جتاس)²

= جتا²س − ٢حاس جتاس + حا²س + حا²س + ٢حاس جتاس + جتا²س

= حا²س + جتا²س + حا²س + جتا²س

= ١ + ١ = ٢

مثال ⑫

و(س) = أ حاس + ب جتاس

اثبت ان و''(س) + و(س) = صفر

الحل

و'(س) = أ جتاس − ب حاس

و''(س) = − أ حاس − ب جتاس

− أ حاس − ب جتاس + أ حاس + ب جتاس

= صفر

مكتبة العلم AL-ILM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

اذا كانت ص = ظاس + قاس
فاثبت أن $\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{١ - جاس}$

الحل

$\frac{د ص}{د س} = ظاس ظاس + قاس$

$= \frac{١}{جتاس} \times \frac{جاس}{جتاس} + \frac{١}{جتا^{٢}س}$

$= \frac{جاس + ١}{جتا^{٢}س} = \frac{جاس + ١}{١ - جا^{٢}س}$

$= \frac{جاس + ١}{(١ - جاس)(١ + جاس)} = \frac{١}{١ - جاس}$

ملاحظة هامة

لايجاد حل المعادلة المثلثية

① نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية

② نضيف الدورة على الحل
جا ← ن π٢
جتا ← ن π٢
ظا ← ن π

ثم نعوض ثم ن حسب القيمة التي تحوي س (الزاوية)

فاذا كانت القيمة موجبة نعوض
س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٦ ، ٤٧ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٥٩ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٦ ، ٦٧ ، ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٣ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٧٦ ، ٧٧ ، ٧٨ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣ ، ٨٤ ، ٨٥ ، ٨٦ ، ٨٧ ، ٨٨ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩١ ، ٩٢ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٧ ، ٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠ ، ١٠١ ، ١٠٢ ، ١٠٣ ، ١٠٤ ، ١٠٥ ، ١٠٦ ، ١٠٧ ، ١٠٨ ، ١٠٩ ، ١١٠ ، ١١١ ، ١١٢ ، ١١٣ ، ١١٤ ، ١١٥ ، ١١٦ ، ١١٧ ، ١١٨ ، ١١٩ ، ١٢٠ ، ١٢١ ، ١٢٢ ، ١٢٣ ، ١٢٤ ، ١٢٥ ، ١٢٦ ، ١٢٧ ، ١٢٨ ، ١٢٩ ، ١٣٠ ، ١٣١ ، ١٣٢ ، ١٣٣ ، ١٣٤ ، ١٣٥ ، ١٣٦ ، ١٣٧ ، ١٣٨ ، ١٣٩ ، ١٤٠ ، ١٤١ ، ١٤٢ ، ١٤٣ ، ١٤٤ ، ١٤٥ ، ١٤٦ ، ١٤٧ ، ١٤٨ ، ١٤٩ ، ١٥٠ ، ١٥١ ، ١٥٢ ، ١٥٣ ، ١٥٤ ، ١٥٥ ، ١٥٦ ، ١٥٧ ، ١٥٨ ، ١٥٩ ، ١٦٠ ، ١٦١ ، ١٦٢ ، ١٦٣ ، ١٦٤ ، ١٦٥ ، ١٦٦ ، ١٦٧ ، ١٦٨ ، ١٦٩ ، ١٧٠ ، ١٧١ ، ١٧٢ ، ١٧٣ ، ١٧٤ ، ١٧٥ ، ١٧٦ ، ١٧٧ ، ١٧٨ ، ١٧٩ ، ١٨٠ ، ١٨١ ، ١٨٢ ، ١٨٣ ، ١٨٤ ، ١٨٥ ، ١٨٦ ، ١٨٧ ، ١٨٨ ، ١٨٩ ، ١٩٠ ، ١٩١ ، ١٩٢ ، ١٩٣ ، ١٩٤ ، ١٩٥ ، ١٩٦ ، ١٩٧ ، ١٩٨ ، ١٩٩ ، ٢٠٠ ، ٢٠١ ، ٢٠٢ ، ٢٠٣ ، ٢٠٤ ، ٢٠٥ ، ٢٠٦ ، ٢٠٧ ، ٢٠٨ ، ٢٠٩ ، ٢١٠ ، ٢١١ ، ٢١٢ ، ٢١٣ ، ٢١٤ ، ٢١٥ ، ٢١٦ ، ٢١٧ ، ٢١٨ ، ٢١٩ ، ٢٢٠ ، ٢٢١ ، ٢٢٢ ، ٢٢٣ ، ٢٢٤ ، ٢٢٥ ، ٢٢٦ ، ٢٢٧ ، ٢٢٨ ، ٢٢٩ ، ٢٣٠ ، ٢٣١ ، ٢٣٢ ، ٢٣٣ ، ٢٣٤ ، ٢٣٥ ، ٢٣٦ ، ٢٣٧ ، ٢٣٨ ، ٢٣٩ ، ٢٤٠ ، ٢٤١ ، ٢٤٢ ، ٢٤٣ ، ٢٤٤ ، ٢٤٥ ، ٢٤٦ ، ٢٤٧ ، ٢٤٨ ، ٢٤٩ ، ٢٥٠ ، ٢٥١ ، ٢٥٢ ، ٢٥٣ ، ٢٥٤ ، ٢٥٥ ، ٢٥٦ ، ٢٥٧ ، ٢٥٨ ، ٢٥٩ ، ٢٦٠ ، ٢٦١ ، ٢٦٢ ، ٢٦٣ ، ٢٦٤ ، ٢٦٥ ، ٢٦٦ ، ٢٦٧ ، ٢٦٨ ، ٢٦٩ ، ٢٧٠ ، ٢٧١ ، ٢٧٢ ، ٢٧٣ ، ٢٧٤ ، ٢٧٥ ، ٢٧٦ ، ٢٧٧ ، ٢٧٨ ، ٢٧٩ ، ٢٨٠ ، ٢٨١ ، ٢٨٢ ، ٢٨٣ ، ٢٨٤ ، ٢٨٥ ، ٢٨٦ ، ٢٨٧ ، ٢٨٨ ، ٢٨٩ ، ٢٩٠ ، ٢٩١ ، ٢٩٢ ، ٢٩٣ ، ٢٩٤ ، ٢٩٥ ، ٢٩٦ ، ٢٩٧ ، ٢٩٨ ، ٢٩٩ ، ٣٠٠ ، ٣٠١ ، ٣٠٢ ، ٣٠٣ ، ٣٠٤ ، ٣٠٥ ، ٣٠٦ ، ٣٠٧ ، ٣٠٨ ، ٣٠٩ ، ٣١٠ ، ٣١١ ، ٣١٢ ، ٣١٣ ، ٣١٤ ، ٣١٥ ، ٣١٦ ، ٣١٧ ، ٣١٨ ، ٣١٩ ، ٣٢٠ ، ٣٢١ ، ٣٢٢ ، ٣٢٣ ، ٣٢٤ ، ٣٢٥ ، ٣٢٦ ، ٣٢٧ ، ٣٢٨ ، ٣٢٩ ، ٣٣٠ ، ٣٣١ ، ٣٣٢ ، ٣٣٣ ، ٣٣٤ ، ٣٣٥ ، ٣٣٦ ، ٣٣٧ ، ٣٣٨ ، ٣٣٩ ، ٣٤٠ ، ٣٤١ ، ٣٤٢ ، ٣٤٣ ، ٣٤٤ ، ٣٤٥ ، ٣٤٦ ، ٣٤٧ ، ٣٤٨ ، ٣٤٩ ، ٣٥٠ ، ٣٥١ ، ٣٥٢ ، ٣٥٣ ، ٣٥٤ ، ٣٥٥ ، ٣٥٦ ، ٣٥٧ ، ٣٥٨ ، ٣٥٩ ، ٣٦٠ ، ٣٦١ ، ٣٦٢ ، ٣٦٣ ، ٣٦٤ ، ٣٦٥ ، ٣٦٦ ، ٣٦٧ ، ٣٦٨ ، ٣٦٩ ، ٣٧٠ ، ٣٧١ ، ٣٧٢ ، ٣٧٣ ، ٣٧٤ ، ٣٧٥ ، ٣٧٦ ، ٣٧٧ ، ٣٧٨ ، ٣٧٩ ، ٣٨٠ ، ٣٨١ ، ٣٨٢ ، ٣٨٣ ، ٣٨٤ ، ٣٨٥ ، ٣٨٦ ، ٣٨٧ ، ٣٨٨ ، ٣٨٩ ، ٣٩٠ ، ٣٩١ ، ٣٩٢ ، ٣٩٣ ، ٣٩٤ ، ٣٩٥ ، ٣٩٦ ، ٣٩٧ ، ٣٩٨ ، ٣٩٩ ، ٤٠٠ ، ٤٠١ ، ٤٠٢ ، ٤٠٣ ، ٤٠٤ ، ٤٠٥ ، ٤٠٦ ، ٤٠٧ ، ٤٠٨ ، ٤٠٩ ، ٤١٠ ، ٤١١ ، ٤١٢ ، ٤١٣ ، ٤١٤ ، ٤١٥ ، ٤١٦ ، ٤١٧ ، ٤١٨ ، ٤١٩ ، ٤٢٠ ، ٤٢١ ، ٤٢٢ ، ٤٢٣ ، ٤٢٤ ، ٤٢٥ ، ٤٢٦ ، ٤٢٧ ، ٤٢٨ ، ٤٢٩ ، ٤٣٠ ، ٤٣١ ، ٤٣٢ ، ٤٣٣ ، ٤٣٤ ، ٤٣٥ ، ٤٣٦ ، ٤٣٧ ، ٤٣٨ ، ٤٣٩ ، ٤٤٠ ، ٤٤١ ، ٤٤٢ ، ٤٤٣ ، ٤٤٤ ، ٤٤٥ ، ٤٤٦ ، ٤٤٧ ، ٤٤٨ ، ٤٤٩ ، ٤٥٠ ، ٤٥١ ، ٤٥٢ ، ٤٥٣ ، ٤٥٤ ، ٤٥٥ ، ٤٥٦ ، ٤٥٧ ، ٤٥٨ ، ٤٥٩ ، ٤٦٠ ، ٤٦١ ، ٤٦٢ ، ٤٦٣ ، ٤٦٤ ، ٤٦٥ ، ٤٦٦ ، ٤٦٧ ، ٤٦٨ ، ٤٦٩ ، ٤٧٠ ، ٤٧١ ، ٤٧٢ ، ٤٧٣ ، ٤٧٤ ، ٤٧٥ ، ٤٧٦ ، ٤٧٧ ، ٤٧٨ ، ٤٧٩ ، ٤٨٠ ، ٤٨١ ، ٤٨٢ ، ٤٨٣ ، ٤٨٤ ، ٤٨٥ ، ٤٨٦ ، ٤٨٧ ، ٤٨٨ ، ٤٨٩ ، ٤٩٠ ، ٤٩١ ، ٤٩٢ ، ٤٩٣ ، ٤٩٤ ، ٤٩٥ ، ٤٩٦ ، ٤٩٧ ، ٤٩٨ ، ٤٩٩ ، ٥٠٠ ، ٥٠١ ، ٥٠٢ ، ٥٠٣ ، ٥٠٤ ، ٥٠٥ ، ٥٠٦ ، ٥٠٧ ، ٥٠٨ ، ٥٠٩ ، ٥١٠ ، ٥١١ ، ٥١٢ ، ٥١٣ ، ٥١٤ ، ٥١٥ ، ٥١٦ ، ٥١٧ ، ٥١٨ ، ٥١٩ ، ٥٢٠ ، ٥٢١ ، ٥٢٢ ، ٥٢٣ ، ٥٢٤ ، ٥٢٥ ، ٥٢٦ ، ٥٢٧ ، ٥٢٨ ، ٥٢٩ ، ٥٣٠ ، ٥٣١ ، ٥٣٢ ، ٥٣٣ ، ٥٣٤ ، ٥٣٥ ، ٥٣٦ ، ٥٣٧ ، ٥٣٨ ، ٥٣٩ ، ٥٤٠ ، ٥٤١ ، ٥٤٢ ، ٥٤٣ ، ٥٤٤ ، ٥٤٥ ، ٥٤٦ ، ٥٤٧ ، ٥٤٨ ، ٥٤٩ ، ٥٥٠ ، ٥٥١ ، ٥٥٢ ، ٥٥٣ ، ٥٥٤ ، ٥٥٥ ، ٥٥٦ ، ٥٥٧ ، ٥٥٨ ، ٥٥٩ ، ٥٦٠ ، ٥٦١ ، ٥٦٢ ، ٥٦٣ ، ٥٦٤ ، ٥٦٥ ، ٥٦٦ ، ٥٦٧ ، ٥٦٨ ، ٥٦٩ ، ٥٧٠ ، ٥٧١ ، ٥٧٢ ، ٥٧٣ ، ٥٧٤ ، ٥٧٥ ، ٥٧٦ ، ٥٧٧ ، ٥٧٨ ، ٥٧٩ ، ٥٨٠ ، ٥٨١ ، ٥٨٢ ، ٥٨٣ ، ٥٨٤ ، ٥٨٥ ، ٥٨٦ ، ٥٨٧ ، ٥٨٨ ، ٥٨٩ ، ٥٩٠ ، ٥٩١ ، ٥٩٢ ، ٥٩٣ ، ٥٩٤ ، ٥٩٥ ، ٥٩٦ ، ٥٩٧ ، ٥٩٨ ، ٥٩٩ ، ٦٠٠ ، ٦٠١ ، ٦٠٢ ، ٦٠٣ ، ٦٠٤ ، ٦٠٥ ، ٦٠٦ ، ٦٠٧ ، ٦٠٨ ، ٦٠٩ ، ٦١٠ ، ٦١١ ، ٦١٢ ، ٦١٣ ، ٦١٤ ، ٦١٥ ، ٦١٦ ، ٦١٧ ، ٦١٨ ، ٦١٩ ، ٦٢٠ ، ٦٢١ ، ٦٢٢ ، ٦٢٣ ، ٦٢٤ ، ٦٢٥ ، ٦٢٦ ، ٦٢٧ ، ٦٢٨ ، ٦٢٩ ، ٦٣٠ ، ٦٣١ ، ٦٣٢ ، ٦٣٣ ، ٦٣٤ ، ٦٣٥ ، ٦٣٦ ، ٦٣٧ ، ٦٣٨ ، ٦٣٩ ، ٦٤٠ ، ٦٤١ ، ٦٤٢ ، ٦٤٣ ، ٦٤٤ ، ٦٤٥ ، ٦٤٦ ، ٦٤٧ ، ٦٤٨ ، ٦٤٩ ، ٦٥٠ ، ٦٥١ ، ٦٥٢ ، ٦٥٣ ، ٦٥٤ ، ٦٥٥ ، ٦٥٦ ، ٦٥٧ ، ٦٥٨ ، ٦٥٩ ، ٦٦٠ ، ٦٦١ ، ٦٦٢ ، ٦٦٣ ، ٦٦٤ ، ٦٦٥ ، ٦٦٦ ، ٦٦٧ ، ٦٦٨ ، ٦٦٩ ، ٦٧٠ ، ٦٧١ ، ٦٧٢ ، ٦٧٣ ، ٦٧٤ ، ٦٧٥ ، ٦٧٦ ، ٦٧٧ ، ٦٧٨ ، ٦٧٩ ، ٦٨٠ ، ٦٨١ ، ٦٨٢ ، ٦٨٣ ، ٦٨٤ ، ٦٨٥ ، ٦٨٦ ، ٦٨٧ ، ٦٨٨ ، ٦٨٩ ، ٦٩٠ ، ٦٩١ ، ٦٩٢ ، ٦٩٣ ، ٦٩٤ ، ٦٩٥ ، ٦٩٦ ، ٦٩٧ ، ٦٩٨ ، ٦٩٩ ، ٧٠٠ ، ٧٠١ ، ٧٠٢ ، ٧٠٣ ، ٧٠٤ ، ٧٠٥ ، ٧٠٦ ، ٧٠٧ ، ٧٠٨ ، ٧٠٩ ، ٧١٠ ، ٧١١ ، ٧١٢ ، ٧١٣ ، ٧١٤ ، ٧١٥ ، ٧١٦ ، ٧١٧ ، ٧١٨ ، ٧١٩ ، ٧٢٠ ، ٧٢١ ، ٧٢٢ ، ٧٢٣ ، ٧٢٤ ، ٧٢٥ ، ٧٢٦ ، ٧٢٧ ، ٧٢٨ ، ٧٢٩ ، ٧٣٠ ، ٧٣١ ، ٧٣٢ ، ٧٣٣ ، ٧٣٤ ، ٧٣٥ ، ٧٣٦ ، ٧٣٧ ، ٧٣٨ ، ٧٣٩ ، ٧٤٠ ، ٧٤١ ، ٧٤٢ ، ٧٤٣ ، ٧٤٤ ، ٧٤٥ ، ٧٤٦ ، ٧٤٧ ، ٧٤٨ ، ٧٤٩ ، ٧٥٠ ، ٧٥١ ، ٧٥٢ ، ٧٥٣ ، ٧٥٤ ، ٧٥٥ ، ٧٥٦ ، ٧٥٧ ، ٧٥٨ ، ٧٥٩ ، ٧٦٠ ، ٧٦١ ، ٧٦٢ ، ٧٦٣ ، ٧٦٤ ، ٧٦٥ ، ٧٦٦ ، ٧٦٧ ، ٧٦٨ ، ٧٦٩ ، ٧٧٠ ، ٧٧١ ، ٧٧٢ ، ٧٧٣ ، ٧٧٤ ، ٧٧٥ ، ٧٧٦ ، ٧٧٧ ، ٧٧٨ ، ٧٧٩ ، ٧٨٠ ، ٧٨١ ، ٧٨٢ ، ٧٨٣ ، ٧٨٤ ، ٧٨٥ ، ٧٨٦ ، ٧٨٧ ، ٧٨٨ ، ٧٨٩ ، ٧٩٠ ، ٧٩١ ، ٧٩٢ ، ٧٩٣ ، ٧٩٤ ، ٧٩٥ ، ٧٩٦ ، ٧٩٧ ، ٧٩٨ ، ٧٩٩ ، ٨٠٠ ، ٨٠١ ، ٨٠٢ ، ٨٠٣ ، ٨٠٤ ، ٨٠٥ ، ٨٠٦ ، ٨٠٧ ، ٨٠٨ ، ٨٠٩ ، ٨١٠ ، ٨١١ ، ٨١٢ ، ٨١٣ ، ٨١٤ ، ٨١٥ ، ٨١٦ ، ٨١٧ ، ٨١٨ ، ٨١٩ ، ٨٢٠ ، ٨٢١ ، ٨٢٢ ، ٨٢٣ ، ٨٢٤ ، ٨٢٥ ، ٨٢٦ ، ٨٢٧ ، ٨٢٨ ، ٨٢٩ ، ٨٣٠ ، ٨٣١ ، ٨٣٢ ، ٨٣٣ ، ٨٣٤ ، ٨٣٥ ، ٨٣٦ ، ٨٣٧ ، ٨٣٨ ، ٨٣٩ ، ٨٤٠ ، ٨٤١ ، ٨٤٢ ، ٨٤٣ ، ٨٤٤ ، ٨٤٥ ، ٨٤٦ ، ٨٤٧ ، ٨٤٨ ، ٨٤٩ ، ٨٥٠ ، ٨٥١ ، ٨٥٢ ، ٨٥٣ ، ٨٥٤ ، ٨٥٥ ، ٨٥٦ ، ٨٥٧ ، ٨٥٨ ، ٨٥٩ ، ٨٦٠ ، ٨٦١ ، ٨٦٢ ، ٨٦٣ ، ٨٦٤ ، ٨٦٥ ، ٨٦٦ ، ٨٦٧ ، ٨٦٨ ، ٨٦٩ ، ٨٧٠ ، ٨٧١ ، ٨٧٢ ، ٨٧٣ ، ٨٧٤ ، ٨٧٥ ، ٨٧٦ ، ٨٧٧ ، ٨٧٨ ، ٨٧٩ ، ٨٨٠ ، ٨٨١ ، ٨٨٢ ، ٨٨٣ ، ٨٨٤ ، ٨٨٥ ، ٨٨٦ ، ٨٨٧ ، ٨٨٨ ، ٨٨٩ ، ٨٩٠ ، ٨٩١ ، ٨٩٢ ، ٨٩٣ ، ٨٩٤ ، ٨٩٥ ، ٨٩٦ ، ٨٩٧ ، ٨٩٨ ، ٨٩٩ ، ٩٠٠ ، ٩٠١ ، ٩٠٢ ، ٩٠٣ ، ٩٠٤ ، ٩٠٥ ، ٩٠٦ ، ٩٠٧ ، ٩٠٨ ، ٩٠٩ ، ٩١٠ ، ٩١١ ، ٩١٢ ، ٩١٣ ، ٩١٤ ، ٩١٥ ، ٩١٦ ، ٩١٧ ، ٩١٨ ، ٩١٩ ، ٩٢٠ ، ٩٢١ ، ٩٢٢ ، ٩٢٣ ، ٩٢٤ ، ٩٢٥ ، ٩٢٦ ، ٩٢٧ ، ٩٢٨ ، ٩٢٩ ، ٩٣٠ ، ٩٣١ ، ٩٣٢ ، ٩٣٣ ، ٩٣٤ ، ٩٣٥ ، ٩٣٦ ، ٩٣٧ ، ٩٣٨ ، ٩٣٩ ، ٩٤٠ ، ٩٤١ ، ٩٤٢ ، ٩٤٣ ، ٩٤٤ ، ٩٤٥ ، ٩٤٦ ، ٩٤٧ ، ٩٤٨ ، ٩٤٩ ، ٩٥٠ ، ٩٥١ ، ٩٥٢ ، ٩٥٣ ، ٩٥٤ ، ٩٥٥ ، ٩٥٦ ، ٩٥٧ ، ٩٥٨ ، ٩٥٩ ، ٩٦٠ ، ٩٦١ ، ٩٦٢ ، ٩٦٣ ، ٩٦٤ ، ٩٦٥ ، ٩٦٦ ، ٩٦٧ ، ٩٦٨ ، ٩٦٩ ، ٩٧٠ ، ٩٧١ ، ٩٧٢ ، ٩٧٣ ، ٩٧٤ ، ٩٧٥ ، ٩٧٦ ، ٩٧٧ ، ٩٧٨ ، ٩٧٩ ، ٩٨٠ ، ٩٨١ ، ٩٨٢ ، ٩٨٣ ، ٩٨٤ ، ٩٨٥ ، ٩٨٦ ، ٩٨٧ ، ٩٨٨ ، ٩٨٩ ، ٩٩٠ ، ٩٩١ ، ٩٩٢ ، ٩٩٣ ، ٩٩٤ ، ٩٩٥ ، ٩٩٦ ، ٩٩٧ ، ٩٩٨ ، ٩٩٩ ، ١٠٠٠

مثال (١٤) حل سؤال ٤ الكتاب ص ١٢٩
جد قيم س التي تحقق المعادلة
ه(س) فيما يلي

① ه(س) = س + ظاس ، س ∈ [-π٢ ، π٢]

الحل

ه(س) = ١ - جاس = ٠
جاس = ١ زاوية محور
س = ٩٠ + ن π٢ القيمة سالبة
وموجبة نعوض
ن = ٠ ← س = ٩٠
ن = ١ ← س = ٩٠ + ٣٦٠ = ٤٥٠ ليست في القيمة
ن = -١ ← س = ٩٠ - ٣٦٠ = -٢٧٠
س = { π٢ ، -٣π٢ }

② ه(س) = ظاس ، س ∈ [٠ ، π٢[

الحل ه(س) = ظاس ظاس
$= \frac{١}{جتاس} \times \frac{جاس}{جتاس} = ٠$ ←
جاس = صفر ← س = ن π٢
ن = ٠ ← س = ٠ أو π
ن = ١ ← س = π ⇒ { π٢ ، ٠ }
ن = ٢ ← س = ٢π ∉ { π٢ ، ٠ }

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص١٢٥

ل(س) = ٦ جاس − ٢س

إذا وجد ل′(π) .

الحل

ل′(س) = ٦ جتاس − ٢

ل′(π) = ٦ × جتا π − ٢

= ٦ × −١ − ٢

= −٨

تدريب ② ص١٢٧

ق(س) = س جتاس حيث ق(س)

الحل

ق′(س) = س × −جاس + جتاس × ١

تدريب ④ ص١٢٨

ق(س) = (ظاس + س) / جاس حيث ق(π/٣)

الحل

ق′(س) = (جاس × (قا²س + ١) − (ظاس + س) × جتاس) / جا²س

ق′(π/٣) = (جا π/٣ (قا² π/٣ + ١) − (ظا π/٣ + π/٣) × جتا π/٣) / (جا π/٣)²

= (√٣/٢ (٤ + ١) − (√٣ + π/٣) × ١/٢) / (√٣/٢)²

= (٥√٣/٢ − √٣/٢ − π/٦) / ٣/٤

= (٢√٣ − π/٦) / ٣/٤

= ٨√٣/٣ − π/٢

وكالة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل ص ١٢٩

س١ جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل من الاقترانات

(أ) $ص = ٢ ظتا س - ٣ جا س$

$ص' = -٢ جا س - ٣ جتا س$

(ب) $ص = \frac{جا س}{س}$

$ص' = \frac{س جتا س - جا س \times ١}{س^٢}$

(جـ) $ص = ظا س - ٧\sqrt{س}$

$ص' = ظا س ظا س - \frac{٧}{٢\sqrt{س}}$

(د) $ص = س^٢ جتا س$

$ص' = س^٢ \times -جا س + جتا س \times ٢س$

(هـ) $ص = جا^٢ س + جتا^٢ س = ١$

$ص' = صفر$

(و) $ص = س - ٤ قتا س + ٢ ظتا س$

$ص' = ١ + ٤ قتا س ظا س - ٢ قتا^٢ س$

س٢ جد $ه'(س)$ عند النقطة المبينة إزاء كل مما يأتي

(أ) $ه(س) = جتا س جا س$ ، $س = \frac{\pi}{٤}$

الحل

$ه'(س) = جتا س \times جتا س + جا س \times -جا س$

$= جتا^٢ س - جا^٢ س$

$= (\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢ - (\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢ = صفر$

(ب) $ه(س) = جا(-س)$ ، $س = \frac{\pi}{٣}$

الحل

$ه(س) = -جا س$

$ه'(س) = -جتا س$

$ه'(\frac{\pi}{٣}) = -جتا \frac{\pi}{٣} = -\frac{١}{٢}$

(جـ) $ه(س) = \frac{جا س}{١ + جتا س}$ ، $س = \frac{\pi}{٢}$

$ه'(س) = \frac{(١ + جتا س) \times جتا س - جا س \times -جا س}{(١ + جتا س)^٢}$

$ه'(\frac{\pi}{٢})$

$= \frac{(١ + جتا \frac{\pi}{٢}) \times جتا \frac{\pi}{٢} + جا^٢ \frac{\pi}{٢}}{(١ + جتا \frac{\pi}{٢})^٢}$

$= \frac{١ \times ٠ + ١^٢}{١^٢} = ١$

مكتبة الوسام
ALWSAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

س ⑤

$ق(س) = س$ جتاس $س = \pi$

$ق'(س) = س \times$ -جاس + جتاس $\times 1$

$ق'(\pi) = \pi \times$ -جاπ + جتاπ

$= 0 - 1 = -1$

س ٣ اثبت ان $ص =$ جتاس

$ص =$ جاس حلولاً لمعادلة

$ص + ص'' =$ صفر

① $ص =$ جاس ← $ص' =$ جتاس

$ص'' =$ -جاس

$ص + ص'' =$ جاس + -جاس = صفر

② $ص =$ جتاس ← $ص' =$ -جاس

$ص'' =$ -جتاس

$ص + ص'' =$ جتاس + -جتاس

= صفر

س ٤

جد قيم س في الفترة $[-\pi ، \pi]$

التي تحقق المعادلة $ق'(س) =$ صفر

اكل مثال (١٣) الدوسيه

ص ١٤٠

س ٥ : اكل صفحة ١٣٩

الدوسيه

س ٦ جد $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ لكل مما يأتي

④ $ص =$ ظاس

$ص' =$ قاس^٢ س

$ص'' =$ ٢ قاس $\times$ قاس ظاس

$= ٢$ قتاس^٣ س + ظاس^٢ س قاس

⑤ $ص = س$ جاس - ٣ جتاس

$ص' = س \times$ جتاس + جاس $\times 1$

$- ٣ \times$ -جاس

$= س$ جتاس + ٤ جاس

$ص'' = س \times$ -جاس + جتاس + ٤ جتاس

$= -س$ جاس + ٥ جتاس

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

اسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٩) شتوية

$ه(س) = \frac{1}{حاس}$ ماوجد $ه'(س)$

الحل

$ه'(س) = \frac{-1 \times ضاس}{حا^{2}س}$

$= -\frac{ضاس}{حاس} \times \frac{1}{حاس}$

$= -ظاس قاس$

② وزارة (٢٠١٩) صيفية

$ه(س) = \frac{\pi}{حاس}$ اوجد $ه'(\frac{\pi}{6})$

الحل

$ه'(س) = \frac{\pi}{1} = \pi ضاس$

$ه'(س) = -\pi حاس$

$ه'(\frac{\pi}{6}) = -\pi \times حا\frac{\pi}{6}$

$= -\pi \times \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{2}$

③ وزارة (٢٠١٠) شتوية

$ص = \frac{2 - حتا\frac{\pi}{2}}{حتاس}$ اوجد $\frac{ds}{dس}$

الحل

$ص' = \frac{حتاس \times 0 - (2 - حتا\frac{\pi}{2}) \times -حاس}{حتا^{2}س}$

$= \frac{-(2-0) \times -حاس}{ضتا^{2}س}$

$= \frac{+2 حاس}{ضاس ضاس}$

$= 2 ظاس قاس$

④ وزارة (٢٠١٠) صيفية

$ه(س) = \frac{س + قاس}{حاس}$ اوجد $ه'(\frac{\pi}{4})$

الحل

$ه'(س) = \frac{حاس(1 + قاس ظاس) - (س + قاس) ضاس}{حا^{2}س}$

$ه'(\frac{\pi}{4}) = \frac{حا\frac{\pi}{4}(1 + حا\frac{\pi}{4} ظا\frac{\pi}{4}) - (\frac{\pi}{4} + قا\frac{\pi}{4}) ضا\frac{\pi}{4}}{حا^{2}\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1) - (\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}) \times \sqrt{2}}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2}}$

$= \frac{1}{2} + 1 - \frac{\pi}{2} \times 2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑤ وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كانت ص = ا حاس − ب ضتاس
اثبت ان
(ص')^٢ = ا^٢ + ب^٢ − ص^٢

الحل

ص' = ا ضتاس + ب حاس

⇐

(ا ضتاس + ب حاس)^٢ + (ا حاس − ب ضتاس)^٢

ا^٢ ضتا^٢س + ٢ ا ب ضتاس حاس + ب^٢ حا^٢س
+ ا^٢ حا^٢س − ٢ ا ب ضتاس حاس + ب^٢ ضتا^٢س

ا^٢ (حا^٢س + ضتا^٢س) + ب^٢ (حا^٢س + ضتا^٢س)

ا^٢ + ب^٢

---

⑥ وزارة (٢٠١٥) شتوية

لتكن ق(س) = س | حاس |
س ∈]٠ ، ٢π[اثبت
قابلية الاشتقاق ق للاشتقاق
عند س = π

اكمل : مثال ⑧ ص ١٣٨
الدوسيه

⑦ وزارة (٢٠١٦) صيفية

اذا كانت ص = حاس / (١ + ضتاس)

اثبت ان

ص'' = حاس / (١ + ضتاس)^٢

اكمل

ص' = [(١ + ضتاس) ضتاس − حاس × −حاس] / (١ + ضتاس)^٢

= (ضتاس + ضتا^٢س + حا^٢س) / (١ + ضتاس)^٢

= (١ + ضتاس) / (١ + ضتاس)^٢

= ١ / (١ + ضتاس)

ص'' = [(١ + ضتاس) × ٠ − حاس] / (١ + ضتاس)^٢

= حاس / (١ + ضتاس)^٢

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ورقة عمل

مشتقة الاقترانات الدائرية

السؤال الأول

أ. اذا كان $f(x) = \text{قتا}^2 x$ فاوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

ب. اذا كان $f(x) = \text{جا}^3 x$ جد $f'(\frac{\pi}{3})$ باستخدام تعريف المشتقة

جـ. اذا كان $f(x) = |1 + \text{ظا} x|$ جد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

السؤال الثاني

جد $\frac{dy}{dx}$ للاقترانات التالية

١) $y = -4\,\text{قتا} x + 2\,\text{ظا} x$

٢) $y = \frac{\text{جا} x - 1}{\text{جا} x + 1}$

٣) $y = \frac{x\,\text{جا} x}{1 + \text{ظا} x}$

٤) $y = \frac{1}{\text{قتا} x} + \frac{1}{\text{ظا} x}$

٥) $y = \frac{1 + \text{ظا} x}{1 - \text{ظا} x}$

٦) $y = \frac{x + \text{قا} x}{\text{جا} x}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

السؤال الثالث

أ) $f(x) = x\,|\text{ظا} x|$ اثبت قابلية الاشتقاق $f(x)$ عند $x = 1$

ب) $f(x) = |\text{جا} 3x|$ $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$ اثبت هل $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{\pi}{3}$

ج) $f(x) = \frac{|\text{جا} x|}{x}$ حيث $x \in \frac{3\pi}{4}$ اثبت هل $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{\pi}{4}$

مركز الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ه) $ق(س) = \begin{cases} س + جتاس & -\pi \le س < 0 \\ جاس + 1 & 0 \le س \le \pi \end{cases}$

جد $ق'(س)$

و) اذا كان $ق'(س) = جاس$
اوجد $ق(س - \pi)$

ز) اوجد $\lim_{ه \to 0} \frac{جا(\frac{\pi}{2} - س) - جتا(\frac{\pi}{2} - س)}{ه}$

السؤال الرابع

م) اذا كان $ق'(س) = ظاس - \frac{4}{3}س$
حيث حلول لمعادلة $ق'(س) = صفر$
$س \in [-\pi, \pi]$

ن) اذا كان $ق'(س) = قاس$ حيث
حلول لمعادلة $ق'(س) = صفر$
حيث $س \in [-\pi, \pi]$

ع) اذا كان $ق'(س) = س + \frac{1}{2}جاس$
$ص(س) = 2 + جاس$
جد قيم س التي عندها
$ق'(س) = ه(س)$

السؤال الخامس

١) اذا كان $ص = \frac{جاس}{س}$
اثبت ان $س ص'' + ص' = -جاس$

٢) اذا كانت $ص = جاس + جتاس$
اثبت ان $\frac{د^2 ص}{د س^2} + ص = -جاس$

٣) اذا كانت $ص = س ظاس$
اثبت ان
$ص'' - 2ص قا^2 س = 2قا^2 س$

٤) اذا كان $ص = ظاس + قاس$
اثبت ان $ص' = ص^2 + س$

٥) اذا كانت
$ص = 2جاس + ب جتاس$
حيث $أ$، $ب$ ثوابت
وكان $\frac{د^2 ص}{د س^2} + 3ص = 6جاس$
اوجد قيمة $أ$، $ب$

٥) $ص = 3قاس$ اثبت ان
$ص'' = ص ظاس - \frac{ص^3}{9}$

مكتبة العلم ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الثامن

قاعدة السلسلة

تذكير

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تركيب اقترانين

$(f \circ g)(x) = g(f(x))$

مثال

$f(x) = x^2 + 3$ ، $g(x) = x^2$

اوجد

① $(f \circ g)(2)$

$= f(g(2)) = f(4) = 2 \times 4 + 3 = 11$

② $(f \circ g)(-1)$

$= f(g(-1)) = f(1) = 5$

③ $(g \circ f)(x)$

$= g(f(x)) = g(x^2 + 3)$

$= (x^2 + 3)^2$

④ $(f \circ g)(x)$

$= f(g(x)) = f(x^2)$

$= 2x^2 + 3$

⑤ $(g \circ g)(x)$

$= g(g(x)) = g(x^2)$

$= (x^2)^2 = x^4$

اولاً مشتقة تركيب اقترانين

القاعدة

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$

مشتقة التركيب =

مشتقة الخارجي مع بقاء الداخلي × مشتقة الداخلي

امثلة

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$

$(f \circ f)'(x) = f'(f(x)) \times f'(x)$

$(g \circ g)'(x) = g'(g(x)) \times g'(x)$

مثال ①

$f(x) = x^2 + x$ ، $g(x) = 2x^2 - x + 1$

اوجد مايلي

① $(f \circ g)'(x)$

الحل

$f'(x) = 2x + 1$ ، $g'(x) = 4x - 1$

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$

$= f'(2x^2 - x + 1) \times (4x - 1)$

$= (2(2x^2 - x + 1) + 1)(4x - 1)$

مكتبة العلم ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

② $(هـ \circ ق)'(١)$
$= هـ'(ق(١)) \times ق'(١)$
$= هـ'(٢) \times ٣ = ٧ \times ٣ = ٢١$

③ $(هـ \circ هـ')'(٢) = هـ(هـ'(٢)) \times هـ''(٢)$
$\leftarrow هـ'(س) = ٤$
$= هـ'(٧) \times ٤ = ٢٧ \times ٤ = ١٠٨$

④ $(ق' \circ هـ)(١) = ق''(هـ(١)) \times هـ'(١)$
$ق''(س) = ٢$
$= ق''(٢) \times هـ'(١)$
$= ٢ \times ٣ = ٦$

مثال ②
$ق(س) = \frac{٨س}{س^٢+١}$ ، $هـ(س) = جاس$
اوجد $(ق \circ هـ)'(\frac{\pi}{٣})$

الحل
$ق'(س) = \frac{(س^٢+١) \times ٨ - ٨س \times ٢س}{(س^٢+١)^٢}$
$= \frac{٨س^٢ + ٨ - ١٦س^٢}{(س^٢+١)^٢}$
$= \frac{-٨س^٢ + ٨}{(س^٢+١)^٢}$
$هـ'(س) = جاس$ ظاس

$(ق \circ هـ)'(\frac{\pi}{٣}) = ق'(هـ(\frac{\pi}{٣})) \times هـ'(\frac{\pi}{٣})$
$= ق'(٢) \times ٢$
$= \frac{-٣٢}{٢٥} \times ٢$
$= \frac{-٦٤}{٢٥}$

مثال ③
اذا كان $(ل \circ هـ)'(\frac{\pi}{٤}) = ٣$
وكان $هـ'(\frac{\pi}{٤}) = ٦$ ، $ل'(٦) = ٢$
فاوجد $هـ(\frac{\pi}{٤})$

الحل
$(ل \circ هـ)'(\frac{\pi}{٤}) = ل'(هـ(\frac{\pi}{٤})) \times هـ'(\frac{\pi}{٤})$
$ل'(٦) \times هـ'(\frac{\pi}{٤}) = ٣$
$٢ \times هـ'(\frac{\pi}{٤}) = ٣$
$\leftarrow هـ'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{٣}{٢}$

مثال ④
اذا كان $ق(س) = جاس$ ،
$هـ(س) = ٢س$ فاوجد $(هـ \circ ق)'(\frac{\pi}{٦})$

الحل
$ق'(س) = جاس$ ، $هـ'(س) = ٢$
$(هـ \circ ق)'(\frac{\pi}{٦}) = هـ'(ق(\frac{\pi}{٦})) \times ق'(\frac{\pi}{٦})$
$= هـ'(\frac{١}{٢}) \times \frac{٣}{٢}$
$= ٢ \times \frac{٣}{٢} = ٣$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

اذا كان $ق(س) = س^{٢} \times ا(س)$ وكان $هـ(٢) = ٤$ ، $هـ(٢) = -١$ فما قيمة $(ق \circ هـ)'(٢)$.

الحل

$$ا(س) = \begin{cases} س^{٧} & س \geq ٠ \\ -س^{٧} & س < ٠ \end{cases}$$

$(ق \circ هـ)'(٢) = ق'(هـ(٢)) \times هـ'(٢)$

$= ق'(-١) \times ٤$

عندما $س = -١ \leftarrow ق'(س) = -٧س^{٦}$

$\leftarrow ق'(-١) = -٧$

$\leftarrow (ق \circ هـ)'(٢) = -٧ \times ٤ = -٢٨$

مثال ⑥

اذا كان $ق(س) = س^{٢} - ٤س$ وكانت $هـ(٢) = ٦$ ، $(ق \circ هـ)'(٢) = ٤٨$ فاوجد قيمة $هـ'(٢)$ ؟

الحل

$(ق \circ هـ)'(٢) = ق'(هـ(٢)) \times هـ'(٢)$

$٤٨ = ق'(هـ(٢)) \times هـ'(٢)$

$ق'(س) = ٢س - ٤$

$ق'(هـ(٢)) = ٢(هـ(٢)) - ٤$

$\leftarrow ٤٨ = (٢هـ(٢) - ٤) \times ٦$

$= ١٢هـ(٢) - ٢٤$

$\leftarrow ١٢هـ(٢) = ٦٠ \leftarrow$

$هـ(٢) = \frac{٦٠}{١٢} = ٥$

مثال ⑦

اذا كانت $(ق \circ هـ)'(-٢) = ٤$ وكان $هـ(-٢) = ٣$ ، $ق'(٣) = ٨$ فجد $هـ'(-٢)$ ؟

الحل

$(ق \circ هـ)'(-٢) = ق'(هـ(-٢)) \times هـ'(-٢)$

$٤ = ق'(٣) \times هـ'(-٢)$

$٤ = ٨ \times هـ'(-٢)$

$\leftarrow هـ'(-٢) = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

مثال ⑧

اذا كان $ق(س) = س^{٣}$ ، $هـ(٢) = ٣$ ، $هـ'(٢) = -٢$ ، $(ق \circ هـ)'(٢) = ٥$ فجد $(ق \circ هـ)''(٢)$ ؟

الحل

$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

بالاشتقاق مرة أخرى باستخدام قاعدة الضرب

$(ق \circ هـ)''(س)$

$= ق'(هـ(س)) \times هـ''(س) + هـ'(س) \times ق''(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$\leftarrow (ق \circ هـ)''(٢) =$

$ق'(هـ(٢)) \times هـ''(٢) + هـ'(٢) \times ق''(هـ(٢)) \times هـ'(٢)$

$= ق'(٣) \times ٥ + -٢ \times ق''(٣) \times -٢$

$\leftarrow ق'(س) = ٣س^{٢} ، ق''(س) = ٦س$

$\Leftarrow$

$(ق \circ هـ)''(٢) = ٧٢ \times ٥ - ١٨ \times -٢$

$= ١٣٥ + ٧٢ = ٢٠٧$

مكتبة العلم ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑨

اذا كان $ق(س) = س^3 + 1$ ،
$ه(س) = 2س - 3$ ، فجد $(ق \circ ه)'(1)$

الحل

$(ق \circ ه)'(س) = ق'(ه(س)) \times ه'(س)$
$= ق'(2س - 3) \times 2$
لكن $ق'(س) = 3س^2$
$\Leftarrow ق'(2س - 3) = 3(2س - 3)^2$
$\Leftarrow (ق \circ ه)'(س) = 3(2س - 3)^2 \times 2$
$= 6(2س - 3)^2$
$= 6(4س^2 - 12س + 9)$
$(ق \circ ه)'(س) = 6(8س - 12)$
$= 48س - 72$
$(ق \circ ه)'(1) = 48 - 72 = -24$

مثال ⑩

اذا كان $ه$ قابلاً للاشتقاق $ه$
وكان $ه(4س + 1) = 2س^2 + 6س$
اوجد $ه'(5)$ ؟

الحل نشتق الطرفين

$ه'(4س + 1) \times 4 = 4س + 6$
$4س + 1 = 5 \Leftarrow 4س = 4 \Leftarrow س = 1$
نعوض $س = 1$
$ه'(5) \times 4 = 4 + 6 = 10$
$ه'(5) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

مثال ⑪

$ص = ه(س^2 + 2س)$ ، $ه'(3) = 5$
اوجد $\left| \frac{د ص}{د س} \right|_{س = 1}$

الحل

$\frac{د ص}{د س} = ه'(س^2 + 2س) \times (2س + 2)$
$\left| \frac{د ص}{د س} \right| = ه'(3) \times (2 + 2)$
$س = 1$
$= 5 \times 4 = 20$

مثال ⑫

اذا كان $ه\left(\frac{3 - 2س}{س^2}\right) = س^3 + س^2 + س$
اوجد $ه'(1)$ $\quad س \neq 0$

الحل

$ه'\left(\frac{3 - 2س}{س^2}\right) \times \frac{-2 \times س^2 - (3 - 2س) \times 2س}{س^4}$
$= 3س^2 + 2س + 1$
لكن $\frac{3 - 2س}{س^2} = 1 \Leftarrow 3 - 2س = س^2$
$\Leftarrow س^2 + 2س - 3 = 0 \Leftarrow (س + 3)(س - 1) = 0$
$س = -3$ $س = 1$ $\quad س \neq 0$
$\Leftarrow$ $س = 1$ بتعويض
$ه'(1) \times \frac{-2 - 2}{1} = 3 + 2 + 1$
$ه'(1) \times (-4) = 6$ $\quad ه'(1) = \frac{6}{-4}$

مكتبة العلم ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)
اذا كان ق(جاس) = جتاس - ظاس
حيث س في الربع الاول جد ق'(١/٢)

الحل
ق'(جاس) × جتاس = - جاس - قا²س
جاس = ١/٢ ⇐ س = π/٦ (الربع الأول)
ق'(١/٢) × جتا π/٦ = - جا π/٦ - قا² π/٦
ق'(١/٢) × √٣/٢ = -١/٢ - ٤/٣
ق'(١/٢) = -١١/٦ × ٢/√٣ = -١١/٢√٣

ثانياً
قاعدة السلسلة

اذا كان ص = ق(ع) ، ع = هـ(س)

ص: موضع للقانون بدلالة ع
ع: موضع للقانون بدلالة س

ص ← (د ص / د ع) ← ع ← (د ع / د س) ← س
(د ص / د س)

⇐ د ص / د س = د ص / د ع × د ع / د س

مثال ①
ص = ٣ع² - ١ ، ع = س² + ١
جد د ص / د س ؟

الحل
د ص / د س = د ص / د ع × د ع / د س
= ٦ع × ٢س
لكن ع = س² + ١
د ص / د س = ٦(س² + ١) × ٢س

مكتبة الهسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ②

اذا كان $ل = \frac{س^٤}{١+ص^٤}$ ، $ص = ل^٢$

اوجد $\frac{د ص}{د س}$ ؟

الحل

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ل} \times \frac{د ل}{د س}$$

$$= ٢ل \times \frac{٤س^٣(١+ص^٤) - ٤ص^٣ \times ص^٤ \times س^٤}{(١+ص^٤)^٢}$$

$$= ٢ \times ل \times \frac{٤س^٣ + ٤س^٣ ص^٤ - ٤ص^٣ س^٤}{(١+ص^٤)^٢}$$

$$= ٢ \left(\frac{س^٤}{١+ص^٤}\right) \times \frac{٤}{(١+ص^٤)^٢}$$

$$= \frac{٣ص}{(١+ص^٤)^٣}$$

مثال ③

$س = جتا\theta$ ، $\frac{د م}{د \theta} = \frac{١}{٥}$

اوجد $\frac{د س}{د م}$ عندما $\theta = \frac{\pi}{٣}$

الحل

$$\frac{د س}{د م} = \frac{د س}{د \theta} \times \frac{د \theta}{د م}$$

$$= -جا\theta \times ٥$$

$$= -جا\frac{\pi}{٣} \times ٥ = -\frac{١}{٢} \times ٥ = -\frac{٥}{٢}$$

مثال ④

اذا كان $\frac{د ص}{د س} = ٨$ ، $\frac{د ص}{د \theta} = ٥$

اوجد $\frac{د \theta}{د س}$ ؟؟

الحل

$$\frac{د \theta}{د س} = \frac{د \theta}{د ص} \times \frac{د ص}{د س}$$

$$= \frac{١}{٥} \times ٨ = \frac{٨}{٥}$$

لأن $\frac{د \theta}{د ص}$ هو مقلوب $\frac{د ص}{د \theta}$

مثال ⑤

جد معدل تغير حجم كرة بالنسبة الى مساحة سطحها عندما يكون قطرها ١٢ سم ؟

الحل

نفرض ح : حجم الكرة ، م : مساحة سطحها

نفرض : نصف قطرها $= ن$

$ح = \frac{٤}{٣}\pi ن^٣$ ، $م = ٤\pi ن^٢$

$$\frac{د ح}{د م} = \frac{د ح}{د ن} \times \frac{د ن}{د م}$$

$$= ٤\pi ن^٢ \times \frac{١}{٨\pi ن} = \frac{ن}{٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$$

مثال ⑥

اسطوانة دائرية ارتفاعها مثلي نصف قطرها أوجد معدل تغير حجمها بالنسبة لمساحتها الجانبية عندما يكون نصف قطرها ٣ سم ؟

الحل

ح : حجم الاسطوانة ، نصف القطر
ع : الارتفاع ، م : المساحة الجانبية

ح = π نق^{2} ع ، ع = ٢ نق

ح = π نق^{2} × ٢ نق = ٢ π نق^{3}

م = ٢ π نق ع ، ع = ٢ نق

= ٢ π نق × ٢ نق = ٤ π نق^{2}

$\frac{د ح}{د م} = \frac{د ح}{د نق} \times \frac{د نق}{د م}$

$= \pi ٢ نق^{2} \times \frac{١}{٤ \pi ٢ نق}$

$= \frac{٣}{٤}$ نق

$\left| \frac{د ح}{د م} \right|_{نق = ٣} = ٣ \times \frac{٣}{٤} = \frac{٩}{٤}$

مثال ⑦

ص = ن^{٣} + ٢ن ، $\frac{د س}{د ن}$ = ٤ن

جـ $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عندما ن = ١

الحل

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$

$= (٣ن^{٢} + ٢) \times \frac{١}{٤ن} = \frac{٣ن^{٢} + ٢}{٤ن}$

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = \frac{٤ن \times ٦ن - (٣ن^{٢} + ٢) \times ٤}{(٤ن)^{٢}} \times \frac{١}{٤ن}$

لعدم استعماله نضرب بـ $\frac{د ص}{د ن}$

$\left| \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} \right|_{ن = ١} = \frac{١٢ \times ١ - ٨}{١٢ \times ٤} = \frac{٤}{٤٨} = \frac{١}{١٦}$

مثال ⑧

ص = حتا ن ، س = جتا ن

جـ $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عندما ن = $\frac{\pi}{٢}$

الحل

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$

$= -$ جتا ن $\times \frac{١}{-$ جا ن$} = -$ ظتا ن

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = -$ قتا ن $\times \frac{١}{-$ جا ن$^{٢}}$

$\left| \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} \right|_{ن = \frac{\pi}{٢}} = \frac{١}{-١} = -١$

ملاحظة هامة

لإيجاد المشتقة الثانية باستخدام السلسلة نشتق $\frac{ص}{س}$ بالنسبة لـ ن ونضرب في $\frac{ن}{س}$ ؟

مثال

$\frac{ص}{س} = ٣ن^{٢}+١$

$\frac{ص^{٢}}{س^{٢}} = ٦ن \times \frac{ن}{س}$ (لانتباها)

مثال (٩)

إذا كانت $ص = ع^{٣} - ٣ع + ٤$

$ع = \frac{١}{٢}س^{٤} - ٢$ اثبت أن

$\frac{ص}{س} + ٧\frac{ع}{س} - ٢س^{٧} = صفر$

الحل

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

$= (٣ع^{٢} - ٣) \times ٢س^{٣}$

$\frac{ص}{س} = (٣(\frac{١}{٢}س^{٤} - ٢)^{٢} - ٣) \times ٢س^{٣}$

$= (س^{٤} - ٤ - ٣) \times ٢س^{٣}$

$= ٢س^{٧} - ١٤س^{٣}$ بالتعويض

$٢س^{٧} - ١٤س^{٣} + ٧(٤س^{٣} - ٢س^{٢}) - ٢س^{٧} =$

$٢س^{٧} - ١٤س^{٣} + ٢٨س^{٣} - ١٤س^{٢} - ٢س^{٧} =$

$= صفر$

مثال (١٠)

$س = \frac{ن}{ن+١}$ ، $ص = \frac{ن+١}{ن}$

اثبت ان $س^{٢}\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = ٢ص$ ؟

الحل

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$

$= \frac{ن \times ١ - (ن+١) \times ١}{ن^{٢}} \times \frac{١}{\frac{ن \times ١ - ١ \times (ن+١)}{(ن+١)^{٢}}}$

$= \frac{-١}{ن^{٢}} \times \frac{(ن+١)^{٢}}{-١}$

$= \frac{(ن+١)^{٢}}{ن^{٢}}$

$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = \frac{ن^{٢} \times ٢(ن+١) - (ن+١)^{٢} \times ٢ن}{(ن^{٢})^{٢}} \times \frac{د ن}{د س}$

أكمل الحل ـــ ؟؟

مكتبة السحاب ALWESAM
الأستاذ: ناجح الجمزاوي

مشتقة اقتران مرفوعة لقوة (هو اس)^{ن}

اذا كان ص = (هو اس)^{ن} حيث
ن : عدد صحيح وكان هو (س)
اقتران قابل للاشتقاق فإن

$$\frac{د ص}{د س} = ن(هو اس)^{ن-١} \times هـ'(س)$$

مشتقة القوس
= مشتقة القوس كله × مشتقة ما داخله

= ن (القوس)$^{ن-١}$ × مشتقة ما داخله

البرهان

نفرض ع = هو (س)،
⇐ ص = ع^{ن} ، ع = هو (س)

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

= ن ع$^{ن-١}$ × هـ'(س)

بما أن ع = (هو اس)

⇐ = ن (هو اس)$^{ن-١}$ × هـ'(س)

مثال ①

① ص = $(س^{٢} + ٣س)^{٥}$

ص' = ٥ $(س^{٢} + ٣س)^{٤}$ × (٢س + ٣)

مشتقة القوس × مشتقة ما داخله

② ص = $(\frac{س}{٥} + \frac{٥}{س})^{٥}$

ص' = ٥ $(\frac{س}{٥} + \frac{٥}{س})^{٤}$ × $(\frac{١}{٥} - \frac{٥}{س^{٢}})$

③ ص = $\frac{١}{٤(٣ - ٢س)}$

أكمل

ص = $(٣ - ٢س)^{-٤}$

ص' = $-٤(٣ - ٢س)^{-٥} \times -٢$

= $\frac{+٨}{(٣ - ٢س)^{٥}}$

④ ص = $(\frac{١}{س} + ٢س)^{-٣}$

ص' = $-٣(\frac{١}{س} + ٢س)^{-٤} \times (\frac{-١}{س^{٢}} + ٢)$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ②

اذا كان $ق(١) = ٢$ ، $ق'(١) = \frac{١}{٢}$

اوجد $\frac{د}{دس}(ق^{٢}(س) + ٣س)^{٤}$ عند $س = ١$

الحل

$\frac{د}{دس}(ق^{٢}(س) + ٣س)^{٤} =$

$٤(ق^{٢}(س) + ٣س)^{٣} \times (٢ق(س) ق'(س) + ٣)$

$\frac{د}{دس}|_{س=١} = ٤(ق^{٢}(١) + ٣(١))^{٣} \times (٢ق(١) ق'(١) + ٣)$

$= ٤(-٨ + ٣)(٤ \times ٣ \times \frac{١}{٢} + ٣)$

$= -١٢ + ٨ = -٩٦$

مثال ③

اذا كان $ل(س) = س^{٢}(٥ - ٣س)^{٤}$

فجد $ل'(٢)$ ؟

الحل

$ل'(س) = س^{٢} \times ٤(٥ - ٣س)^{٣} \times -٣ + (٥ - ٣س)^{٤} \times ٢س$

$ل'(٢) = ٤ \times ٢^{٢}(٥ - ٦)^{٣} \times -٣ + (٥ - ٦)^{٤} \times ٤$

$= ٤٨ \times ١ + ١ \times ٤ = ٥٢$

مثال ④

$هـ(س)$ اقترن لشيء حدود وكان $هـ(١) = ٥$ ، $هـ'(١) = -١$

فاوجد $(هـ^{٢})'(١)$ ؟

الحل

$(هـ^{٢})'(س) = ٢ هـ(س) \times هـ'(س)$

$= ٢ هـ(١) \times هـ'(١)$

$= ٢ \times ٥ \times -١ = -١٠$

مثال ⑤

اذا كان $ص = جا هـ(س)$

اثبت ان $\frac{د ص}{د س} = هـ'(س) جتا هـ(س)$

الحل

نفرض $ع = هـ(س)$

$ص = جا ع$ ، $ع = هـ(س)$

قاعدة السلسلة

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$= جتا ع \times هـ'(س)$

$= جتا هـ(س) \times هـ'(س)$

$= هـ'(س) جتا س$

مكتبة الهدام AL-HESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

$ه(س) = س^2 + هـ^4(س)$ وكان $هـ(1) = 2$ ، $هـ'(1) = 1$ فجد $ه'(1)$ ؟

الحل

$ه'(س) = 2س + 4 هـ^3(س) \times هـ'(س)$

$ه'(1) = 2 + 4 هـ^3(1) \times هـ'(1)$

$= 2 + 4 \times 2^3 \times 1$

$= 2 + 32 = 34$

مثال ⑦

$ل(س) = ه(2س - 1) + هـ(س^2 + 4)$ وكانت $ه'(-1) = -2$ ، $هـ'(4) = 3$

اوجد $ل'(0)$

الحل

$ل'(س) = ه'(2س - 1) \times 2 + هـ'(س^2 + 4) \times 2س$

$ل'(0) = ه'(-1) \times 2 + هـ'(4) \times 0 \times 2$

$= -2 \times 2 +$ صفر

$= -4$

مثال ⑧

$$ه(س) = \begin{cases} |1 - س^2| + 14س & س < 1 \\ س هـ(س) + 10 & س \geq 1 \end{cases}$$

وكان $هـ(س)$ قابلاً للاشتقاق

صيث $هـ(1) = هـ'(1) = 2$

احث في قابلية $ه(س)$ للاشتقاق عند $س = 1$

الحل

$|1 - س^2|$: $س^2 - 1$ (− − −) ، $1 - س^2$ (+ + +) ، النقاط -1 ، $+1$

$$ه(س) = \begin{cases} س^2 - 1 + 14س & س \leq -1 \\ 1 - س^2 + 14س & -1 < س < 1 \\ س هـ(س) + 10 & س \geq 1 \end{cases}$$

نبحث في اتصال $ه(س)$ عند $س = 1$

هنا $س هـ(س) + 10 = 1 \times 2 + 10 = 14$ ← $س \to 1^+$

هنا $(1 - س^2 + 14س) = 14$ ، $ه(1) = 14$ ← $س \to 1^-$

$\Leftarrow$ $ه$ متصل عند $س = 1$

$$ه'(س) = \begin{cases} 2س + 14 & س < -1 \\ -2س + 14 & -1 < س < 1 \\ س هـ'(س) + هـ(س) & س > 1 \end{cases}$$

$ه'(1^+) = 1 \times 2 \times هـ(1) + هـ'(1) = 2 + 2 = 4$

$ه'(1^-) = -2 \times 1 + 14 = 12$

$ه'(1^+) \neq ه'(1^-) \Leftarrow ه'(1)$ غير موجودة

$\Leftarrow$ $ه(س)$ قابل للاشتقاق عند $س = 1$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

ملاحظة

$(هـ(هـ(س)))' = \frac{ك}{ك س}(هـ(هـ(س)))$

$= هـ'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

مشتقة $هـ(ك ع + ١) = هـ'(ك ع + ١) \times ك$

مشتقة $هـ(٣ ع^٢) = هـ'(٣ ع^٢) \times ٦ ع$

واذا كان $هـ(ك ع + ١) = ٢ س^٢ + ١$

وطلب ايجاد $هـ(٣)$ هنا لا نعوض بدل $س = ٣$ (هذا خطأ)

نعوض $ك ع + ١ = ٣$

$\Leftarrow ك ع = ٢ \Leftarrow ع = ١$

$هـ(٣) = ٣(١)^٢ + ١ = ٤$

مثال على ملاحظة

اذا كان $هـ(٤ س) = س^٣ - ٣ س + ٧$

اوجد $هـ'(٤)$ ؟

الحل

$هـ'(ك ع) \times ك = ٣ ع^٢ - ٣$

$ك ع = ٤ \Leftarrow ع = ٢$

$هـ'(٤) \times ٢ = ٣(٢)^٢ - ٣$

$هـ'(٤) \times ٢ = ١٢ - ٣ = ٩$

$هـ'(٤) = \frac{٩}{٢}$

مثال ⑨

اذا كان $هـ(س)$ قابلاً للاشتقاق وكان $هـ(س^٢ + ١) = س$ اوجد $هـ'(٩)$

الحل

$هـ'(س^٣ + ١) \times ٣ س^٢ = ١$

$س^٣ + ١ = ٩ \Leftarrow س^٣ = ٨$

$س = ٢$

$هـ'(٩) \times ٣ (٢)^٢ = ١$

$هـ'(٩) \times ١٢ = ١$

$\Leftarrow هـ'(٩) = \frac{١}{١٢}$

مثال ⑩

اذا كان $ص = هـ(س^٢ + ٢ س)$

$هـ'(٣) = ٥$ اوجد $ص'$ عندما $س = ١$

الحل

$ص' = هـ'(س^٢ + ٢ س) \times (٢ س + ٢)$

$ص'_{١} = هـ'(٣) \times ٤ = ٥ \times ٤ = ٢٠$

$س = ١$

مثال ⑪

$هـ(س) = س^٣ \times هـ(٣ - ٢ س) \times هـ(٥) = ٤$

$هـ'(٥) = ٢$ جد $هـ'(-١)$

الحل

$هـ'(س) = س^٣ \times هـ'(٣ - ٢ س) \times -٢$

$+ هـ(٣ - ٢ س) \times ٣ س^٢$

$هـ'(-١) = -١ \times هـ'(٥) \times -٢ +$

$هـ(٥) \times ٣$

$= ٤ + ١٢ = ١٦$

مثال (١٢)

ص = هـ٢(س٣) جد هـ(٨)
علمًا بأن هـ(٨) = ١ ، ص|س=٢ = -١٠

الحل

ص| = ٢هـ(س٢) × هـ(س٣) × ٣س٢
س=٢
= ٢هـ(٨) × هـ(٨) × ٤ × ٣
= ١٢ × هـ(٨) × ١ × ٢ = -١٠
هـ(٨) = $\frac{-١٠}{٢٤} = \frac{-٥}{١٢}$

مثال (١٣)

اذا كان هـ(س٢+١) = ٤س٢ + ٢س
حيث س > ٠ وكانت هـ(٥) = ٣
اوجد قيمة ٢ ، هـ(٥) ؟

الحل

هـ(س٢+١) × ٢س = ٤س + ٢
س٢ + ١ = ٥ ⇐ س٢ = ٤
س = ± ٢ لأن س > ٠
هـ(٥) × ٢ × ٢ = ٤ × ٣ + ٢
٨ + ٢ = ١٢ ⇐ ٢ = ٤
نشتقه مرة أخرى
هـ(س٢+١) × ٢ × ٢س + ٢ × هـ(س٢+١) × ٢س
= ٤
هـ(٥) × ٢ × ٤ + ٢ × هـ(٥) × ٤ = ٤
٣٢ + ١٦ هـ(٥) = ٤
١٦ هـ(٥) = -٢٨
هـ(٥) = $\frac{-٢٨}{١٦} = \frac{-٧}{٤}$

مثال (١٤)

هـ(س) = ٥س٢ + ٢٠س + ٢ ، ٢ > ٠
وكانت هـ(٩) = ٢ فجد قيمة ٢ ؟

الحل

هـ(س٢) × ٢س = ١٠س + ٢٠
عندما س = ٣ ⇐ س٢ = ٩ ⇐
س = ± ٣
هـ(٩) × ٦ = ٣٠ + ٢٠
٦ هـ(٩) = ٣٠ + ٢٠
٦ × ٢ = ٣٠ + ٢٠
٢٠ - ١٢ = ١٨
٢ = ٩

مثال (١٥)

ل(س) = هـ٣(هـ(س))
وكان هـ(١) = ٢ ، هـ(١) = ٣
هـ(٢) = -١ ، هـ(٢) = -٤
جد ل(١) ؟

الحل

ل(س) = ٣هـ٢(هـ(س)) × هـ(هـ(س)) × هـ(س)
ل(١) = ٣هـ٢(هـ(١)) × هـ(هـ(١)) × هـ(١)
= ٣هـ٢(٢) × هـ(٢) × ٣
= ٣(-١)٢ × -٤ × ٣
= -٣٦

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي Sgmzawi

مثال (١٦)

اذا كان ص = (ظاس + قاس)^{ن}
فاثبت ان $\frac{د ص}{د س}$ = ن ص^{ن} قاس

الحل

$\frac{د ص}{د س}$ = ن (ظاس + قاس)$^{ن-١}$ × (قا^{٢}س + قاس ظاس)

اخراج قاس عامل مشترك

= ن (ظاس + قاس)$^{ن-١}$ × قاس (قاس + ظاس)

= ن (ظاس + قاس)$^{ن-١+١}$ × قاس

= ن (ظاس + قاس)^{ن} × قاس

= ن ص^{ن} قاس

مثال (١٧)

ص = $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣}س + ظاس
اثبت ان $\frac{د ص}{د س}$ = قا^{٤}س

الحل

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{٣}$ × ٣ ظا^{٢}س قا^{٢}س + قا^{٢}س

= ظا^{٢}س قا^{٢}س + قا^{٢}س

= قا^{٢}س (ظا^{٢}س + ١)

= قا^{٢}س × قا^{٢}س

= قا^{٤}س

مثال (١٨)

اذا كان ص = س ظاس فاثبت

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ - ٢ ص قا^{٢}س = ٢ قا^{٢}س

الحل

$\frac{د ص}{د س}$ = س × قا^{٢}س + ظاس × ١

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = س × ٢ قاس × قاس ظاس + قا^{٢}س × ١ + قا^{٢}س

= ٢ س قا^{٢}س ظاس + ٢ قا^{٢}س

لكن س ظاس = ص

= ٢ قا^{٢}س × ص + ٢ قا^{٢}س

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ٢ ص قا^{٢}س + ٢ قا^{٢}س

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ - ٢ ص قا^{٢}س = ٢ قا^{٢}س

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

نتيجة هامة

$ص = حا^{ن} س \Rightarrow$

$ص' = ن\ حا^{ن-١} س \times حتا س$

بشكل عام

$ص = حا^{ن}(و(س))$ فان

$ص' = ن\ حا^{ن-١}(و(س)) \times حتا(و(س)) \times و'(س)$

مثال (١٩)

$ص = حا(ظا^{٣} س)$ جد $\frac{د ص}{د س}$ ؟

الحل

$ص' = حتا(ظا^{٣} س) \times ٣ ظا^{٢} س \times قا^{٢} س$

مثال (٢٠)

$ص = حا^{٣} س$ جد $ص'$ حيث $س$ بالدرجات

الحل

$س$ بالدرجات $\Leftarrow \frac{س \times \pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{١٨٠} س$ راديان

$ص = حا^{٣} \frac{\pi}{١٨٠} س$

$ص' = ٣ \frac{\pi}{١٨٠} حتا \frac{\pi}{١٨٠} س$

مثال (٢١)

$ص = قا^{٣} س$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = \frac{\pi}{٦}$

الحل

$ص' = ٣ قا^{٢} س \times قا س ظا س \times ٢$

$ص'|_{س = \frac{\pi}{٦}} = ٣ قا^{٢} \frac{\pi}{٦} \times قا \frac{\pi}{٦} ظا \frac{\pi}{٦} \times ٢$

$= ٦ قا^{٣} \frac{\pi}{٣} ظا \frac{\pi}{٣}$

$حتا \frac{\pi}{٣} = \frac{١}{٢} \Leftarrow قا \frac{\pi}{٣} = ٢$

$= ٦ (٢)^{٣} \times \sqrt{٣} = ٤٨ \sqrt{٣}$

مثال (٢٢)

اذا كان $ص = حا(س + و)$ فجد $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ بدلالة ص ؟

الحل

$\frac{د ص}{د س} = ٢ حا(س + و) \times حتا(س + و)$

$= حا ٢(س + و)$ ضعف زاوية

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = حتا ٢(س + و) \times ٢$

$حتا ٢ س = ١ - ٢ حا^{٢} س$

بالتعويض $حتا ٢(س + و) = ١ - ٢ حا^{٢}(س + و)$

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٢(١ - ٢ حا^{٢}(س + و))$

$= ٢(١ - ٢ ص)$

النهايات التي على صورة المشتقة

① $\text{ه}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ه}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ه}(\text{س})}{\text{هـ}}$

② $\text{ه}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ه}(\text{ع}) - \text{ه}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

مثال ①

اذا كان $\text{ه}(\text{س}) = 2\text{س}^2$ فاوجد

$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ه}(2+\text{هـ}) - \text{ه}(2)}{\text{هـ}}$

الحل

$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ه}(2+\text{هـ}) - \text{ه}(2)}{\text{هـ}} = \text{ه}'(2)$

$\text{ه}'(\text{س}) = 4\text{س} \Rightarrow \text{ه}'(2) = 8$

طريقة أخرى

$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ه}(2+\text{هـ}) - \text{ه}(2)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{2(2+\text{هـ})^2 - 8}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{2(4+4\text{هـ}+\text{هـ}^2) - 8}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{8+8\text{هـ}+2\text{هـ}^2 - 8}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{هـ}(8+2\text{هـ})}{\text{هـ}}$

$= 8$

مثال ②

$\text{ه}(\text{س}) = \text{س}^5 + \text{س}$ اوجد

① $\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ه}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ه}(\text{س})}{\text{هـ}}$

الحل $= \text{ه}'(\text{س}) = 5\text{س}^4 + 1$

② $\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ه}(2+\text{هـ}) - \text{ه}(2)}{\text{هـ}}$

الحل $= \text{ه}'(2) = 5(2)^4 + 1$

$= 81$

③ $\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ه}(0) - \text{ه}(\text{هـ})}{\text{هـ}^3}$

الحل

$= -\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ه}(0+\text{هـ}) - \text{ه}(0)}{\text{هـ}^3}$ عكس الاشارة

$= -\frac{1}{3} \times \text{ه}'(0)$

$= -\frac{1}{3} \times (5(0)^4 + 1) = -\frac{1}{3}$

مكتبة المعلم
AL-MOALEM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ③

$ق(س) = أس^2 + ٣س$ وكانت $\lim_{ع \to ١} \frac{ق(١) - ق(ع)}{ع - ١} = -٥$ اوجد أ

الحل

$ق'(س) = ٢أس + ٣$

$\lim_{ع \to ١} \frac{ق(١) - ق(ع)}{ع - ١} = -٥$

$-ق'(١) = -٥ \Leftarrow ق'(١) = ٥$

$ق'(١) = ٢أ + ٣ = ٥$

$٢أ = ٢ \Leftarrow أ = ١$

مثال ④

$ق(س) = س^٤$، جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + ٣هـ) - ق(س)}{٤هـ}$

الحل

نفرض $و = ٣هـ \Leftarrow هـ = \frac{و}{٣}$

$هـ \to ٠ \Leftarrow و \to ٠$

$= \lim_{و \to ٠} \frac{ق(س + و) - ق(س)}{\frac{٤و}{٣}}$

$= \frac{٣}{٤} \times ق'(س)$

$= \frac{٣}{٤} \times ٤س^٣ = ٣س^٣$

مثال ⑤

اثبت ان

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س - هـ)}{هـ} = ٢ق'(س)$

الحل

باضافة وطرح $ق(س)$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س) + ق(س) - ق(س - هـ)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} + \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س) - ق(س - هـ)}{هـ}$

$= ق'(س) - \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س - هـ) - ق(س)}{هـ}$

نفرض $و = -هـ \Leftarrow هـ = -و$

$هـ \to ٠ \Leftarrow و \to ٠$

$= ق'(س) - \lim_{و \to ٠} \frac{ق(س + و) - ق(س)}{-و}$

$= ق'(س) + ق'(س)$

$= ٢ق'(س)$

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

اذا كان $ق(س) = أ س^{٢} + ٣س$

وكانت $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = ٧$

اوجد قيمة أ ؟

الحل

$\lim_{س \to ١} \frac{ق(س^{٢}) - ق(١)}{س - ١} = ق'(١) = ٧$

$ق'(س) = ٢أ س + ٣$

$ق'(١) = ٢أ + ٣ = ٧$

$٢أ = ٤ \Leftarrow أ = ٢$

مثال ⑦

اذا كان $ق'(٤) = ٦$ فجد

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٤ - ٢هـ) - ق(٤ + ٥هـ)}{هـ}$

الحل

باضافة وطرح $ق(٤)$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٤ - ٢هـ) - ق(٤) + ق(٤) - ق(٤ + ٥هـ)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٤ - ٢هـ) - ق(٤)}{هـ} + \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٤) - ق(٤ + ٥هـ)}{هـ}$

$= -٢ \times ق'(٤) - ٥ ق'(٤)$

$= -٢ \times ٦ - ٥ \times ٦ = -٤٢$

مثال ⑧

جد $\lim_{س \to ٤} \frac{٣س - ٣ع}{ع^{٥} - س^{٥}}$

الحل

$= \lim_{ع \to س} \frac{١}{\frac{ع^{٥} - س^{٥}}{-٣(ع - س)}}$

$= -٣ \lim_{ع \to س} \frac{١}{\frac{ع^{٥} - س^{٥}}{ع - س}} = -٣ \times \frac{١}{ق'(س)}$

$= \frac{-٣}{٥س^{٤}}$

ملاحظة

$\lim_{ع \to س} \frac{ع^{٥} - س^{٥}}{ع - س} =$ مشتقة $س^{٥}$

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑨

اذا كان ق(٣) = ٥ ، ق(٣) = ٤
فاوجد
هـا $\frac{٣ق(س) - س ق(٣)}{س - ٣}$
س ← ٣
الحل
باضافة وطرح س ق(س)

= هـا $\frac{٣ق(س) - س ق(س) + س ق(س) - س ق(٣)}{س - ٣}$
س ← ٣

= هـا $\frac{ق(س)(٣ - س)}{-(٣ - س)} + س \frac{(ق(س) - ق(٣))}{س - ٣}$
س ← ٣
= - ق(٣) + ٣ × ق(٣)
= - ٥ + ٣ × ٤ = ٧

مثال ⑩
اذا كان ق(٠) = ٥ ، ق(٠) = ٠
فاوجد هـا $\frac{٣ق(س)}{س}$
س ← ٠
باضافة وطرح ٣ ق(٠)

= هـا $\frac{٣ق(س) - ٣ق(٠) + ٣ق(٠)}{س}$
س ← ٠
= ٣ ق(٠) × ٠
= ٣ × ٥ = ١٥

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

① تدريب ① صـ ١٣٣

① ص = $(س^{٣} - ٤س)^{٤}$ جـ $\frac{د ص}{د س}$

الحل

ص' = ٤ $(س^{٣} - ٤س)^{٣}$ $(٣س^{٢} - ٤)$

② هـ(س) = $س^{٢} + ٥$ ، هـ(س) = $\frac{١}{س}$

اوجد (هـ ○ هـ)'(س)

الحل

(هـ ○ هـ)'(س) = هـ'(هـ(س)) × هـ'(س)

هـ'(س) = $-\frac{١}{س^{٢}}$ ، هـ(س) = $\frac{١}{س}$

(هـ ○ هـ)'(س) = هـ'$(\frac{١}{س})$ × $-\frac{١}{س^{٢}}$

= $-٢ \times \frac{١}{س} \times -\frac{١}{س^{٢}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

② تدريب ② صـ ١٣٥

جد هـ'(س) لكل مما يأتي

١) هـ(س) = $حا^{٢}س$

هـ'(س) = $٢ حاس \times جتاس \times ٥$

٢) هـ(س) = $(س^{٣} - ٣س^{٢} + ٧)^{٨}$

هـ'(س) = $٨(س^{٣} - ٣س^{٢} + ٨)^{٧} (٣س^{٢} - ٦س)$

٣) هـ(س) = $حا^{٣}س$

هـ'(س) = $٣ حا^{٢}س \times جتاس \times ٥$

تدريب ③ صـ ١٣٦

هـ(س) = $\frac{١}{س}$ جد هـ'(٨)

الحل

هـ'$(س^{-١})$ × $-١ س^{-٢}$ = $-\frac{١}{س^{٢}}$

هـ'$(٢^{-٢})$ × $-٢(٢)^{-٣}$ = $-\frac{١}{٢^{٢}}$

هـ'(٨) × $-\frac{١}{٤}$ = $-\frac{١}{٤}$

هـ'(٨) = $-\frac{١}{٤٨}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل الكتاب ص ١٣٧

س١ استخدم قاعدة السلسلة لايجاد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي

ب) $ص = (س^3 + 2س + 1)^{15}$

الحل

نفرض ع $= س^3 + 2س + 1$

$ص = ع^{15}$ $ع = س^3 + 2س + 1$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

$= 15 ع^{14} \times (3س^2 + 2)$

$= 15 (س^3 + 2س + 1)^{14} (3س^2 + 2)$

ب) $ص = (8س - 7)^{-6}$

الحل

$ع = 8س - 7$

$ص = ع^{-6}$ $ع = 8س - 7$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

$= -6 ع^{-7} \times 8$

$= -48 (8س - 7)^{-7}$

ج) $ص = \frac{س^4}{(س^2 - 1)^4}$

الحل

$ص = \left(\frac{س}{س^2 - 1}\right)^4$

$ع = \frac{س}{س^2 - 1}$ ⟵

$ص = ع^4$ $ع = \frac{س}{س^2 - 1}$

$\frac{ص}{س} = 4 ع^3 \times \frac{(س^2 - 1) 1 - س \times 2س}{(س^2 - 1)^2}$

$= 4 \left(\frac{س}{س^2 - 1}\right)^3 \left(\frac{-س^2 - 1}{(س^2 - 1)^2}\right)$

د) $ص = حا (س^2 - س)$

الحل

$ع = س^2 - س$

$ص = حا ع$ $ع = س^2 - س$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

$= حتا ع \times (2س - 1)$

$= حتا (س^2 - س) \times (2س - 1)$

مكتبة الإسكندرية ALEXSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

س٢

اذا كان $ه(س) = س^2 + ٣س$
$هـ(س) = س^3 - ٤$ ، جد $(ه \circ هـ)'(٢)$

الحل

$ه'(س) = ٢س + ٣$ ، $هـ'(س) = ٣س^2$

$(ه \circ هـ)'(٢) = ه'(هـ(٢)) \times هـ'(٢)$
$= ه'(٢^3 - ٤) \times ٣ \times ٢^2$
$= ه'(٤) \times ١٢ =$
$= (٢ \times ٤ + ٣) \times ١٢ = ١١ \times ١٢$
$= ١٣٢$

س٣

اذا كان $ه$ ، $هـ$ اقترانيه معرفين على ح وقابلين للاشتقاق في ح
فاليهما وكان $ه(١٠) = ٢$ ، $ه'(١٠) = ٢$
$هـ'(-٢) = \frac{١}{٢}$ جد $(هـ \circ ه)'(١٠)$

الحل

$(هـ \circ ه)'(١٠) = هـ'(ه(١٠)) \times ه'(١٠)$
$= هـ'(-٢) \times ٢$
$= \frac{١}{٢} \times ٢ = ١$

س٤

اذا كان $هـ(س)$ قابلا للاشتقاق عند $س$ ، وكان $ص = حا^ن هـ(س)$
حيث ن عدد صحيح اثبت ان
$\frac{دص}{دس} = ن \, حا^{ن-١}(س) \times ضا هـ(س) \times هـ'(س)$

الحل

$ع = هـ(س)$
$ص = حا^ن ع$ $ع = هـ(س)$
$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$
$= ن \, حا^{ن-١} ع \times ضا ع \times هـ'(س)$
$= ن \, حا^{ن-١}(هـ(س)) \times ضا(هـ(س)) \times هـ'(س)$

س٥

$ل(س) = ه(هـ(س))$
$هـ(٤) = ٤$ ، $ل'(٤) = ٢$ ، $ه'(٤) = -٥$
جد $هـ'(٤)$ ؟

الحل

$ل'(س) = ه'(هـ(س)) \times هـ'(س)$
$ل'(٤) = ه'(هـ(٤)) \times هـ'(٤)$
$٢ = ه'(٤) \times هـ'(٤)$
$٢ = -٥ \times هـ'(٤)$
$هـ'(٤) = \frac{٢}{-٥}$

مكتبة السحاب AlwesAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

س٦ جد $\frac{ص}{س}$ مما يأتي

أ) $ص = ظا ع$ ، $ع = ٤س^{٢} + س$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

$= قا^{٢} ع \times (٨س + ١)$

$= قا^{٢}(٤س^{٢} + س) \times (٨س + ١)$

ب) $ص = م^{٣} + ٣م$ ، $م = س^{٢} - ٧$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{م} \times \frac{م}{س}$

$= (٣م^{٢} + ٣) \times ٣س^{٢}$

$= ٣(س^{٢} - ٤)^{٢} + ٣) \times ٣س^{٢}$

$= ٣س^{٢}(س^{٤} - ٨س^{٢} + ١٩)$

$= ٣س^{٦} - ٢٤س^{٤} + ٥٧س^{٢}$

س٧

$ص = ضتا(س + \frac{\pi}{٢})$ اثبت ان

$ص + ص'' = ٠$

الحل

$ص' = -حتا(س + \frac{\pi}{٢})$

$ص'' = -ضتا(س + \frac{\pi}{٢})$

$ص + ص'' = ضتا(س + \frac{\pi}{٢}) - ضتا(س + \frac{\pi}{٢}) = ٠$

س٨

$ص = ظا س + \frac{١}{٣} ظا^{٣} س$

برهن أن $\frac{ص}{س} = قا^{٤} س$

الحل

$ص' = قا^{٢} س + \frac{١}{٣} \times ٣ ظا^{٢} س قا^{٢} س$

$ص' = قا^{٢} س (١ + ظا^{٢} س)$

$= قا^{٢} س \times قا^{٢} س = قا^{٤} س$

س٩ جد $\frac{ص}{س}$

أ) $ص = حا^{٢} ٣س$ $\quad س = \frac{\pi}{٦}$

الحل

$\frac{ص}{س} = ٢حا ٣س \times ضتا ٣س \times ٣$

$\left|\frac{ص}{س}\right| = ٢حا \frac{\pi}{٣} ضتا \frac{\pi}{٢} \times ٣$ $\quad س = \frac{\pi}{٦}$

$= ٦حا \frac{\pi}{٣} ضتا \frac{\pi}{٢} = صفر$

$= ٦ \times ٠ = صفر$

ب) $ص = (س - \frac{١}{س})^{٣}$ $\quad س = ٢$

$\frac{ص}{س} = ٣(س - \frac{١}{س})^{٢} \times (١ + \frac{١}{س^{٢}})$

$\left|\frac{ص}{س}\right| = ٣(٢ - \frac{١}{٢})^{٢} \times (١ + \frac{١}{٤})$

$= ٣ \times (\frac{٣}{٢})^{٢} \times \frac{٥}{٤} = ٣ \times \frac{٩}{٤} \times \frac{٥}{٤}$

$= \frac{١٣٥}{١٦}$

مكتبة العلم ALWSAM المعلم ناجح الجمزاوي

د) ص = س هـ(س) ، س = ٩
علماً بأن هـ(٩) = -٥
هـ(٩) = -٣

الكل
$\frac{ص}{س} = س \times هـ'(س) + هـ(س) \times ١$
$\left|\frac{ص}{س}\right|_{س=٩} = ٩ \times هـ'(٩) + هـ(٩)$
$= ٩ \times -٥ + -٣$
$= -٤٥ - ٣ = -٤٨$

س١
اذا كان هـ قابلاً للاشتقاق
وكان هـ(جاء س) = قتاء س
حيث س ∈ $(٠ ، \frac{\pi}{٣}]$ جد هـ'$(\frac{١}{٢})$

الكل
هـ(جاء س) × ضاء س = قتاء س × ضاء س

جاء س = $\frac{١}{٢}$
س = $\frac{\pi}{٦}$ ⟸ ء = $\frac{\pi}{٣}$

هـ'(جاء $\frac{\pi}{٦}$) × ضاء $\frac{\pi}{٦}$ × ضاء س = -قتاء $\frac{\pi}{٦}$ × ضتاء $\frac{\pi}{٦}$ × ضاء س

هـ'$(\frac{١}{٢})$ × ضتا $\frac{\pi}{٣}$ = -قتا $\frac{\pi}{٣}$ ضتا $\frac{\pi}{٣}$ × ضاء س

هـ'$(\frac{١}{٢})$ × $\frac{١}{٢}$ = $-\frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{١}{٢} \times \sqrt{٣}$

هـ'$(\frac{١}{٢})$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $-٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

هـ'$(\frac{١}{٢})$ = $\frac{-٨}{\sqrt{٣}} = -٤$

س١٢
ص = هـ(س٢ + ٢س) ، هـ'(٣) = ٥
جد $\frac{ص}{س}$ عند س = ١

الكل
$\frac{ص}{س} = هـ'(س^٢ + ٢س) \times (٢س + ٢)$
$\left|\frac{ص}{س}\right|_{س=١} = هـ'(٣) \times ٤$
$= ٥ \times ٤ = ٢٠$

مركز الوسام ALWESAM
الموقع: ناجح الجمزاوي

تمارين مراجعة ص ١٤٧

س ٣

(ب) اذا علمت ان ص = س ظا س
اثبت ان
ص'' - ٢ ص قا٢ س = ٢ قا٢ س

الحل

ص' = س × ٢ قا٢ س + ظا س × ١

ص'' = س × ٢ × ٢ قا س × قا س ظا س + ٢ قا٢ س × ١
+ قا٢ س

ص'' = ٢ س قا٢ س ظا س + ٢ قا٢ س

لكن س ظا س = ص

ص'' = ٢ ص قا٢ س + ٢ قا٢ س

ص'' - ٢ ص قا٢ س = ٢ قا٢ س

س ٤

ص = ن٢ - ١/٣ ن ، س = ١/٢ ن٢ - ٢ ن

اوجد $\left.\frac{د^٢ ص}{د س^٢}\right|_{ن=٦}$

الحل

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$

$= (٢ ن - \frac{١}{٣}) \times \frac{١}{ن - ٢}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٢ ن - \frac{١}{٣}}{ن - ٢}$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{(ن - ٢) \times ٢ - (٢ ن - \frac{١}{٣}) \times ١}{(ن - ٢)^٢} \times \frac{١}{ن - ٢}$

$\left.\frac{د^٢ ص}{د س^٢}\right|_{ن=١} = \frac{-٢ - (-\frac{٥}{٣})}{(-١)^٢} \times \frac{١}{-١}$

$= \frac{١١}{١٩}$

س ٦

اذا كان هـ(س) اقترانا قابلا للاشتقاق عند س = -٢ ، هـ(-٢) = ١
هـ'(-٢) = ٢ ، جد قـ'(-٢)

(أ) قـ(س) = $\frac{س^٢ - س}{هـ(س)}$

الحل

$قـ'(س) = \frac{هـ'(س)(٢ س - ١) - (س^٢ - س) \times هـ'(س)}{(هـ(س))^٢}$

$قـ'(-٢) = \frac{هـ'(-٢)(-٥) - ٦ \times ٢ \times هـ(-٢)}{(هـ(-٢))^٢}$

$= \frac{١ \times -٥ - ١٢ \times ٢}{١}$

$= \frac{-٥ - ٢٤}{١} = -٢٩$

مكتبة الوسام
ALWSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

س٦
(S) ه(س) = ظا(π هـ(س))

الحل
ه'(س) = قا²(π هـ(س)) × π هـ'(س)
ه'(-٢) = قا²π (هـ(-٢)) × π هـ'(-٢)
= قا²π × ٨ × ٢
= ١ × π × ٢ = π٢

س٨ ص١٤٤ راجعها

ه(س) = س³ + ٢س ، هـ(س) = ٣س²
اثبت

الحل
ه'(س) = ٣س² + ٢ ، ه''(س) = ٦س
هـ'(س) = ٦س هـ''(س) = ٦
(P) (ه × هـ)'(١) = ه''(هـ(١)) × هـ'(١)
= ه''(٣) × ٦ = ٦ × ٢ × ٦
= ١٨ × ٦ = ١٠٨

(Q) (ه × هـ)''(١)
(ه × هـ)'(س) = ه'(هـ(س)) × هـ'(س)
(ه × هـ)''(س) = ه''(هـ(س)) × هـ'(س) × هـ'(س) + ه'(هـ(س)) × هـ''(س)
(ه × هـ)''(١) = ه''(٣) × ٦ × ٦ + ٦ × ٢ × ٦
= ١٨ × ٦ + ٢ × ٦ = ٢٤٤

اختبار ذاتي ص١٤٩

س٥
ص = ه(س² + ٤س) ، ه'(٣) = ٥
اوجد $\frac{dص}{dس}$ | س = ١

الحل
$\frac{dص}{dس}$ = ه'(س² + ٤س)(٢س + ٤)
$\left.\frac{dص}{dس}\right|_{س=١}$ = ه'(٣) × ٦ = ٥ × ٦ = ٣٠

س٦
ه(س) = جتا٢س فاوجد ضمنيا
ه''(س) + ٦ هـ(س)

الحل
ه'(س) = -٢ جا٢س
ه''(س) = -٤ جتا٢س
ه''(س) + ٦ هـ(س)
-٤ جتا٢س + ٦ جتا٢س
= ٢ جتا٢س

س١٠ : هـ(س) كثير حدود ، هـ(١) = ٥
هـ'(١) = -١ فاوجد (هـ²)'(١)

الحل
(هـ²)'(١) = ٢ هـ(١) × هـ'(١)
= ٢ × ٥ × -١ = -١٠

مكتبة الوسام ALWSAM
الوسام ناجح الجمزاوي

س٣ اختبار ذاتي ص١٥

ⓑ اوجد $\frac{ص}{س}$

$ص = قا^{٣}(ظا س) + ١$

الحل

$\frac{ص}{س} = ٣ قا^{٢} ظا س \times قا ظا س \times قا^{٢} س$

$= ٣ قا^{٢} ظا س قا ظا س ظا ظا س قا^{٢} س$

س٤

ⓒ اذا كان هـ قابلاً للاشتقاق
وكان ص = هـ(س٣)
هـ(٨) = ١ ، $\frac{ص}{س}|_{س=٢} = ١٠٠$
جد هـ(٨) علماً بان

الحل

$\frac{ص}{س} = ٢ هـ(س^{٣}) \times هـ(س^{٣}) \times ٣ س^{٢}$

$\frac{ص}{س}|_{س=٢} = ٢ هـ(٨) \times هـ(٨) \times ١٢$

$١٠٠ = ٢ \times ١ \times ٢ \times هـ(٨) \times ١٢$

$هـ(٨) = \frac{١٠٠}{٤٨}$

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

اسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٨) شتوية

① $هـ(س) = (٣س+١)^{٣}$ جد $هـ''(-١)$

الحل

$هـ'(س) = ٣(٣س+١)^{٢} \times ٣$

$= ٩(٣س+١)^{٢}$

$هـ''(س) = ١٨(٣س+١) \times ٣$

$هـ''(-١) = ١٨(-٣+١) \times ٣$

$= -١٨ \times ٢ = -٣٦$

② اذا كان $(م \circ ل)(س) = س$

وكان م، ل قابلين للاشتقاق

حيث $م'(س) = \frac{١}{س^{٢}}$ ، $س \neq ٠$

اوجد $ل'(س)$ =

الحل

$(م \circ ل)(س) = م(ل(س)) = س$

$م'(ل(س)) \times ل'(س) = ١$

$\frac{١}{ل(س)^{٢}} \times ل'(س) = ١$

$\Leftarrow ل'(س) = ل(س)^{٢}$

② وزارة (٢٠١٨) صيفية

① $هـ(س) = حتا^{٢}س$ فاوجد

$هـ''(س) + ٦هـ'(س)$

الحل

$هـ'(س) = ٢حتاس \times -حاس$

$هـ''(س) = -٤حتا^{٢}س + ٢حاس \times حاس$

$هـ''(س) + ٦هـ'(س)$

$= -٤حتا^{٢}س + ٦حا^{٢}س$

$= ٢حا^{٢}س$

② اذا كان $هـ(س) = ٢حاس$

حيث ٢ ثابت $٢ \neq ٠$ ، $ظا(س) = \frac{س^{٣}}{١+س^{٢}}$

وكان $(هـ \circ ظا)'(\frac{\pi}{٤}) =$ صفر

جد مجموعة قيم ٢

الحل

$(هـ \circ ظا)'(\frac{\pi}{٤}) = هـ'(ظا\frac{\pi}{٤}) \times ظا'\frac{\pi}{٤}$

صفر $= هـ'(٢حا\frac{\pi}{٤}) \times ٢حتا\frac{\pi}{٤}$

$هـ'(س) = \frac{(١+س^{٢}) \times ٣س^{٢} - س^{٣} \times ٢س}{(١+س^{٢})^{٢}}$

صفر $= هـ'(\frac{٢}{٢}) \times \frac{٢}{٢}٢$

$= \frac{(\frac{٢}{٢})^{٢} \times ٣ - ٣}{(\frac{٢}{٢})^{٢}+١} \times \frac{٢}{٢}٢ = ٠$

إما $\frac{٢}{٢}٢ = ٠ \Leftarrow ٢ =$ صفر مرفوض $٢ \neq ٠$

أو $٣ - ٣(\frac{٢}{٢})^{٢} = ٠$

$\Leftarrow (\frac{٢}{٢})^{٢} = ١ \Leftarrow \frac{٢}{٢} = ١ \Leftarrow ٢ = \pm ٢$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

③ وزارة (٠٩،ج) شتوي

$هـ(س) = جـ ظا س$ ، $ه(س) = \frac{ب}{١+س^{٢}}$

وكان $(هـ \circ ه)'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{٨}{٥جـ}$

جد قيمة ب ؟

الحل

$(هـ \circ ه)'(\frac{\pi}{٤}) = هـ'(ه(\frac{\pi}{٤})) \times ه'(\frac{\pi}{٤})$

$ه(\frac{\pi}{٤}) = جـ ظا\frac{\pi}{٤} = جـ$

$هـ'(س) = \frac{ب \times ٢س}{(١+س^{٢})^{٢}}$

$هـ'(جـ) = \frac{-ب \times ٢جـ}{٥جـ^{٢}} = \frac{-٢ب}{٥جـ}$

$ه(س) = جـ قا^{٢} س$

$ه(\frac{\pi}{٤}) = جـ \times ٢^{٢} = ٤$

$\frac{٨}{٥جـ} = هـ'(جـ) \times ٤ = \frac{-٢ب}{٥جـ} \times ٤$

$\frac{٨}{٥جـ} = \frac{-٨ب}{٥جـ} \Leftarrow ب = -١$

---

④ وزارة (٠٩،ج) صيفي

اذا كان $ه(س) = جـ ظا س$

$هـ(س) = ب س (س^{٢} - ٣)^{٣}$ وكان

$(هـ \circ ه)'(\frac{\pi}{٤}) = -٥٠$ اوجد قيمة

ب

الحل

$(هـ \circ ه)'(\frac{\pi}{٤}) = هـ'(ه(\frac{\pi}{٤})) \times ه'(\frac{\pi}{٤})$

$ه(\frac{\pi}{٤}) = جـ ظا\frac{\pi}{٤} = جـ$

$ه'(س) = -جـ قتا^{٢} س$

$ه'(\frac{\pi}{٤}) = -جـ \times ٢^{٢} = -٤$

$هـ'(س) = ب س \times ٣(س^{٢}-٣)^{٢} \times ٢س + (س^{٢}-٣)^{٣} \times ب$

$هـ'(جـ) = ب جـ \times ٣(جـ^{٢}-٣)^{٢} \times ٢جـ + ب$

$= ٤جـ^{٢} ب \times ١ = ٤جـ^{٢} ب + ب = ٥ب$

$(هـ \circ ه)'(\frac{\pi}{٤}) = هـ'(جـ) \times -٤$

$-٥٠ = ٥ب \times -٤$

$ب = \frac{-١}{-٢}$

---

⑤ وزارة (١٠،ج) شتوي

اذا كان $ه(س) = ٣ ظا^{٢} س$

$هـ(س) = \frac{٢س}{١+س^{٢}}$ جد $(هـ \circ ه)'(\frac{\pi}{٨})$

الحل

$(هـ \circ ه)'(\frac{\pi}{٨}) = هـ'(ه(\frac{\pi}{٨})) \times ه'(\frac{\pi}{٨})$

$ه(\frac{\pi}{٨}) = ٣ ظا^{٢} \frac{\pi}{٨} = ٣ ظا^{٢} \frac{\pi}{٤} = ٣$

$ه'(س) = ٦ ظا س قا^{٢} س$

$ه'(\frac{\pi}{٨}) = ٦ ظا\frac{\pi}{٤} قا^{٢}\frac{\pi}{٤} = ٦ \times ١ \times ٢ = ١٢$

$هـ'(س) = \frac{(١+س^{٢}) \times ٢ - ٢س \times ٢س}{(١+س^{٢})^{٢}}$

$هـ'(٣) = \frac{١٠ \times ٢ - ٦ \times ٦}{(١٠)^{٢}} = \frac{-١٦}{١٠٠}$

$(هـ \circ ه)'(\frac{\pi}{٨}) = \frac{-١٦}{١٠٠} \times ١٢ = \frac{-٤٨}{٢٥}$

⑥ وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كان قا(س) = $\frac{1}{1+س^2}$

هـ(س) = ظا س اثبت أن

(قا ○ هـ)' (س) = ١

الحل

(قا ○ هـ)' (س) = قا' (هـ(س)) × هـ'(س)

⇐ = قا' (ظا س) × قتا² س

= $\frac{1}{1+ظا^2 س}$ × قتا² س

= $\frac{قتا^2 س}{قتا^2 س}$ = ١

⑦ وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كان (قا ○ هـ)' (٣) = ٨ ،

هـ(٣) = -٢ ، قا'(-٢) = ٤ فما

صحة هـ'(٣)

الحل

(قا ○ هـ)' (٣) = قا' (هـ(٣)) × هـ'(٣)

قا' (-٢) × هـ'(٣) = ٨

٤ × هـ'(٣) = ٨

هـ'(٣) = $\frac{٨}{٤}$ = ٢

⑧ وزارة (٢٠١٣) شتوية

① اذا كان ص = ضتا٤س

فاوجد $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

الحل

$\frac{د ص}{د س}$ = - جتا٤س × ٤

$\frac{د^2 ص}{د س^2}$ = - ضتا٤س × ١٦

$\frac{د^2 ص}{د س^2}$ = - ضتا٤ × $\frac{\pi}{٤}$ × ١٦

= + ١٦

② ص = قا (ظا٤س) وكان

قا(١) = ٥ فاوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = $\frac{\pi}{٨}$

الحل

$\frac{د ص}{د س}$ = قا'(ظا٤س) × قتا٤س × ٤

$\frac{د ص}{د س}|$ = قا'(ظا$\frac{\pi}{٤}$) × قتا$\frac{\pi}{٤}$ × ٤

$\frac{\pi}{٨}$ =

= قا'(١) × ٢ × ٤

= ٥ × ٤ = ٢٠

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑨ وزارة (٢٠١٣) صيفية

① اذا كان $هـ(\frac{1}{2}) = 2$ ، $هـ(\frac{1}{2}) = 8$

فجد $\lim_{س \to 6} \frac{هـ(حا\frac{\pi}{س}) - 2}{س - 6}$

الحل

$= \lim_{س \to 6} \frac{هـ(حا\frac{\pi}{س})) - هـ(جا\frac{\pi}{2})}{س - 6}$

$=$ مشتقة $هـ(حا\frac{\pi}{س})$ عندما $س = 6$

$= هـ'(حا\frac{\pi}{س}) \times ضا\frac{\pi}{س} \times -\frac{\pi}{س^2}$

$= هـ'(حا\frac{\pi}{2}) \times ضا\frac{\pi}{2} \times -\frac{\pi}{36}$

$= هـ'(\frac{1}{2}) \times 2^2 \times -\frac{\pi}{36}$

$= 8 \times 2^2 \times -\frac{\pi}{36} = -\frac{\pi 3}{9}$

② $هـ(س) = (1 + حاس)^3$ فاوجد $هـ'(\frac{\pi}{2})$

الحل

$هـ'(س) = 3(1 + حاس)^2 \times ضاس$

$هـ'(\frac{\pi}{2}) = 3(1 + حا\frac{\pi}{2})^2 \times ضا\frac{\pi}{2}$

$= 3(1 + 1)^2 \times 0$

$=$ صفر

③ اذا كان $هـ(\frac{1}{2}س) = (1 - س)^3$

فاوجد $هـ''(-1)$ ، $هـ'(-1)$

$\lim_{س \to -1} \frac{1 - س}{س + 1}$

$هـ(\frac{1}{2}س) = -س^3$

$هـ'(\frac{1}{2}س) \times \frac{1}{2} = -3س^2$

$\frac{1}{2}س = -1 \Leftarrow س = -2$

$هـ'(\frac{1}{2} \times -2) \times \frac{1}{2} = -3(-2)^2$

$هـ'(-1) \times \frac{1}{2} = -12$

$هـ'(-1) = -24$

$هـ''(\frac{1}{2}س) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -6س$

$\frac{1}{4} هـ''(-1) = -6 \times -2$

$هـ''(-1) = 12 \times 4 = 48$

⑩ وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كان $هـ(2س - 1) = حا^2(\frac{\pi}{18}(4س - 2))$

فاثبت ان $هـ'(3) = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}$

الحل

$هـ'(2س - 1) \times 2 = 2حا(\frac{\pi}{18}(4س - 2))$

$\times ضا\frac{\pi}{18}(4س - 2) \times \frac{4\pi}{18}$

$2س - 1 = 2 \Leftarrow س = 2$

$هـ'(3) \times 2 = 2حا(\frac{\pi}{18} \times 6)$

$\times ضا(\frac{\pi}{18} \times 6) \times \frac{2\pi}{9}$

$\leftarrow$

مكتبة الوسام AL WISAM
المعلم ناجح الجمزاوي

تابع حل (٢٠١٤)

$$\text{ه}'(٢) \times ٢ = ٢ \text{ حا} \frac{\pi}{٣} \text{ جتا} \frac{\pi}{٣} \times \frac{\pi ٢}{٩}$$

$$\text{ه}'(٣) = \frac{١}{٢} \times \frac{٣\sqrt{٢}}{٤} \times \frac{\pi ٢}{٩}$$

$$= \frac{\pi ٢ \sqrt{٢}}{١٨} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$$

مرافقه المقام

$$= \frac{\pi ٣}{٢\sqrt{١٨}} = \frac{\pi}{٣\sqrt{٦}}$$

(١١) وزارة (٢٠١٤) صيفية

اذا كان $\text{ه}(٣س - ١) = \frac{١}{س^٢} - \frac{٢}{س}$

$س \neq ٠$ ، اثبت ان $\text{ه}'(٥) = \frac{١}{١٢}$

الحل

$$\text{ه}'(٣س - ١) \times ٣ = \frac{-٤}{س^٤} + \frac{٢}{س^٣}$$

$$\text{ه}'(٣س - ١) \times ٣ = \frac{-٢}{س^٣} + \frac{٢}{س^٣}$$

$٣س - ١ = ٥$

$٣س = ٦ \Leftarrow س = ٢$

$$\text{ه}'(٥) \times ٣ = \frac{-٢}{٨} + \frac{٢}{٤}$$

$$\text{ه}'(٥) \times ٣ = \frac{-٢}{٨} + \frac{٤}{٨} = \frac{٢}{٨}$$

$$\text{ه}'(٥) = \frac{٢}{٢٤} = \frac{١}{١٢}$$

(١٢) وزارة (٢٠١٥) صيفية

$ص = (ن + ١)^{٢} \text{ ، } س = \frac{١ - ن}{ن + ١}$

اوجد $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س}$ عند $س = ٠$

الحل

$$\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = \frac{\text{د}ص}{\text{د}ن} \times \frac{\text{د}ن}{\text{د}س}$$

$$= ٢(ن + ١) \times \frac{(ن + ١)^{٢} \times -٢ - (١ - ن) ٢ \times ٢(ن + ١)}{(ن + ١)^{٤}}$$

$$= ٢(ن + ١) \times \frac{-٢(ن + ١) - ٢ + ٢ن}{(ن + ١)^{٣}}$$

$$= ٢(ن + ١) \times \frac{-٤}{(ن + ١)^{٣}}$$

$$= -\frac{٨}{(ن + ١)^{٢}}$$

عند $س = ٠ \Leftarrow ن = ١$

$$\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = -\frac{٨}{(١ + ١)^{٢}} = -٨$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٣) وزارة (٢٠١٦) شتوية
اذا كان هـ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان

$$(هـ \circ هـ)(س) = \frac{س^{٢}+ب}{س+١} + \frac{١}{ج}$$

$س \neq -١$

وكان هـ(س) = $\sqrt{س^{٢}+٧}$

هـ(١) = ٤ ، هـ(١) = ١ ، جد قيمة ب

الحل

اشتقاق الطرفين

$$هـ(هـ(س)) \times هـ'(س) = \frac{(س+١) \times ٣س^{٢} - (س^{٣}+ب) \times ١}{(س+١)^{٢}}$$

$$هـ(هـ(١)) \times هـ'(١) = \frac{٢ \times ٣ - (١+ب)}{٤}$$

$$هـ(١) \times ٤ = \frac{٦ - ١ - ب}{٤}$$

$$\sqrt{١+٧} \times ٤ = \frac{٥ - ب}{٤}$$

$$٣ج \times ٤ = ٥ - ب$$

$$٣ج = ٥ - ب$$

$$ب = ٥ - ٣ج = ٥ - ٣ \times -٧ = ٢٦$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ورقة عمل

قاعدة السلسلة

السؤال الأول

(أ) اذا كانت ص = ع^{٢} − ٧ع + ٣
ع = س^{٣} − ١ اثبت ان
$\frac{د ص}{د س}$ + ٩ $\frac{د ع}{د س}$ − ٦س^{٥} = صفر

(ب) اذا كانت ع = $\frac{ص + ٢}{ص - ١}$
ص = $\frac{س + ٤}{س - ٢}$ اثبت ان $\frac{د ع}{د س}$ = $\frac{١}{٢}$

(ج) ص = $\left(\frac{ع + ١}{ع - ١}\right)^{٢}$ ، ع = س^{٢} + ٢س
جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ١

(د) ل(س) = $\begin{cases} هـ(س)^{٢} + ٥ & س \leq ١ \\ ٦س^{٢} + ٣ & س > ١ \end{cases}$
وكانت هـ(س) > ٠ ، ل(س) قابل
للاشتقاق عند س = ١ فاذا كان
هـ(س) = ٥س × هـ(س)
فجد هـ′(١)

السؤال الثاني

(أ) اذا كان هـ(س) = س^{٢} + ٣
هـ(س) = $\frac{٥}{س}$ فجد
١) (هـ ○ هـ)′(س)
٢) (هـ ○ هـ)′(س)

(ب) اذا كان هـ(٣) = ٣ ، هـ′(٣) = ٥
هـ(٣) = ٢ ، هـ′(٣) = ٤ ، هـ′(٢) = ١
هـ(٢) = −٢ فجد
١) (هـ ○ هـ)′(٣)

٢) اذا كان ل(س) = س^{٣} × (هـ ○ هـ)(س)
فجد ل′(٣)

(ج) اذا كان هـ(س) = ظا^{٣}س
هـ(س) = $\frac{٥}{٣س - ٢}$
فجد (هـ ○ هـ)′($\frac{\pi}{٤}$)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثالث

(أ) $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ٣س & س \le ٢ \\ س^٣ & س > ٢ \end{cases}$

$و(س) = (س^٢ - ٣)^٤$

جد $(هـ \circ و)'(٢)$

(ب) اذا كان $هـ(س) = س^٢ + ٣$

$و(س) = |س - ١٢|$ جد

$(هـ \circ و)'(٢)$

(ج) اذا كان $هـ$ قابلاً للاشتقاق عند $س = ١$ وكان $هـ(٤س + ١) = ٢س^٢ + ٦س$

اوجد $هـ'(٥)$

(د) اذا كانت $ص = هـ(س^٢ + ٢س)$

$هـ'(٣) = ٥$ اوجد $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١}$

(هـ) اذا كان $هـ(س) = س^٣ + ٢س$

$و(س) = ٣س^٢$ فاوجد

$(هـ \circ و)'(١)$

(و) اذا كان $هـ\left(\frac{٣ - ٢س}{س^٢}\right) = س^٣ + ٣س^٢ + س$

$س > ٠$

اوجد $هـ'(١)$

السؤال الرابع

(أ) اذا كان $هـ(جتاس) = جتاس - جاس$

حيث س زاوية في الربع الأول

جد $هـ'\left(\frac{١}{٢}\right)$

(ب) اذا كانت $ص = ٣ع^٢ + ٢ع$

$ع = ٢س$ وكانت $\left.\frac{د ص}{د س}\right|$ عندما $س = ١$ تساوي (١٨) اوجد قيمة الثابت ٢؟

(ج) اذا كانت $ص = هـ(س)$ وكانت

$\Delta ص = ٥س^٢ هـ + ٢س هـ$ فاوجد

$هـ'$ حيث $هـ \neq ٠$

$هـ'(١) - هـ'(١ + هـ)$

$جـ = \frac{١}{١٢}$

(د) اذا كان $(هـ \circ (و \circ ق))'(١) = ٣٠$

حيث ان $و(س) = س^٣ + س^٢$

فاوجد $هـ'(٢)$

$جـ = ٣$

(هـ) اذا كان $ل(س) = \frac{س^٢}{(و(س))^٢}$

$و(١) = ٣$ ، $و'(١) = ١$

فاوجد $ل'(١)$

$جـ = \frac{٤}{٩}$

مكتبة الطالب
الأستاذ: ناجح الجمزاوي

السؤال الخامس

(أ) اذا كانت ص = (جاس + جتاس)^{٤}
اثبت ان صَ + ٤ص = ١٢ جتا٢س

(ب) ه(س) = ٢ ظتاس
و(س) = ٣س(س^{٢} - ٣) وكان
(ه ○ و)$'$ ($\frac{\pi}{٤}$) = -٥٠ اوجد ق

(ج) ص = جا^{٤}س اثبت ان
$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ + ١٦ص = ١٢ جا^{٢}س

(د) ه(س) = س^{٣} + ٣ وكانت
(ه ○ و)$'$ (١) = ١٨ اوجد ق

(هـ) اذا كان م(٤) = ٢ه(٤) + ٣ل(٤)
وكانت لها ه(٢) - ه(٢+هـ)
هـ
= $\frac{س - ٢}{ل(س) - ل(٢)}$
اوجد م$'$(٢)

(و) اذا كان ه(جا٢س) = قتا٢س
حيث ه$'$($\frac{١}{٢}$) حيث س ∈ (٠، $\frac{\pi}{٢}$)

السؤال السادس

(أ) اذا كان ه(ظاس) = ٦ جا٢س - ٨ جتا٢س
س ∈ (٠، $\frac{\pi}{٢}$) جد ه$'$(١)

(ب) اذا كانت ص = جاس - $\frac{١}{٣}$ جا^{٣}س
اثبت ان $\frac{د ص}{د س}$ = جتا^{٣}س

(ج) اذا كانت ص = ظاس + قاس
اثبت ان $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ = ص قتاس

(د) ص = ظا^{٤}س اثبت ان
$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ = ٢(١ + ص)(١ + ٣ص)

(هـ) ه(س^{٣} - ٤) = هـ(١ - ٣س) + س^{٣}
وكان ه$'$(-١٢) = ٤ ، هـ$'$(٧) = ٣٠
هـ$'$(٧) = -٥ ، جد ه$'$(-١٢)

(و) ص = جا^{٥}س جد $\frac{د ص}{د س}$
باستخدام قاعدة السلسلة

ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

المسؤال السابع

(أ) $ص = ن^{٤}$ ، $س = ٣ن$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ =

(ب) اذا كان $ص = (قتا س + ظا س)^{ن}$

فاثبت ان $\frac{دص}{دس} = -ن ص$ قتا س

(ج) $هـ(س) = ٢س^{٢} + ٤$ ، $هـ(س) = ٣س - ١$

وكانت $ص = (هـ \circ هـ)(س^{٢})$

جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=١}$

(د) جد $\left.\frac{د}{دس}(هـ(هـ(٤-٣س)))\right|_{س=١}$

علما بان

$هـ(-٢) = ١$ ، $هـ'(-٢) = ٧$ ، $هـ'(١) = ٣$

(هـ) $ص = قتان$ ، $س = ظان$

اثبت ان $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ص ظا^{٣}ن$

(و) $هـ(س) = ظا^{٢}س + ظا س - قا س$

جد $هـ'(٠)$ حيث $س \in [٠ ، \frac{\pi}{٤}[$

السؤال الثامن

(أ) $هـ(س)$ قابل للاشتقاق وكان

$هـ(س) = \frac{جا^{٤}س}{٤} - \frac{جتا^{٤}س}{٤} + جتا س$

فجد حلول المعادلة $هـ'(س) = ص$

حيث $س \in [٠ ، ٢\pi[$

(ب) $ص = جا(٣س^{٢} - ١) + جتا(٣س + ١)$

اثبت ان

$ص'' + ٩ص = ص$

(ج) $هـ'(\frac{\pi}{٣}) = جتا س$

فجد $هـ(\frac{\pi}{٣})$

(د) $هـ(س) = |جا ٣س|$ حيث

$س \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ اكتب قاعدة

$هـ$ للاشتقاق $هـ$ عند $س = \frac{\pi}{٣}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس التاسع

الاشتقاق الضمني

مقدمة

مثال ما يسمى بالعلاقة الصريحة والتي ص فيها موضع القانون أي ان ص بدلالة س .

اما العلاقة الضمنية تكون فيها المتغيرات متداخلة أو (أس) ص ليس واحد .

مثل س ص = س^{٢} - س^{٢} ص

$\frac{ص}{س}$ = ٣ ص^{٢} + س

لذلك عندما لا نستطيع تحويل العلاقة الضمنية أي علاقة صريحة فاننا نشتقها باسلوب الاشتقاق الضمني

ولكن عندما نشتقها ص نضرب في $\frac{ص}{س}$ أو ص$'$

أمثلة

مشتقة ص^{٢} هي ٢ ص $\frac{ص}{س}$

مشتقة $\frac{٤}{ص}$ هي $\frac{-٤}{ص^{٢}}$ × $\frac{ص}{س}$

مشتقة ٣ص^{٥} هي ١٥ ص^{٤} ص$'$

خطوات الاشتقاق الضمني

① نشتق طرفي المعادلة ونستخدم قواعد الاشتقاق

س ص ← قاعدة الضرب

$\frac{ص}{س}$ ← قاعدة القسمة

(ص^{٢}+١)^{٣} ← مشتقة القوس

② نجمع الحدود التي تحتوي على ص$'$ أو $\frac{ص}{س}$

③ اخراج $\frac{ص}{س}$ أو ص$'$ عامل مشترك

④ القسمة على معامل $\frac{ص}{س}$ أو معامل ص$'$

مثال

ص^{٢} = ٥ س + ٢

٢ ص ص$'$ = ٥

ص$'$ = $\frac{٥}{٢ص}$

مكتبة الوسام
AL WESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ①

$ص = (س^2 + ص)^5$ جد $\frac{ص}{س}$

الحل

نشتقه ضمنياً

$5 \cdot \frac{ص}{س}(س^2 + ص)^4 \times (2س + \frac{ص}{س}) = 0$

$10(س^2 + ص)^4 + 5(2س + ص)^4 \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س}$

$\frac{ص}{س} - 5(2س + ص)^4 \frac{ص}{س} = 10(2س + ص)^4$

$\frac{ص}{س}(1 - 5(2س + ص)^4) = 10(2س + ص)^4$

$\frac{ص}{س} = \frac{10(2س + ص)^4}{1 - 5(2س + ص)^4}$

مثال ②

$ص^2 = \frac{س}{س + 1}$ اوجد $ص'$

الحل

$2ص ص' = \frac{1(س+1) - 1 \times س}{(س+1)^2}$

$= \frac{س + 1 - س}{(س+1)^2} = \frac{1}{(س+1)^2}$

$ص' = \frac{1}{2ص(س+1)^2}$

مثال ③

$ص^2 = 2ص س^2 + 4س^3$ جد $ص'$

الحل

$2ص ص' = 2ص \times 2س + 2س^2 \times 2ص' + 12س^3$

$2ص ص' - 2س^2 ص' = 4س ص + 12س^3$

$ص'(2ص - 2س^2) = 4س ص + 12س^3$

$ص' = \frac{4س ص + 12س^3}{2ص - 2س^2}$

مثال ④

اذا كان $ص^3 س^2 = 8$ اوجد $ص'$

الحل

$3ص^2 \times 2س + س^2 \times 3ص^2 ص' = 0$

$3س^2 ص^2 ص' = -6س ص^3$

$ص' = \frac{-6س ص^3}{3س^2 ص^2} = \frac{-2ص}{س}$

$ص'' = \frac{3س(-2ص') + 2ص \times 3}{(3س)^2}$

$ص'' = \frac{-6س(\frac{-2ص}{3س}) + 6ص}{9س^2}$

$= \frac{4ص + 6ص}{9س^2} = \frac{10ص}{9س^2}$

وصية الوسام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑤

$هـ(ص+1) = س^3$ ، $هـ(5) = 4$

$هـ(5) = 8$ اوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $ص = 4$

الحل

$هـ'(ص+1) \times \frac{د ص}{د س} = 3 س^2$

عندما $ص = 4 \leftarrow هـ'(4+1) = س^2$

$\leftarrow هـ'(5) = س^2 \Leftarrow 8 = س^2$

$\leftarrow س = 2$

$هـ'(4+1) \times \frac{د ص}{د س} = 3(2)^2$

$هـ'(5) \times \frac{د ص}{د س} = 12$

$4 \times \frac{د ص}{د س} = 12 \leftarrow \frac{د ص}{د س} = 3$

مثال ⑥

$ظا(س^2 ص^2) = س$ اوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل

$ظتا(س^2 ص^2) \times (س^2 \times 2ص ص' + ص^2 \times 2س) = 1$

$2س^2 ص ظتا(س^2 ص^2) \times ص' + 2س ص^2 ظتا(س^2 ص^2) = 1$

$2س^2 ص ظتا(س^2 ص^2) = 1 - 2س ص^2 ظتا(س^2 ص^2)$

$ص' = \frac{1 - 2س ص^2 ظتا(س^2 ص^2)}{2س^2 ص ظتا(س^2 ص^2)}$

مثال ⑦

اذا كان $2س ص + \pi ظا ص = \pi$

جد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(1، \frac{\pi}{4})$

الحل

$2س ص' + ص \times 2 + \pi ظتا ص ص' = 0$

$2 \times 1 ص' + 2 \times \frac{\pi}{4} + \pi ظتا \frac{\pi}{4} ص' = 0$

$2ص' + \frac{\pi}{2} + \pi \times 1 \times ص' = 0$

$2ص' + \pi + \pi ص' = 0 \Leftarrow ص' = 0 \Leftarrow ص' = -\frac{\pi}{2}$

مثال ⑧

$س ص^2 - ص س^2 = 2$ اوجد $\left| \frac{د ص}{د س} \right|$ $(2، 1)$

الحل

$س \times 2ص ص' + ص^2 \times 1 - (ص \times 2س + س^2 \times ص') = 0$

$2س ص ص' + ص^2 - 2ص - 2س ص' = 0$

$2ص' + 4 - 4 - ص' = 0$

$3ص' = 0$

$ص' = 0$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑨

س = ظا ص جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ٣

الحل

١ = قا^{٢} ص × $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{قا^{٢} ص}$

لكنه قا^{٢} ص = ١ + ظا^{٢} ص

⇐ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{١ + ظا^{٢} ص}$

= $\frac{١}{١ + ٣^{٢}}$ = $\frac{١}{٩ + ١}$ = $\frac{١}{١٠}$

مثال ⑩

س = هـ^{ر} (ص^{٢} + ١) ، هـ^{ر} (٥) = ٤

جد $\frac{د ص}{د س}$ عند ص = ٢ ؟

الحل

١ = هـ^{ر} (ص^{٢} + ١) × ٢ ص ص$'$

عندما ص = ٢ فان

١ = هـ^{ر} (٥) × ٢ × ٢ ص$'$

٤ ص$'$ × ٤ = ١ ⇐ ص$'$ = $\frac{١}{١٦}$

مثال ⑪

اذا كان س = حا ص اثبت ان ص$''$ = ظا ص قا^{٢} ص

الحل

نشتق الطرفين

١ = ص$'$ حا ص × ص$'$ نشتقه اخرى

٠ = ص$'$ حا ص × ص$''$ + ص$'$ × حا ص × ص$'$ جا ص

ص$'$ حا ص × ص$''$ = (ص$'$)^{٢} حا ص

ص$''$ = (ص$'$)^{٢} × $\frac{حا ص}{ص' حا ص}$

لكنه ص$'$ = $\frac{١}{ص' حا ص}$ = قا ص

ص$''$ = قا^{٢} ص × ظا ص

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٢)

اذا كانت $س^{٢} - ص^{٢} = ١$ أثبت أن $ص^{٣} \times ص'' + ١ = صفر$

الحل

$٢س - ٢ص ص' = ٠$

$\Leftarrow ٢ ص ص' = ٢س \Leftarrow ص' = \frac{٢س}{٢ص}$

$\Leftarrow ص' = \frac{س}{ص}$ نشتقه مرة اخرى

$ص'' = \frac{ص \times ١ - س \times ص'}{ص^{٢}}$

$= \frac{ص - س \times \frac{س}{ص}}{ص^{٢}}$ كوحد مقام

$= \frac{ص^{٢} - س^{٢}}{ص} \div ص^{٢} = \frac{ص^{٢} - س^{٢}}{ص^{٣}}$

$ص'' = \frac{-١}{ص^{٣}}$ ضرب تبادلي

$ص'' \times ص^{٣} = -١ \Leftarrow$

$ص'' \times ص^{٣} + ١ = صفر$

مثال (١٣)

$ص^{ن} = س$ اثبت ان $\frac{د ص}{د س} = \frac{ص}{ن س}$

الحل

$ن ص^{ن-١} \times ص' = ١$

$ص' = \frac{١}{ن ص^{ن-١}}$

$ص' = \frac{١}{ن ص^{ن-١} \times ص} = \frac{ص}{ن ص^{ن}}$

$= \frac{ص}{ن س}$

مثال (١٤)

اذا كان $هـ'(ص^{٢}) = ٥س^{٣} + ٣$

وكانت $ص = ١$ ، عندما $س = ١$ وايضاً

$هـ'(١) = ٥$ صد $\frac{د ص}{د س}|_{(١،١)}$

الحل

$٣هـ^{٢}(ص^{٢}) \times هـ'(ص^{٢}) \times ٢ ص ص' = ١٥ س^{٢}$

$٣هـ^{٢}(١) \times هـ'(١) \times ٢ \times ١ \times ص' = ١٥ \times ١$

$٣ \times ٢ \times ٥ ص' = ١٥$

$ص' = \frac{١٥}{٣٠} = \frac{١}{٢}$

$هـ'(١) = ٥ + ٣ = ٨$ لأنه

$هـ(١) = \sqrt{٨} = ٣$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مشتقة الأقترانات الكسرية

نظرية (وزارة ٢٠١١)

اذا كانت $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ حيث $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي

فان $\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$

البرهان

$ص = س^{\frac{م}{ن}}$ برفع الاس ن

$\Leftarrow ص^{ن} = س^{م}$ نشتقه ضمنياً

$ن ص^{ن-١} \times ص' = م س^{م-١}$

$ص' = \frac{م س^{م-١}}{ن ص^{ن-١}}$ لكنه $ص = س^{\frac{م}{ن}}$

$ص' = \frac{م س^{م-١}}{ن (س^{\frac{م}{ن}})^{ن-١}} = \frac{م س^{م-١}}{ن س^{م-\frac{م}{ن}}}$

$= \frac{م}{ن} س^{م-١-م+\frac{م}{ن}}$

$= \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$

ملاحظة هامة

$س^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{س^{م}}$

↓ للاشتقاق ↓ للتعويض

نتيجة

اذا كان $ص = (هـ(س))^{\frac{م}{ن}}$ حيث هـ(س) اقتران قابل للاشتقاق فان

$ص' = \frac{م}{ن} (هـ(س))^{\frac{م}{ن}-١} \times هـ'(س)$

البرهان

نفرض $ع = هـ(س)$

$ص = ع^{\frac{م}{ن}}$ ، $ع = هـ(س)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$= \frac{م}{ن} ع^{\frac{م}{ن}-١} \times هـ'(س)$

$= \frac{م}{ن} (هـ(س))^{\frac{م}{ن}-١} \times هـ'(س)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ①

$ص = س^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{س^2}}$

الحل

$ص = س^{\frac{2}{5}} - س^{-\frac{2}{3}}$

$ص' = \frac{2}{5} س^{-\frac{3}{5}} - (-\frac{2}{3}) س^{-\frac{5}{3}}$

$ص' = \frac{2}{\sqrt[5]{س^3}} + \frac{2}{\sqrt[3]{س^5}}$

ملاحظه

مشتقه $س^{\frac{م}{ن}}$ هي $\frac{م}{ن} س^{\frac{م-ن}{ن}}$

مثال

$س^{\frac{3}{4}} \leftarrow \frac{3}{4} س^{\frac{3-4}{4}}$

$= \frac{3}{4} س^{-\frac{1}{4}}$

مثال ②

$ص = \frac{4}{\sqrt[5]{س^2}}$ عند $ص'|_{س=1}$

الحل

$ص = \frac{4}{س^{\frac{2}{5}}} = 4 س^{-\frac{2}{5}}$

$ص' = 4 \times -\frac{2}{5} س^{-\frac{7}{5}}$

$ص'|_{س=1} = -\frac{8}{5}$

مثال ③

$ص = \sqrt[3]{(س^2+2س)^7}$

الحل

$ص = (س^2+2س)^{\frac{7}{3}}$

$ص' = \frac{7}{3}(س^2+2س)^{\frac{4}{3}} \times (2س+2)$

مثال ④

$ص = \sqrt[2]{(2س+4)^5}$ ، $ع = س^2+3$

$\frac{ص}{س}$ عند $س = 1$

الحل

$ص = (2س+4)^{\frac{5}{2}}$ ، $ع = س^2+3$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

$= \frac{5}{2}(2س+4)^{\frac{3}{2}} \times 2 \times 2س$

عند $س = 1$

$ع = 1+3 = 4 = 2$

$\frac{ص}{س} = \frac{5}{2}(4+4)^{\frac{3}{2}} \times 4 = \frac{5}{2} \times 8^{\frac{3}{2}} \times 4$

$= \frac{10}{3} \sqrt[3]{36}$

مكتبة الوسام ALWESAM

مثال ⊙

$$ص = \frac{٢}{\sqrt[٣]{(س - جتاس)^{٢}}}$$

جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = ٠$

الحل

$$ص = ٢(س - جتاس)^{-\frac{٢}{٣}}$$

$$\frac{د ص}{د س} = ٢ \times -\frac{٢}{٣}(س - جتاس)^{-\frac{٥}{٣}} \times (١ + جاس)$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-٤(١ + جاس)}{\sqrt[٣]{(س - جتاس)^{٥}}}$$

$$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٠} = \frac{-٤(١ + ٠)}{\sqrt[٣]{(٠ - جتا٠)^{٢}}} = \frac{-٤}{١ - \times ٣} = \frac{٤}{٣}$$

مشتقة الجذر التربيعي

اذا كان $هـ(س) = \sqrt{هـ(س)}$

حيث $هـ(س)$ اقتران قابل للاشتقاق فان

$$هـ'(س) = \frac{هـ'(س)}{٢\sqrt{هـ(س)}}$$

$$= \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}}$$

البرهان

$$هـ(س) = (هـ(س))^{\frac{١}{٢}}$$

$$هـ'(س) = \frac{١}{٢}(هـ(س))^{-\frac{١}{٢}} \times هـ'(س)$$

$$= \frac{هـ'(س)}{٢\sqrt{هـ(س)}}$$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

١- $ص = \sqrt{س^٢ - ٤س + ٣}$

$$ص' = \frac{٢س - ٤}{٢\sqrt{س^٢ - ٤س + ٣}}$$

٢- $ص = \sqrt{س^٢ - ﻫ^س}$

$$ص' = \frac{٢س + ﻫ^س}{٢\sqrt{س^٢ - ﻫ^س}}$$

مثال ⑦

اذا كان $ق'(٤) = ٨$ ، $ق(٤) = ٤$

$ق(١) = ١$ أوجد

$$\frac{ك}{ك س}\left(\sqrt{ق(س)} + ق(\sqrt{س})\right)$$

عند $س = ٤$

الحل

$$= \frac{ق'(س)}{٢\sqrt{ق(س)}} + ق'(\sqrt{س}) \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

عند $س = ٤$

$$= \frac{ق'(٤)}{٢\sqrt{ق(٤)}} + ق'(\sqrt{٤}) \times \frac{١}{٤\sqrt{٤}}$$

$$= \frac{٨}{٢ \times ٢} + ق'(٢) \times \frac{١}{٤}$$

$$= ٤ + ٤ \times \frac{١}{٤} = ٥$$

مثال ⑧

اذا كان $ق'(-٢) = ٤$ ، $ق(-٢) = -٢$

اوجد $\frac{ك}{ك س}\left(\sqrt{ق(٤س)}\right)$ عند $س = ١$

الحل

$$= \frac{ق'(٤س) \times ٤}{٢\sqrt{ق(٤س)}}$$ عند $س = ١$

$$= \frac{ق'(-٢) \times ٤}{٢\sqrt{ق(-٢)}} = \frac{-٢ \times ٤}{٢ \times ٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$$

مثال ⑨

$\sqrt{ص} - ﻫ^{س ص} = ٢ هـ ص$

الحل

$$\frac{ص'}{٢\sqrt{ص}} - ﻫ^{س ص} = ٠$$

$$\frac{ص'}{٢\sqrt{ص}} = ﻫ^{س ص}$$

$ص' = ﻫ^{س ص} \times ٢\sqrt{ص}$

لكن من السؤال $\sqrt{ص} = ٢ + ﻫ^{س}$

$\Leftarrow ص' = ٢ ﻫ^{س ص}(٢ + ﻫ^{س})$

مثال (١٠)

$\sqrt{س}\,ص = ١$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = ٢$

الحل

بالتعويض $\Leftarrow \sqrt{س}\,ص = ١$

$ص = \frac{١}{\sqrt{س}} \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = -\frac{١}{س^{٢}}$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=٢} = -\frac{١}{٤}$

مثال (١١)

$هـ(س) = \sqrt{س+٦} \times هـ(س)$

$هـ(-٢) = ١$ ، $هـ'(-٢) = ٢$

جد $هـ'(-٢)$

الحل

$هـ'(س) = \sqrt{س+٦} \times هـ'(س) + هـ(س) \times \frac{١}{٢\sqrt{س+٦}}$

$هـ'(-٢) = \sqrt{-٢+٦} \times هـ'(-٢) + هـ(-٢) \times \frac{١}{٢\sqrt{-٢+٦}}$

$= \sqrt{٤} \times ٢ + ١ \times \frac{١}{٢\sqrt{٤}}$

$= ٤ + ١ \times \frac{١}{٤}$

$= ٤ + \frac{١}{٤}$

$= \frac{١٧}{٤}$

مثال (١٢)

اذا كان $هـ(١) = -٣$ ، $هـ'(١) = ٢$

فجد $(\sqrt{س} \cdot هـ(س))'(١)$

الحل

$(\sqrt{س} \cdot هـ(س))'(س)$

$= \sqrt{س} \times هـ'(س) + هـ(س) \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$(\sqrt{س} \cdot هـ(س))'(١)$

$= \sqrt{١} \times هـ'(١) + هـ(١) \times \frac{١}{٢\sqrt{١}}$

$= ١ \times ٢ + -٣ \times \frac{١}{٢} = ٢ - \frac{٣}{٢} = \frac{١}{٢}$

مثال (١٣)

جد النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ والتي تحقق المعادلة $ص' = -٢$

الحل

$\frac{١}{\sqrt{س}} + \frac{ص'}{\sqrt{ص}} = ٠$ بتعويض $ص' = -٢$

$\frac{-٢}{\sqrt{ص}} = -\frac{١}{\sqrt{س}}$ ضرب تبادلي

$-٤\sqrt{س} = -\sqrt{ص}$ بالتعويض في المعادلة الاساسية

$\sqrt{س} + ٢\sqrt{س} = ٣$

$٣\sqrt{س} = ٣ \Leftarrow \sqrt{س} = ١$

$\Leftarrow$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

⇐ تابع الحل

$\overline{AB} = 1 \Leftarrow s = 1$

لكن $\overline{AB} = 2\overline{AC}$

$\overline{AB} = 2 \times 1 = 2$

بتربيع الطرفين

$s = 4$

النقطة هي $(4, 1)$

مثال (١٤)

جد $\lim_{s \to 1} \frac{هـ(s^2 + 3s + \overline{AC}) - هـ(5)}{s - 1}$

علماً بأن $هـ(5) = 2هـ(5) = 10$

$هـ(1) = 2هـ(1) = 8$

الحل

نفرض أن $هو(s) = s^2 + 3s + \overline{AC}$

$هو(1) = 5$

$هو'(s) = 2s + 3 + \frac{1}{2\sqrt{s}}$

$هو'(1) = 2 + 3 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

$= \lim_{s \to 1} \frac{هـ(هو(s)) - هـ(5)}{s - 1}$

$= \lim_{s \to 1} \frac{هـ(هو(s)) - هـ(هو(1))}{s - 1}$

$= (هـ(هو(s)))'(1)$

$(هـ(هو(s)))' = هـ'(هو(1)) \times هو'(1)$

$= هـ'(5) \times هو'(1)$

$= 5 \times \frac{11}{2} = \frac{55}{2}$

مثال (١٥)

إذا كان $هـ(s) = (s^2 - 3)^5$

$هو(s) = \overline{AC}s^3 - s^2$ جد

$(هـ \circ هو)'(2)$ ؟

الحل

$هـ'(s) = 5(s^2 - 3)^4 \times 2s$

$هو'(s) = \frac{3s^2 - 2s}{2\overline{AC}s^3 - s^2}$

$(هـ \circ هو)'(2) = هـ'(هو(2)) \times هو'(2)$

$= هـ'(2) \times \frac{8}{2\overline{AC}} = 5 \times 4 \times 2 \times 2$

$= 40$

مثال (١٦)

إذا كان $هـ(s) = \overline{AB}s + 1$

$ل(s) = ps^3$ وكانت

$(ل \circ هـ)'(3) = 12$ فجد p

الحل

$هـ'(s) = \frac{1}{2\overline{AB}s + 1}$ ، $ل'(s) = 3ps^2$

← يتبع الحل

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

$(ل \circ هـ)'(٣) = ل'(هـ(٣)) \times هـ'(٣)$

$= ل'(٢) \times \frac{١}{٢ \times ٢}$

$١٢ = \frac{١}{٤} \times ٣ ب ١٢ \leftarrow ١٢ = ٣ ب ١٢$

$ب = ٤$

مثال (١٧)

اذا كانت $هـ(س) = س \times ل(٤س)$

حيث $هـ'(٤)$ اذا علمت ان $ل(٢) = ٣$

$ل'(٢) = ١$

الحل

$هـ'(س) = س \times ل'(٤س) \times \frac{١}{٤س} + ل(٤س) \times ١$

$هـ'(٤) = ٤ \times ل'(٢) \times \frac{١}{٢ \times ٢} + ل(٢) \times ١$

$= ٤ \times ١ \times \frac{١}{٤} + ٣ = ٤$

مثال (١٨)

اذا كانت $ص = ع^{٣} - \frac{٨}{ع}$

$ع = ٢ س + ٦ س$

حيث $\frac{ص}{س}$ عند $س = ٠$

الحل

عند $س = ٠ \leftarrow ع = ٠$

$ص = ٠ - \frac{٨}{٠}$

$ع^{٣} = \frac{٨}{ع} \leftarrow ع^{٤} = ٨ \leftarrow ع = ٢$

$ع = ٢ \Leftarrow ٢ = ٢ س + ٦ س$

$\Leftarrow س + ٣ س = ١ \Leftarrow$ بتربيع الطرفين

$س^{٢} + ٦ س^{٢} = ١ \Leftarrow س = \pm ١$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

$= (٣ ع^{٢} + \frac{٨}{ع^{٢}}) \times (٢ + ٦ س)$

$= (٣ \times ٤ + \frac{٨}{٤}) \times (٢ + ٦ \times \frac{١}{٤})$

$= ٦ \times (١ + ٢) = ٦ \times ٣ = ١٨$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أمثلة على الأسئلة التي يطلب فيها البرهان والاثبات

مثال ①

حا ص = س س : زاوية حادة

اثبت أن $\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{\sqrt{1 - س^2}}$

الحل

حا ص = س اشتقاق ضمني

$\frac{د ص}{د س}$ جتا ص = 1

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{جتا ص}$

لكن حا^2 ص + جتا^2 ص = 1

جتا^2 ص = 1 − حا^2 ص

جتا ص = $\pm\sqrt{1 - حا^2 ص}$

هنا لا يحل لأن س زاوية حادة

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{\sqrt{1 - حا^2 ص}}$

لكن حا ص = س

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{\sqrt{1 - س^2}}$

مثال ②

اذا كان ص = ظا (س ص)

اثبت ان $\frac{د ص}{د س} = \frac{ص + ص^3}{1 - س(1 + ص^2)}$

الحل

ص = ظا (س ص) اشتقاق ضمني

ص$'$ = (س ص$'$ + ص × 1) قا^2 س ص

ص$'$ = س ص$'$ قا^2 (س ص) + ص قا^2 (س ص)

ص$'$ − س ص$'$ قا^2 (س ص) = ص قا^2 (س ص)

ص$'$ (1 − س قا^2 (س ص)) = ص قا^2 (س ص)

$ص' = \frac{ص قا^2 (س ص)}{1 - س قا^2 (س ص)}$

$= \frac{ص قا^2 (س ص)}{1 - س(1 + ظا^2 (س ص))}$

لكن قا^2 (س ص) = 1 + ظا^2 (س ص)

$ص' = \frac{ص(1 + ظا^2 (س ص))}{1 - س(1 + ظا^2 (س ص))}$

لكن ص = ظا (س ص)

$ص' = \frac{ص(1 + ص^2)}{1 - س(1 + ص^2)}$

$= \frac{ص + ص^3}{1 - س(1 + ص^2)}$

مكتبة السلام ALWESAM المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ③

اذا كان $س^{٢}+ص^{٢}=ع^{٢}$ حيث ع ثابت اثبت ان

$$\frac{ص''}{(١+(ص')^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}=\frac{١}{ع}$$

الحل

$س^{٢}+ص^{٢}=ع^{٢}$ نشتقه

$٢س+٢ص ص'=٠$

$٢ص ص'=-٢س \Leftarrow ص'=\frac{-س}{ص}$

$(ص')^{٢}=\frac{س^{٢}}{ص^{٢}}$

$١+(ص')^{٢}=١+\frac{س^{٢}}{ص^{٢}}=\frac{ص^{٢}+س^{٢}}{ص^{٢}}$

$=\frac{ع^{٢}}{ص^{٢}}$

$(١+(ص')^{٢})^{\frac{٣}{٢}}=\left(\frac{ع^{٢}}{ص^{٢}}\right)^{\frac{٣}{٢}}$

$$\boxed{(١+(ص')^{٢})^{\frac{٣}{٢}}=\frac{ع^{٣}}{ص^{٣}}}$$

لكن $ص'=\frac{-س}{ص}$ اشتقاقه

$ص''=\frac{-ص+س ص'}{ص^{٢}}$ بالتعويض

$ص''=\frac{-س}{ص} \Leftarrow$

$ص''=\frac{-ص+ص\times\frac{-س}{ص}}{ص^{٢}}$

$=-\frac{ص^{٢}+س^{٢}}{ص^{٣}}\times\frac{١}{ص^{٢}}$

$ص''=\frac{-(ص^{٢}+س^{٢})}{ص^{٣}}=\frac{-ع^{٢}}{ص^{٣}}$

$$\frac{ص''}{(١+(ص')^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}=\frac{\frac{-ع^{٢}}{ص^{٣}}}{\frac{ع^{٣}}{ص^{٣}}}$$

$=\frac{-ع^{٢}}{ع^{٣}}=\frac{-١}{ع}$

مثال ④

$س^{٢}+ص^{٢}=٥^{٢}$ اثبت أن

$ص''+\frac{٥^{٢}}{ص^{٣}}=صفر$

الحل

$س^{٢}+ص^{٢}=٥^{٢}$ نشتقه

$٢س+٢ص ص'=٠$

$٢ص ص'=-٢س \Leftarrow ص'=\frac{-س}{ص}$

نشتقه مرة أخرى

$ص''=\frac{ص\times-١-(-س)\times ص'}{ص^{٢}}$

$\Leftarrow$ يتبع الحل

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

$$ص'' = \frac{-ص + س\,ص'}{ص^2}$$

نعوض $ص' = \frac{س}{ص}$

$$ص'' = \frac{-ص + س \times \frac{س}{ص}}{ص^2}$$

$$= \frac{-ص - \frac{س^2}{ص}}{ص^2} = \frac{-ص^2 - س^2}{ص} \times \frac{1}{ص^2}$$

$$ص'' = \frac{-(ص^2 + س^2)}{ص^3}$$

لكن $س^2 + ص^2 = 25$

$$ص'' = \frac{-25}{ص^3}$$

$$ص'' + \frac{25}{ص^3} = صفر$$

مثال ⑤

اذا كانت $ص^2 = \frac{س}{س+1}$

اثبت ان $\frac{د ص}{د س} = \frac{ص^3}{2س^2}$

الحل

$$2ص \frac{د ص}{د س} = \frac{1(س+1) - 1(س)}{(س+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(س+1)^2}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{2ص(س+1)^2}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{2ص(س+1)^2} \times \frac{ص^3}{ص^3}$$

$$= \frac{ص^3}{2ص^4(س+1)^2}$$

لكن $ص^2 = \frac{س}{س+1}$

$\Leftarrow ص^4(س+1)^2 = س^2$ وبالتعويض

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{ص^3}{2س^2}$$

مثال ⑥

$ص = \sqrt{س + ص}$ اثبت أن

$ص''(2ص - 1)^3 = -2$

الحل

$ص = \sqrt{س + ص}$ بالتربيع $ص^2 = س + ص$

بالاشتقاق

$2ص ص' = 1 + ص'$

$2ص ص' - ص' = 1$

$ص'(2ص - 1) = 1$

$$ص' = \frac{1}{2ص - 1}$$ ← يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

تابع الحل

نشتقه مرة أخرى

$$ص'' = \frac{-١ \times ٢ ص'}{(٢ص-١)^{٢}}$$

نعوض $ص' = \frac{١}{٢ص-١}$

$$ص'' = \frac{-٢ \times \frac{١}{٢ص-١}}{(٢ص-١)^{٢}}$$

$$ص'' = \frac{-٢}{(٢ص-١)^{٣}}$$ بالمثل

$$ص'' (٢ص-١)^{٣} = -٢$$

مثال ⑦

$ص = \sqrt{٥+٢جاس}$ اثبت أن

$٢ص ص'' + ٢(ص')^{٢} + ص^{٢} = ٥$

الحل

بالضرب $ص^{٢} = ٥ + ٢جاس$

بالاشتقاق

$٢ص ص' = ٢جتاس$ نشتقه

$٢ص \times ص'' + ص' \times ٢ص' = -٢جاس$

$٢ص ص'' + ٢(ص')^{٢} + ٢جاس = ٠$

نعوض $ص^{٢} = ٥ + ٢جاس$

$ص^{٢} - ٥ = ٢جاس$

$٢ص ص'' + ٢(ص')^{٢} + ص^{٢} - ٥ = ٠$

مثال ⑧

اذا كانت $\sqrt{١-س} + \sqrt{١+ص} = ٢$

اثبت ان $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{١}{س\sqrt{١-س}}$

الحل

نشتقه

$$\frac{١}{٢\sqrt{١-س}} + \frac{١}{٢\sqrt{١+ص}} \times \frac{دص}{دس} = ٠$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{١-س}} \times \frac{دص}{دس} = -\frac{١}{٢\sqrt{١+ص}}$$

$$\frac{دص}{دس} = -\frac{\sqrt{١+ص}}{\sqrt{١-س}}$$

$$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{\sqrt{١-س} \times \frac{-١}{٢\sqrt{١+ص}} \times \frac{دص}{دس} - (-\sqrt{١+ص}) \times \frac{١}{٢\sqrt{١-س}}}{س}$$

نعوض $\frac{دص}{دس}$

$$= \frac{-(\sqrt{١-س} \times \frac{-١}{٢\sqrt{١+ص}} \times \frac{-\sqrt{١+ص}}{\sqrt{١-س}} + \frac{\sqrt{١+ص}}{٢\sqrt{١-س}})}{س}$$

$$= \frac{١}{س}\left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{١+ص}}{٢\sqrt{١-س}}\right)$$

$$= \frac{١}{س} \times \frac{\sqrt{١-س}+\sqrt{١+ص}}{٢\sqrt{١-س}}$$

$$= \frac{٢}{٢\sqrt{١-س}} \times \frac{١}{س} = \frac{١}{س\sqrt{١-س}}$$

مكتبة الإسكندرية ALEXLIBRARY
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑨

اذا كانت $ص = حتا س$

اثبت ان $\frac{ص''}{(ص')^2 - 1} = ظتا ص$

الحل

نشتقه $ص' = -حا ص \times ص'$

$ص'' = -حا ص ص' - ص' \times -حتا ص ص'$

$= -حا ص ص' + ص' حتا ص ص'$

$= ص' (حتا ص ص' - حا ص)$

$\frac{ص''}{ص'} = حتا ص ص' - حا ص$

$\frac{ص''}{ص'} = \frac{حتا ص}{حا ص} ص' - \frac{حا ص}{حا ص}$

$\frac{ص''}{ص'} = ظتا ص ص' - 1$

$\frac{ص''}{ص'} + 1 = ظتا ص ص'$

$\frac{ص''}{ص'} + \frac{ص'}{ص'} = ظتا ص ص'$

$\frac{ص'' + ص'}{ص'} = ظتا ص ص'$

$ظتا ص = \frac{ص'' + ص'}{ص' ص'}$

$ظتا ص = \frac{ص'' + ص'}{(ص')^2}$

$ظتا ص = \frac{ص''}{(ص')^2} + \frac{ص'}{(ص')^2}$

$ظتا ص = \frac{ص''}{(ص')^2} + \frac{1}{ص'}$

$ظتا ص - \frac{1}{ص'} = \frac{ص''}{(ص')^2}$

$ظتا ص - ظا ص = \frac{ص''}{(ص')^2}$

$\frac{ص''}{(ص')^2} = ظتا ص - ظا ص$

مثال ⑩

$س = ظتا ص$ اثبت أن

$ص'' (1 + س^2) = حا 2ص$

الحل

نشتقه $1 = -قتا^2 ص \times ص'$

$\Leftarrow ص' = -\frac{1}{قتا^2 ص} = -حا^2 ص$

نشتقه

$ص'' = -2 حا ص حتا ص \times ص'$

$ص'' = -2 حا ص ص' حتا ص \times \frac{-1}{قتا^2 ص}$

$ص'' = حا 2ص \times \frac{1}{1 + ظتا^2 ص}$

$ص'' = \frac{حا 2ص}{1 + س^2}$ بتعادي

$ص'' (1 + س^2) = حا 2ص$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١١)

حا ص = ظا س اثبت أن

ظا ص = ص''

---

٢ قا^٤ س + (ص')^٢

الحل

بالاشتقاقه

حتا ص × ص' = قا^٢ س

نشتقه

حتا ص × ص'' + ص' × - حا ص × ص'

= ٢ قا س × قا س ظا س

لكنه ظا س = حا ص

حتا ص × ص'' + (ص')^٢ × - حا ص

= ٢ قا^٢ س حا ص

بالقسمة على حتا ص

ص'' - (ص')^٢ ظا ص = ٢ قا^٢ س ظا ص

ص'' = ٢ قا^٢ س ظا ص + (ص')^٢ ظا ص

ص'' = ظا ص (٢ قا^٢ س + (ص')^٢)

ظا ص = ص''

---

٢ قا^٢ س + (ص')^٢

مثال (١٢)

اذا كان س = ظا ص اثبت أن

ص'' (١ + س^٢) = - ٢ س ص'

الحل

بالاشتقاقه

١ = قا^٢ ص × ص'

ص' = ١ / قا^٢ ص = حتا^٢ ص

ص'' = ٢ حتا ص × - حا ص × ص'

= - (٢ حا ص حتا ص) × ١ / قا^٢ ص

= - ٢ حا ص × ١ / قا^٢ ص

= - ٢ حا ص × ١ / ١ + ظا^٢ ص

ص'' = - ٢ حا ص / ١ + س^٢ ضرب بيادي

ص'' (١ + س^٢) = - ٢ س ص'

مكتبة الوسام ALWESAM
التعلم: ناجح الجمزاوي

تدريبات الكتاب

① تدريب ① ص ١٤١

جد $\frac{ص}{س}$ في كل مما يأتي

① $٤س^{٢} - ٢ص^{٢} = ٩$

الحل

$٨س - ٤ص ص' = ٠$

$\frac{٤ص ص'}{٤ص} = \frac{٨س}{٤ص}$

$ص' = \frac{٢س}{ص}$

② $س^{٣} + ص^{٣} = ٣س ص$

الحل

$٣س^{٢} + ٣ص^{٢} ص' = ٣س ص' + ٣ص$

$٣ص^{٢} ص' - ٣س ص' = ٣ص - ٣س^{٢}$

$ص'(٣ص^{٢} - ٣س) = ٣ص - ٣س^{٢}$

$= \frac{ص - س^{٢}}{ص^{٢} - س}$

③ $س^{٢} = جا ص$

الحل

$٢س = جتا ص ص'$

$ص' = \frac{٢س}{جتا ص}$

$ص' = ٢س قا ص$

تدريب ② ص ١٤٤

جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي

① $٧ص - جا س = ٢$

الحل

$\frac{ص'}{٧جتا ص} - جتا س = ٠$

$\frac{ص'}{٧جتا ص} = جتا س$

$ص' = ٧جتا س جتا ص$

$= ٧جتا س(٢ + جا س)$

مكتبة العلم ACADEMY
المعلم: ناجح الجمزاوي

تابع تدريب ② ⇐

② $ص = ص^{3} \sqrt{٥س^{٢}+١}$

بالضرب في ص

$١ = ص^{٤} \sqrt{٥س^{٢}+١}$

بالاشتقاق

$صفر = ٤ص^{٣} \times \frac{دص}{دس} + \sqrt{٥س^{٢}+١} \times ٤ص^{٣} \times \frac{٠ \times ٢س}{٣\sqrt[٣]{(٥س^{٢}+١)^{٢}}}$

$\frac{دص}{دس} \times ٤ص^{٣} \sqrt{٥س^{٢}+١} = -\frac{٥س ص^{٤}}{\sqrt{٥س^{٢}+١}}$

$\frac{دص}{دس} = -\frac{٥س ص^{٤}}{\sqrt{٥س^{٢}+١}} \times \frac{١}{٤ص^{٣} \sqrt{٥س^{٢}+١}}$

$= \frac{-٥س ص}{٤(٥س^{٢}+١)}$

تدريب ③ ص ١٤٥

محلول مثال ① ص ١٩٧ للحسيه

تدريب ④ ص ١٤٥

اذا كان س = جتا ن ، ص = جتا ن

فجد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ عندما ن = $\frac{\pi}{٤}$

الحل

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$= -جا ن \times \frac{١}{-جا ن}$

$= \frac{-جا ن}{جتا ن} = -ظا ن$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = -قا^{٢} ن \times \frac{١}{-جا ن}$

$= -قا^{٢} ن \times قا ن$

$= -قا^{٣} ن$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ عند ن = $\frac{\pi}{٤}$ $= -قا^{٣} \frac{\pi}{٤} = -(\sqrt{٢})^{٣} = -٢\sqrt{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين وسائل الكتاب
ص ١٤٦

السؤال الأول

جـ $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي

(ب) $٨س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$

الحل

$١٦س + ٢ص ص' = ٠$

$ص' = \frac{-١٦س}{٢ص} = \frac{-٨س}{ص}$

(ز) $ص = \sqrt{٣س^{٢} + ٥س}$

$ص' = \frac{٣س^{٢} + ١٠س}{٢\sqrt{٣س^{٣} + ٥س^{٢}}}$

(د) $س^{٣} - ص^{٣} = ٦س ص$

الحل

$٣س^{٢} - ٣ص^{٢} ص' = ٦س \times ص' + ص \times ٦$

$٣س ص' + ٣ص^{٢} ص' = ٦س ص' + ٦ص$

$ص'(٣ص^{٢} + ٦س) = ٦ص - ٣س^{٢}$

$ص' = \frac{٦ص - ٣س^{٢}}{٣ص^{٢} + ٦س}$

(ه) حا$(س^{٢} ص^{٢}) = س$

الحل

حتا$(س^{٢} ص^{٢})[س^{٢} \times ٢ص ص' + ص^{٢} \times ٢س] = ١$

$س^{٢} \times ٢ص ص' + ص^{٢} \times ٢س = \frac{١}{\text{حتا}(س^{٢} ص^{٢})}$

$٢س^{٢} ص ص' = \text{حا}(س^{٢} ص^{٢}) - ٢س ص^{٢}$

$ص' = \frac{\text{حا}(س^{٢} ص^{٢}) - ٢س ص^{٢}}{٢س^{٢} ص}$

السؤال الثاني

جـ $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ في كل مما يأتي

(ب) $٣س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٦$

الحل

$٦س - ٨ص ص' = ٠$ بالتفاضل

$٦ - (٨ص \times ص'' + ص' \times ٨ص') = ٠$

$٦ - ٨ص ص'' - ٨(ص')^{٢} = ٠$

$٨ص ص'' = ٦ - ٨(ص')^{٢}$

$ص'' = \frac{٦ - ٨(ص')^{٢}}{٨ص}$ ← يتبع

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

$$ص'' = \frac{-3 - 4(ص')^2}{4ص}$$

بكسر $ص' = \frac{6س}{8ص} = \frac{3س}{4ص}$

$$ص'' = \frac{-3 - 4(\frac{3س}{4ص})^2}{4ص}$$

$$= -3 - 4 \times \frac{1}{4ص} + \frac{9س^2}{16ص^2}$$

$$= \left(-3 - \frac{9س^2}{4ص^2}\right) \frac{1}{4ص}$$

$$= \frac{-12ص^2 - 9س^2}{16ص^3}$$

$$= \frac{3(-4ص^2 - 3س^2)}{16ص^3}$$

$$= \frac{3 \times -6}{16ص^3} = \frac{-18}{16ص^3}$$

---

(٦) $س^3 ص^3 - 4 = 0$

$س^3 \times 3ص^2 \times ص' + ص^3 \times 3س^2 = 0$

$ص' = \frac{-3ص^3 س^2}{3ص^2 س^3} = -\frac{ص}{س}$

$ص'' = \frac{س \times -ص' - ص \times 1}{س^2}$

$= \frac{-س \times \frac{ص}{س} + ص}{س^2}$

$= \frac{2ص}{س^2}$

---

(٥) $س = ص \, جتا ص$

الحل

$س \times -جا ص \times ص' + جتا ص \times 1 = ص'$

$ص' + س ص' جا ص = جتا ص$

$ص'(1 + س جا ص) = جتا ص$

$ص' = \frac{جتا ص}{1 + س جا ص}$

$ص'' = \frac{(1 + س جا ص) \times -ص جا ص \times ص' - جتا ص \times (س ص' جا ص + جا ص \times 1)}{(1 + س جا ص)^2}$

---

(٤) $\sqrt{ص} - جا س = 2$

الحل

$\frac{ص'}{2\sqrt{ص}} - جتا س = 0$

$\Leftarrow$ يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWeSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⇐ صَ = ٢ ظاص جتاس

صً = ٢ ظاص × −جاس + جتاس × ٢ قا²ص × صَ

صً = −٢ ظاص جاس + جتاس × ٢ ظاص جتاس / ظاص

= −٢ ظاص جاس + ٢ جتا²س

ب) ٢س³ − س²ص + ص³ − ١ = ٠ ، (٢ ، ٣)

٦س² − س² × صَ + ص × −٢س + ٣ص² صَ = ٠

٦(٢)² − (٢)² × صَ − ٣ × ٢ × ٢ + ٣ × (٣)² صَ =

٢٤ − ٤صَ − ١٢ + ٢٧صَ = ٠

٣٦ + ٢٣صَ = ٠

صَ = − ٣٦ / ٢٣

جـ) ١/س + ٣/ص = ١ ، (٢ ، ٦)

−١/س² − ٣/ص² × صَ = ٠

−١/٤ − ٣/٣٦ صَ = ٠

٣/٣٦ صَ = −١/٤

صَ = −١/٤ × ٣٦/٣ = −٩/٣ = −٣

السؤال الثالث

جد قيمة دص/دس لكل من العلاقات الآتية عند النقطة المبينة ازاء كل منها

أ) ٢س ص + ص جاص = ٢π ، (١ ، π/٢)

٢س × صَ + ص × ٢ + π جتاص × صَ = ٠

٢ × ١ × صَ + ٢ × π/٢ + π جتا π/٢ صَ =

٢صَ + π + ٠ = ٠

٢صَ = −π

صَ = −π/٢

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

اكمل صفحه (٩٤) الدوسيه
مثال (١٣)

$ص' = قاص ظاص \times ص$

$ص'' = قاص ظاص \times قا^{٢}ص$
$= ظاص قا^{٣}ص$

السؤال الخامس

اذا كان $ص = \sqrt[٣]{(٥ - س^{٤})^{٢}}$
جد $\frac{د ص}{د س}$

الحل

$ص = (٥ - س^{٤})^{\frac{١}{٣}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٣}(٥ - س^{٤})^{-\frac{٢}{٣}} \times -٤س^{٣}$

$= \frac{-٤س^{٣}}{٣\sqrt[٣]{(٥ - س^{٤})^{٢}}}$

السؤال السابع

جد $\frac{د ص}{د س}$ للعلاقه

$س جا٢ص = ص جتا٢س$
عند النقطه $(\frac{\pi}{٤}, \frac{\pi}{٢})$

الحل

$س \times ١ \times ص جا٢ص + ص جا٢ص \times ١ \times س$
$= ص \times -جا٢س \times ٢ + ص جتا٢ص \times ٢ \times س$

$\frac{\pi}{٤} \times ١ \times \pi جا\frac{\pi}{٢} + ص \times ١ \times \pi جا\pi$
$= -\frac{\pi}{٢} \times جا\pi + ص جتا\frac{\pi}{٢} \times ٢$

$-\frac{\pi}{٤} \times ١ \times ص + ٠ = ص \times ١ \times \frac{\pi}{٢} + ٠$

$-\frac{\pi}{٢} ص = \frac{\pi}{٢}$

$ص = -\pi$

السؤال السادس

$س = جاص$ فاثبت أن
$ص'' = ظاص قاص$

الحل

$١ = جتاص \times ص'$

$ص' = \frac{١}{جتاص} = قاص$

مكتبة العلم ALWEEAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثامن

ص س = جا س فاثبت أن

س ص'' + ٢ ص' + س ص = صفر

الحل

ص × ١ + س × ص' = جتا س

ص' + س × ص'' + ص' × ١ = − جا س

ص' + س ص'' + ص' + جا س = ٠

س ص'' + ٢ ص' + س ص = ٠

السؤال التاسع

ص = ن^{٣} + ٢ ن $\frac{د س}{د ن}$ = ٤ ن

ب $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}\Big|_{ن=١}$

الحل

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$

$= (٣ ن^{٢} + ٢) \times \frac{١}{٤ ن}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٣ ن^{٢} + ٢}{٤ ن}$

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = \frac{٤ ن \times ٦ ن - (٣ ن^{٢} + ٢) \times ٤}{(٤ ن)^{٢}} \times \frac{١}{٤ ن}$

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}\Big|_{ن=١} = \frac{٢٤ - ٤ (٥)}{١٦} \times \frac{١}{٤ ن}$

$= \frac{٤}{١٦} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٦}$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

س٣ تمارين مراجعة ص١٤٧

(٩) اذا علمت ان ص = س ظا س فاثبت أن

ص'' - ٢ص قا٢س = ٢ قا٢س

الحل

ص' = س × قا٢س + ظا س × ١

ص'' = س × ٢ قا س قا س ظا س + قا٢س × ١ + قا٢س

= ٢ س ظا س قا٢س + ٢ قا٢س

ص'' = ٢ ص قا٢س + ٢ قا٢س

ص'' - ٢ص قا٢س = ٢ قا٢س

الحل

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ن} \times \frac{ن}{س}$

$\frac{ص}{ن} = ٢ن - \frac{١}{٣}$

$\frac{س}{ن} = \frac{١}{٢} \times ٢ن - ٢ = ن - ٢$

$\frac{ص}{س} = (٢ن - \frac{١}{٣}) \times \frac{١}{ن - ٢}$

$= \frac{٢ن - \frac{١}{٣}}{ن - ٢}$

$\frac{ص^{٢}}{س^{٢}} = \frac{(ن - ٢) \times ٢ - (٢ن - \frac{١}{٣}) \times ١}{(ن - ٢)^{٢}} \times \frac{١}{ن - ٢}$

$\frac{ص^{٢}}{س^{٢}}\Big|_{ن=٦} = \frac{٤ \times ٢ - (٢ \times ٤ - \frac{١}{٣})}{\frac{١}{٤} \times (٤)^{٢}}$

$= \frac{٣٥}{٤ \times ١٦} - ٨ = \frac{-١١}{٤ \times ١٦ \times ٣}$

$= \frac{-١١}{١٩٢}$

س٤ تمارين مراجعة ص١٤٧

اذا كانت ص = ن^{٢} - $\frac{١}{٣}$ ن

س = $\frac{١}{٢}$ ن^{٢} - ٢ن فاوجد

$\frac{ص^{٢}}{س^{٢}}\Big|_{ن=٦}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

س١ تمارين مراجعة ص١٤٨

لتكن $ق(س) = جا هـ(س)$

$هـ(١) = \frac{\pi}{٣}$ ، $هـ'(١) = ٠$

$هـ''(١) = ٣$ فيه $ق'(١)$

علمًا بأن $ق$، $هـ$ قابلان للاشتقاق

ملاحظة

قاعدة الاشتقاق عادي وليس ضمنيًا

$ق'(س) = ضا هـ(س) \times هـ'(س)$

$ق''(س) = ضا هـ(س) \times هـ''(س)$
$+ هـ'(س) \times -جا هـ(س) \times هـ'(س)$

$ق''(١) = ضا هـ(١) \times هـ''(١)$
$+ هـ'(١) \times -جا هـ(١) \times هـ'(١)$

$= \frac{١}{٢} \times ٣ - ٠ \times \frac{\pi}{٣} \times ٠$

$= \frac{٣}{٤}$

س٣ اختبار ذاتي ص١٥٠

أوجد $\frac{ص}{س}$ في الحالات الآتية

(أ) $ص = \frac{س}{١-س} - \sqrt{س^٢ - ٣س}$

$\frac{ص}{س} = \frac{٢س - ٣}{٢\sqrt{س^٢ - ٣س}} - \frac{(١-س) \times ١ - س \times -١}{(١-س)^٢}$

(ب) $ص = ظا^٣(س) + ١$

$ص' = ٣ ظا^٢(س) \times ظا'(س) \times$
$ظا(ظا س) \times ظا^٢ س$

س٤ اختبار ذاتي ص١٥٠

$ص = ٣م^٢ - ٣م + ١$ ، $م = ٣س + ٣$

فجد $\frac{ص}{س}$ عندما $س = ٠$

الحل

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{م} \times \frac{م}{س}$

$= (٦م - ٣)(٣)$

$س = ٠ \Leftarrow م = ٣$

$= (٦ \times ٣ - ٣)(٣) = ٣٣$

س٤ عامة اختيارية ص١٥

① اذا كان ص = $\sqrt{٤ + ٣ حا س}$

اثبت ان
$٢ ص ص'' + ٢ (ص')^{٢} + ص^{٢} = ٤$

الحل
ص = $\sqrt{٤ + ٣ حا س}$ بالتربيع

$ص^{٢} = ٤ + ٣ حا س$
باشتقاقه

$٢ ص ص' = ٣ حتا س$
باشتقاقه

$٢ ص ص'' + ص' \times ٢ ص' = -٣ حا س$

$٢ ص ص'' + ٢ (ص')^{٢} = -٣ حا س$

لكن $٣ حا س = ٤ - ص^{٢}$

$٢ ص ص'' + ٢ (ص')^{٢} = ٤ - ص^{٢}$

$٢ ص ص'' + ٢ (ص')^{٢} + ص^{٢} = ٤$

② اذا كان ص = حا (س ص)

$ص' = \left| \frac{د ص}{د س} \right|_{(\frac{\pi}{٢}، ١)}$

الحل

$\frac{د ص}{د س} = ص' حتا (س ص) (س \times ص' + ص \times ١)$

$\left| \frac{د ص}{د س} \right|_{(\frac{\pi}{٢}، ١)} = ص' حتا \frac{\pi}{٢} (\frac{\pi}{٢} \times ص' + ١)$

$= ص' \times (\frac{\pi}{٢} \times ص' + ١)$

$= ص'$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٨) شتوية

① حاص = ظاس اثبت أن ظاص = $\frac{صـ'}{ق^2 قاس + (صـ)^2}$

الحل

حاص = ظاس باشتقاق الطرفين ضمنياً بالنسبة لـ س

حتا ص × صـ' = قا^2 س

بالاشتقاق مرة أخرى

حتا ص × صـ'' + صـ' × - جا ص × صـ'^2

= 2 قا س قا س ظا س

نستبدل ظا س بـ حا ص

حتا ص × صـ'' + (صـ')^2 × - حا ص

= 2 قا^2 س حا ص

بالقسمة على حتا ص

صـ'' - ظا ص (صـ')^2 = 2 قا^2 س ظا ص

صـ'' = 2 قا^2 س ظا ص + ظا ص (صـ')^2

صـ'' = ظا ص (2 قا^2 س + (صـ')^2)

ظا ص = $\frac{صـ''}{2 قا^2 س + (صـ')^2}$

② اذا كان

$س^4 + 2 س^2 صـ^2 = 9$ جد $\frac{د^2 صـ}{د س^2}$ عند النقطة (١، ٢)

الحل

$4 س^3 + 4 س صـ^2 د صـ/د س + 2 صـ^2 \times 2 = 0$

$4 \times 1 + 4 \times 2 صـ د صـ/د س + 4 = 0$

$8 صـ د صـ/د س + 8 = 0$

$8 صـ د صـ/د س = -8$

$د صـ/د س = -1$

$4 س^3 + 4 س صـ^2 + 2 صـ^2 \times 2 = 0$

$4 + 8 صـ د صـ/د س + 4 = 0$

$8 صـ د صـ/د س + 8 = 0$

$8 صـ د صـ/د س = -8$

$د صـ/د س = -1$

$د^2 صـ/د س^2 = 4 + 8 (د صـ/د س)^2 + 8 صـ د^2 صـ/د س^2 = 0$

$4 + 8 + 8 صـ د^2 صـ/د س^2 = 0$

$8 صـ د^2 صـ/د س^2 = -12$

$د^2 صـ/د س^2 = -12/8 = -3/2$

مكتبة الوسام ALWESAM
الموقع: ناجح الجمزاوي

⑦ وزارة (٢٠١٨) صيفية

① اذا كان
$ل(س) = \sqrt[4]{(س^2 - س + 1)^3}$
وكان $هـ(1) = -4$ ، $هـ'(1) = 2$
جد $(\frac{هـ}{ل})'(1)$

الحل
$(\frac{هـ}{ل})'(1) = \frac{ل(1) \times هـ'(1) - هـ(1) \times ل'(1)}{(ل(1))^2}$

$ل(1) = \sqrt[4]{(1 - 1 + 1)^3} = 1$

$ل(س) = (س^2 - س + 1)^{\frac{3}{4}}$

$ل'(س) = \frac{3}{4}(س^2 - س + 1)^{-\frac{1}{4}} \times (2س - 1)$

$ل'(1) = \frac{3}{4} \times 1 \times 1 = \frac{3}{4}$

$(\frac{هـ}{ل})'(1) = \frac{1 \times 2 - (-4) \times \frac{3}{4}}{1}$

$= \frac{2 + 3}{1} = 5$

② $س + ص =$ حاص أثبت
$(صَ)^2 = صَ (ظتاص - قتاص)$

الحل
نشتق
$1 + صَ = صتاص \times صَ$
نشتقه مرة أخرى

$صَ'' = صتاص \times صَ' + صَ \times -حاص \times صَ$
$صَ'' = صتاص \times صَ' - حاص \times (صَ)^2$
$حاص \times (صَ)^2 = صتاص \times صَ' - صَ''$
$= صَ (صتاص - 1)$
$(صَ)^2 = صَ' (\frac{صتاص - 1}{حاص})$
$= صَ' (ظتاص - قتاص)$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

③ وزارة (٢٠٠٩) شتوية

① اذا كان هـ(س) = $\sqrt[5]{س^3 - ٤س + ١}$
وكان هـ(٢) = ٢ ، هـ'(٢) = -١ وكان
ل(س) = هـ(س) × هـ(س) فاوجد
ل'(٢)

الحل
ل'(س) = هـ(س) × هـ'(س) + هـ'(س) × هـ(س)
ل'(٢) = هـ(٢) × هـ'(٢) + هـ'(٢) × هـ(٢)

هـ(٢) = $\sqrt[5]{٨ - ٨ + ١}$ = ١

هـ(س) = $(س^3 - ٤س + ١)^{\frac{1}{5}}$

هـ'(س) = $\frac{1}{5}(س^3 - ٤س + ١)^{-\frac{4}{5}} \times (٣س^2 - ٤)$

هـ'(٢) = $\frac{1}{5}(١)^{-\frac{4}{5}} \times (٨) = \frac{٨}{5}$

ل'(٢) = ١ × -١ + $\frac{٨}{5}$ × ٣

$-١ + \frac{١٢}{5}$

$= \frac{-٥}{5} + \frac{١٢}{5}$

$= \frac{٧}{5}$

④ وزارة (٢٠٠٩) صيفية

① اذا كان هـ(س) = $\sqrt[3]{س^4 - ٨س - ١}$
هـ(-١) = ٣ ، هـ'(-١) = ٢ وكان
د(س) = $\frac{هـ(س)}{هـ(س)}$ فجد د'(-١)

الحل
هـ(-١) = $\sqrt[3]{(-١)^4 + ٨ - ١}$ = $\sqrt[3]{٨}$ = ٢

هـ(س) = $(س^4 - ٨س - ١)^{\frac{1}{3}}$

هـ'(س) = $\frac{1}{3}(س^4 - ٨س - ١)^{-\frac{2}{3}}(٤س^3 - ٨)$

هـ'(-١) = $\frac{1}{3}(١ + ٨ - ١)^{-\frac{2}{3}}(-٤ - ٨)$

$= \frac{-١٢}{٤ \times ٣} = \frac{-١٢}{(\sqrt[3]{٨})^2}$

$= \frac{-١٢}{١٢} = -١$

د'(س) = $\frac{هـ(س) \times هـ'(س) - هـ(س) \times هـ'(س)}{(هـ(س))^2}$

د'(-١) = $\frac{هـ(-١) \times هـ'(-١) - هـ(-١) \times هـ'(-١)}{(هـ(-١))^2}$

$= \frac{٣ \times -١ - ٢ \times ٢}{٩} = \frac{-٣ - ٤}{٩}$

$= \frac{-٧}{٩}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑤ اذا كانت ص - س ص = جاس
اثبت ان
$ص'' + ص = \frac{2ص'}{1-س}$

الحل
نشتق
$ص' - (س \times ص' + ص \times 1) = جتاس$
$ص' - س ص' - ص = جتاس$
نشتق مرة أخرى
$ص'' - (س ص'' + ص' \times 1) - ص' = -جاس$
$ص'' - س ص'' - ص' - ص' = -جاس$
$ص''(1-س) - 2ص' = ص - س ص$
$ص''(1-س) - 2ص' = ص(س-1)$
بالقسمة على $(1-س)$
$ص'' - \frac{2ص'}{1-س} = -ص$
$ص'' + ص = \frac{2ص'}{1-س}$

⑥ وزارة (٢٠١٥) سؤال

⑦ $هـ(س) = \sqrt{3 + جاس + جتاس}$
$هـ'(٠) = -1$ ، $هـ(٠) = 2$
وكان
$د(س) = هـ(س) \times هـ(س)$ فأوجد
$د'(٠)$

الحل
$هـ(٠) = \sqrt{3 + جا٠ + جتا٠} = \sqrt{4} = 2$
$هـ'(س) = \frac{جتاس - جاس}{2\sqrt{3 + جاس + جتاس}}$
$هـ'(٠) = \frac{1-٠}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$
$د'(س) = هـ(س) \times هـ'(س) + هـ'(س) \times هـ(س)$
$د'(٠) = هـ(٠) \times هـ'(٠) + هـ'(٠) \times هـ(٠)$
$= 2 \times \frac{1}{4} + (-1) \times 2$
$= \frac{1}{2} - 2 = \frac{-3}{2}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑦ اذا كان جتاص = س ص = ٢ س
اثبت أن
ص'' (س + جاص) + ص' (٢ + ص' ضتاص) = صفر

الحل

- جاص × ص' - (س × ص' + ص × ١) = ٢

- جاص × ص' - س ص' - ص = ٢

- جاص × ص' = س ص' + ص + ٢

نشتق

- جاص × ص'' + ص' × - ضتاص × ص'
= س × ص'' + ص' × ١ + ص'

- جاص × ص'' - (ص')^٢ ضتاص
= س ص'' + ٢ ص'

س ص'' + ٢ ص' + جاص × ص'' + (ص')^٢ ضتاص = ٠
ص'' (س + جاص) + ص' (٢ + ص' ضتاص) = ٠

⑧ وزارة (٢٠١٠) صيفية

ق (س) = (س - ٥)^٣ ، هـ (س) = ١ / س
جد (هـ ○ ق)' (٣)

الحل

(هـ ○ ق)' (٣) = هـ' (ق (٣)) × ق' (٣)
ق (٣) = (٣ - ٥)^٣ = ٤
ق' (س) = ٢ (س - ٥) ⇐ ق' (٣) = -٤
هـ (س) = ١ / √(٢ س)

(هـ ○ ق)' (٣) = هـ' (٤) × -٤
= ١ / (٤√٢) × -٤
= ١/٤ × -٤ = -١

⑨ اذا كانت
س ص - ٣ ص = ٧ س + ١٥ اثبت
(س - ٣) ص'' + ٢ ص' = ٠

الحل

س ص' + ص × ١ - ٣ ص' = ٧
س × ص'' + ص' × ١ + ص' - ٣ ص'' = ٠
س ص'' - ٣ ص'' + ٢ ص' = ٠
(س - ٣) ص'' + ٢ ص' = ٠

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑦ وزارة (٢٠١١) شتوية

ⓑ $ص^{2}+س=3س ص$
جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $ص=1$

الحل

$2ص ص' + 1 = 3س ص' + 3×ص$
عندما $ص=1$ فان
$1^{2}+س+3ج=1×3$
$\Leftarrow ج=1 \Leftarrow س=\frac{1}{2}$
$2×1×ص' + 1 = 3×\frac{1}{2}×ص' + 3×1$
$2ص' + 1 = \frac{3}{2}ص' + 3$
$2ص' - \frac{3}{2}ص' = 2$
$\frac{1}{2}ص' = 2 \Leftarrow ص' = 4$

⑧ وزارة (٢٠١١) صيفية

ⓐ $ق(س) = \sqrt{2(1-س)}$
$هـ(س) = ظا\frac{س}{2}$ جد $(ق ∘ هـ)'(\frac{\pi}{3})$

الحل

$ق'(س) = \frac{-2}{2\sqrt{2(1-س)}} = \frac{-1}{\sqrt{2(1-س)}}$
$هـ'(س) = \frac{1}{2}قا^{2}\frac{س}{2}$
$(ق ∘ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) × هـ'(س)$
$(ق ∘ هـ)'(\frac{\pi}{3}) = ق'(ظا\frac{\pi}{6}) × \frac{1}{2}قا^{2}\frac{\pi}{6}$
$= ق'(\frac{1}{\sqrt{3}}) × \frac{1}{2} × \frac{4}{3}$
$= \frac{-1}{\sqrt{2(1-\frac{1}{\sqrt{3}})}} × \frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}} × \frac{2}{3}$

ⓑ $س = ظتا ص$ اثبت ان
$ص'' = -ص' جا ص$

الحل

نشتقة
$1 = -قتا^{2}ص × ص'$
$ص' = \frac{1}{-قتا^{2}ص} = -\frac{1}{2}جا^{2}ص$

نشتقة
$-\frac{1}{2} × 2جاص جتاص × ص' = ص''$
$ص'' = -2جاص جتاص × ص'$
$= -2جاص جتاص × ص'$
$= -ص' جا ص$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑨ وزارة (٢٠١٢) شتوية

④ اذا كانت
$(ص+1)^3 = (س-2)^2$ فاثبت
$(\frac{3}{2}ص)^2 = \frac{1}{1+ص}$

الحل
نشتق
$3(ص+1)^2 \times ص' = 2(س-2)$
$\frac{3}{2}ص' = \frac{س-2}{(ص+1)^2}$ تربيع الطرفين
$(\frac{3}{2}ص')^2 = \frac{(س-2)^2}{(ص+1)^4}$
لكن $(س-2)^2 = (ص+1)^3$
$\Leftarrow (\frac{3}{2}ص')^2 = \frac{(ص+1)^3}{(ص+1)^4} = \frac{1}{1+ص}$

---

⑩ $س = ظا 3ص$ جد $\frac{د^2ص}{دس^2}$ عندما $ص = \frac{\pi}{12}$

الحل
$1 = 2 قا^2 3ص \times 3ص'$
$ص' = \frac{1}{3قا^2 3ص} = \frac{1}{3}جتا^2 3ص$
$ص'' = -2 جتا 3ص \times جا 3ص \times 3ص' \times \frac{1}{3}جتا 3ص$
$= -\frac{2}{3}جتا^2 3ص \times جا 3ص$
$ص''|_{ص=\frac{\pi}{12}} = -\frac{2}{3}جتا^2\frac{\pi}{4} جا\frac{\pi}{4}$
$= -\frac{2}{3}(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$
$= -\frac{1}{6}$

---

⑩ وزارة (٢٠١٢) صيفية

④ اذا كان
$س^2 - س ص + ص^2 = 3$ جد
$\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(1-، 1)$

الحل
$2س - (س ص' + ص \times 1) + 2ص ص' = 0$
$2 \times 1 - (1 \times ص' + (-1)) + 2 \times -1 ص' = 0$
$2 - ص' + 1 - 2ص' = 0$
$-3ص' + 3 = 0$
$3ص' = 3 \quad ص' = 1$

مكتبة العلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١١) وزارة (٢٠١٢) شتوية

(أ) اذا كان

$\frac{٢}{س} + \frac{٥}{ص} = ٢ س ص$

جد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(\frac{١}{٢}، ٥)$

الحل

نشتقه

$-\frac{٢}{س^٢} - \frac{٥}{ص^٢} \times ص' = ٢ \times ص + ص' \times ٢ س \times ٢$

$-\frac{٢}{(\frac{١}{٢})^٢} - \frac{٥}{٢٥} \times ص' = ٢ \times ٥ + ص' \times \frac{١}{٢} \times ٢$

$-٨ - \frac{٥ ص'}{٢٥} = ص' + ١٠$

$ص' + \frac{٥ ص'}{٢٥} = -١٨$

$\frac{٣٠ ص'}{٢٥} = -١٨ \Leftarrow ص' = \frac{-١٨ \times ٢٥}{٣٠}$

$= -١٥$

(ب) $ه(س) = \sqrt[٣]{(س-١)^٢}$ جد $ه'(١)$

الحل

$ه(س) = (س-١)^{\frac{٢}{٣}}$

$ه'(س) = \frac{٢}{٣}(س-١)^{-\frac{١}{٣}} \times ١$

$ه'(١)$ غير موجودة

(١٢) وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان $\frac{س}{ص} - \frac{٣ ص}{س} = ٢$

جد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(٣، ١)$

الحل

نوحد مقام

$س^٢ - ٣ ص^٢ = ٢ س ص$

نشتقه

$٢ س - ٦ ص ص' = ٢ ص + ٢ س ص'$

$٢ - ٦ ص' = ٢ ص' + ٢$

$-٦ ص' - ٢ ص' = ٢ - ٢$

$-٨ ص' = ٤$

$ص' = \frac{٤}{-٨} = -\frac{١}{٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٣) وزارة (٢٠١٤) شتوية

(أ) اذا كان

$$\frac{1}{\text{ا}س} + \frac{1}{\text{ا}ص} = \text{ا}س ص$$

$$س > ٠ ، ص > ٠ \text{ فجد } \frac{د ص}{د س}$$

الحل

توحيد مقام

$$\frac{\text{ا}ص + \text{ا}س}{\text{ا}س ص} = \text{ا}س ص \text{ ضرب بتادي}$$

$$\text{ا}ص + \text{ا}س = س ص \text{ نشتقه}$$

$$\frac{ص'}{\text{ا}ص ٢} + \frac{1}{\text{ا}س ٢} = س \times ص' + ص \times ١$$

$$\frac{ص'}{\text{ا}ص ٢} - س ص' = ص - \frac{1}{\text{ا}س ٢}$$

$$ص' \left(\frac{1}{\text{ا}ص ٢} - س\right) = ص - \frac{1}{\text{ا}س ٢}$$

$$ص' = \frac{ص - \frac{1}{\text{ا}س ٢}}{\frac{1}{\text{ا}ص ٢} - س}$$

(١٤) وزارة (٢٠١٤) صيفية

(أ) اذا كان

$$\text{ظا}(س ص) = \text{جا}س + \text{جا}ص$$

$$س > ٠ ، ص > ٠ \text{ فجد } \frac{د ص}{د س}$$

الحل

$$\text{ضا}س \times \frac{1}{\text{ا}س ٢} + \text{ضا}ص \times \frac{ص'}{\text{ا}ص ٢}$$

$$= \text{قا}'(س ص) \times (س ص' + ص \times ١)$$

$$\frac{\text{ضا}ص}{\text{ا}ص ٢} ص' - \text{قا}'(س ص) \times س ص'$$

$$= ص \text{ قا}'(س ص) - \frac{\text{ضا}س}{\text{ا}س ٢}$$

$$ص' \left(\frac{\text{ضا}ص}{\text{ا}ص ٢} - \text{قا}'(س ص)\right)$$

$$= ص \text{ قا}'(س ص) - \frac{\text{ضا}س}{\text{ا}س ٢}$$

$$ص' = \frac{ص \text{ قا}'(س ص) - \frac{\text{ضا}س}{\text{ا}س ٢}}{\frac{\text{ضا}ص}{\text{ا}ص ٢} - \text{قا}'(س ص)}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑮ وزارة (٢٠١٥) شتوية

ⓑ اذا كان $هـ(س)$ قطعاً وكان $هـ(س) = \frac{س}{س^2+1}$ وكان $ه(س) = \sqrt{5س - 1}$ جد $(هـ ه)'(1)$

الحل

$(هـ ه)'(1) = هـ'(ه(1)) \times ه'(1)$

$= هـ'(4) \times \frac{5}{2\sqrt{5 \times 1 - 1}}$

$= \frac{2^2+1}{2} \times \frac{5}{2 \times 2}$

$= \frac{5}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$

---

⑪ اذا كان $س = \sqrt{ص^2 + 3ص}$

جد $\frac{ص}{س}$ عند $س = 2$

الحل تربيع $س^2 = ص^2 + 3ص$

عند $س = 2$ فان

$2 = \sqrt{ص^2 + 3ص}$ تربيع الطرفين

$4 = ص^2 + 3ص$

$ص^2 + 3ص - 4 = 0$

$(ص + 4)(ص - 1) = 0$

$ص = -4 \quad ص = 1$

(1، 2) ← اهمل لان $ص > 0$

(-4، 2) ← اهمل لان $ص = \sqrt{16} = 4$

$س^2 = ص^2 + 3ص$

باشتقاق الطرفين

$2س = 2ص \cdot ص' + 3ص'$

$(1، 2) \Leftarrow$

$2 \times 2 = 2 \times 1 \times ص' + 3ص'$

$4 = 5ص' \Rightarrow ص' = \frac{4}{5}$

$(-4، 2)$

$2 \times 2 = 2 \times -4 \times ص' + 3ص'$

$4 = -8ص' + 3ص' = -5ص'$

$ص' = \frac{-4}{5}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٦) وزارة (٢٠١٦) شتوية

(أ) اذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للاشتقاق وكان
ص^٢ = س ق(س^٢) ، ص > ٠ ،
ق(١) = ٤ ، ق'(١) = ١ جد
dص/dس عند س = ١

الحل

2ص dص/dس = س × ق'(س^٢) × 2س
+ ق(س^٢) × ١

عند س = ١ ⇐
ص^٢ = ١ × ق(١) = ٤
ص = ± √٤ = ± ٢
لكن ص > ٠ ⇐ ص = ٢

2 × ٢ × dص/dس = ١ × ق'(١) × ١
+ ق(١) × ١

dص/dس = (٢ × ١ + ٤)/٤ = ٦/٤ = ٣/٢

(ب) اذا كان ظا^٣س = (١ − ص^٢)^٦
اثبت أن
dص/dس = ظتا ٣س (ص^٢ − ١)

الحل

نشتقه
٣ ظا^٢س × قا^٢س × ٢
= ٦ (١ − ص^٢)^٥ × −2ص dص/dس

٣ ظا^٢س قا^٢س = −12ص (١ − ص^٢)^٥ dص/dس

⇐ dص/dس = ٣ ظا^٢س قا^٢س / −12ص (١ − ص^٢)^٥

ضرب (ص^٢ − ١)/(ص^٢ − ١)

dص/dس = ٣ ظا^٢س قا^٢س / −12ص (١ − ص^٢)^٥ × (ص^٢ − ١)/(ص^٢ − ١)

dص/dس = ٣ ظا^٢س قا^٢س × (ص^٢ − ١) / −12ص (١ − ص^٢)^٦

dص/dس = ٣ ظا^٢س قا^٢س (ص^٢ − ١) / ٣ ظا^٢س قا^٢س

dص/dس = قتا ٣س / قا ٣س (ص^٢ − ١)

= ظتا ٣س (ص^٢ − ١)

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٧) وزارة (٢٠١٦) شتوية

(أ) اذا كان $ق(س) = (٤ - ٧س)^{٣}$

$ه(س) = ٢س + ٥$

جد $(ق \circ ه)'(٩)$

الحل

$(ق \circ ه)'(٩) = ق'(ه(٩)) \times ه'(٩)$

$ق'(س) = ٣(٤ - ٧س)^{٢} \times \frac{-١}{٢\sqrt{س}}$

$ه(س) = ٢ \times س^{\frac{١}{٢}} + ٥ = ٢س^{\frac{١}{٢}} + ٥$

$ه'(س) = ٢ \times \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} + ٠ = \frac{١}{\sqrt{س}}$

$ه'(٩) = \frac{١}{\sqrt{٩}} \times ٣ = \frac{١}{٣}$

$(ق \circ ه)'(٩) = ق'(ه(٩)) \times \frac{١}{٣}$

$= ق'(٢٣) \times \frac{١}{٣}$

$= \frac{-٣}{٢} \times (٢٣)^{٢} \times \frac{-١}{٢٣\sqrt{٢٣}} \times \frac{١}{٣}$

$= \frac{-١}{٤} = \frac{١}{٢} \times \frac{-١}{٢} \times (١)^{٢} \times ٣$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ورقة عمل الاشتقاق الضمني

السؤال الأول

اوجد $\frac{د ص}{د س}$ لما يلي

١) $ص = \sqrt{\text{ظا}س + ١}$

٢) $ص = \text{ظا}^{٣}\sqrt{س}$

٣) $\frac{\sqrt{س^{٢} + ص}}{ص} = ٥$

٤) $س = \sqrt[٤]{ص^{٢} + ٢}$

٥) $\sqrt{س + ص^{٣}} = ص + ٣$

٦) $ص = \sqrt[٥]{(٥س - ٣)(س^{٢} + ٢)}$

٧) $ص = \sqrt{\frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - ٥}}$

٨) $ص = \left(\text{ظا}\sqrt{س} - \frac{١}{\sqrt{س}}\right)^{٢}$

٩) $ص = \sqrt{١ + \text{ظا}^{٣}(س ص^{٢})}$

١٠) $س ص^{\frac{٤}{٣}} + ص س^{\frac{٤}{٣}} = س^{٢}$

١١) $(س ص)^{٣} = ٣(س + ص)$

١٢) $\frac{١}{س + ص} - \frac{١}{س - ٢ص} = ٢$

١٣) $ص = \sqrt{\text{ظا}س}$

١٤) $(س - ص)^{٢} + (ص - س)^{٢} = ٨$

مكتبة السيسم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني

(ب) اذا كانت ص = $\sqrt{ن^2+5}$

س = $\frac{6}{ن^2-3}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند ن = ٢

(ج) اذا كان هـ(س) = $\sqrt{أ س^2+ب س}$

وكان هـ(١) = ٢ ، هـ(٠) = ٦

فجد هـ(٠) ، هـ(١)

(د) اذا كانت

ص = $\frac{ع^2-1}{هـ(ع)}$ ، ع = $\sqrt[3]{ع^2-1}$

وكانت هـ(٣) = ٣ ، هـ(٣) = -٦

فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ١

(هـ) اذا كان هـ(٣) = ٤ ، هـ(٣) = ٥

فجد $\frac{د}{د س}$ (٤ س $\sqrt{هـ(س)}$)

عند س = ٣

(و) اذا كانت ص = ع^3 + ٤ع

ع = $\sqrt{٣+٢ جا س}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$

عند س = $\frac{\pi}{٤}$

السؤال الثالث

(ب) اذا كان هـ(س) = $\sqrt[٥]{(٧س^2+٤)^3}$

هـ(س) = $\frac{٨}{(س^2+١)^2}$

فجد (هـ ○ هـ)$'$(١)

(ج) اذا كانت هـ(٢) = -٢ ، هـ(٢) = -٤

هـ$'$(٢) = ٣ ، هـ$'$(٢) = ٦ اوجد

$\frac{د}{د س}$ ($\sqrt{هـ(س)}$ ، هـ(س)) عند س = ٢

(د) اذا كان هـ(١) = ١ ، هـ$'$(١) = ٦

هـ$'$(٤) = ٨ ، ل(١) = ٤

ل$'$(١) = ٢ اوجد (هـ $\sqrt{+ل}$)$'$(١)

(هـ) اذا كان ص = هـ($\sqrt{س^2+٥}$)

هـ$'$(٣) = ٦

اوجد $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ٢

(و) اذا كان هـ(س) = $\sqrt{س+١}$

ل(س) = P س^3 اوجد لما يكون P

علمًا بان (ل ○ هـ)$'$(٣) = ١٢

السؤال الرابع

(أ) اذا كان $f(س) = س^{٢} - ٤س$

اوجد $\lim_{س \to ١} \frac{f(٤س) - f(١)}{س - ١}$

(ب) اذا كان $f(س) = \sqrt{٩س^{٢} - ٢}$

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{f(٢+٤هـ) - f(٣)}{هـ} = ٣$

اوجد قيمة $ب$ ؟

(ج) جد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ للعلاقة

$س^{٣} + ص^{٣} - ٤س ص = ٤$ عند

النقطة $(٤ ، ٠)$

(د) اذا كان $س^{٢} = \frac{\sqrt[٣]{ص+١}}{س}$

جد $\frac{دص}{دس}$ عند $س = ١$

(هـ) $f(س) = \sqrt{ح س^{٢} + ح ب س + ٣}$

$f(١) = ٤$ ، $f'(٠) = ٣$ وكان

$ل(س) = \frac{f(س)}{هـ(س)}$ جد $ل'(٠)$

السؤال الخامس

(أ) $ص = \sqrt[٣]{(٤س^{٣}+٤)^{٢}} = \frac{٨}{س^{٢}+٣}$

اوجد $\frac{دص}{دس}$ عند $س = ١$

(ب) $ص = \sqrt{س + \sqrt{١+س^{٢}}}$ اثبت

ان $٢\sqrt{١+س^{٢}} = ص$

(ج) اذا كان

$س\sqrt{١+ص} + ص\sqrt{١+س} = ٠$

بين ان

$\frac{دص}{دس} = -\frac{١}{(١+س)^{٢}}$

(د) اذا كانت

$ص = \sqrt{\frac{س}{ب}} + \sqrt{\frac{ب}{س}}$ اثبت

أن

$٢س ص \frac{دص}{دس} = \frac{س}{ب} - \frac{ب}{س}$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال السادس

(أ) اذا كانت ص = $\sqrt{٣-٤}$ جتاس
اثبت ان
$٢ص ص'' + ٢(ص')^{٢} + ص^{٢} = ٣$

(ب) اذا كان ص = هـ(و(س))
وكان هـ'(س) = $\frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}$
و(س) = $\frac{١}{س}$
اثبت ان $\frac{د ص}{د س} = \begin{cases} \frac{-س}{\sqrt{س^{٢}+١}(س^{٢}+١)} & س > ٠ \\ \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}(س^{٢}+١)} & س < ٠ \end{cases}$

(ج) اذا كانت ص = $\sqrt{س+ص}$
اثبت ان $ص'' = (٢ص-١)^{-٣} = -٢$

(د) اذا كانت ص - س = جتاص
اثبت أن
$(ص')^{٢} = ص''(ق ص + ظ ص)$

السؤال السابع

(أ) اذا كانت
ص = ق حتان ، س = ق جتان
اثبت أن
$ص'' = \frac{-٣ حتان}{ق^{٢} حتان}$

(ب) اذا كانت
$ص = ق س^{ن+١} + \frac{ن}{س^{ن}}$ ، ق ، ن ثوابت
اثبت ان
$س ص'' = ن(ن+١) ص$

(ج) هـ(س) = ٣س
و(س) = $\sqrt{٤-س}$ وكانت
$(هـ ٥ و)'(ق) = ٢$ حيث ق
الثابت

(د) اذا كانت
ص - س ص - جاس = ٠
اثبت أن
$٢ص' = (١-س)(ص'' + ص)$

السؤال السادس

(أ) اذا كانت
$س = \frac{1}{2}أ هـ^{2} + ب هـ + جـ$
اثبت أن $صـ = -أ (صـ)^{3}$

(ب) اذا كانت
$س = ظتان ، ص = حتان$
أثبت أن
$\frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = ٢ حتان^{3} حتا ن$

(جـ) اذا كانت
$ص = (س + \sqrt{س^{2}+١})^{ن}$
اثبت أن
$\sqrt{س^{2}+١}\ صـ - ن ص = صفر$

(د) اذا كانت
$ص^{2} = حتاس$ اثبت أن
$٤ ص^{3} صـ + ص^{4} + ١ = ٠$

السؤال السابع

(أ) اذا كانت
$س + ص = ظا (س + ص)$
اثبت أن
$\frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = \frac{-٢ ص}{ص^{3}}$

(ب) $هـ(٢ ص + ٣) = س^{2}$ حيث
$س > ٠$ ، وكان $هـ(٧) = ٩$
$هـ'(٧) = ٦$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $ص = ٢$

(جـ) اذا كانت
$س = هـ(ص^{2} + ١)$ ، $هـ(٥) = ٤$
جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $ص = ٢$

(د) اذا كانت $ص^{2} = حتا ٢س$
اثبت أن
$ص صـ + (صـ)^{2} + ٢ ص = صفر$

مكتبة الأوائل AWAEL
العلم نافع والجزاء

السؤال العاشر

ⓑ اذا كانت
$\frac{١}{س} + \frac{٣}{ص} = ١$ جد $\frac{د ص}{د س}$
عند النقطة $(٢، ٦)$

ⓐ اذا كان $\sqrt{س ص} = ١$
جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = ٢$

ⓒ اذا كان $ص = هـ(س)$
$ص^{٣} = هـ(٤س^{٢} - س)$ وكان
$هـ'(٦) = ٤$ ، $هـ(٦) = ٤$
$هـ(٢) = ١$ اوجد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = ٢$

ⓔ اذا كانت $س = ظا ص$
اثبت ان
$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = \frac{-٢}{(١ + س^{٢})^{٢}}$

السؤال الحادي عشر

ⓑ اذا كانت $س = ظا ص$
اثبت أن
$ص''(١ + س^{٢}) = -حا ٢ص$

ⓐ اذا كانت
$ص = (\sqrt{قتا س - ظتا س})^{ن}$
اثبت أن
$\frac{د ص}{د س} = \frac{ن}{٢} قتا س ص$

ⓒ اذا كانت
$ص^{٢} = س^{٣} + هـ(لـ(س))$
وكان $لـ(١) = ٢$ ، $لـ'(١) = ٤$
$هـ(٢) = ٦$ ، $هـ'(٢) = ٤$
اوجد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = ١$

ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمت بحمد الله

مع تحيات

ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي