إعداد : يزن القريوتي

٧) $\int ٤\text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\ \text{ءس}$

الحل :

$\int ٤\cancel{\text{س}}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \frac{\text{ءص}}{٢\cancel{\text{س}}}$

$= ٢\int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص}$

$= ٢\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= ٢\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} + \text{جـ}$

الفرض

$\text{ص} = \text{س}^{٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{٢\text{س}} = \text{ءس}$

٨) $\int ٤\text{س}^{٢}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٣}-٥}\ \text{ءس}$

الحل :

$\int ٤\cancel{\text{س}^{٢}}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \frac{\text{ءص}}{٣\cancel{\text{س}^{٢}}}$

$= \int \frac{٤}{٣}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص}$

$= \frac{٤}{٣}\ \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \frac{٤}{٣}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٣}-٥} + \text{جـ}$

الفرض

$\text{ص} = \text{س}^{٣} - ٥$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^{٢}$

$\frac{\text{ءص}}{٣\text{س}^{٢}} = \text{ءس}$

٩) $\int ٣\text{س}^{٢}\ \text{جا}\,\text{س}^{٣}\ \text{ءس}$

الحل :

$\int \cancel{٣\text{س}^{٢}}\ \text{جا}\,\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{٣\text{س}^{٢}}}$

$= \int \text{جا}\,\text{ص}\ \text{ءص}$

$= -\text{جتا}\,\text{ص} + \text{جـ}$

$= -\text{جتا}\,\text{س}^{٣} + \text{جـ}$

الفرض

$\text{ص} = \text{س}^{٣}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^{٢}$

$\frac{\text{ءص}}{٣\text{س}^{٢}} = \text{ءس}$

١٠) $\int ٦\text{س}\ \text{جا}\,\text{س}^{٢}\ \text{ءس}$

الحل :

$\int \cancel{٦\text{س}}\ \text{جا}\,\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{٢\text{س}}}$ ٣

$\int ٣\ \text{جا}\,\text{ص}\ \text{ءص}$

$= -٣\ \text{جتا}\,\text{ص} + \text{جـ}$

الفرض

$\text{ص} = \text{س}^{٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{٢\text{س}} = \text{ءس}$

١١) $\int \text{س}\ \text{جتا}(\text{س}^{٢}+٧)\ \text{ءس}$

الحل :

$\int \cancel{\text{س}}\ \text{جتا}\,\text{ص} \cdot \frac{\text{ءص}}{٢\cancel{\text{س}}}$

$\frac{١}{٢}\int \text{جتا}\,\text{ص}\ \text{ءص}$

$= \frac{١}{٢}\ \text{جا}\,\text{ص} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٢}\ \text{جا}(\text{س}^{٢}+٧) + \text{جـ}$

الفرض

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٧$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{٢\text{س}} = \text{ءس}$

١٢) $\int (٣\text{س}^{٢}+٢)\ \text{جتا}(٢\text{س}^{٣}+٤\text{س})\ \text{ءس}$

الحل :

$\int \cancel{(٣\text{س}^{٢}+٢)}\ \text{جتا}\,\text{ص} \cdot \frac{\text{ءص}}{\cancel{(٣\text{س}^{٢}+٢)}\,٢}$

$= \frac{١}{٢}\int \text{جتا}\,\text{ص}\ \text{ءص}$

$= \frac{١}{٢}\ \text{جا}\,\text{ص} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٢}\ \text{جا}(٢\text{س}^{٣}+٤\text{س}) + \text{جـ}$

الفرض

$\text{ص} = ٢\text{س}^{٣} + ٤\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦\text{س}^{٢} + ٤$

$\frac{\text{ءص}}{٦\text{س}^{٢}+٤} = \text{ءس}$

ملاحظة :-

إقتران × إقتران أسي ← ص القوة

إعداد: يزن القريوتي

١٣ $\int \frac{\text{١٠س} - \text{٥}}{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} + \text{٥})^{\text{٣}}}\ \text{دس}$

الفرض

الحل:

$\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} - \text{س} + \text{٥}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س} - \text{١}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٢س} - \text{١}}$

$\int \cancel{(\text{١٠س} - \text{٥})}\ \text{ص}^{-\frac{\text{١}}{\text{٣}}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{(\text{٢س} - \text{١})}}$ ٥

$= \text{٥} \int \text{ص}^{-\frac{\text{١}}{\text{٣}}}\ \text{دص}$

$= \frac{\text{٥ ص}^{-\text{٢}}}{-\text{٢}} + \text{جـ} = \frac{-\text{٥}}{\text{٢ ص}^{\text{٢}}} + \text{جـ} = \frac{-\text{٥}}{\text{٢}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} + \text{٥})^{\text{٢}}} + \text{جـ}$

١٤ $\int \frac{\text{١} - \text{٢س}}{(\text{٧س} - \text{٧س}^{\text{٢}})^{\text{٤}}}\ \text{دس}$

الفرض

الحل:

$\text{ص} = \text{٧س} - \text{٧س}^{\text{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٧} - \text{١٤س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٧} - \text{١٤س}}$

$\int \cancel{(\text{١} - \text{٢س})}\ \text{ص}^{-\text{٤}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{(\text{٧} - \text{١٤س})}}$ ٧

$= \int \frac{\text{ص}^{-\text{٤}}}{\text{٧}}\ \text{دص}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٧}} \frac{(\text{ص}^{-\text{٣}})}{-\text{٣}} + \text{جـ} = \frac{-\text{١}}{\text{٢١}(\text{٧س} - \text{٧س}^{\text{٢}})^{\text{٤}}} + \text{جـ}$

١٥ $\int \frac{\text{٢س} + \text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س} - \text{١}}\ \text{دس}$

الفرض

الحل: $\int \frac{\cancel{(\text{٢س} + \text{٣})}}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{(\text{٢س} + \text{٣})}}$

$\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س} - \text{١}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س} + \text{٣}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٢س} + \text{٣}}$

$= \int \frac{\text{١}}{\text{ص}}\ \text{دص}$

$= \text{لوهـ ص} + \text{جـ}$

$= \text{لوهـ}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س} - \text{١}) + \text{جـ}$

١٦ $\int \frac{\text{٢س} + \text{٢}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{٥}}}\ \text{دس}$

الفرض

الحل:

$\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{٥}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س} + \text{٢}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٢س} + \text{٢}}$

$\int \cancel{(\text{٢س} + \text{٢})}\ \text{ص}^{-\frac{\text{١}}{\text{٢}}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{(\text{٢س} + \text{٢})}}$

$= \int \text{ص}^{-\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}}{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} + \text{جـ} = \text{٢}\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{٥}} + \text{جـ}$

١٧ $\int \text{٢س قا}^{\text{٢}}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١})\ \text{دس}$

الفرض

الحل:

$\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{١}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$

$\int \cancel{\text{٢س}}\ \text{قا}^{\text{٢}}\text{ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{٢س}}}$

$= \int \text{قا}^{\text{٢}}\text{ص دص}$

$= \text{ظا ص} + \text{جـ}$

$= \text{ظا}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}) + \text{جـ}$

١٨ $\int (\text{٦س}^{\text{٢}} + \text{٤س})\ \text{جتا}(\text{س}^{\text{٣}} + \text{س}^{\text{٢}})\ \text{دس}$

الفرض

الحل:

$\text{ص} = \text{س}^{\text{٣}} + \text{س}^{\text{٢}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٢س}$

$\int \cancel{(\text{٦س}^{\text{٢}} + \text{٤س})}\ \text{جتا ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{(\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٢س})}}$ ٢

$= \text{٢} \int \text{جتا ص دص}$

$= \text{٢ جا ص} + \text{جـ} = \text{٢ جا}(\text{س}^{\text{٣}} + \text{س}^{\text{٢}}) + \text{جـ}$

واجب

$\int (\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٢س})\ \text{جا}(\text{س}^{\text{٣}} + \text{س}^{\text{٢}})\ \text{دس}$

إعداد : يزن القريوتي

* التكامل بالتعويض (محدود)

[١] $\int_{-١}^{١} (٤س - ١)\sqrt[٣]{٢س^{٢} - س - ٢}\; دس$

الحل:

$\int_{١}^{-١} \cancel{(٤س-١)} \cdot ص^{\frac{١}{٣}} \cdot \frac{دص}{\cancel{(٤س-١)}}$

الفرض:

$ص = ٢س^{٢} - س - ٢$

$\frac{دص}{دس} = ٤س - ١$

$\frac{دص}{٤س-١} = دس$

• عندما س = ١ ← ص = −١

• عندما س = −١ ← ص = ١

$= \int_{١}^{-١} ص^{\frac{١}{٣}}\; دص$

$= \left[\frac{ص^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}}\right]_{١}^{-١}$

$= \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{ص^{٤}}\;\Big|_{١}^{-١}$

$= \frac{٣}{٤}(١) - \frac{٣}{٤}(١) =$ صفر

[٢] $\int_{١}^{٢} \frac{س+١}{(س^{٢}+٢س+١)^{٢}}\; دس$

الحل:

$\int_{٤}^{٩} \cancel{(س+١)} \cdot ص^{-٢} \cdot \frac{دص}{\cancel{(٢س+٢)}}$ ②

الفرض:

$ص = س^{٢} + ٢س + ١$

$\frac{دص}{دس} = ٢س + ٢$

$\frac{دص}{٢س+٢} = دس$

عندما س = ٢ ← ص = ٩

عندما س = ١ ← ص = ٤

$= \frac{١}{٢}\int_{٤}^{٩} ص^{-٢}\; دص$

$= \frac{١}{٢}\left[\frac{ص^{-١}}{-١}\right]_{٤}^{٩}$

$= -\left[\frac{١}{٢ص}\right]_{٤}^{٩} = \frac{-١}{٢\times٩} - \left(\frac{-١}{٢\times٤}\right)$

$= \frac{-١}{١٨} + \frac{١}{٨} = \frac{١٠}{١٤٤}$

[٣] $\int^{٢} س^{٢}(س^{٣} - ٥)^{٢}\; دس$

$\int_{-٥}^{٣} \cancel{س^{٢}} \cdot ص^{٢} \cdot \frac{دص}{٣\cancel{س^{٢}}}$

الفرض:

$ص = س^{٣} - ٥$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢}$

$\frac{دص}{٣س^{٢}} = دس$

$= \frac{١}{٣}\int_{-٥}^{٣} ص^{٢}\; دص$

• عندما س = ٢ ← ص = ٣

• عندما س = صفر ← ص = −٥

$= \frac{١}{٣}\left[\frac{ص^{٣}}{٣}\right]_{-٥}^{٣}$

$= \frac{١}{٩}\left[ص^{٣}\right]_{-٥}^{٣} = \frac{١}{٩}\left((٣)^{٣} - (-٥)^{٣}\right)$

$= \frac{١}{٩}\left[٢٧ + ١٢٥\right] = \frac{١٥٢}{٩}$

[٤] $\int_{١}^{٣} ٦س\; هـ^{س^{٢}-١}\; دس$

الحل:

$\int_{٠}^{٨} \cancel{٦}س \cdot هـ^{ص} \cdot \frac{دص}{\cancel{٢}س}$ ③

الفرض:

$ص = س^{٢} - ١$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$\frac{دص}{٢س} = دس$

عندما س = ٣ ← ص = ٨

عندما س = ١ ← ص = ٠

$= ٣\int_{٠}^{٨} هـ^{ص}\; دص$

$= ٣\left[هـ^{ص}\right]_{٠}^{٨}$

$= ٣هـ^{٨} - ٣هـ^{٠}$

$= ٣هـ^{٨} - ٣$

[٥] $\int_{٠}^{١} س\; هـ^{س^{٢}}\; دس$

الحل:

$\int_{٠}^{١} \cancel{س} \cdot هـ^{ص} \cdot \frac{دص}{٢\cancel{س}}$

الفرض:

$ص = س^{٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$\frac{دص}{٢س} = دس$

$\frac{١}{٢}\int_{٠}^{١} هـ^{ص}\; دص$

$= \frac{١}{٢}\left[هـ^{ص}\right]_{٠}^{١}$

عندما س = ١ ← ص = ١

عندما س = ٠ ← ص = ٠

$= \frac{١}{٢}هـ^{١} - \frac{١}{٢}هـ^{٠}$

$= \frac{١}{٢}هـ - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}(هـ - ١)$

إعداد : يزن القريوتي

٦) $\int \text{س}\,\text{جا}(\text{س}^{٢}-٣)\,\text{دس}$

الحل :

$\int \cancel{\text{س}}\,\text{جا}\,\text{ص}\cdot\frac{\text{دص}}{٢\cancel{\text{س}}}$

$=\frac{١}{٢}\int \text{جا}\,\text{ص}$

$=\frac{١}{٢}\,{}^{-}\text{جتا}\,\text{ص}+\text{جـ}$

$=\frac{-١}{٢}\,\text{جتا}(\text{س}^{٢}-٣)+\text{جـ}$

الفرض

$\text{ص}=\text{س}^{٢}-٣$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=٢\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{٢\text{س}}=\text{دس}$

٧) $\int (\text{س}+٣)(\text{س}^{٢}+٦\text{س}-٥)^{٤}\,\text{دس}$

الحل :

$\int \cancel{(\text{س}+٣)}\,\text{ص}^{٤}\cdot\frac{\text{دص}}{٢\cancel{(\text{س}+٣)}}$

$=\int \frac{\text{ص}^{٤}}{٢}\,\text{دص}$

$=\frac{١}{٢}\,\frac{\text{ص}^{٥}}{٥}+\text{جـ}$

$=\frac{١}{١٠}(\text{س}^{٢}+٦\text{س}-٥)^{٥}+\text{جـ}$

الفرض

$\text{ص}=\text{س}^{٢}+٦\text{س}-٥$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=٢\text{س}+٦$

$\frac{\text{دص}}{٢\text{س}+٦}=\text{دس}$

٨) $\int \text{هـ}^{\text{س}^{٢}-\text{س}}\times(٢\text{س}-١)\,\text{دس}$

الحل :

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\times\cancel{(٢\text{س}-١)}\times\frac{\text{دص}}{\cancel{(٢\text{س}-١)}}$

$=\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$=\text{هـ}^{\text{ص}}+\text{جـ}$

$=\text{هـ}^{\text{س}^{٢}-\text{س}}+\text{جـ}$

الفرض

$\text{ص}=\text{س}^{٢}-\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=٢\text{س}-١$

$\frac{\text{دص}}{٢\text{س}-١}=\text{دس}$

واجب

٩) $\int (٢\text{س}^{٣}+٣)\,\text{قا}^{٢}\left(\frac{\text{س}^{٤}}{٢}+٣\text{س}\right)\text{دس}$

١٠) $\int \frac{٣\text{س}}{\text{جتا}^{٢}(٢\text{س}^{٢}+٣)}\,\text{دس}$

المثلثي يرفع بقيمته وليس بالقوة

الحل :

$\int ٣\text{س}\,\text{قا}^{٢}(٢\text{س}^{٢}+٣)$

$\int \cancel{٣\text{س}}\,\text{قا}^{٢}\text{ص}\cdot\frac{\text{دص}}{\cancel{٤\text{س}}}$ ٢

$=\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{ص}}{٢}\,\text{دص}$

$=\frac{١}{٢}\,\text{ظاص}+\text{جـ}$

$=\frac{١}{٢}\,\text{ظا}(٢\text{س}^{٢}+٣)+\text{جـ}$

الفرض

$\text{ص}=٢\text{س}^{٢}+٣$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=٤\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{٤\text{س}}=\text{دس}$

١١) $\int \frac{٢\text{س}+١}{(\text{س}^{٢}+\text{س})^{٣}}\,\text{دس}$

الحل :

$\int \cancel{(٢\text{س}+١)}\,\text{ص}^{-٣}\cdot\frac{\text{دص}}{\cancel{(٢\text{س}+١)}}$

$=\int \text{ص}^{-٣}\,\text{دص}$

$=\frac{\text{ص}^{-٢}}{-٢}+\text{جـ}$

$=-\frac{١}{٢}(\text{س}^{٢}+\text{س})^{-٢}+\text{جـ}$

$=\frac{-١}{(\text{س}^{٢}+\text{س})^{٢}}+\text{جـ}$

الفرض

$\text{ص}=\text{س}^{٢}+\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=٢\text{س}+١$

$\frac{\text{دص}}{٢\text{س}+١}=\text{دس}$

١٢) $\int \frac{٥\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}^{٢}}\,\text{دس}$

الحل :

$\int ٥\text{س}\,\text{قا}^{٢}\text{س}^{٢}\,\text{دس}$

$\int ٥\cancel{\text{س}}\,\text{قا}^{٢}\text{ص}\cdot\frac{\text{دص}}{٢\cancel{\text{س}}}$

$=\frac{٥}{٢}\int \text{قا}^{٢}\text{ص}\,\text{دص}$

$=\frac{٥}{٢}\,\text{ظاص}+\text{جـ}=\frac{٥}{٢}\,\text{ظا}(\text{س}^{٢})+\text{جـ}$

الفرض

$\text{ص}=\text{س}^{٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=٢\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{٢\text{س}}=\text{دس}$

إعداد : يزن القريوتي

١٣ $\int \text{جا}^4\text{س} \ \text{جتاس} \ \text{ءس}$

الحل :

$\int \text{ص}^4 \ \cancel{\text{جتاس}} \cdot \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int \text{ص}^4 \ \text{ءص}$

$= \frac{\text{ص}^5}{5} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{جاس})^5}{5} + \text{جـ}$

الفرض

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}} = \text{ءس}$

١٤ $\int 3\text{س}^2 \ \text{ظاس}^3 \ \text{جتاس}^3 \ \text{ءس}$

$= \int 3\text{س}^2 \ \frac{\text{جاس}^3}{\cancel{\text{جتاس}^3}} \times \cancel{\text{جتاس}^3} = \int 3\text{س}^2 \ \text{جاس}^3 \ \text{ءس}$

الفرض

الحل :

$\int \cancel{3\text{س}^2} \ \text{جاص} \cdot \frac{\text{ءص}}{\cancel{3\text{س}^2}}$

$= \int \text{جاص} \ \text{ءص}$

$= - \text{جتاص} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{س}^3$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3\text{س}^2$

$\frac{\text{ءص}}{3\text{س}^2} = \text{ءس}$

١٥ $\int \text{جتاس} \ \text{هـ}^{\text{جاس}} \ \text{ءس}$

الحل :-

$\int \cancel{\text{جتاس}} \ \text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{ص}} \ \text{ءص}$

$= \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{جـ}$

الفرض

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}} = \text{ءس}$

١٦ $\int_{0}^{2} 8(1-2\text{س})^3 \ \text{ءس}$

واجب

$\text{ج} = -80$

١٧ إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند (س،ص) يعطى بالعلاقة $(4\text{س}-3)^3$ فجد قاعدة الاقتران علماً بأن النقطة (١، ٨) تقع على منحنى ق(س)

الحل :

$\text{ق(س)} = \int (4\text{س}-3)^3 \ \text{ءس}$

$= \int \text{ص}^3 \cdot \frac{\text{ءص}}{4}$

$\frac{1}{4} \int \text{ص}^3 \ \text{ءص}$

$\frac{1}{16} \text{ص}^4 + \text{جـ}$

$= \frac{(4\text{س}-3)^4}{16} + \text{جـ}$

الفرض

$\text{ص} = 4\text{س} - 3$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 4$

$\frac{\text{ءص}}{4} = \text{ءس}$

(١، ٨) نعوض لإيجاد قيمة جـ

$\text{ق(1)} = \frac{(4-3)^4}{16} + \text{جـ} = 8 \Leftarrow 1 + \text{جـ} = 8$

$\text{جـ} = 7 \Leftarrow \text{ق(س)} = \frac{(4\text{س}-3)^4}{16} + 7$

١٨ اذا علمت أن $\text{قَ(س)} = 3\text{س}^2(\text{س}^3+1)^3$

فجد ق(س) عند (س،ص) علماً بأن ق(٠) = ٩

الحل :

$\text{ق(س)} = \int 3\text{س}^2(\text{س}^3+1)^3$

$= \int \cancel{3\text{س}^2} \ \text{ص}^3 \cdot \frac{\text{ءص}}{\cancel{3\text{س}^2}}$

$= \int \text{ص}^3 \ \text{ءص}$

$= \frac{\text{ص}^4}{4} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{س}^3+1)^4}{4} + \text{جـ}$

الفرض

$\text{ص} = \text{س}^3 + 1$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3\text{س}^2$

$\frac{\text{ءص}}{3\text{س}^2} = \text{ءس}$

ق(٠) = ٩ نعوض لإيجاد قيمة جـ

$\text{ق(0)} = \frac{1}{4} + \text{جـ} = 9 \Leftarrow \text{جـ} = 9 - \frac{1}{4} = \frac{35}{4}$

$\therefore \text{ق(س)} = (\text{س}^3+1)^4 \times \frac{1}{4} + 35$

إعداد: يزن القريوتي

١٩ إذا علمت أن تسارع جسيم يعطى بالعلاقة (٢ن (ن^{٢}ـ١)^{٤}) إحسب سرعة هذا الجسيم بعد ن ثانية من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(١) = ٠ م/ث.

الحل: ع = $\int$ ت ءن

ع = $\int$ ٢ن (ن^{٢}ـ١)^{٤} ءن

$\int$ ~~٢ن~~ ص^{٤} . ءص / ~~٢ن~~

= $\int$ ص^{٤} ءص

= ص^{٥} / ٥ + جـ

= (ن^{٢}ـ١)^{٥} / ٥ + جـ ⇐ ع(١) = ٠ ← جـ = ٠

← ع(ن) = (ن^{٢}ـ١)^{٥} / ٥

الفرض

ص = ن^{٢}ـ١

ءص / ءن = ٢ن

ءص / ٢ن = ءن

٢٠ يتحرك جسيم في خط مستقيم بسرعه تعطى بالعلاقة ٣(ن+١)^{٢} م/ث، إحسب المسافة المقطوعة للجسيم بعد (٢) ثانية من بدء الحركة علماً بأن موقع الجسيم الابتدائي ف(٠) = ١ م

الحل: ف = $\int$ ع ءن

= $\int$ ٣(ن+١)^{٢} ءن

= $\int$ ٣ ص^{٢} ءص

~~٣~~ ص^{٣} / ~~٣~~ + جـ

(ن+١)^{٣} + جـ

الفرض

ص = ن+١

ءص / ءن = ١

ءص = ءن

ف(ن) = (ن+١)^{٣} + جـ ← ف(٠) = (٠+١)^{٣} + جـ = ١

جـ = ٠ ← ف(ن) = (ن+١)^{٣}

ف(٢) = (٢+١)^{٣} = (٣)^{٣} = ٢٧ م

٢١ اذا علمت أن م(٤) = ١٥ ، م(-٢) = -٥

فاحسب قيمة $\int_{-1}^{1}$ ٣ ق(٣س+١) ءس

الحل

$\int_{-2}^{4}$ ~~٣~~ ق(ص) ءص / ~~٣~~

= $\int_{-2}^{4}$ ق(ص) ءص

= م(ص) $]_{-2}^{4}$

م(٤) - م(-٢)

= ١٥ - (-٥) = ١٥ + ٥ = ٢٠

الفرض

ص = ٣س + ١

ءص / ءس = ٣

ءص / ٣ = ءس

عندما س = ١ ← ص = ٤

عندما س = -١ ← ص = -٢

٢٢ اذا علمت أن م(٥) = ٩ ، م(٢) = ٣

فاحسب قيمة $\int_{-1}^{2}$ ٢س ق(س^{٢}+١) ءس

الحل:

$\int_{2}^{5}$ ~~٢س~~ ق(ص) . ءص / ~~٢س~~

= $\int_{2}^{5}$ ق(ص) ءص

= م(ص) $]_{2}^{5}$

م(٥) - م(٢)

= ٩ - ٣ = ٦

الفرض

ص = س^{٢} + ١

ءص / ءس = ٢س

ءص / ٢س = ءس

عندما س = ٢ ← ص = ٥

عندما س = -١ ← ص = ٢

٢٣ اذا علمت ان م(٤) = ١٢ ، م(١) = -٨

فاحسب قيمة $\int_{-1}^{2}$ ٢س ق(س^{٢}) ءس

واجب

ج. = ٢٠

إعداد: يزن القريوتي

التطبيقات الأقتصادية

أولاً: بعض التعريفات

١ د(س): هو اقتران الايراد الكلي

٢ دَ(س): هو اقتران الايراد الحدي = المشتقة الاولى للايراد الكلي

٣ تكامل (الايراد الحدي) = الايراد الكلي

بالرموز ⬅ د(س) = ∫ دَ(س) دس

- قانون فائض المستهلك :-

ف$_{ك}$ = ∫^{س_١} ه(س) دس − س$_١$ ع$_١$

- قانون فائض المنتج :-

ف$_{ج}$ = س$_١$ ع$_١$ − ∫^{س_١} هـ(س) دس

س$_١$: كمية التوازن بين العرض و الطلب

ع$_١$: سعر التوازن

ق(س): إقتران (السعر - الطلب)

هـ(س): إقتران (السعر - الطلب)

الأسئلة :-

١ يبيع مصنع ثلاجات (س) ثلاجة من منتجة أسبوعياً فإذا كان اقتران الايراد الحدي للبيع هو

دَ(س) = ٦٠ س^{٢} + ٤٠ س + ١٢٥ ديناراً،

فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (٣) ثلاجات

الحل :-

نكامل الايراد الحدي دون كتابة ثابت التكامل (جـ) فنحصل على الايراد الكلي

⬅ د(س) = ∫ دَ(س) دس

= ∫ (٦٠ س^{٢} + ٤٠ س + ١٢٥) دس

د(س) = ٢٠ س^{٣} + ٢٠ س^{٢} + ١٢٥ س

د(٣) = ٢٠ (٣)^{٣} + ٢٠ (٣)^{٢} + ١٢٥ (٣)

د(٣) = ٢٠ × ٢٧ + ٢٠ × ٩ + ٣٧٥

د(٣) = ٥٤٠ + ١٨٠ + ٣٧٥ = ١٠٩٠ ديناراً

٢ اذا كان الايراد [illegible] ل (س) من الوحدات هو دَ(س) = س^{٣} + ٤ س + ٥ فجد الايراد الكلي

الحل :

د(س) = ∫ دَ(س) دس

= ∫ (س^{٣} + ٤ س + ٥) دس

= $\frac{س^{٤}}{٤}$ + ٢ س^{٢} + ٥ س

٣ اذا كان ه(س) = ٥٠ − ٢ س يمثل اقتران (السعر - الطلب)، حيث (ع) السعر بالدينار (س) عدد الوحدات المنتجة، وكان السعر ثابت عند ع$_١$ = ١٠ ، فجد

1. كمية التوازن (س$_١$)
2. فائض المستهلك (ف$_{ك}$)

الحل: لحساب س$_١$ نعوض ع$_١$ = ١٠ في قاعدة الاقتران المعطى ⬅ ١٠ = ٥٠ − ٢ س

$\frac{٢ س}{٢}$ = $\frac{٤٠}{٢}$ ⇐ س = ٢٠ ⬅ فتكون س$_١$ = ٢٠

إعداد: يزن القريوتي

٣) لحساب فائض المستهلك (فك) نطبق

$\text{ف}_\text{ك} = \int_{\text{.}}^{\text{س}_١} \text{ق(س) دس} - \text{ع}_١ \, \text{س}_١$

$\text{ف}_\text{ك} = \int_{\text{.}}^{٢٠} ٥٠ - ٢\text{س} \ \text{دس} - ١٠ \times ٢٠$

$\text{ف}_\text{ك} = \int_{\text{.}}^{٢٠} (٥٠ - ٢\text{س}) \ \text{دس} - ٢٠٠$

$= ٥٠\text{س} - \text{س}^٢ \Big]_{\text{.}}^{٢٠} - ٢٠٠$

$= (٥٠ \times ٢٠ - (٢٠)^٢) - ٢٠٠ = (١٠٠٠ - ٤٠٠) - ٢٠٠$

$\text{ف}_\text{ك} = ٦٠٠ - ٢٠٠ = ٤٠٠$ دينار.

٤) اذا كانت $\text{ع} = \text{ق(س)} = ٧٠ - ٤\text{س}$ يمثل اقتران (السعر - الطلب)، حيث السعر بالدنانير (س) عدد الوحدات المنتجة وكان السعر ثابتاً عند $\text{ع}_١ = ١٠$ فجد قيمة فائض المستهلك

الحل:

عندما $\text{ع}_١ = ١٠$ نجد قيمة $\text{س}_١$

$\text{ف}_\text{ك} = \int_{\text{.}}^{\text{س}_١} \text{ق(س) دس} - \text{ع}_١ \, \text{س}_١$

$\text{ف}_\text{ك} = \int_{\text{.}}^{١٥} (٧٠ - ٤\text{س}) - ١٠ \times ١٥$

$= ٧٠\text{س} - ٢\text{س}^٢ \Big]_{\text{.}}^{١٥} - ١٥٠$

$= (٧٠ \times ١٥) - (٢ \times (١٥)^٢) - ١٥٠$

$= ١٠٥٠ - ٤٥٠ - ١٥٠ = ٤٥٠$ دينار.

$\text{ع}_١ = ٧٠ - ٤\text{س}$

$١٠ = ٧٠ - ٤\text{س}$

$-٤\text{س} = -٦٠$

$\text{س}_١ = ١٥$

٥) اذا كانت $\text{ع} = \text{ق(س)} = ١٦ - \frac{\text{س}}{٤}$ يمثل اقتران (السعر - الطلب) حيث ع السعر بالدنانير (س) يمثل عدد الوحدات المنتجة، وكان السعر ثابتاً عند $\text{ع}_١ = ١٢$ فجد قيمة فائض المستهلك

الحل:

$\text{ف}_\text{ك} = \int_{\text{.}}^{\text{س}_١} \text{ق(س) دس} - \text{س}_١ \, \text{ع}_١$

$= \int_{\text{.}}^{١٦} (١٦ - \frac{\text{س}}{٤}) - ١٦ \times ١٢$

$= ١٦\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٨} \Big]_{\text{.}}^{١٦} - ١٩٢$

$(١٦ \times ١٦ - \frac{١٦^٢}{٨}) - (٠) - ١٩٢$

$٢٥٦ - ٣٢ - ١٩٢$

$= ٣٢$ دينار

$\text{ع}_١ = ١٢$

$١٢ = ١٦ - \frac{\text{س}}{٤}$

$١٢ - ١٦ = -\frac{\text{س}}{٤}$

$-٤ = -\frac{\text{س}}{٤}$

$\text{س}_١ = ١٦$

٦) جد فائض المستهلك لاقتران (السعر - الطلب) $\text{ع} = \text{ق(س)} = ٢٥ - ٣\text{س}$ ، $\text{ع}_١ = ٧$

الحل:-

$\text{ف}_\text{ك} = \int_{\text{.}}^{\text{س}_١} \text{ق(س) دس} - \text{س}_١ \, \text{ع}_١$

$= \int_{\text{.}}^{٦} (٢٥ - ٣\text{س}) - ٦ \times ٧$

$= ٢٥\text{س} - \frac{٣\text{س}^٢}{٢} \Big]_{\text{.}}^{٦} - ٤٢$

$(٢٥ \times ٦ - \frac{٣}{٢}(٦)^٢) - ٤٢$

$١٥٠ - ٥٤ - ٤٢ = ٥٤$ دينار.

$\text{ع}_١ = ٧$

$٧ = ٢٥ - ٣\text{س}$

$٧ - ٢٥ = -٣\text{س}$

$-١٨ = -٣\text{س}$

$\text{س}_١ = ٦$

٧) اذا كان اقتران (السعر - الطلب) هو $\text{ع} = ٩ - \frac{\text{س}}{٢}$ ، وكان $\text{ع}_١ = ٣$ فجد فائض المستهلك للاقتران (السعر - الطلب)

إعداد : يزن القريوتي

٨ اذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو $ع = هـ(س) = ١٨ + ٤س$ حيث $ع_١ = ٣٠$ فجد فائض المنتج

الحل :

$ف_ج = ع_١ س_١ - \int_{٠}^{س_١} هـ(س)\,دس$

$ف_ج = ٣٠ \times ٣ - \int_{٠}^{٣} (١٨ + ٤س)\,دس$

$= ٩٠ - [١٨س + ٢س^٢]_{٠}^{٣}$

$= ٩٠ - [١٨ \times ٣ + ٢(٣)^٢] - (٠)]$

$= ٩٠ - [٥٤ + ١٨] = ٩٠ - ٧٢ = ١٨$ دينار

$ع_١ = ٣٠$

$٣٠ = ١٨ + ٤س$

$٣٠ - ١٨ = ٤س$

$١٢ = ٤س$

$س_١ = ٣$

٩ اذا كان إقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو $ع = هـ(س) = ٥ + ٣س^٢$ ، حيث $ع_١ = ٥٣$ فجد فائض المنتج .

الحل :

$ف_ج = ع_١ س_١ - \int_{٠}^{س_١} هـ(س)\,دس$

$ف_ج = ٥٣ \times ٤ - \int_{٠}^{٤} (٥ + ٣س^٢)\,دس$

$= ٢١٢ - [٥س + س^٣]_{٠}^{٤}$

$= ٢١٢ - [٥ \times ٤ + (٤)^٣] - (٠)]$

$= ٢١٢ - [٢٠ + ٦٤]$

$= ٢١٢ - ٨٤ = ١٢٨$ دينار .

$ع_١ = ٥٣$

$٥٣ = ٥ + ٣س^٢$

$٥٣ - ٥ = ٣س^٢$

$٤٨ = ٣س^٢$

$س^٢ = ١٦$

$س = ٤$ ، $س = -٤$ تهمل

١٠ جد فائض المنتج لاقتران (السعر - الطلب) $ع = هـ(س) = \frac{٢}{٣}س + ١٥$ ، $ع_١ = ١٧$

الحل :

$ف_ج = س_١ \times ع_١ - \int_{٠}^{س_١} هـ(س)\,دس$

$= ٣ \times ١٧ - \int_{٠}^{٣} (\frac{٢}{٣}س + ١٥)\,دس$

$ف_ج = ٥١ - [\frac{س^٢}{٣} + ١٥س]_{٠}^{٣}$

$= ٥١ - [\frac{٩}{٣} + ١٥ \times ٣]$

$= ٥١ - [٣ + ٤٥]$

$٥١ - ٤٨ = ٣$ دينار

$ع_١ = ١٧$

$١٧ = \frac{٢}{٣}س + ١٥$

$١٧ - ١٥ = \frac{٢}{٣}س$

$٢ = \frac{٢}{٣}س$

$٦ = ٢س$

$س_١ = ٣$

١١ جد فائض المنتج لاقتران (السعر - الطلب) $ع = هـ(س) = ٣س^٢ + ٦$ ، $ع_١ = ٥٤$

الحل :

$ف_ج = ع_١ \times س_١ - \int_{٠}^{س_١} هـ(س)\,دس$

$ف_ج = ٥٤ \times ٤ - \int_{٠}^{٤} (٣س^٢ + ٦)\,دس$

$= ٢١٦ - [س^٣ + ٦س]_{٠}^{٤}$

$= ٢١٦ - [(٤)^٣ + ٦ \times ٤]$

$٢١٦ - [٦٤ + ٢٤]$

$٢١٦ - ٨٨ = ١٢٨$ دينار

$ع_١ = ٥٤$

$٥٤ = ٣س^٢ + ٦$

$٥٤ - ٦ = ٣س^٢$

$٤٨ = ٣س^٢$

$س^٢ = ١٦$

$س = ٤$ ، $س = -٤$ تهمل

واجب

١٢ جد فائض المستهلك لاقتران (السعر - الطلب) عند $ع_١ = ٧$

$ع = ق(س) = ٣٥ - ٣س$

١٣ اذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو ع = ق(س) = ٣٦ - ٢س وكان اقتران (السعر - الطلب) لهذا المنتج ع = هـ(س) = ١٢ + ٦س فجد :

١) كمية التوازن (س١)

٢) سعر التوازن (ع١)

٣) فائض المستهلك عند سعر التوازن (ف ك)

٤) فائض المنتج عند سعر التوازن (ف ج)

الحل:

١. كمية التوازن "س١" نجدها بمساواة الاقترانين

ق(س) = هـ(س)

٣٦ - ٢س = ١٢ + ٦س ← ٣٦ - ١٢ = ٢س + ٦س

٢٤ = ٨س ← س١ = ٣

٢. سعر التوازن "ع١" نجدها بتعويض س في أحد الاقترانين

ع = هـ(٣) = ١٢ + ٦ × ٣ = ١٢ + ١٨ = ٣٠

٣. ف ك = $\int_{٠}^{س_١}$ ق(س) ءس - ع١ × س١

= $\int_{٠}^{٣}$ (٣٦ - ٢س) ءس - ٣٠ × ٣

= ٣٦س - س² $\Big]_{٠}^{٣}$ - ٩٠ = (٣٦ × ٣ - ٩) - ٩

(١٠٨ - ٩) - (٠) - ٩٠ = ٩ دنانير

٤. ف ج = ع١ × س١ - $\int_{٠}^{س_١}$ هـ(س) ءس

ف ج = ٣٠ × ٣ - $\int_{٠}^{٣}$ (١٢ + ٦س) ءس

= ٩٠ - (١٢س + ٣س²) $\Big]_{٠}^{٣}$ = ٩٠ - [٣٦ + ٢٧ - ٠]

= ٩٠ - ٦٣ = ٢٧ دينار

١٤ اذا كان إقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو ع = ٤٨ - ٣س وكان اقتران (السعر - الطلب) لهذا المنتج ع = ٢س + ٣ فجد

١) كمية التوازن

٢) سعر التوازن

٣) فائض المستهلك عند سعر التوازن

٤) فائض المنتج عند سعر التوازن

الحل:

١) كمية التوازن (س١)

ق(س) = هـ(س)

٤٨ - ٣س = ٢س + ٣ ← ٤٨ - ٣ = ٢س + ٣س

٣٥ = ٥س ← س١ = ٧

٢) سعر التوازن (ع)

ع = ق(٧) = ٤٨ - ٣ × ٧ = ٤٨ - ٢١ = ٢٧

٣) ف ك = $\int_{٠}^{س_١}$ ق(س) ءس - ع١ × س١

= $\int_{٠}^{٧}$ (٤٨ - ٣س) ءس - ٢٧ × ٧

= (٤٨س - $\frac{٣س^٢}{٢}$) $\Big]_{٠}^{٧}$ - ١٨٩

= (٤٨ × ٧ - $\frac{٣ \times (٧)^٢}{٢}$) - ١٨٩

(٣٣٦ - $\frac{١٤٧}{٢}$) - ١٨٩

($\frac{٦٧٢}{٢}$ - $\frac{١٤٧}{٢}$) - ١٨٩

$\frac{٥٢٥}{٢}$ - ١٨٩

$\frac{٥٢٥}{٢}$ - $\frac{٣٧٨}{٢}$ = $\frac{١٤٧}{٢}$

٤) ف ج = ع١ س١ - $\int_{0}^{س_1}$ هـ(س) دس

ف ج = ٧ × ٢٧ - $\int_{0}^{٧}$ (٢س + ٣) دس

= ١٨٩ - $\left[\frac{٢ س^2}{٢} + ٣س \right]_{0}^{٧}$

= ١٨٩ - [٤٩ + ٢١] = ١٨٩ - ٧٠ = ١١٩ دينار

١٥) اذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو ع = ق(س) = ٤٣ - ٤س وكان اقتران (السعر - الطلب) لهذا المنتج ع = هـ(س) = س + ٣ فجد:

١) كمية التوازن

٢) سعر التوازن

٣) فائض المستهلك عند سعر التوازن

٤) فائض المنتج عند سعر التوازن

الحل:

١) كمية التوازن ← ق(س) = هـ(س)

٤٣ - ٤س = س + ٣ ⇐ ٤٣ - ٣ = س + ٤س

٤٠ = ٥س ⇐ (س١ = ٨)

٢) سعر التوازن.

ع = هـ(٨) = ٨ + ٣ = ١١ ⇐ (ع١ = ١١)

٣) ف ك = $\int_{0}^{س_1}$ ق(س) دس - ع١ × س١

ف ك = $\int_{0}^{٨}$ (٤٣ - ٤س) دس - ١١ × ٨

ف ك = $\left[٤٣س - ٢س^2 \right]_{0}^{٨}$ - ٨٨

= (٤٣ × ٨ - ٢ × $(٨)^2$) - ٨٨

= (٣٤٤ - ٢ × ٦٤) - ٨٨

ف ك = (٣٤٤ - ١٢٨) - ٨٨ = ٢١٦ - ٨٨

ف ك = ١٢٨ دينار.

٤) ف ج = ع١ × س١ - $\int_{0}^{س_1}$ هـ(س) دس

ف ج = ١١ × ٨ - $\int_{0}^{٨}$ (س + ٣) دس

= ٨٨ - $\left[\frac{س^2}{٢} + ٣س \right]_{0}^{٨}$

= ٨٨ - ($\frac{(٨)^2}{٢}$ + ٣ × ٨) = ٨٨ - (٣٢ + ٢٤)

ف ج = ٨٨ - ٥٦ = ٣٢ دينار.

١٦) اذا علمت ان ع١ = ق(س) = ١٠٠ - ٤س يمثل اقتران (السعر - الطلب) وكان السعر ثابتاً عند ع١ = ٢٠ جد فائض المستهلك.

الحل:

ف ك = $\int_{0}^{س_1}$ ق(س) دس - ع١ × س١

= $\int_{0}^{٢٠}$ (١٠٠ - ٤س) - ٢٠ × ٢٠

= $\left[(١٠٠س - ٢س^2) \right]_{0}^{٢٠}$ - ٤٠٠

= (١٠٠ × ٢٠ - ٢$(٢٠)^2$) - ٤٠٠

= (٢٠٠٠ - ٨٠٠) - ٤٠٠

ع١ = ٢٠

٢٠ = ١٠٠ - ٤س

٢٠ - ١٠٠ = -٤س

٤س = ٨٠

(س١ = ٢٠)

١٢٠٠ - ٤٠٠ = ٨٠٠ دينار.

واجب

١٧) اذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو ع = ق(س) = ٤٠ - ٣س وكان اقتران (السعر - الطلب) هو ع = هـ(س) = ٦س أوجد فائض المستهلك عند سعر التوازن

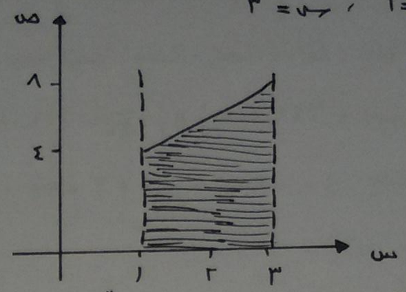
إعداد: يزن القريوتي

حساب المساحة

الأسئلة

١) احسب المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢س + ٢ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣

الحل:



$\text{م} = \left| \int_{١}^{٣} (٢\text{س} + ٢) \, د\text{س} \right|$

$\text{م} = \left| \frac{٢\text{س}^٢}{٢} + ٢\text{س} \right|_{١}^{٣}$

$= \left| (٩ + ٦) - (١ + ٢) \right| = \left| ١٥ - ٣ \right|$

$=$ ١٢ وحدة مربعة

$٢\text{س} + ٢ = ٠$
$٢\text{س} = -٢$
$\text{س} = -١$ خارج

٢) جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س² − س ومحور السينات

الحل:

$\text{م} = \left| \int_{٠}^{١} (\text{س}^٢ - \text{س}) \, د\text{س} \right|$

$= \left| \left[\frac{\text{س}^٣}{٣} - \frac{\text{س}^٢}{٢} \right]_{٠}^{١} \right|$

$= \left| \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} \right| = \frac{١}{٦}$

$\text{س}^٢ - \text{س} = \text{صفر}$
$\text{س}(\text{س} - ١) = ٠$
$\text{س} = ٠$
$\text{س} = ١$

٣) جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٤س − س² ومحور السينات

واجب

ج = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة

٤) احسب المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢س² ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٢

الحل:

$\text{م} = \left| \int_{١}^{٢} ٢\text{س}^٢ \, د\text{س} \right|$

$= \left| \left[\frac{٢\text{س}^٣}{٣} \right]_{١}^{٢} \right| = \left| \left(\frac{٢ \times ٨}{٣} \right) - \frac{٢}{٣} \right|$

$= \frac{١٤}{٣}$ وحدة مربعة

$٢\text{س}^٢ = ٠$
$\text{س} = ٠$ خارج

٥) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س² − ٣س + ٢ ومحور السينات

الحل:

$\text{م} = \int (\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢)$

$\text{م} = \int_{١}^{٢} (\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢) \, د\text{س}$

$= \left| \left[\frac{\text{س}^٣}{٣} - \frac{٣\text{س}^٢}{٢} + ٢\text{س} \right]_{١}^{٢} \right|$

$\left| \left(\frac{٨}{٣} - \frac{١٢}{٢} + ٤ \right) - \left(\frac{١}{٣} - \frac{٣}{٢} + ٢ \right) \right|$

$= \left| \left(\frac{٨}{٣} - ٢ \right) - \left(\frac{٢ - ٩}{٦} + ٢ \right) \right|$

$= \left| \frac{٨ - ٦}{٣} - \left(\frac{-٧ + ١٢}{٦} \right) \right|$

$= \left| \frac{٢}{٣} - \frac{٥}{٦} \right| = \left| \frac{١٢ - ١٥}{١٨} \right|$

$= \left| \frac{-٣}{١٨} \right| = \frac{٣}{١٨} = \frac{١}{٦}$ وحدة مربعة

$\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢ = ٠$
$(\text{س} - ١)(\text{س} - ٢) = ٠$
$\text{س} = ١$ ، $\text{س} = ٢$

٦) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢ − س ومحور السينات والمستقيمين س = ٢ ، س = ٦

إعداد : يزن القريوتي

الحل :

$م = \left| \int_{٢}^{٦} (٢ - س)\, ءس \right|$

$م = \left| ٢س - \frac{س^{٢}}{٢} \Big]_{٢}^{٦} \right|$

$م = (١٢ - ١٨) - (٤ - ٢) = |-٦ - ٢|$

$= |-٨| = ٨$

٢ - س = ٠

س = ٢ على الفترة

---

١٧ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢س - ١ ومحور السينات والمستقيمين س = -٢ ، س = -١

الحل :-

$م = \left| \int_{-٢}^{-١} (٢س - ١)\, ءس \right|$

$م = \left| \frac{\cancel{٢}س^{٢}}{\cancel{٢}} - س \Big]_{-٢}^{-١} \right|$

$= \left| (١ + ١) - (٤ + ٢) \right|$

$= |٢ - ٦| = |-٤| = ٤$ وحدة مربعة

٢س - ١ = ٠

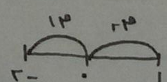
س = $\frac{١}{٢}$ خارج

---

١٨ إحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $س^{٣}$ ومحور السينات والمستقيمين س = -٢ ، س = ١

الحل :-

$س^{٣} = ٠ \Leftarrow س = ٠$



م = م١ + م٢

$م = \left| \int_{-٢}^{٠} س^{٣}\, ءس \right| + \left| \int_{٠}^{١} س^{٣}\, ءس \right|$

$= \left| \frac{س^{٤}}{٤} \Big]_{-٢}^{٠} \right| + \left| \frac{س^{٤}}{٤} \Big]_{٠}^{١} \right|$

$= \left| (٠) - (٤) \right| + \left| (\frac{١}{٤}) - (٠) \right| = ٤ + \frac{١}{٤}$

$= \frac{١٧}{٤}$ وحدة مربعة

---

١٩ إحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٩ - $س^{٢}$ ومحور السينات

الحل :

$م = \left| \int_{-٣}^{٣} (٩ - س^{٢})\, ءس \right|$

$= \left| ٩س - \frac{س^{٣}}{٣} \Big]_{-٣}^{٣} \right|$

$= \left| (٩ \times ٣ - \frac{٢٧}{٣}) - (-٢٧ + ٩) \right|$

$= \left| (٢٧ - ٩) - (-١٨) \right| = |١٨| + |١٨|$

= ٣٦ وحدة مربعة.

٩ - $س^{٢}$ = ٠

$س^{٢}$ = ٩

س = ٣ ، س = -٣

---

١٠ جد مساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢س - ٤ ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣

الحل :

$م = \int (٢س - ٤)\, ءس$

$م_{١} = \left| \int_{٠}^{٢} (٢س - ٤)\, ءس \right|$

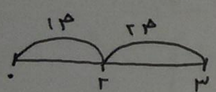
$م_{٢} = \left| \int_{٢}^{٣} (٢س - ٤)\, ءس \right|$

$م = م_{١} + م_{٢}$

٢س - ٤ = صفر

٢س = ٤

س = ٢ داخل الفترة



---

١١ جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٤ $س^{٣}$ ومحور السينات في الفترة [-١ ، ٣]

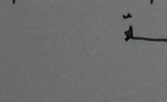
$م = \int_{-١}^{٠} ٤س^{٣}\, ءس + \int_{٠}^{٢} ٤س^{٣}$

$\left| س^{٤} \Big]_{-١}^{٠} \right| + \left| س^{٤} \Big]_{٠}^{٢} \right|$

$= |-١| + |١٦| = ١٧$ وحدة مربعة

٤ $س^{٣}$ = ٠

س = ٠



إعداد : يزن القريوتي

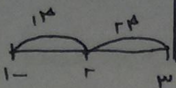
١٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ٤ - ٢\text{س}$ و محور السينات في الفترة $[-١ ، ٣]$

الحل :

$٤ - ٢\text{س} = ٠$

$-٢\text{س} = -٤$

$\text{س} = ٢$ داخل



$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$

$\text{م} = \left|\int_{-١}^{٢} (٤ - ٢\text{س})\, \text{ءس}\right| + \left|\int_{٢}^{٣} (٤ - ٢\text{س})\, \text{ءس}\right|$

$\text{م} = \left|[٤\text{س} - \text{س}^٢]_{-١}^{٢}\right| + \left|[٤\text{س} - \text{س}^٢]_{٢}^{٣}\right|$

$\text{م} = \left|(٤) - (-١-٥)\right| + \left|(٣) - (٤)\right|$

$= ٩ + ١ = ١٠$ وحدات مربعة

١٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ٢٠ - ٤\text{س}$ و محور السينات والمستقيمين $\text{س} = ١$ ، $\text{س} = ٣$

الحل :

$٢٠ - ٤\text{س} = ٠$

$٢٠ = ٤\text{س}$

$\text{س} = ٥$ خارج

$\text{م} = \left|\int_{١}^{٣} (٢٠ - ٤\text{س})\, \text{ءس}\right|$

$= \left|[٢٠\text{س} - ٢\text{س}^٢]_{١}^{٣}\right|$

$= \left|(٦٠ - ١٨) - (٢٠ - ٢)\right| = ٢٤$ وحدة مربعة

١٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ٤\text{س} - ١$ و محور السينات في الفترة $[١ ، ٣]$

الحل :

$٤\text{س} - ١ = ٠$

$\text{س} = \frac{١}{٤}$ خارج

$\text{م} = \left|\int_{١}^{٣} (٤\text{س} - ١)\right|$

$\text{م} = \left|[٢\text{س}^٢ - \text{س}]_{١}^{٣}\right| = \left|(١٨ - ٣) - (٢ - ١)\right| = ١٤$

١٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ١$ في الفترة $[٠ ، ٢]$

الحل :

$\text{س}^٢ + ١ = ٠$ "لا تحلل"

∴ لا يوجد جذور

$\text{م} = \left|\int_{٠}^{٢} (\text{س}^٢ + ١)\, \text{ءس}\right|$

$= \left|[\frac{\text{س}^٣}{٣} + \text{س}]_{٠}^{٢}\right|$

$= \left|\frac{٨}{٣} + ٢\right| = \frac{٨ + ٦}{٣} = \frac{١٤}{٣}$ وحدة مربعة

١٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ٦$ ومحور السينات والمستقيمين $\text{س} = -٢$ ، $\text{س} = ٥$

الحل :

$\text{م} = \left|\int_{-٢}^{٥} ٦\, \text{ءس}\right| = ٦(٥ - -٢) = ٤٢$ وحدة مربعة

١٧) إحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣$ ومحور السينات .

الحل:

$\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣ = ٠$

$(\text{س} + ٣)(\text{س} - ١) = ٠$

$\text{س} = -٣$ ، $\text{س} = ١$

$\text{م} = \left|\int_{-٣}^{١} (\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣)\, \text{ءس}\right|$

$\text{م} = \left|[\frac{\text{س}^٣}{٣} + \text{س}^٢ - ٣\text{س}]_{-٣}^{١}\right|$

$\text{م} = \left|(\frac{١}{٣} + ١ - ٣) - (-\cancel{٩} + \cancel{٩} + ٩)\right|$

$= \left|\frac{١}{٣} - ٢ - ٩\right| = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة .

١٨) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ص} = \text{س}^٣$ ومحور السينات والمستقيم $\text{س} = -١$

إعداد : يزن القريوتي

• ملاحظة : المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ومنحنى إقتران آخر أو مستقيم ص نأخذ : (الأكبر - الأصغر)

١٩ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢}$ والمستقيم $\text{ص} = ١٢$

« نساوي الاقترانات ببعضها »

الحل :-

$$\text{م} = \left| \int_{-٢}^{٢} (٣\text{س}^{٢} - ١٢)\, \text{ءس} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{٣\text{س}^{٣}}{٣} - ١٢\text{س} \right]_{-٢}^{٢} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{٨}{\cancel{٣}} \times \cancel{٣} - ٢٤\right) - (-٨ + ٢٤) \right|$$

$= ٣٢$ وحدة مربعة

$\text{ق} = \text{ص}$

$٣\text{س}^{٢} = ١٢$

$\text{س}^{٢} = ٤$

$\text{س} = ٢$ ، $\text{س} = -٢$

٢٠ جد المساحة المحصورة بين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \text{س}$ والمستقيم $\text{ص} = ٢$

الحل :

$$\text{م} = \left| \int_{-٢}^{١} (\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢)\, \text{ءس} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٢\text{س} \right]_{-٢}^{١} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ٢\right) - \left(\frac{-٨}{٣} + \frac{٤}{٢} + ٤\right) \right|$$

$$= \left| \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ٢ + \frac{٨}{٣} - ٢ - ٤ \right|$$

$$= \left| ٣ - ٨ + \frac{١}{٢} \right| = \left| -٥ + \frac{١}{٢} \right|$$

$= \left| \frac{-١٠ + ١}{٢} \right| = \frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة

$\text{ق} = \text{ص}$

$\text{س}^{٢} + \text{س} = ٢$

$\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢ = ٠$

$(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١) = ٠$

$\text{س} = -٢$ ، $\text{س} = ١$

واجب

٢١ جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقترانين $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٣$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٢\text{س}$

الحل :

• راجع سؤال رقم (٥)

الجواب $= \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

$\text{ق} = \text{هـ}$

$\text{س}^{٢} - ٣ = ٢\text{س}$

$\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣ = ٠$

$(\text{س} - ٣)(\text{س} + ١) = ٠$

$\text{س} = ٣$ ، $\text{س} = -١$

٢٢ احسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢$ والمستقيم $\text{ص} = ٣$

الحل :

$$\text{م} = \left| \int_{-١}^{١} (\text{س}^{٢} + ٢ - ٣)\, \text{ءس} \right|$$

$$\text{م} = \left| \int_{-١}^{١} (\text{س}^{٢} - ١)\, \text{ءس} \right|$$

$$\text{م} = \left| \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \text{س} \right]_{-١}^{١} \right|$$

$= \frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة

$\text{ق} = \text{ص}$

$\text{س}^{٢} + ٢ = ٣$

$\text{س}^{٢} = ١$

$\text{س} = \pm ١$

٢٣ جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}$ ، والاقتران $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}$

$$\text{م} = \left| \int_{٠}^{٤} (٢\text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢})\, \text{ءس} \right|$$

$$\text{م} = \left| \left[\text{س}^{٢} - \frac{١}{٦}\text{س}^{٣} \right]_{٠}^{٤} \right|$$

$$\text{م} = \left| \left(١٦ - \frac{٦٤}{٦}\right) - (٠) \right|$$

$$\text{م} = \left| ١٦ - \frac{٣٢}{٣} \right|$$

$$\text{م} = \left| \frac{٤٨}{٣} - \frac{٣٢}{٣} \right| = \frac{١٦}{٣}$$

$\text{ق} = \text{هـ}$

$٢\text{س} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}$

$٤\text{س} = \text{س}^{٢}$

$\text{س}^{٢} - ٤\text{س} = ٠$

$\text{س}(\text{س} - ٤) = ٠$

$\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ٤$

إعداد : يزن القريوتي

٢٤) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س) = ٢س − ٣ ، ع(س) = س² − ٢س

الحل :

ق = ع

٢س − ٣ = س² − ٢س

س² − ٢س − ٢س + ٣

س² − ٤س + ٣

(س − ١)(س − ٣)

س = ١ ، س = ٣

م = | ∫ من ١ إلى ٣ ((س² − ٢س) − (٢س − ٣)) دس |

= | ∫ من ١ إلى ٣ (س² − ٢س − ٢س + ٣) دس |

= | ∫ من ١ إلى ٣ (س² − ٤س + ٣) دس |

= | [س³/٣ − ٢س² + ٣س] من ١ إلى ٣ |

= | (٢٧/٣ − ١٨ + ٩) − (١/٣ − ٢ + ٣) |

= | (٠) − (١/٣ + ١) |

= | −٤/٣ | = ٤/٣ وحدة مربعة

٢٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س) = ٦س ، هـ(س) = ٣س²

الحل

ق = هـ

٦س = ٣س²

٣س² − ٦س = ٠

٣س(س − ٢) = ٠

س = ٠ ، س = ٢

م = | ∫ من ٠ إلى ٢ (٦س − ٣س²) دس |

= | [٦س²/٢ − ٣س³/٣] من ٠ إلى ٢ |

= | (١٢ − ٨) − (٠) | = ٤ وحدة مربعة

٢٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س) = ٣ − س² ، هـ(س) = ٢س

الحل :

نفس جواب سؤال رقم (١٧)

الجواب = ٣٢/٣ وحدة مربعة

٢٧) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س² − ٤س والمستقيم ص = ٥

الحل :

ق = ص

س² − ٤س = ٥

س² − ٤س − ٥ = ٠

(س − ٥)(س + ١) = ٠

س = ٥ ، س = −١

م = | ∫ من −١ إلى ٥ (س² − ٤س − ٥) دس |

= | [س³/٣ − ٢س² − ٥س] من −١ إلى ٥ |

= | (١٢٥/٣ − ٥٠ − ٢٥) − (−١/٣ − ٢ + ٥) |

= ٣٦ وحدة مربعة

٢٨) احسب المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ص = س² + ٢

ص = ٥ − ٢س

الحل :- نساوي الاقترانين ببعضهما

س² + ٢ = ٥ − ٢س

س² + ٢ − ٥ + ٢س = ٠

س² + ٢س − ٣ = ٠

(س − ١)(س + ٣) = صفر

س = −٣ ، س = ١

نفس جواب سؤال رقم (١٧) .

إعداد : يزن القريوتي

المساحة من الرسم

أساسيات :

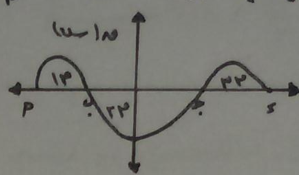
١. المساحة دائماً موجبة

٢. التكامل يكون موجب اذا كان المنحنى فوق محور السينات .

٣. التكامل يكون سالباً اذا كان المنحنى تحت محور السينات .

الأسئلة :

٢٩ اعتماداً على الشكل حيث م١ = ٢ ، م٢ = ٤ ، م٣ = ١



أ) $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = ؟$

ب) $\int_{ب}^{جـ} ق(س)\,دس = ؟$

جـ) $\int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس = ؟$

د) المساحة الكلية = ؟

الحل : أ) $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = ٢$

ب) $\int_{ب}^{جـ} ق(س)\,دس = -٤$

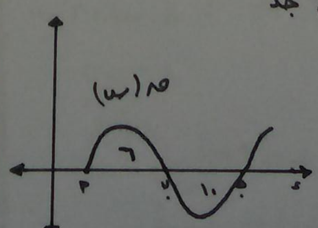
جـ) $\int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس = ٢ - ٤ = -٢$

د) المساحة الكلية = م١ + م٢ + م٣

= ٢ + ٤ + ١ = ٧ وحدات

٣٠ اعتماداً على الشكل جد

$\int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس .$



الحل :

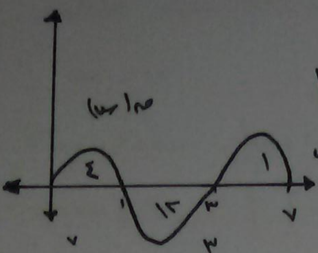
$\int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس = ٦ - ١٠ = -٤$ وحدات

٣١ من الشكل الآتي جد

١) $\int_{٠}^{٧} ق(س)\,دس$

٢) $\left|\int_{٠}^{٧} ق(س)\,دس\right|$

٣) $\int_{٠}^{٧} |ق(س)|\,دس$



• الحل :

١) $\int_{٠}^{٧} ق(س)\,دس = \int_{٠}^{١} ق(س)\,دس + \int_{١}^{٣} ق(س)\,دس + \int_{٣}^{٧} ق(س)\,دس$

$= ٤ + (-١٣) + ١ = -٧$

٢) $\left|\int_{٠}^{٧} ق(س)\,دس\right| = |-٧| = ٧$

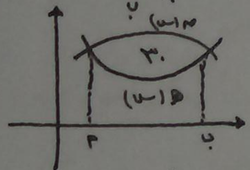
٣) $\int_{٠}^{٧} |ق(س)|\,دس = \int_{٠}^{١} |ق(س)|\,دس + \int_{١}^{٣} |ق(س)|\,دس + \int_{٣}^{٧} |ق(س)|$

$= ٤ + ١٣ + ١ = ١٧$

٣٢ الشكل التالي يمثل المساحة بين :

ق(س) ، هـ(س) [أ، ب]

اذا كان $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = ٤٠$ ، جد $\int_{ب}^{أ} هـ(س)\,دس$



• الحل :

المساحة = $\int_{أ}^{ب} ق(س) - هـ(س)\,دس$

$٣٠ = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس - \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس$

$٣٠ = ٤٠ - \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس$

$\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس = ١٠$

$\therefore \int_{ب}^{أ} هـ(س) = -١٠$

واجب

٣٣ اعتماداً على الشكل التالي اذا علمت أن المساحة بين منحني ق(س) وهـ(س) هي ٧ ، وكان $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = ١٧$

جد $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس .$