# الملاذ في مهارات الرياضيات

## وحدة التكامـــــل

## تدريبات مع الحـــل

الاستاذ حمزة ابو الفول ٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

**مثال:** جد اقترانًا بدائيًا للاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = ٤س$^{٣}$ + قا$^{٢}$ س

**الحل :** م (س) = س$^{٤}$ + ظا س + $\boxed{٥}$ يمكن وضع اي عدد حقيقي آخر

**مثال:** جد $\int$ (٦س − ٣) دس

**الحل :** $\int$ (٦س − ٣) دس = ٣س$^{٢}$ − ٣س + جـ

**مثال:** جد $\int$ ظتا$^{٢}$س دس

**الحل :** $\int$ ظتا$^{٢}$س دس = $\int$ (قتا$^{٢}$س − ١) دس

= − ظتا س − س + جـ

**مثال:** إذا كان $\int$ ق(س) دس = جا$^{٢}$ ٢س + ظا س + جـ فجد قَ ( $\frac{\pi}{٤}$ )

**الحل :** ق (س) = ٤ جا ٢س جتا ٢س + قا$^{٢}$س باشتقاق الطرفين

= ٢ جا ٤س + قا$^{٢}$ س

قَ (س) = ٨ جتا ٤س + ٢ قا س × قاس ظا س

= ٨ جتا ٤س + ٢ قا$^{٢}$س ظاس

قَ ( $\frac{\pi}{٤}$ ) = ٨ جتا $\pi$ + ٢ قا$^{٢}$ $\frac{\pi}{٤}$ ظا $\frac{\pi}{٤}$

= ٨ × $^{-}$١ + ٢ × ٢ × ١

= −٤

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

**مثال:** إذا كان $\int$ (قَ(س) + ٢ س) دس = س$^{٣}$ + أ س$^{٢}$ + ١

وكان قَ(١) = ٥ ، ق(٢) = ٧ ، جد : قيمة أ ، ق(٠) ، قَ(٤)

**الحل :**

(١) قَ(س) + ٢س = ٣س$^{٢}$ + ٢أ س (باشتقاق الطرفين)

قَ(١) = ٥ $\Leftarrow$ ٥ + ٢ = ٣ + ٢ أ $\Leftarrow$ أ = ٢

(٢) ق(س) + س$^{٢}$ + جـ = س$^{٣}$ + أ س$^{٢}$ + ١

ق(٢) = ٧ $\Leftarrow$ ٧ + ٤ + جـ = ٨ + ٤أ + ١ $\Leftarrow$ ١١ + جـ = ٨ + ٤ × ٢ + ١

$\Leftarrow$ جـ = ٨

ق(س) + س$^{٢}$ + ٨ = س$^{٣}$ + ٢س$^{٢}$ + ١ $\Leftarrow$ ق(س) = س$^{٣}$ + س$^{٢}$ − ٧

$\Leftarrow$ ق(٠) = −٧

(٣) قَ(س) = ٣س$^{٢}$ + ٢س $\Leftarrow$ قَ(٤) = ٣(٤)$^{٢}$ + ٢(٤) = ٥٦

الحلول

**مثال:** جـد $\int$ دس = س + جـ

**مثال:** جـد $\int \frac{\text{د س}}{٤}$ دس = $\frac{١}{٤}$ س + جـ

**مثال:** جـد $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$ د س = $\int$ س$^{\frac{-١}{٣}}$ دس = $\frac{٣}{٢}$ س$^{\frac{٢}{٣}}$ + جـ

**مثال:** جـد $\int \frac{\text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}$ د س = $\int$ س$^{٢}$ $\sqrt{\text{س}}$ دس = $\int$ س$^{\frac{٥}{٢}}$ دس = $\frac{٢}{٧}$ س$^{\frac{٧}{٢}}$ + جـ

**مثال:** جـد $\int$ (٤ س$^{٣}$ − ٢س + ٦) دس = س$^{٤}$ − س$^{٢}$ + ٦س + جـ

**مثال:** جد $\int \frac{٢س^{٢} - ٣س}{\sqrt{س}}$ د س $= \int (٢س^{\frac{٣}{٢}} - ٣س^{\frac{١}{٢}})$ دس

$= ٢ \times \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} - ٣ \times \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} +$ جـ

$= \frac{٤}{٥}\sqrt{س^{٥}} - ٢\sqrt{س^{٣}} +$ جـ

متطابقة

**مثال:** جد $\int \frac{جتا ٢س}{جا^{٢}س جتا^{٢}س}$ د س $= \int \frac{جتا^{٢}س - جا^{٢}س}{جا^{٢}س جتا^{٢}س}$ دس

$= \int (\frac{١}{جا^{٢}س} - \frac{١}{جتا^{٢}س})$ دس   قانون التوزيع

$= \int (قتا^{٢}س - قا^{٢}س)$ دس

$= -$ ظتاس $-$ ظاس $+$ جـ

متطابقة

**مثال:** جد $\int (قا^{٢}س - ظا^{٢}س)$ دس $= \int ١ \cdot$ دس $=$ س $+$ جـ

**مثال:** جد $\int_{-٣}^{٦} (\frac{١}{٢}س - ٦)$ دس $= [\frac{١}{٤}س^{٢}]_{-٣}^{٦} - ٦(٦ + ٣)$

$= \frac{١}{٤}(٣٦ - ٩) - ٥٤ = \frac{-١٩١}{٤}$

**مثال:** جد $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}}$ قتا س ظتا س دس $= [-$ قتا س$]_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}}$

$= -$قتا $\frac{\pi}{٣} - -$قتا $\frac{\pi}{٦}$

$= \frac{-١}{جا \frac{\pi}{٣}} + \frac{١}{جا \frac{\pi}{٦}}$

$= -٢ + \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

الاستاذ حمزة ابو الفول ٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣



**مثال:** جـد قيمة $\int_{-٣}^{٦} \left(\frac{١}{٢}\text{س} - ٦\right) \text{دس}$

**الحل :** $\int_{-٣}^{٦} \left(\frac{١}{٢}\text{س} - ٦\right) \text{دس} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٢} \Big]_{-٣}^{٦} - ٦(٦ + ٣) = \frac{١}{٤}(٣٦ - ٩) - ٥٤ = \frac{-١٩١}{٤}$

**مثال:** جـد قيمة $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} \text{قتا س ظتا س دس}$

**الحل :** $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} \text{قتا س ظتا س دس} = -\text{قتا س} \Big]_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}} - ٢$

**مثال:** اذا كانت $\int_{١+\text{أ}}^{٢+٣\text{أ}} ٥ \, \text{دس} = ٤٠$ ، فجد قيمة أ

**الحل :** $\int_{١+\text{أ}}^{٢+٣\text{أ}} ٥ \, \text{دس} = ٤٠ \Longrightarrow ٥\,[(٢ + ٣\text{أ}) - (١ + \text{أ})] = ٤٠$

$\Longrightarrow ٥(٢\text{أ} + ١) = ٤٠ \Longrightarrow \text{أ} = \frac{٧}{٢}$

**مثال:** اذا كان $\int_{٠}^{٢} (\text{ق(س)} - ٢\text{س}) \, \text{دس} = ٢٠$ ، فجد $\int_{٠}^{٢} ٣\text{ق(س) دس}$

**الحل :** من المعطيات $\int_{٠}^{٢} (\text{ق(س)} - ٢\text{س}) \, \text{دس} = ٢٠ \Longrightarrow \int_{٠}^{٢} \text{ق(س) دس} - \int_{٠}^{٢} ٢\text{س دس} = ٢٠$

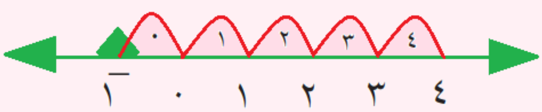
$\Longrightarrow \int_{٠}^{٢} \text{ق(س) دس} - \text{س}^{٢} \Big]_{٠}^{٢} = ٢٠ \Longrightarrow \int_{٠}^{٢} \text{ق(س) دس} - ٤ = ٢٠ \Longrightarrow \int_{٠}^{٢} \text{ق(س) دس} = ٢٤$

المطلوب $\int_{٠}^{٢} ٣\text{ق(س)} = ٣ \int_{٠}^{٢} \text{ق(س) دس} = ٣ \times ٢٤ = ٧٢$

**مثال:** جد $\int_{١}^{٤} [\text{س} + ١] \, \text{دس}$

**الحل :** نعيد تعريف اقتران اكبر عدد صحيح

$\text{س} + ١ = ٠ \Longrightarrow \text{س} = -١$ ، $\text{ل} = ١$




$\int_{١}^{٤} [\text{س} + ١] \, \text{دس} = \int_{١}^{٢} ٢ \, . \, \text{دس} + \int_{٢}^{٣} ٣ \, . \, \text{دس} + \int_{٣}^{٤} ٤ \, . \, \text{دس}$

$= ٢ + ٣ + ٤ = ٩$

**مثال:** اذا كان $\int_{1}^{4} 3\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -6$ ، $\int_{7}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 12$ ، جد $\int_{7}^{4} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

**الحل :** من المعطيات $\int_{1}^{4} 3\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -6 \Longleftarrow \int_{1}^{4} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \frac{-6}{3} = -2$

المطلوب $\int_{7}^{4} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{7}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{1}^{4} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

$= 12 + -2$

$= 10$

**مثال:** اذا كان $\int_{-1}^{\text{ج}} \text{س}\,\text{دس} = 0$ ، فجد قيمة ج .

**الحل :** $\int_{-1}^{\text{ج}} \text{س}\,\text{دس} = 0 \Longleftarrow \left[\frac{\text{س}^2}{2}\right]_{-1}^{\text{ج}} = 0 \Longleftarrow \text{ج}^2 - 1 = 0 \Longleftarrow \text{ج} = \pm 1$

**مثال:** اذا كان $\int_{1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 5$ ، $\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 4$ ، فجد $\int_{2}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

**الحل :** من المعطيات $\int_{1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 5 \Longleftarrow \int_{2}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -5$

المطلوب $\int_{2}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{2}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

$= -5 + 4$

$= -1$

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣



**مثال:** جد $\int \text{س}\,(\text{س}^{٢} - ٣)^{٣}\,\text{دس}$

**الحل :** افرض $\text{ص} = \text{س}^{٣} - ٣$ ← $\text{دص} = ٢\,\text{س}\,\text{دس}$ ← $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\,\text{س}}$

$$\text{إذن} \int \text{س}\,(\text{س}^{٢} - ٣)^{٣}\,\text{دس} = \int \text{س}\,(\text{ص})^{٣}\,\frac{\text{دص}}{٢\,\text{س}} = \int \frac{١}{٢}(\text{ص})^{٣}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{\text{ص}^{٤}}{٤} + \text{جـ} = \frac{١}{٨}(\text{س}^{٢} - ٣)^{٤} + \text{جـ}$$

**مثال:** جد $\int \text{س}^{٥}\sqrt{\text{س}^{٣} + ٢}\,\text{دس}$

**الحل :** افرض $\text{ص} = \text{س}^{٣} + ٢$ ← $\text{س}^{٣} = \text{ص} - ٢$ ← $\text{دص} = ٣\,\text{س}^{٢}\,\text{دس}$ ← $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣\,\text{س}^{٢}}$

$$\int \text{س}^{٥}\sqrt{\text{س}^{٣} + ٢}\,\text{دس} = \int \text{س}^{٥}\sqrt{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{٣\,\text{س}^{٢}}$$

$$= \frac{١}{٣}\int \text{س}^{٣}\sqrt{\text{ص}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٣}\int (\text{ص} - ٢)\sqrt{\text{ص}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٣}\int (\text{ص} - ٢)\sqrt{\text{ص}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٣}\int (\text{ص} - ٢)\,(\text{ص})^{\frac{١}{٢}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٣}\int (\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} - ٢\,\text{ص}^{\frac{١}{٢}})\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٣}\left[\frac{٢}{٥}\text{ص}^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}\right] + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٣}\left[\frac{٢}{٥}(\text{س}^{٣} + ٢)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤}{٣}(\text{س}^{٣} + ٢)^{\frac{٣}{٢}}\right] + \text{جـ}$$

**مثال:** جد $\int$ قا$^{٢}$ (أ س + ١) دس

**الحل :** (افرض ص = أ س + ١) ⬅ دص = أ دس ⬅ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{أ}}$

$\int$ قا$^{٢}$ (أ س + ١) دس = $\int$ قا$^{٢}$ (ص) $\frac{\text{دص}}{\text{أ}}$

= $\frac{١}{\text{أ}}\int$ قا$^{٢}$ (ص) دص

= $\frac{١}{\text{أ}}$ ظا (ص) دص

= $\frac{١}{\text{أ}}$ ظا (أ س + ١) + جـ

**مثال:** جد $\int$ جتا (١ − ٢ س) دس

**الحل :** افرض ص = ١ − ٢ س ⬅ دص = $^{-}$٢ دس ⬅ دس = $\frac{\text{دص}}{^{-}\text{٢ دس}}$

$\int$ جتا (١ − ٢ س) دس = $\frac{^{-}١}{٢}\int$ جتا ص دس

= $\frac{^{-}١}{٢}$ جا ص + جـ

= $\frac{^{-}١}{٢}$ جا (١ − ٢ س) + جـ

الاستاذ حمزة ابو الفول
0772259503

**مثال:** جد $\int$ جا ٦ س جا ٤ س دس

تطبيق قانون

**الحل :** $\int$ جا ٦ س جا ٤ س دس = $\frac{١}{٢}\int$ (جتا ٢ س − جا ١٠ س ) دس

= $\frac{١}{٢}$ [ $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س + $\frac{١}{١٠}$ جتا ١٠ س ] + جـ

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

**مثال:** جد $\int$ جتا ٢س جتا٧س دس

**الحل :** $\int$ جتا ٢س جتا٧س دس = $\frac{١}{٢}\int$ (جتا ١٠س + جتا $\bar{٤}$س) دس   تطبيق قانون

= $\frac{١}{٢}\int$ (جتا ١٠س + جتا ٤س) دس

= $\frac{١}{٢}$ [$\frac{١}{١٠}$ جا ١٠س + $\frac{١}{٤}$ جا٤س] + جـ

**مثال:** جد $\int$ جتا⁴ س دس

**الحل :** $\int$ جتا$^{٤}$ س دس = $\int$ (جتا$^{٢}$س)$^{٢}$ دس

= $\int$ ( $\frac{١}{٢}$(١ + جتا٢س) )$^{٢}$ دس   متطابقة

= $\frac{١}{٤}\int$ (جتا$^{٢}$ ٢س + ٢جتا ٢س + ١) دس   فك القوس

= $\frac{١}{٤}\int$ $\boxed{\text{جتا}^{٢}\ ٢\text{س}}$ دس + $\frac{١}{٤}\int$ (٢جتا ٢س + ١) دس   توزيع

متطابقة

= $\frac{١}{٤}\int$ $\boxed{\frac{١}{٢}(١ + \text{جتا٤س})}$ دس + $\frac{١}{٤}\int$ (٢جتا ٢س + ١) دس

= $\frac{١}{٨}$ [س + $\frac{١}{٤}$جا٤س] + $\frac{١}{٤}$ [$\frac{\cancel{٢}\text{جا٢س}}{\cancel{٢}}$ + س] + جـ

= $\frac{١}{٣٢}$ جا٤س + $\frac{٣}{٨}$ س + $\frac{١}{٤}$ جا٢س + جـ

**مثال:** جد $\int$ ظا⁴س قا$^{٢}$ دس

**الحل :** افرض ص = ظاس ⇦ د ص = قا$^{٢}$س دس

$\int$ ظا$^{٤}$س قا$^{٢}$س دس = $\int$ ص$^{٤}$ دص

= $\frac{\text{ص}^{٥}}{٥}$ + جـ

= $\frac{\text{ظا}^{٥}\text{س}}{٥}$ + جـ

**مثال:** جد $\int$ س قا(١ − ٢ س^٢) ظا(١ − ٢س^٢) س

**الحل :** افرض ص = ١ − ٢ س^٢ ⇐ دص = −٤ س دس ⇐ $\frac{-1}{٤ س}$ دص = دس

$\int$ س قا(١ − ٢ س^٢) ظا(١ − ٢س^٢) دس = $\int$ ~~س~~ قا ص ظا ص × $\frac{-1}{٤ \cancel{س}}$

= $\int \frac{-1}{٤}$ قاص ظاص دص

= $\frac{-1}{٤}$ قاص + جـ

= $\frac{-1}{٤}$ قا(١ − ٢ س^٢) + جـ



**مثال:** جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا س جتا س}}{\sqrt{١ + \text{جا}^2 س}}$ دس

**الحل :** افرض ص = ١ + جا^٢ س ⇐ دص = ٢ جا س جتا س ⇐ $\frac{1}{2}$ دص = جاس جتاس دس

عندما س = ٠ ⇐ ص = ١ وعندما س = $\frac{\pi}{2}$ ⇐ ص = ٢

إذن $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا س جتا س}}{\sqrt{١ + \text{جا}^2 س}}$ دس = $\frac{1}{2} \int_{1}^{2} \frac{\text{دص}}{\sqrt{ص}}$

= $\frac{1}{2} \int_{1}^{2}$ ص$^{-\frac{1}{2}}$ دص

= $\frac{1}{\cancel{2}}$ × $\cancel{2}$ ص$^{\frac{1}{2}}$ $]_{1}^{2}$

= ص$^{\frac{1}{2}}$ $]_{1}^{2}$

= $\sqrt{ص}$ $]_{1}^{2}$

= ($\sqrt{2}$ − ١)

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

**مثال:** جد ∫ (٢س − ١) جتا ٢س دس

**الحل :**

بالاجزاء

افرض ق = ٢ س − ١ ، د هـ = جتا ٣س د س

د ق = ٢ د س ، هـ = $\frac{١}{٣}$ جا ٣س

∫ (٢س − ١) جتا ٢س دس = (٢س − ١) × $\frac{\text{جا ٣س}}{٣}$ − ∫ $\frac{١}{٣}$ جا ٣س × ٢دس

= $\frac{١}{٣}$ (٢س − ١) جا ٣س + $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{\text{جتا ٣س}}{٣}$ + جـ

= $\frac{١}{٣}$ (٢س − ١) جا ٣س + $\frac{٢}{٩}$ جتا ٣س + جـ

**مثال:** جد ∫ (س − ٢)$^{٢}$ جتا (س + ١) دس

**الحل :**

بالاجزاء

افرض ق = (س − ٢)$^{٢}$ ، د هـ = جتا (س + ١) دس

د ق = ٢(س − ٢) د س ، هـ = جا (س + ١)

ثم

∫ (س − ٢)$^{٢}$ جتا (س + ١) دس = (س − ٢)$^{٢}$ جا (س + ١) − ٢ ∫ (س − ٢) × جا (س + ١) دس

بالاجزاء مرة ثانية

افرض ق = (س − ٢) ، د هـ = جا (س + ١) دس

د ق = د س ، هـ = −جتا (س + ١)

= (س − ٢)$^{٢}$ جا (س + ١) − ٢ [ (س − ٢) × −جتا (س + ١) + ∫ جتا (س + ١) دس ]

= (س − ٢)$^{٢}$ جا (س + ١) + (٢س − ٤) جتا (س + ١) − ٢ جا (س + ١) + جـ

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

توجيهي علمي

**مثال:** جد $\int \text{جتا}\sqrt{٢\text{س}+١}\ \text{دس}$

**الحل :**

نفرض الزاوية   بالتعويض

افرض ص = $\sqrt{٢\text{س}+١}$ ⟸ $\text{ص}^٢ = ٢\text{س} + ١$

٢ص دص = ٢دس ⟸ دس = ص دص

ثم

إذن $\int \text{جتا}\sqrt{٢\text{س}+١}\ \text{دس} = \int \text{جتا ص} \times \text{ص دص}$

$= \int \text{ص} \times \text{جتا ص دص}$

بالاجزاء

افرض ق = ص   د هـ = جتا ص دص

د ق = دص   هـ = جا ص

$= \text{ص جا ص} - \int \text{جا ص دص}$

$=$ ص جا ص + جتا ص + جـ

$= \sqrt{٢\text{س}+١} \times \text{جا}\sqrt{٢\text{س}+١} + \text{جتا}\sqrt{٢\text{س}+١} + \text{جـ}$

مثال : حل المعادلة التفاضلية $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{\frac{\text{ص}}{\text{س}}}$ ، $\text{س} > ٠$ ، $\text{ص} > ٠$ .

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{\frac{\text{ص}}{\text{س}}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}} \Leftarrow \sqrt{\text{س}}\ \text{دص} = \sqrt{\text{ص}}\ \text{دس}$

$\frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{ص}}} = \frac{\text{دس}}{\sqrt{\text{س}}} \Leftarrow \int \frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{ص}}} = \int \frac{\text{دس}}{\sqrt{\text{س}}} \Leftarrow \int \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\ \text{دص} = \int \text{س}^{-\frac{1}{2}}\ \text{دس}$

$٢\text{ص}^{\frac{1}{2}} = ٢\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{جـ}_1 \Leftarrow \sqrt{\text{ص}} = \sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$ ، $\text{جـ} = \frac{\text{جـ}_1}{٢}$

$\Leftarrow \text{ص} = (\sqrt{\text{س}} + \text{جـ})^2$

مثال : قذف جسم رأسيا لأعلى بسرعة ٤٠م/ث وبتسارع مقداره -١٠م/ث²، اذا كان ارتفاعة عن سطح الارض بعد ثانية من حركته يساوي ٨٠م ، فجد أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم .

الحل : ع(٠) = ٤٠م/ث ، ف(١) = ٨٠م

$\text{ت} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -١٠ \Leftarrow \text{دع} = -١٠\ \text{دن}$

$\Leftarrow \int \text{دع} = \int -١٠\ \text{دن} \Leftarrow \text{ع} = -١٠\text{ن} + \text{جـ}_1$

$\Leftarrow \text{ع}(٠) = ٤ \Leftarrow \text{جـ}_1 = ٤٠ \Leftarrow \boxed{\text{ع} = -١٠\text{ن} + ٤٠}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = -١٠\text{ن} + ٤٠ \Leftarrow \int \text{دف} = \int (-١٠\text{ن} + ٤٠)\ \text{دن}$

$\text{ف} = -٥\text{ن}^2 + ٤\text{ن} + \text{جـ}_2 \Leftarrow \text{ف}(١) = ٨٠ \Leftarrow \text{جـ}_2 = ٤٥$

$\boxed{\text{إذن ف} = -٥\text{ن}^2 + ٤٠\text{ن} + ٤٥}$

لكن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عندما ع = ٠ $\Leftarrow -١٠\text{ن} + ٤٠ = ٠ \Leftarrow \text{ن} = ٤$ ثانية

وعليه فإن أقصى ارتفاع هو $\text{ف}(٤) = -٥(٤)^2 + ٤٠ \times ٤ + ٤٥$

$= -٨٠ + ١٦٠ + ٤٥ = ١٢٥\text{م}$

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣



مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢ - ٢س ومحور السينات والمستقيمين س = -٢ ، س = ٢ .

الحل : م = ∫ من -٢ إلى ١ (٢ − ٢س) دس + ∫ من ١ إلى ٢ (٢س − ٢) دس

= ٢(١ + ٢) − [س^٢] من -٢ إلى ١ + [س^٢] من ١ إلى ٢ − ٢(٢ − ١)

= ٦ − (١ − ٤) + (٤ − ١) − ٢ = ١٠ وحدات مساحة

نجزئ التكامل لأن صفر الاقتران ضمن الفترة

٢ − ٢س = صفر ⟵ س = ١

٢ − ٢س | ٢س − ٢

+ + + | − − −

-٢ ، ١ ، ٢

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ١٦ - س^٢ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣ .

لا نجزئ التكامل لأن أصفار الاقتران ليست ضمن الفترة

الحل : م = ∫ من ١ إلى ٣ (١٦ − س^٢) دس = ١٦(٣ − ١) − [س^٣/٣] من ١ إلى ٣

= ١٦(٢) − (٣^٣/٣ − ١^٣/٣)

= ٣٢ − (٩ − ١/٣)

= ٢٣ ١/٣ وحدة مساحة

(١٦ − س^٢) = صفر ⟵ س = ٤ ، س = -٤

(١٦ − س^٢)

− − − | + + + | − − −

-٤ ، ١ ، ٣ ، ٤

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = |س^٣ - ١| ومحور السينات في الفترة [-٢ ، ٢]

نعيد تعريف المطلق

الحل : م = ∫ من -٢ إلى ٢ |س^٣ − ١| دس

= ∫ من -٢ إلى ١ (١ − س^٣) دس + ∫ من ١ إلى ٢ (س^٣ − ١) دس

= (س − س^٤/٤)] من -٢ إلى ١ + (س^٤/٤ − س)] من ١ إلى ٢

= (١ − ١/٤) − (-٢ − ١٦/٤) + (١٦/٤ − ٢) (١/٤ − ١)

= (١ − ١/٤) − (-٢ − ٤) + (٤ − ٢) (١/٤ − ١)

= ٩ ١/٢ وحدة مساحة

س^٣ − ١ = صفر ⟵ س = ١

١ − س^٣ | س^٣ − ١

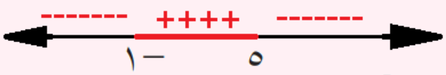
− − − | + + +

-٢ ، ١ ، ٢

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س$^{٢}$ ، ومنحنى ل(س) = ٤س + ٥ .

الحل : نجد نقط تقاطع المنحنيين

$$\text{س}^{٢} = ٤\text{س} + ٥ \Leftarrow \text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ٥ = ٠ \Leftarrow \text{س} = -١ \text{ ، } ٥$$




$$\text{م} = \int_{-١}^{٥} [\,\text{ل}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})\,]\, \text{دس} \quad \text{، لأن ل(س)} \geq \text{ق(س) لكل س} \in [-١ \text{، } ٥]$$

$$= \int_{-١}^{٥} [\,٤\text{س} + ٥ - \text{س}^{٢}\,]\, \text{دس} = \left[\,٢\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\,\right]_{-١}^{٥}$$

$$= \left[\,٢(٥)^{٢} + ٥(٥) - \frac{(٥)^{٣}}{٣}\,\right] - \left[\,٢(-١)^{٢} + ٥(-١) - \frac{(-١)^{٣}}{٣}\,\right]$$

= ٣٦ وحده مساحة.



مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = س$^{٢}$ ، هـ(س) = ٢ - س ، ل(س) = ٤ .

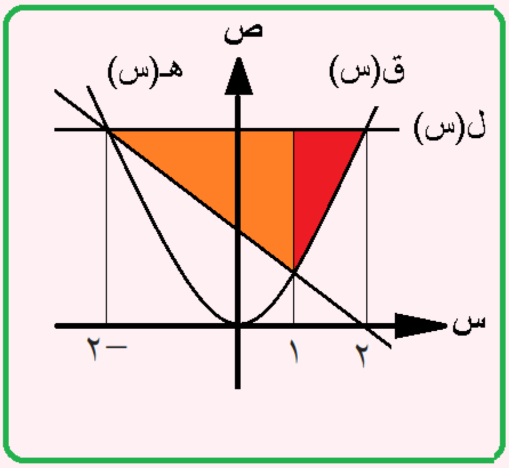
الحل : نجد نقط التقاطع بين المنحنيات

| | | |
|---|---|---|
| ق(س) = هـ(س) | ق(س) = ل(س) | هـ(س) = ل(س) |
| س$^{٢}$ = ٢ − س | س$^{٢}$ = ٤ | ٢ − س = ٤ |
| س$^{٢}$ + س − ٢ = ٠ | س = −٢ ، ٢ | س = −٢ |
| س = −٢ ، ١ | | |

وعند تمثيل المنحنيات الثلاث نجد أن المساحة المطلوبة ( م ) تساوي

$$\text{م} = \int_{-٢}^{١} [\,\text{ل}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})\,]\, \text{دس} + \int_{١}^{٢} [\,\text{ل}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})\,]\, \text{دس}$$

$$= \int_{-٢}^{١} (٤ - ٢ + \text{س})\, \text{دس} \quad + \quad \int_{١}^{٢} (٤ - \text{س}^{٢})\, \text{دس}$$




تابع الحل لتصل الى

$$\text{م} = ٤\frac{١}{٢} + ١\frac{٢}{٣} = ٦\frac{١}{٦} \text{ وحدة مساحة}$$

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣







مثال : اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \dfrac{\text{س}}{2}$ ، جد $\text{قَ}(\text{س})$

الحل : $\text{قَ}(\text{س}) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\text{س}} = \dfrac{1}{\text{س}}$

مثال : اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^3+1)$ ، $\text{س} > -1$ ، جد $\text{قَ}(\text{س})$

الحل : $\text{قَ}(\text{س}) = \dfrac{3\text{س}^2}{\text{س}^3+1}$

مثال : اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}^2\text{س}$ ، جد $\text{قَ}(\text{س})$

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \dfrac{2\,\text{جتاس}}{\text{جا س}} = 2\ \text{ظتا س}$

مثال : جد $\displaystyle\int_1^3 \dfrac{6\text{س}}{3\text{س}^2-5}\,\text{دس}$.

الحل : $\displaystyle\int_1^3 \dfrac{6\text{س}}{3\text{س}^2-5}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left|3\text{س}^2-5\right|\Big]_1^3 = \text{لو}_{\text{هـ}}22 - \text{لو}_{\text{هـ}}2 = \text{لو}_{\text{هـ}}\dfrac{22}{2} = \text{لو}_{\text{هـ}}11$

مثال : جد $\displaystyle\int \dfrac{3\text{س}^2-2}{\text{س}^3-2\text{س}+1}\,\text{دس}$ .

الحل : افرض $\text{ص} = \text{س}^3 - 2\text{س} + 1$ $\quad$ $\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{(3\text{س}^2-2)}$

إذن $\displaystyle\int \dfrac{3\text{س}^2-2}{\text{س}^3-2+1}\,\text{دس} = \int \dfrac{\text{دص}}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{س}^3 - 2\text{س} + 1\right| + \text{جـ}$

مثال : جد $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{٩ - ٢س}$ دس

الحل : $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{٩ - ٢س}$ دس $= \frac{-١}{٢} \int_{٢}^{٤} \frac{-٢ \text{ دس}}{٩ - ٢س}$

$= \frac{-١}{٢}$ [ لوهـ | ٩ − ٢س | $]_{٢}^{٤}$

$= \frac{-١}{٢}$ ( لوهـ ١ − لوهـ ٥ ) $= \frac{١}{٢}$ لوهـ ٥

مثال : جد $\int$ قا٤س لوهـ ظاس دس

الحل :

تعويض

افرض ص = ظاس ⇦ دس $= \frac{\text{دص}}{\text{قا}^٢\text{س}}$

إذن $\int$ قا٤س لوهـ ظاس دس = $\int$ قا٤س لوهـ ص $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^٢\text{س}}$ = $\int$ قا٢س لوهـ ص دص

ثم

لكن قا٢س = ظا٢س + ١ ⇦ قا٢س = ص٢ + ١

اجزاء

افرض ق = لوهـ ص    د م = (ص٢ + ١) دص

د ق $= \frac{١}{ص}$ دص ⟵ $\int$ ⟵ م $= \frac{ص^٣}{٣}$ + ص

إذن $\int$ قا٤س لوهـ ظاس دس = $\int$ (ص٢ + ١) لوهـ ص دص

$= (\frac{ص^٣}{٣} + ص)$ لوهـ ص − $\int (\frac{ص^٢}{٣} + ١)$ دص

$= (\frac{ص^٣}{٣} + ص)$ لوهـ ص − $(\frac{ص^٣}{٩} + ص)$ + جـ

$= (\frac{\text{ظا}^٣\text{س}}{٣} + \text{ظاس})$ لوهـ ظاس − $(\frac{\text{ظا}^٣\text{س}}{٩} + \text{ظاس})$ + جـ

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

مثال : جد $\int \text{س}^{٥}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣}\ \text{دس}$

الحل : افرض $\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣}$ ، $\text{دم} = \text{س}^{٥}\ \text{دس}$

$\text{دق} = \frac{٣}{\text{س}}\ \text{دس} \xrightarrow{\int} \text{م} = \frac{\text{س}^{٦}}{٦}$

$$\int \text{س}^{٥}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣}\ \text{دس} = \frac{١}{٦}\text{س}^{٦}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣} - \int \frac{١}{٦}\text{س}^{٦} \times \frac{٣}{\text{س}}\ \text{دس}$$

$$= \frac{١}{٦}\text{س}^{٦}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣} - \int \frac{١}{٢}\text{س}^{٥}\ \text{دس}$$

$$= \frac{١}{٦}\text{س}^{٦}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣} - \frac{١}{١٢}\text{س}^{٦} + \text{جـ}$$

مثال : جد $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}\ \text{دس}$

الحل : افرض $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}}$ ⟸ $\text{ص}^{٣} = \text{س}$ ⟸ $٣\ \text{ص}^{٢}\ \text{دص} = \text{دس}$

$$\text{إذن} \int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{ص}}{٥ - \text{ص}^{٤}}\ ٣\ \text{ص}^{٢}\ \text{دص}$$

$$= \int \frac{٣\ \text{ص}^{٣}}{٥ - \text{ص}^{٤}}\ \text{دص}$$

$$= \frac{٣}{-٤} \int \frac{-٤\ \text{ص}^{٣}}{٥ - \text{ص}^{٤}}\ \text{دص}$$

$$= \frac{-٣}{٤}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \left| ٥ - \text{ص}^{٤} \right| + \text{جـ}$$

$$= \frac{-٣}{٤}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \left| ٥ - \sqrt[٣]{\text{س}^{٤}} \right| + \text{جـ}$$

الاستاذ حمزة ابو الفول ٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

مثال : اذا كان ص = $هـ^{\text{جتاس}}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = $\frac{\pi}{٢}$

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جاس} \times هـ^{\text{جتاس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{س=\frac{\pi}{٢}} = -\text{جا}\frac{\pi}{٢}\ هـ^{\text{جتا}\frac{\pi}{٢}}$

$= -١ \times هـ^{٠}$

$= -١ \times ١$

$= -١$

مثال : اذا كان ص = س $\text{لو}_{هـ}\ هـ^{س^٢}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل : $ص = س \times س^٢ = س^٣ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣س^٢$

مثال : جد $\int_{٠}^{١} س^٢\, هـ^{س^٣+١}\, \text{دس}$

الحل : تكامل بالتعويض

افرض $ص = س^٣ + ١ \Leftarrow \frac{١}{٣}\,\text{دص} = س^٢\,\text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣س^٢}$

عندما $س = ٠ \Leftarrow ص = ١$ ، وعندما $س = ١ \Leftarrow ص = ٢$

$$\int_{٠}^{١} س^٢\, هـ^{س^٣+١}\, \text{دس} = \int_{١}^{٢} س^٢\, هـ^{ص}\, \frac{\text{دص}}{٣س^٢}$$

$$= \int_{١}^{٢} \frac{١}{٣}\, هـ^{ص}\, \text{دص}$$

$$= \frac{١}{٣}\, [هـ^{ص}]_{١}^{٢}$$

$$= \frac{١}{٣}\, [هـ^٢ - هـ^١]$$

الاستاذ حمزة ابو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣



مثال : جد $\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}}\ \text{دس}$

الحل :

افرض $\text{ص} = \sqrt{\text{ظا س}}$ ⟸ $\text{ص}^2 = \text{ظا س}$

⟸ $\text{٢ د ص} = \text{قا}^2\text{س د س}$ ⟸ $\text{د س} = \dfrac{\text{٢ ص}}{\text{قا}^2\text{س}}\ \text{د ص}$

تعويض

ثم

إذن $\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}}\ \text{دس} = \int \text{قا}^2\text{س}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \dfrac{\text{٢ ص}}{\text{قا}^2\text{س}}\ \text{د ص}$

اجزاء

$= \int \text{٢ ص}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{د ص}$

$\text{ق} = \text{٢ ص}$ ، $\text{د هـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{د ص}$

$\text{د ق} = \text{٢ د س}$ ⟵ $\int$ ⟵ $\text{هـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$\int \text{٢ ص}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{د ص} = \text{٢ ص}\ \text{هـ}^{\text{ص}} - \int \text{٢}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{د ص}$

$= \text{٢ ص}\ \text{هـ}^{\text{ص}} - \text{٢}\ \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \text{٢}\ \sqrt{\text{ظا س}}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}} - \text{٢}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}} + \text{جـ}$

مثال : جد $\int \text{هـ}^{\text{أس} + \text{ب}}\ \text{دس}$

الحل : نفرض $\text{ص} = \text{أ س} + \text{ب}$

$\text{د ص} = \text{أ د س}$

$\text{د س} = \dfrac{\text{د ص}}{\text{أ}}$

$\int \text{هـ}^{\text{أس} + \text{ب}}\ \text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{ص}} \times \dfrac{\text{د ص}}{\text{أ}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{ص}} \times \dfrac{\text{د ص}}{\text{أ}}$

$= \dfrac{١}{\text{أ}}\ \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \dfrac{١}{\text{أ}}\ \text{هـ}^{\text{أس} + \text{ب}} + \text{جـ}$

مثال : جد $\int_{4}^{5} \frac{1}{\text{س}^{2} - 4\text{س} + 3}\, \text{دس}$

الحل : $\frac{1}{\text{س}^{2} - 4\text{س} + 3} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - 3} + \frac{\text{ب}}{(\text{س} - 3)} = \frac{\text{أ}(\text{س} - 1) + \text{ب}(\text{س} - 2)}{(\text{س} - 2)(\text{س} - 1)}$

$\text{أ}(\text{س} - 1) + \text{ب}(\text{س} - 3) = 1$

عندما $\text{س} = 1 \Leftarrow -2\text{ب} = 1 \Leftarrow \text{ب} = \frac{-1}{2}$

وعندما $\text{س} = 3 \Leftarrow -2\text{أ} = 1 \Leftarrow \text{أ} = \frac{1}{2}$

إذن $\int_{4}^{5} \frac{1}{\text{س}^{2} - 4\text{س} + 3}\, \text{دس} = \int_{4}^{5} \frac{\frac{1}{2}}{\text{س} - 3}\, \text{دس} + \int_{4}^{5} \frac{\frac{-1}{2}}{(\text{س} - 3)}\, \text{دس}$

$= \frac{1}{2}\, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - 2| \Big]_{4}^{5} - \frac{1}{2}\, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - 1| \Big]_{4}^{5}$

$= \frac{1}{4} [\text{لو}_{\text{هـ}} 2 - \text{لو}_{\text{هـ}} 1] - \frac{1}{2} [\text{لو}_{\text{هـ}} 4 - \text{لو}_{\text{هـ}} 3]$

$= \frac{1}{4}\, \text{لو}_{\text{هـ}} 2 - \frac{1}{2}\, \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{4}{3}$

مثال : جد $\int \frac{4\text{س} + 1}{\text{س}^{2} - \text{س} - 2}\, \text{دس}$

الحل : $\frac{4\text{س} + 1}{\text{س}^{2} - \text{س} - 2} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - 2} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + 1} = \frac{\text{أ}(\text{س} + 1) + \text{ب}(\text{س} - 2)}{(\text{س} - 1)(\text{س} + 1)}$

$4\text{س} + 1 = \text{أ}(\text{س} + 1) + \text{ب}(\text{س} - 2)$

عندما $\text{س} = -1 \Leftarrow -3 = -3\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = 1$

وعندما $\text{س} = 2 \Leftarrow 9 = 3\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = 3$

إذن $\int \frac{4\text{س} + 1}{\text{س}^{2} - \text{س} - 2}\, \text{دس} = \int \frac{3}{\text{س} - 2}\, \text{دس} + \int \frac{1}{\text{س} + 1}\, \text{دس}$

$= 3\, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - 2| + \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + 1| + \text{جـ}$

مثال : جد $\int \frac{\text{س}^2 - \text{س}}{\text{س} + 1}\, \text{دس}$

الحل : $\int \frac{\text{س}^2 - \text{س}}{\text{س} + 1}\, \text{دس} = \int (\text{س} - 2)\, \text{دس} + \int \frac{2}{\text{س} + 1}\, \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^2}{2} - 2\text{س} + 2\, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + 1| + \text{جـ}$

$$\begin{array}{l} \text{س} - 2 \\ \text{س} + 1 \;\big)\; \text{س}^2 - \text{س} \\ \quad \text{س}^2 + \text{س} \\ \quad -2\text{س} \\ \quad -2\text{س} - 2 \\ \quad 2 \end{array}$$



مثال : جد $\int \frac{2\text{س}^3 - \text{س}^2 + 3\text{س}}{\text{س}^2 - 3\text{س} - 4}\, \text{دس}$

الحل : درجة البسط اكبر من درجة المقام نجري القسمة الطويلة

التكامل المطلوب $= \int (2\text{س} + 5)\, \text{دس} + \int \frac{26\text{س} + 20}{\text{س}^2 - 3\text{س} - 4}\, \text{دس}$

تكامل عادي — تكامل بالكسور الجزئية

$$\begin{array}{l} 2\text{س} + 5 \\ \text{س}^2 - 3\text{س} - 4 \;\big)\; 2\text{س}^3 - \text{س}^2 + 3\text{س} \\ \quad 2\text{س}^3 - 6\text{س}^2 - 8\text{س} \\ \quad 5\text{س}^2 + 11\text{س} \\ \quad 5\text{س}^2 - 15\text{س} - 20 \\ \quad 26\text{س} + 20 \end{array}$$

$\frac{26\text{س} + 20}{\text{س}^2 - 3\text{س} - 4} = \frac{26\text{س} + 20}{(\text{س} - 4)(\text{س} + 1)} = \frac{\text{أ}}{(\text{س} - 4)} + \frac{\text{ب}}{(\text{س} + 1)} = \frac{\text{أ}(\text{س} + 1) + \text{ب}(\text{س} - 4)}{(\text{س} - 4)(\text{س} + 1)}$

$26\text{س} + 20 = \text{أ}(\text{س} + 1) + \text{ب}(\text{س} - 4)$

عندما $\text{س} = 4 \Leftarrow \text{ب} = \frac{124}{5}$

وعندما $\text{س} = 2 \Leftarrow \text{أ} = \frac{6}{5}$

التكامل المطلوب $= \text{س}^2 + 5\text{س} + \frac{124}{5} \int \frac{1}{\text{س} - 4}\, \text{دس} + \frac{6}{5} \int \frac{1}{\text{س} + 1}\, \text{دس}$

$= \text{س}^2 + 5\text{س} + \frac{124}{5}\, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - 4| + \frac{6}{5}\, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - 1| + \text{جـ}$

مثال : جد $\displaystyle\int \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}-\text{١}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}}}-\text{٤}}\,\text{دس}$

الحل : افرض ص = $\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}$ ⇐ $\text{ص}^{\text{٣}} = \text{س}$ ⇐ دس = $\text{٣ص}^{\text{٢}}$ دص

$$\text{إذن}\int \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}-\text{١}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}}}-\text{٤}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{ص}-\text{١}}{\text{ص}^{\text{٢}}-\text{٤}}\times \text{٣ص}^{\text{٢}}\,\text{دص} = \int \frac{\text{٣ص}^{\text{٣}}-\text{٣ص}^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٢}}-\text{٤}}\,\text{دص}$$

$$= \int (\text{ص}-\text{١})\,\text{دص} + \int \frac{\text{١}}{\text{ص}-\text{٢}}\,\text{دص} + \int \frac{\text{٣}}{\text{ص}+\text{٢}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \text{ص} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}-\text{٢}) + \text{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}+\text{٢}) + \text{جـ}$$

$$= \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}}}}{\text{٢}} - \sqrt[\text{٣}]{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}-\text{٢}\right| + \text{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}+\text{٢}\right| + \text{جـ}$$

مثال : جد $\displaystyle\int \frac{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س دس}}{\text{٥ظا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٣ ظاس} - \text{٢}}$

الحل : افرض ص = ظاس ⇐ دص = $\text{قا}^{\text{٢}}$س دس ⇐ دس = $\dfrac{\text{دص}}{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}}$

التكامل المطلوب = $\displaystyle\int \frac{\text{دص}}{\text{٥ص}^{\text{٢}}-\text{٣ص}-\text{٢}}$ باستخدام تجزئة الكسور نجد ان التكامل يساوي

$$= \frac{-\text{١}}{\text{٣}}\int \frac{\text{١}}{\text{٥ص}+\text{٢}}\,\text{دص} + \frac{\text{١}}{\text{٧}}\int \frac{\text{١}}{\text{ص}-\text{١}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{-\text{١}}{\text{٣}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{٥ص}+\text{٢}\right| + \frac{\text{١}}{\text{٧}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{ص}-\text{١}\right| + \text{جـ}$$

$$= \frac{-\text{١}}{\text{٣}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{٥ظاس}+\text{٢}\right| + \frac{\text{١}}{\text{٧}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{ظاس}-\text{١}\right| + \text{جـ}$$

الأستاذ: حمزة أبو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

الملاذ في مهارات الرياضيات
الصف الثاني الثانوي
التوجيهي
كورسات الملاذ في مهارات الرياضيات

جميع الفروع

# كورسات الملاذ في الرياضيات للتوجيهي

## الملاذ في الرياضيات / كورسات الفرع العلمي

١)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة النهايات والاتصال
٢)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة التفاضل
٣)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة تطبيقات التفاضل
٤)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة التكامل
٥)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة القطوع المخروطية
٦)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول للمستوى الثالث
٧)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول للمستوى الرابع
٨)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة للمستوى الثالث
٩)الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة للمستوى الرابع

## الملاذ في الرياضيات / كورسات الفروع المشتركة

( الأدبي ، الشرعي ، الإدارة المعلوماتية ، الصحي ، الصناعي ، الفندقي )

١)الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / المستوى الثالث
٢) الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / المستوى الرابع
٣)الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول / للمستوى الثالث
٤)الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول / للمستوى الرابع
٥)الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة / للمستوى الثالث
٦)الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة / للمستوى الرابع

## الملاذ في الرياضيات / كورسات الفرع الصناعي

١)الملاذ في الرياضيات للفرع الصناعي / رياضيات اساسي
٢)الملاذ في الرياضيات للفرع الصناعي / رياضيات اساسي / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول
٣)الملاذ في الرياضيات للفرع الصناعي / رياضيات اساسي / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة

## الملاذ في الرياضيات / ملخصات واسئلة متوقعة