الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

قاعدة السلسلة

ص ← ع ← هـ

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$

مثال :-

١) ص = ع^{٣} − ٥ع^{٢} + ١٣ ، ع = ٣هـ^{٤} + ٤

احسب $\frac{دص}{دهـ}$

الحل :

٢) ص = م^{٣} + ٤م^{٢} + ٧ ، م = هـ^{٢} + ٥

احسب $\frac{دص}{دهـ}$ عندما هـ = ٢

٣) ص = ل^{٢} − ٢ل + ٤ ، ل = هـ^{٤} + ٢هـ

احسب $\frac{دص}{دهـ}$

الحل : $\frac{دص}{دهـ} = \frac{دص}{دل} \times \frac{دل}{دهـ}$

= (٢ل − ٢) × (٤هـ^{٣} + ٢)

= (٢(هـ^{٤} + ٢هـ) − ٢)(٤هـ^{٣} + ٢)

٤) ص = ع^{٢} − ٤ع + ٥ ، ع = ٢ك^{٢} + ٧

احسب $\frac{د^{٢}ص}{دهـ^{٢}}$

٥) ص = ن^{٢} + ٤ن ، س = ن^{٤} + ٦ن

احسب $\frac{دص}{دس}$

الحل : $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دهـ}$

= (٢ن + ٤) × $\frac{١}{٤ن^{٣} + ٦}$

= $\frac{٢ن + ٤}{٤ن^{٣} + ٦}$

٦) ص = جتا٣ن ، س = جا٣ن

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دهـ}$

= −٣جا٣ن × $\frac{١}{٣جتا٣ن}$ = −ظا٣ن

٧) ص = ٢ن^{٣} − ٣ن^{٢} + ٨ن ، س = ٤ن^{٢} + ٢ن

احسب $\frac{دص}{دهـ}$ عندما ن = ١

8) $ص = ن^2 + ٤ن$ ، $س = ن^2 - ٣ن$

أوجد $\frac{د^2ص}{دس^2}$

الحل :

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$$

$$= (٢ن+٤) \times \frac{1}{٢ن-٣}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٢ن+٤}{٢ن-٣}$$

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{(٢ن-٣)(٢) - (٢ن+٤)(٢)}{(٢ن-٣)^2} \times \frac{دن}{دس}$$

$$= \frac{\cancel{٤ن} - ٦ - \cancel{٤ن} - ٨}{(٢ن-٣)^2} \times \frac{1}{٢ن-٣}$$

$$= \frac{-١٤}{(٢ن-٣)^3}$$

---

9) $ص = جان$ ، $س = جتان$

أوجد $\frac{د^2ص}{دس^2}$

قاعدة :-

$ص = (قوس)^{قوة}$

$$\frac{دص}{دس} = (القوة)(نفس\ القوس)^{القوة-1} (مشتقة\ ما\ داخل\ القوس)$$

---

1) $ص = (٧س^2 - ٩س + ٩)^{١٢}$

$$\frac{دص}{دس} = (١٢)(٧س^2 - ٩س + ٩)^{١١}(١٤س - ٩)$$

2) $ص = (س^2 + جتاس)^8$

$$\frac{دص}{دس} = (٨)(س^2 + جتاس)^7(٢س - جاس)$$

3) $ص = (س^3 + ٣)^3$ المشتقة (س)

4) $ص = جا^8 س$

$$\frac{دص}{دس} = (٨)(جاس)^7(جتاس)$$

5) $ص = جا^9 ٤س^2$

6) $ص = ظا^5 س^3 + ٦ قا^9 ٢س$

[٧] ص = س² جتا³ $\frac{1}{س}$

$\frac{دص}{دس}$ = س² × ٣ جتا² $\frac{1}{س}$ × − جا $\frac{1}{س}$ × $\frac{-1}{س^2}$ + جتا³ $\frac{1}{س}$ × ٢س

= ٣ جتا² $\frac{1}{س}$ جا $\frac{1}{س}$ + ٢س جتا³ $\frac{1}{س}$

[٨] احسب النهايات التالية:

① نها$_{هـ \to ٠}$ $\frac{جا^3(٩س + ٩هـ) - جا^3 ٩س}{هـ}$

= مشتقة جا³ ٩س

= ٣ جا² ٩س × جتا ٩س × ٩

② نها$_{س \to \frac{ط}{٣}}$ $\frac{٤ جتا^2 س - ٤ جتا^2 \frac{ط}{٣}}{س - \frac{ط}{٣}}$

= مشتقة ٤ جتا² س عندما س = $\frac{ط}{٣}$

= ٨ جتا س × − جا س

= −٨ جا $\frac{ط}{٣}$ × جتا $\frac{ط}{٣}$ = −٨ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$

[٩] ص = ظا س + $\frac{١}{٣}$ ظا³ س

اثبت أنه ص′ = قا⁴ س

البرهان:- ص′ = قا² س + ٣ × $\frac{١}{٣}$ ظا² س قا² س

= قا² س (١ + ظا² س)

= قا⁴ س

[١٠] ص = (قا س + ظا س)^{ن} إثبت أنه

ص′ = (ن) (قا س) (ص)

البرهان:-

[١١] إذا كانت

ص = جا⁴ س أثبت أنه

ص″ + ١٦ص − ١٢ جا² س = صفر

واجب

[١٢] إذا كانت

ص = ظا² س أثبت أنه

$\frac{د^2ص}{دس^2}$ = ٢(١ + ص)(١ + ٣ص)

البرهان: $\frac{دص}{دس}$ = ٢ ظا س قا² س

$\frac{د^2ص}{دس^2}$ = ٢ ظا س × ٢ قا س × قا س ظا س + قا² س × ٢ قا² س

= ٢ قا² س (٢ ظا² س + قا² س)

= ٢(١ + ظا² س)(٢ ظا² س + ١ + ظا² س)

= ٢(١ + ص)(١ + ٣ص) . #

[١٣] إذا كانت

ص = جا⁹ (ظا³ √٢س) احسب $\frac{دص}{دس}$

[١٤] ص = $\sqrt[٥]{(٣س^2 + ٨س)^٧}$ احسب $\frac{دص}{دس}$

ص = (٣س² + ٨س)$^{\frac{٧}{٥}}$

ص′ = $\frac{٧}{٥}$ (٣س² + ٨س)$^{\frac{٢}{٥}}$ (٦س + ٨)

قاعدة: الجذر التربيعي:

= $\frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}}$

مثال: ص = $\sqrt{٦س^5 + ٨ جا س + ١٩}$

ص′ = $\frac{٣٠ س^4 + ٨ جتا س}{٢ \times \sqrt{٦س^5 + ٨ جا س + ١٩}}$

١) ص = √(٦س² + ٨ظاس + ٩)

---

٢) اذا كانت ص = ع² + ٨ ، ع = √(٦س² + قاس)

احسب $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

---

٣) اذا كانت ص = √س ظا²س

احسب $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = √س × ٢ظاس × قا²س + $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ × ظا²س

= ٢√س ظاس قا²س + $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ ظا²س

---

٤) اذا كانت ق(٢) = ٤ ، قَ(٢) = ٥

احسب مشتقة (٨س √ق(س)) عندما س = ٢

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٨س × $\frac{\text{قَ}}{٢\sqrt{\text{ق}}}$ + √ق × ٨

= $\frac{٨ × ٢ × ٥}{٢ × ٢}$ + ٢ × ٨ = —

قاعدة :-

اذا كانت ق ، هـ قابلتين للاشتقاق

فإن (ق∘هـ)َ(س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

(هـ∘ق)َ(س) = هـَ(ق(س)) × قَ(س)

مثال (١) :

اذا كانت

ق = ٣س² + ٥س ، هـ = س² − ٢س

احسب ما يلي :-

① (ق∘هـ)َ(١) ② (هـ∘ق)َ(٢)

③ (ق∘ق)َ(٢) ④ (هـ∘هـ)َ(١)

---

٢) اذا كانت ق(س) = ٤س² + ٦س ، هـ = ٤جا²س

احسب (ق∘هـ)َ(س) عندما س = $\frac{\pi}{٨}$

الحل : قَ = ٨س + ٦

هـَ = ٨جاس × جتاس × ٢

= ١٦ جاس جتاس

(ق∘هـ)َ($\frac{\pi}{٨}$) = قَ(هـ($\frac{\pi}{٨}$)) × هـَ($\frac{\pi}{٨}$)

= قَ(٢) × ١٦ جا $\frac{\pi}{٤}$ جتا $\frac{\pi}{٤}$

= ٢٢ × ١٦ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

= ٢٢ × $\frac{١٦}{٢}$ = ٢٢ × ٨

= ١٧٦

٣) ق(س) = س^{٣} + ٤س^{٢}
هـ(س) = ٢س + س^{٢} احسب مايلي

١) (ق ∘ هـ)$'$(١)
٢) (ق$'$ ∘ هـ)$'$(١)
٣) (ق ∘ هـ$'$)$'$(١)
٤) (ق$'$ ∘ هـ$'$)(١)
٥) (ق ∘ هـ)$''$(١)

الحل :-

---

٤) ق = { ٢س^{٣} + س^{٤} ، س < ٠
٣س^{٢} + ٧ ، س ≥ ٠

هـ = (٢س + جتاس)^{٤}

احسب (ق ∘ هـ)$'$(٠)

الحل :-

ق$'$ = { ٦س^{٢} + ٤س^{٣} ، س < ٠
٦س ، س ≥ ٠

هـ$'$ = ٤(٢س + جتاس)^{٣} (٢ − جاس)

(ق ∘ هـ)$'$(٠) = ق$'$(هـ(٠)) × هـ$'$(٠)
= ق$'$(١) × ٤(٠+١)^{٣} × (٢ − صفر)
= ٦ × ٨ = ٤٨

---

٥) ق(س) = { ٤س^{٣} + ٦س ، س < ١
٨س^{٤} + ٥س ، س ≥ ١

هـ = $\sqrt{٦س^{٢} + ٨}$

٤) احسب (ق ∘ هـ)$'$(٢)

---

٦) اذا كانت ق$'$(١) = ٨ ، ق$'$(٣) = ٩
وكانت ص = ق(س^{٣} + ٢س^{٢}) احسب
$\frac{دص}{دس}$ عندما س = ١

ق(٢س+١) = ٥س² + ٨س

احسب ق′(٥)

الحل: نشتق الطرفين

٢ ق′(٢س+١) = ١٠س + ٨

نضع: ٢س + ١ = ٥

٢س = ٤ ← $\boxed{\text{س} = ٢}$

٢ ق′(٥) = ١٠ × ٢ + ٨

ق′(٥) = $\frac{٢٨}{٢}$ = ١٤

---

٨) ق(س³ + ١) = ٦س² + ٨س + ٧

احسب ق′(٢)

---

٩) ق(ظاس) = ٢ جاس + ٦ جتاس

احسب ق′(١) حيث س ∈ (٠، $\frac{\pi}{٢}$)

---

١٠) ق(٨) = ٧ ، ق′(٨) = ١٢

وكانت ص = ق²(س³) احسب $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ٢

واجب

الاشتقاق الضمني

هو عملية اشتقاق متغير بدلالة متغير آخر ويستخدم عند وجود علاقة ضمنية مثلاً ① ص²: (ص لها قوة)

② س مرتبطة في ص

س²ص / $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ / س³ × √ص

③ الزاوية تكون ص مشتق

جاص ، جا(س ص) ...

الخطوات ① اشتقاق الطرفين ضمنياً بحيث كل ما نشتق ص نضع بعدها $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

② تجميع $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ في طرف

③ أخذ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عامل مشترك

④ القسمة على معامل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

مثال

٣ص³ − ٦س = ٩س² + ٤ص

احسب $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$:

٢ جا² ص = ٣س² + ٨ص

أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل: ٢ جاص جتاص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٦س + ٨ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

٢جاص جتاص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ − ٨ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٦س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ (٢جاص جتاص − ٨) = ٦س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{٦س}}{\text{٢جاص جتاص − ٨}}$

---

٣ س³ + ص³ = ٧س ص − ٥

أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند (٢ ، ٤)

---

٤ ظا(س ص) = ص² أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

---

٥ $\frac{\text{٣}}{\text{ص}^2} + \frac{\text{٥}}{\text{س}}$ = ٦س² ص

أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل: ٣ص⁻² + ٥س⁻¹ = ٦س² ص

−٦ص⁻³ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ − ٥س⁻² = ٦س² × $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ + ص × ١٢س

−٦ص⁻³ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ − ٦س² × $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ١٢س ص + ٥س⁻²

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ (−٦ص⁻³ − ٦س²) = ١٢س ص + ٥س⁻²

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{١٢س ص + ٥س}^{-2}}{\text{−٦ص}^{-3}\text{ − ٦س}^2}$

---

٦ ٣س² + ٦ص² = ٥س ص

أوجد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ عند (٢ ، ٣)

واجب

---

٧ إذا كانت س² + ص² = ١

اثبت أنه ص³ × $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ = −١

---

٨ إذا كانت س = جاص إثبت أنه

ص'' = ظاص قا²ص

---

٩ س = ظاص

اثبت أنه: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{١ + س}^2}$

---

١٠ ص = $\sqrt{\text{٤ + ٣جاس}}$

اثبت أنه: ٢ ص ص'' + ٢(ص')² + ص² = ٤

الاشتقاق الضمني

٤ $2\text{هـ}^2 - 2\frac{\text{هـ}}{\text{م}} = \text{م}^5 + 10$ ، اوجد $\frac{د\text{هـ}}{د\text{م}}$.

الحل :-

$$2\text{هـ}\frac{د\text{هـ}}{د\text{م}} - 2\left(\frac{\text{م}\times\frac{د\text{هـ}}{د\text{م}} - \text{هـ}\times 1}{\text{م}^2}\right) = 5\text{م}^4$$

$$2\text{هـ}\frac{د\text{هـ}}{د\text{م}} - \frac{2\text{م}\frac{د\text{هـ}}{د\text{م}} + 2\text{هـ}}{\text{م}^2} = 5\text{م}^4$$

$$2\text{هـ}\frac{د\text{هـ}}{د\text{م}} - 2\frac{\frac{د\text{هـ}}{د\text{م}}}{\text{م}} + \frac{2\text{هـ}}{\text{م}^2} = 5\text{م}^4$$

$$2\text{هـ}\frac{د\text{هـ}}{د\text{م}} - 2\frac{\frac{د\text{هـ}}{د\text{م}}}{\text{م}} = 5\text{م}^4 - \frac{2\text{هـ}}{\text{م}^2}$$

$$\frac{د\text{هـ}}{د\text{م}}\left(2\text{هـ} - \frac{2}{\text{م}}\right) = 5\text{م}^4 - \frac{2\text{هـ}}{\text{م}^2}$$

$$\frac{د\text{هـ}}{د\text{م}} = \frac{5\text{م}^4 - \frac{2\text{هـ}}{\text{م}^2}}{2\text{هـ} - \frac{2}{\text{م}}}$$

٥ $\sqrt{ص} + 4\sqrt{س} + 2س = 2ص^2$

اوجد $\frac{دص}{دس}$.

الحل :

$$\frac{1}{2\sqrt{ص}}\frac{دص}{دس} + 4\times\frac{1}{2\sqrt{س}} + 2 = 4ص\frac{دص}{دس}$$

$$4ص\frac{دص}{دس} - \frac{1}{2\sqrt{ص}}\frac{دص}{دس} = \frac{2}{\sqrt{س}} + 2$$

$$\frac{دص}{دس}\left(4ص - \frac{1}{2\sqrt{ص}}\right) = \frac{2}{\sqrt{س}} + 2$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{\frac{2}{\sqrt{س}} + 2}{4ص - \frac{1}{2\sqrt{ص}}}$$

سؤال اذا كان $س^2 + س ص = ص^2 + 1$

اوجد $\frac{د^2ص}{دس^2}$ عند $(2 ، 3)$.

٦ (٩٧) اذا كان $\text{جا}(س ص) = ص$

جد $\frac{دص}{دس}$ عند $(\frac{\pi}{2} ، 1)$.

الحل :

$$\text{جتا}(س ص)\left(س\frac{دص}{دس} + ص\right) = \frac{دص}{دس}$$

$$ص\,\text{جتا}\,س ص + س\,\text{جتا}\,س ص\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دس}$$

$$ص\,\text{جتا}\,س ص = \frac{دص}{دس} - س\,\text{جتا}(س ص)\frac{دص}{دس}$$

$$ص\,\text{جتا}\,س ص = \frac{دص}{دس}\left(1 - س\,\text{جتا}\,س ص\right)$$

$$\text{اذاً}\ \frac{دص}{دس} = \frac{ص\,\text{جتا}\,س ص}{1 - س\,\text{جتا}\,س ص}$$

$$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{(\frac{\pi}{2},1)} = \frac{1\times\text{جتا}\frac{\pi}{2}\times 1}{1 - \frac{\pi}{2}\,\text{جتا}\frac{\pi}{2}\times 1} = \text{صفر}$$

٧ (٢٠٠١) اذا كانت $س = \text{ق}(ص^2 + 1)$

$\text{ق}'(5) = 4$ اوجد $\frac{دص}{دس}$ عند $ص = 2$

الحل :

$$1 = 2ص\frac{دص}{دس}\,\text{ق}'(ص^2 + 1)$$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{1}{2ص\,\text{ق}'(ص^2 + 1)}$$

$$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{ص=2} = \frac{1}{4\,\text{ق}'(5)} = \frac{1}{4\times 4} = \frac{1}{16}$$

على السلسلة

٨ اذا كان $ص = ع^3 + ع$ ، $س = ع^2$

اوجد $\frac{د^2ص}{دس^2}$.

(اثباتات هامة)

1 اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ج}$ اثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{صفر}$ ، حيث ج ثابت.

البرهان :-

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ج} - \text{ج}}{\text{ع} - \text{س}} = \text{صفر}$$

وهو المطلوب

2 اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ج} \times \text{ل}(\text{س})$ اثبت انه $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ج} \times \text{ل}'(\text{س})$.

البرهان :-

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ج}\,\text{ل}(\text{ع}) - \text{ج}\,\text{ل}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}}\ \text{ج}\ \frac{(\text{ل}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س}))}{\text{ع} - \text{س}} = \text{ج} \times \text{ل}'(\text{س})$$

وهو المطلوب

3 اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س}) + \text{م}(\text{س})$ اثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ل}'(\text{س}) + \text{م}'(\text{س})$

البرهان :-

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ل}(\text{ع}) + \text{م}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س}) - \text{م}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ل}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س}) + \text{م}(\text{ع}) - \text{م}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ل}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{م}(\text{ع}) - \text{م}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{ل}'(\text{س}) + \text{م}'(\text{س})$$

4 اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ اثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن} \times \text{س}^{\text{ن}-1}$ ، حيث ن عدد طبيعي.

البرهان :-

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}(\text{ع}^{\text{ن}-1} \times \text{س}^{0} + \text{ع}^{\text{ن}-2} \times \text{س} + \text{ع}^{\text{ن}-3} \times \text{س}^{2} + \dots)}{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}$$

عوض مكان ع بـ س ⇐

$$= \text{س}^{\text{ن}-1} \times 1 + \text{س}^{\text{ن}-2} \times \text{س} + \text{س}^{\text{ن}-3} \times \text{س}^{2} + \dots$$

$$= \text{س}^{\text{ن}-1} + \text{س}^{\text{ن}-1} + \text{س}^{\text{ن}-1} + \dots$$

$$= \text{ن} \times \text{س}^{\text{ن}-1}$$

وهو المطلوب ..

5 اذا كان $\text{ص} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ اثبت أنه $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}\,\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}} - 1}$

البرهان :-

$\text{ص} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ ، برفع طرفي العلاقة للقوة ن

$\text{ص}^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{م}}$ ، بالاشتقاق الضمني ⇐

$$\text{ن}\,\text{ص}^{\text{ن}-1} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}$$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}}{\text{ن}\,\text{ص}^{\text{ن}-1}}$ ، لكن $\text{ص} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$

$$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\text{س}^{\text{م}-1}}{(\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}})^{\text{ن}-1}}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\text{س}^{\text{م}-1}}{\text{س}^{\text{م}-\frac{\text{م}}{\text{ن}}}}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}} + \cancel{\text{م}} - 1 - \cancel{\text{م}}} \Leftarrow$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}\,\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}} - 1}$$

وهو المطلوب

(اثباتات هامة)

6) اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس}$ اثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{جتاس}$

البرهان :-

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جاع} - \text{جاس}}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{2\,\text{جتا}\left(\frac{\text{ع}+\text{س}}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}\right)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} 2\,\text{جتا}\frac{\text{ع}+\text{س}}{2} \times \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \left(2\,\text{جتا}\frac{\text{س}+\text{س}}{2}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \text{جتا}\frac{2\text{س}}{2} = \text{جتاس}$$. وهو المطلوب

7) اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس}$ برهن أن $\text{ق}'(\text{س}) = -\text{جاس}$.

البرهان :-

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جتاع} - \text{جتاس}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{-2\,\text{جا}\left(\frac{\text{ع}+\text{س}}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}\right)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \left(-2\,\text{جا}\left(\frac{\text{س}+\text{س}}{2}\right)\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= -\text{جا}\frac{2\text{س}}{2} = -\text{جاس}$$ ، وهو المطلوب

8) اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظاس}$ ، برهن أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{قا}^2\text{س}$.

البرهان :-

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \Leftarrow$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{جتاس جتاس} - (-\text{جاس})\,\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

$$= \frac{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} = \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} = \text{قا}^2\text{س}$$

9) اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \text{قاس}$ اثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{قاس ظاس}$

البرهان :-

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{قاس} = \frac{1}{\text{جتاس}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-1 \times (-\text{جاس})}{\text{جتا}^2\text{س}} .$$

$$= \frac{1}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \Leftarrow$$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{قاس ظاس}$ ، وهو المطلوب

10) اذا كانت $\text{ص} = (\text{م}(\text{س}))^{\text{ن}}$

اثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن} \times \text{م}'(\text{س}) \times (\text{م}(\text{س}))^{\text{ن}-1}$

البرهان :-

ليكن $\text{م}(\text{س}) = \text{ع}$ ، $\Leftarrow \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{م}'(\text{س})$

وينتج أن $\text{ص} = \text{ع}^{\text{ن}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \text{ن}\,\text{ع}^{\text{ن}-1}$

باستخدام قاعدة السلسلة $\Leftarrow$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$= \text{ن} \times \text{ع}^{\text{ن}-1} \times \text{م}'(\text{س}) .$$

$$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن} \times \text{م}'(\text{س}) \times (\text{م}(\text{س}))^{\text{ن}-1}$$

(أمثلة الاشتقاق)

[١] إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٢$

أثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١$

البرهان :-

$\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٢$ بتوحيد المقامات

$\frac{\text{س}^2 + \text{ص}^2}{\text{س ص}} = ٢ \Leftarrow \text{س}^2 + \text{ص}^2 = ٢\text{س ص}$

نشتق ضمنياً $\Leftarrow ٢\text{س} + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{ص} + ٢\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

بتجميع الحدود التي تحتوي على $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ في طرف.

$٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٢\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{ص} - ٢\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}(٢\text{ص} - ٢\text{س}) = ٢\text{ص} - ٢\text{س}$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١$ ، وهو المطلوب.

[٢] إذا كان $\text{ق(س)} = \text{جاس} + \text{جتاس}$

أثبت أن $(\text{قَ(س)})^2 + (\text{ق(س)})^2 = ٢$

البرهان :-

$\text{ق(س)} = \text{جاس} + \text{جتاس}$

$\text{قَ(س)} = \text{جتاس} - \text{جاس}$

$(\text{قَ(س)})^2 = (\text{جتاس} - \text{جاس})^2$

$= \text{جتا}^2\text{س} - ٢\,\text{جاس جتاس} + \text{جا}^2\text{س}$

$= ١ - ٢\,\text{جتاس جاس}$

لكن: $(\text{ق(س)})^2 = (\text{جاس} + \text{جتاس})^2$

$= \text{جا}^2\text{س} + ٢\,\text{جاس جتاس} + \text{جتا}^2\text{س}$

$= ١ + ٢\,\text{جتاس جاس}$

إذن:- $(\text{قَ(س)})^2 + (\text{ق(س)})^2 =$

$١ - \cancel{٢\,\text{جتاس جاس}} + ١ + \cancel{٢\,\text{جتاس جاس}}$

$= ١ + ١ = ٢$ وهو المطلوب.

[٣] إذا كان $\text{ق(س)} = \text{جا}^2\text{س}$ أثبت أن $\text{قَ(س)} - \text{جا٢س} = \text{صفر}$

البرهان: $\text{قَ(س)} = ٢\,\text{جاس جتاس} = \text{جا٢س}$

$\Leftarrow \text{جا٢س} - \text{جا٢س} = \text{صفر}$ وهو المطلوب.

[٤] إذا كان $\text{ص} = \text{س جا٢س}$ أثبت أنه

$\text{س}\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{دس}^3} + ٤\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٨\text{ص} = \text{صفر}$

البرهان :-

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س جتا٢س} + \text{جا٢س}$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = ٢\text{س}(-٢\text{جا٢س}) + ٢\text{جتا٢س} + ٢\text{جتا٢س}$

$= -٤\text{س جا٢س} + ٤\text{جتا٢س}$

$= -٤\text{ص} + ٤\text{جتا٢س}.$

$\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{دس}^3} = -٤\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٤(-٢)\text{جا٢س}$

$= -٤\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٨\text{جا٢س}$ ، نضرب الطرفين في س

$\Leftarrow \text{س}\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{دس}^3} = -٤\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٨\text{س جا٢س}$

إذاً $\text{س}\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{دس}^3} + ٤\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٨\text{س جا٢س} = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{س}\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{دس}^3} + ٤\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٨\text{ص} = \text{صفر}$ وهو المطلوب

[٥] إذا كان $\text{س} + \text{ص} + \text{جاص} = ٠$.

أثبت أنه $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{\text{جاص}}{(١ + \text{جتاص})^3}$.

البرهان :-

$١ + \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{جتاص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{جتاص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -١$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}}(١ + \text{جتاص}) = -١$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-١}{١ + \text{جتاص}} \Leftarrow \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{-(-١) \times (-\text{جاص})\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{(١ + \text{جتاص})^2}$

$= \frac{-\text{جاص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{(١ + \text{جتاص})^2} = \frac{-\text{جاص}}{(١ + \text{جتاص})^2} \times \frac{-١}{(١ + \text{جتاص})}$

$= \frac{\text{جاص}}{(١ + \text{جتاص})^3}$ وهو المطلوب.

(اسئلة الاثبات)

٩٩

⑥ اذا كانت $\text{ص} = \text{قا}^2\text{س}$ اثبت أن

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} - 8\,\text{ص}^3 + 4\,\text{ص} = \text{صفر}$$

البرهان:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\,\text{قا}^2\text{س}\ \text{ظاس}$$

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2(2\,\text{قاس}\ \text{قاس}\ \text{ظاس})\,\text{ظاس} + 2\,\text{قا}^2\text{س} \times 2\,\text{قا}^2\text{س}$$

$$= 4\,\text{قا}^2\text{س}\ \text{ظا}^2\text{س} + 4\,\text{قا}^3\text{س}$$

$$= 4\,\text{قا}^2\text{س}\,(\text{قا}^2\text{س} - 1) + 4\,\text{قا}^3\text{س}$$

$$= 4\,\text{قا}^3\text{س} - 4\,\text{قا}^2\text{س} + 4\,\text{قا}^3\text{س}$$

$$= 8\,\text{قا}^3\text{س} - 4\,\text{قا}^2\text{س}$$

$$= 8\,\text{ص}^3 - 4\,\text{ص}$$

اذاً $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} - 8\,\text{ص}^3 + 4\,\text{ص} = \text{صفر}$ وهو المطلوب.

٩٧

⑦ اذا كانت $\text{ص} = \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ حيث $\text{س} \neq 0$

اثبت أن $\text{س}\,\text{ص}'' + 2\,\text{ص}' + \text{س}\,\text{ص} = \text{صفر}$

البرهان:

$$\text{ص}' = \frac{\text{س جتاس} - \text{جاس}}{\text{س}^2} = \frac{\text{جتاس}}{\text{س}} - \frac{\text{جاس}}{\text{س}^2}$$

$$\text{ص}'' = \frac{-\text{س جاس} - \text{جتاس}}{\text{س}^2} - \frac{\text{س}^2\,\text{جتاس} - 2\,\text{س جاس}}{\text{س}^4}$$

$$= -\frac{\text{جاس}}{\text{س}} - \frac{\text{جتاس}}{\text{س}^2} - \frac{\text{جتاس}}{\text{س}^2} + \frac{2\,\text{جاس}}{\text{س}^3}$$

$$\text{س}\,\text{ص}'' = -\text{جاس} - \frac{2\,\text{جتاس}}{\text{س}} + \frac{2\,\text{جاس}}{\text{س}^2} \quad — ①$$

$$2\,\text{ص}' = \frac{2\,\text{جتاس}}{\text{س}} - \frac{2\,\text{جاس}}{\text{س}^2} \quad — ②$$

$$\text{س}\,\text{ص} = \text{جاس} \quad — ③$$

نجمع ① + ② + ③ ⇐

$$\text{س}\,\text{ص}'' + 2\,\text{ص}' + \text{س}\,\text{ص} = -\text{جاس} - \frac{2\,\text{جتاس}}{\text{س}} + \frac{2\,\text{جاس}}{\text{س}^2} + \frac{2\,\text{جتاس}}{\text{س}} - \frac{2\,\text{جاس}}{\text{س}^2} + \text{جاس} = \text{صفر}$$

⑧ اذا كانت $\text{ص} = \sqrt{2\,\text{س} + 1}$ اثبت أن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} + \frac{1}{\text{ص}^3} = \text{صفر}$

البرهان:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{2}{2\sqrt{2\,\text{س}+1}} = \frac{1}{\text{ص}}$$

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{-\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{\text{ص}^2} = \frac{-\frac{1}{\text{ص}}}{\text{ص}^2} = \frac{-1}{\text{ص}^3}$$

اذاً $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} + \frac{1}{\text{ص}^3} = \frac{-1}{\text{ص}^3} + \frac{1}{\text{ص}^3} = \text{صفر}$ وهو المطلوب

⑨ اذا كانت $\text{س} = (\text{ص}^2 - 1)^6$ اثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}^2 - 1}{12\,\text{س}\,\text{ص}}$

البرهان:

$$\text{س} = (\text{ص}^2 - 1)^6 \Leftarrow 1 = 6 \times 2\,\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\,(\text{ص}^2 - 1)^5$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{12\,\text{ص}\,(\text{ص}^2 - 1)^5}$$

ولكن $(\text{ص}^2 - 1)^6 = \text{س} \Leftarrow (\text{ص}^2 - 1)^5 = \frac{\text{س}}{\text{ص}^2 - 1}$

$$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}^2 - 1}{12\,\text{س}\,\text{ص}}$$

⑩ اذا كانت $\text{ص} = \text{ظاس} + \frac{1}{3}\,\text{ظا}^3\text{س}$

اثبت أنه $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^4\text{س}$.

البرهان:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س} + \text{ظا}^2\text{س}\ \text{قا}^2\text{س}$$

$$= \text{قا}^2\text{س}\,(1 + \text{ظا}^2\text{س}) = \text{قا}^2\text{س} \times \text{قا}^2\text{س} = \text{قا}^4\text{س}$$

(أسئلة الاثبات)

11 اذا كانت ص = س ظاس اثبت أن

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \text{٢ص قا}^2\text{س} + \text{٢قا}^2\text{س}$$

البرهان :-

ص = س ظاس

$$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ظاس} + \text{س قا}^2\text{س}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \text{قا}^2\text{س} + \text{قا}^2\text{س} + \text{س} \times \text{٢قا}^2\text{س ظاس}$$

$$= \text{٢قا}^2\text{س} + \text{٢س ظاس قا}^2\text{س}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \text{٢قا}^2\text{س} + \text{٢ص قا}^2\text{س}.$$

12 اذا كانت $\text{ص} = \frac{1}{\text{س}+2}$ ، س $\neq -2$

اثبت أن ٢ص' + (س+٢) ص'' = صفر

البرهان :-

$$\text{ص} = \frac{1}{\text{س}+2} \Leftarrow \text{ص}' = \frac{-1}{(\text{س}+2)^2}$$

$$\text{ص}'' = 2(\text{س}+2)^{-3} = \frac{2}{(\text{س}+2)^3}$$

$$\Leftarrow \text{٢ص}' + (\text{س}+2)\,\text{ص}''$$

$$= \frac{2\times -1}{(\text{س}+2)^2} + (\text{س}+2) \times \frac{2}{(\text{س}+2)^3}$$

$$= \frac{-2}{(\text{س}+2)^2} + \frac{2}{(\text{س}+2)^2} = \text{صفر}$$

وهو المطلوب.

13 اذا كانت ص = جتا٢س اثبت أن

$$\text{قاس}\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{٤ جاس} = \text{صفر}$$

البرهان :-

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{٢جا٢س} = -\text{٤جاس جتاس}$$

$$\Leftarrow \text{قاس}\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{٤جاس} =$$

$$\frac{1}{\text{جتاس}} \times -\text{٤جاس جتاس} + \text{٤جاس}$$

$$-\text{٤جاس} + \text{٤جاس} = \text{صفر}$$

وهو المطلوب

14 اذا كانت ص² = س² - س³ اثبت أن

$$\text{ص} \times \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} + \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2 + \text{٣س} = 1$$

البرهان :-

ص² = س² - س³ ، نشتقه ضمنياً :

$$\text{٢ص}\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س} - \text{٣س}^2$$

$$\text{٢ص}\ \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} + 2\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2 - \text{٦س}$$

$$\text{٢ص}\ \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} + 2\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2 + \text{٦س} = 2$$

، نقسم على ٢

$$\text{ص}\ \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} + \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2 + \text{٣س} = 1$$

وهو المطلوب

15 اذا كانت $\text{ص} = \frac{\text{جتا٢س}}{1-\text{جا٢س}}$

$$\text{اثبت أن}\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{2}{1-\text{جا٢س}}$$

البرهان :

$$\text{ص} = \frac{\text{جتا٢س}}{1-\text{جا٢س}}.$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(-\text{٢جا٢س})(1-\text{جا٢س}) - (-\text{٢جتا٢س})(\text{جتا٢س})}{(1-\text{جا٢س})^2}$$

$$= \frac{-\text{٢جا٢س} + \text{٢جا}^2\text{٢س} + \text{٢جتا}^2\text{٢س}}{(1-\text{جا٢س})^2}$$

$$= \frac{-\text{٢جا٢س} + 2(\text{جا}^2\text{٢س} + \text{جتا}^2\text{٢س})}{(1-\text{جا٢س})^2}$$

$$= \frac{-\text{٢جا٢س} + 2}{(1-\text{جا٢س})^2} = \frac{2(1-\text{جا٢س})}{(1-\text{جا٢س})^2}.$$

$$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{2}{1-\text{جا٢س}}$$

(اسئلة ٢ اثبات)

١٦ اذا كانت $ص^م = (١+س)^ن$

اثبت أن

$$(١+س)\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{دص}{دس} \times \left(\frac{ن}{م} - ١\right)$$

البرهان :

$ص^م = (١+س)^ن$ نشتقه ضمنياً

$$\Leftarrow م\, ص^{م-١} \frac{دص}{دس} = ن\,(١+س)^{ن-١}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ن\,(١+س)^{ن-١}}{م\, ص^{م-١}} = \frac{ن\,(١+س)^{ن-١}}{م \times ص^م \times ص^{-١}}$$

$$= \frac{ن}{م} \times \frac{ص}{ص^م} \times (١+س)^{ن-١}$$

$$= \frac{ن}{م} \times \frac{ص\,(١+س)^{ن-١}}{(١+س)^ن} = \frac{ن}{م} \times \frac{ص}{١+س}$$

اذاً $\frac{دص}{دس}(١+س) = \frac{ن}{م}\, ص$ ، نشتقه ضمنياً

$$\frac{دص}{دس} + (١+س)\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{ن}{م} \times \frac{دص}{دس}$$

$$\Leftarrow (١+س)\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{ن}{م}\frac{دص}{دس} - \frac{دص}{دس}$$

$$= \left(\frac{ن}{م} - ١\right)\frac{دص}{دس}$$ وهو المطلوب .

١٧ اذا كانت $ص = ظا^2س$ ، اثبت أن $\frac{د^2ص}{دس^2} = ٢(١+ص)(١+٣ص)$.

البرهان :

$$\frac{دص}{دس} = ٢\, ظاس\, قا^2س$$

$$= ٢\, ظاس\,(١+ظا^2س) = ٢\, ظاس + ٢\, ظا^3س$$

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = ٢\, قا^2س + ٦\, ظا^2س\, قا^2س$$

$$= ٢\, قا^2س\,(١+٣\, ظا^2س)$$

$$= ٢(١+ظا^2س)(١+٣\, ظا^2س)$$

$$= ٢(١+ص)(١+٣ص) .$$

١٨ اذا كانت $س\,ص = أ\, جتا هـس + ب\, جا هـس$

حيث أ ، ب ثوابت

اثبت أنه :-

$$س\frac{د^2ص}{دس^2} + ٢\frac{دص}{دس} + هـ^2 س\, ص = صفر$$

١٩ اذا كانت $ص = جتا^2س$ ، $ن = جا٢س$

اثبت أن $\frac{د^2ص}{دن^2} = \frac{-١}{٢\, جتا^3 ٢س}$

٢٠ اذا كانت $٢ص = جا٤س - جا٢س$

اثبت أن $ص''' + ٤ص' + ٢٤\, جتا٤س = صفر$

٢١ اذا كانت $س^2 + ص^2 = ٢ص$ اثبت أن

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{١}{(١-ص)^3}$$

٢٢ اذا كانت $ص = \frac{١}{٢}\, قا^2س$ اثبت أن

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = ٤ص\,(٣ص - ١) .$$

٢٣ اذا كانت $ص^2 = \frac{٧}{س^2+٥}$ اثبت أن

$$س\, ص^3 + ٧\, ص' = صفر .$$

٢٤ اذا كانت $ص = \frac{١ + ظاس}{١ - ظاس}$ اثبت أن

$$ص' = \frac{٢}{١ - جا٢س}$$

٢٥ (٢٠٠٠) اذا كانت $ص = (قاس + ظاس)^ن$

اثبت أن $ص' = ن\, ص\, قاس$.

٢٦ (٢٠٠١) اذا كانت $جاص = س$ ، $-١ < س < ١$

اثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{\sqrt{١-س^2}}$.

٢٧ (٢٠٠٢) اذا كانت $ص = ظا(س\,ص)$ اثبت أن

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ص + ص^3}{١ - س(١+ص^2)}$$

حساب التفاضل — بسم الله الرحمن الرحيم (معدل التغير) — إياد عماد عباد

معدل التغير في ص بالنسبة إلى س هو نفسه المشتقة $\frac{دص}{دس}$ ، فمثلاً معدل التغير في المساحة م بالنسبة للمحيط ل هو $\frac{دم}{دل}$ وهكذا ...

* كلمة عندما نستخدمها بعد الاشتقاق

أمثلة

1) اوجد معدل التغير في مساحة المربع بالنسبة إلى محيطه عندما يكون طول ضلع المربع = ٨ سم.

الحل:

مساحة المربع = (الضلع)^٢

أي م = س^٢

لكن المحيط ل = ٤س ⟸ س = $\frac{ل}{٤}$

إذاً م = $\left(\frac{ل}{٤}\right)^٢ = \frac{١}{١٦}$ ل^٢

المطلوب $\frac{دم}{دل} = \frac{١}{١٦} \times ٢ل = \frac{١}{١٦} \times ٢ \times ٣٢$

عندما س = ٨ فإنه ل = ٣٢

$\frac{دم}{دل} = \frac{٣٢}{٨}$

2) متوازي مستطيلات ارتفاعه مثلا طوله وعرضه ثلث ارتفاعه اوجد معدل تغير حجمه بالنسبة إلى ارتفاعه عندما يكون الارتفاع = ٦سم

الحل:

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

ح = س × ص × ع

من السؤال ع = ٢س ⟸ س = $\frac{ع}{٢}$

وص = $\frac{١}{٣}$ ع

إذاً ح = $\frac{ع}{٢} \times \frac{١}{٣} ع \times ع = \frac{١}{٦} ع^٣$

المطلوب $\frac{دح}{دع} = \frac{١}{٦} \times ٣ع^٢$

عندما ع = ٦ ⟸ $\frac{دح}{دع} = \frac{١}{٢} \times ٣٦ = ١٨$

3) ما معدل التغير في حجم مكعب بالنسبة لمساحة سطحه عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم.

الحل:

ح = س^٣ ، $\frac{دح}{دس} = ٣س^٢$ | م = ٦س^٢ ، $\frac{دم}{دس} = ١٢س$

باستخدام قاعدة السلسلة

$\frac{دح}{دم} = \frac{دح}{دس} \times \frac{دس}{دم}$

$= ٣س^٢ \times \frac{١}{١٢س} = \frac{٣س^٢}{١٢س}$

$\left.\frac{دح}{دم}\right|_{س=١٠} = \frac{٣ \times ٣٠}{١٢ \times ١٠} = \frac{٦}{١٢}$

4) اسطوانة دائرية قائمة حجمها ثابت، اوجد معدل التغير ارتفاعها بالنسبة إلى طول نصف قطر قاعدتها

الحل:

ح = π نق^٢ ع بقسمة الطرفين π نق^٢

ع = $\frac{ح}{\pi نق^٢}$ ⟸ $\frac{دع}{دنق} = \frac{-ح \times ٢\pi نق}{\pi^٢ نق^٤}$ (ثابت)

$\frac{دع}{دنق} = \frac{-نق^٢ \pi ع \times ٢ نق \pi}{نق^٤ \pi^٢}$

$\frac{دع}{دنق} = \frac{-٢ع}{نق}$

5) ٣٠٠٢ صفيحة معدنية مستطيلة الشكل تتمدد بانتظام بحيث يبقى طولها يساوي ٣ أمثال عرضها اوجد معدل التغير في مساحتها بالنسبة إلى طولها عندما يكون طولها ١٥ سم.

إعداد الأستاذ إياد عماد عباد	بسم الله الرحمن الرحيم	" طريق النجاح مليء بالأشواك"

١ إذا كان

$\text{س ص} = \text{أ جتا}٥\text{س} + \text{ب جا}٥\text{س}$

حيث أ، ب ثوابت أثبت أن

$\text{س ص}'' + ٢\text{ص}' + ٢٥\text{ س ص} = \text{صفر}$

البرهان:

نشتق ضمنياً

$\text{س} \times \text{ص}' + \text{ص} = -٥\text{أ جا}٥\text{س} + ٥\text{ب جتا}٥\text{س}$

نشتق مرة أخرى ضمنياً

$\text{س} \times \text{ص}'' + \text{ص}' + \text{ص}' = -٢٥\text{أ جتا}٥\text{س} - ٢٥\text{ب جا}٥\text{س}$

$\Leftarrow \text{س} \times \text{ص}'' + ٢\text{ص}' + ٢٥\text{أ جتا}٥\text{س} + ٢٥\text{ب جا}٥\text{س} = ٠$

$\text{س ص}'' + ٢\text{ص}' + ٢٥(\text{أ جتا}٥\text{س} + \text{ب جا}٥\text{س}) = ٠$

$\text{س ص}'' + ٢\text{ص}' + ٢٥\text{ س ص} = ٠$ وهو المطلوب

٢ إذا كان $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٢\text{ص}$

أثبت أن $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = \frac{١}{(١-\text{ص})^٣}$

الحل:

$٢\text{س} + ٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\text{س} + \text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\Leftarrow \text{س} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\Leftarrow \text{س} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} (١ - \text{ص})$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{س}}{١ - \text{ص}}$

$\Leftarrow \frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = \frac{(١-\text{ص}) - (-\frac{\text{دص}}{\text{دس}}) \times \text{س}}{(١-\text{ص})^٢}$

$\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = \frac{(١-\text{ص}) + \text{س} \times \frac{\text{س}}{١-\text{ص}}}{(١-\text{ص})^٢}$

$\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = \frac{\frac{١-\text{ص}}{١} + \frac{\text{س}^٢}{(١-\text{ص})}}{(١-\text{ص})^٢}$

$= \frac{\frac{(١-\text{ص})^٢ + \text{س}^٢}{(١-\text{ص})}}{(١-\text{ص})^٢}$

$= \frac{١ - ٢\text{ص} + \text{ص}^٢ + \text{س}^٢}{(١-\text{ص})^٣}$

من السؤال

$= \frac{١ - \cancel{٢\text{ص}} + \cancel{٢\text{ص}}}{(١-\text{ص})^٣}$

$= \frac{١}{(١-\text{ص})^٣}$ وهو المطلوب

٣ $\text{ص} = \frac{١ + \text{ظاس}}{١ - \text{ظاس}}$ أثبت أن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢}{١ - \text{جا}٢\text{س}}$

البرهان:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(١-\text{ظاس})\text{قا}^٢\text{س} - (١+\text{ظاس})(-\text{قا}^٢\text{س})}{(١-\text{ظاس})^٢}$

$= \frac{\text{قا}^٢\text{س} - \cancel{\text{قا}^٢\text{س ظاس}} + \text{قا}^٢\text{س} + \cancel{\text{قا}^٢\text{س ظاس}}}{(١-\text{ظاس})^٢}$

$= \frac{٢\text{قا}^٢\text{س}}{(١-\text{ظاس})^٢} = \frac{\frac{٢}{\text{جتا}^٢\text{س}}}{(١ - \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}})^٢}$

$= \frac{٢}{\text{جتا}^٢\text{س}\left(١ - \frac{٢\text{جاس}}{\text{جتاس}} + \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٢\text{س}}\right)}$

$= \frac{٢}{\text{جتا}^٢\text{س} - ٢\text{جاس جتاس} + \text{جا}^٢\text{س}}$

$= \frac{٢}{١ - \text{جا}٢\text{س}}$

وهو المطلوب

" طريق النجاح مليء بالأشواك"	بسم الله الرحمن الرحيم	اعداد الاستاذ اياد عماد عباد

[4] $ص = (قاس + ظاس)^ن$ اثبت أن $ص' = ن\, ص\, قاس$

البرهان:

$ص' = ن(قاس + ظاس)^{ن-1} (قاس\, ظاس + قا^2س)$

$ص' = ن\, قاس\, (ظاس + قاس)(قاس + ظاس)^{ن-1}$

$ص' = ن\, قاس\, (ظاس + قاس)^{ن-1+1}$

$ص' = ن\, قاس\, (ظاس + قاس)^ن$

$ص' = ن\, قاس \times ص$ وهو المطلوب

[5] $ص = \sqrt{1 + جاس}$ اثبت أن $ص + 4ص'' = صفر$

البرهان:

$ص^2 = 1 + جاس$ نشتق ضمنيا

$2ص \frac{دص}{دس} = جتاس$ نشتق ضمنيا مرة أخرى

$2ص \times ص'' + ص' \times 2ص' = -جاس$

$2ص\, ص'' + 2(ص')^2 = -جاس$

$2ص\, ص'' + 2\left(\frac{جتاس}{2ص}\right)^2 = -جاس$

$2ص\, ص'' + \frac{2\, جتا^2س}{4ص^2} = -جاس$

$2ص\, ص'' + \frac{1 - جا^2س}{2ص^2} = -جاس$

$2ص\, ص'' + \frac{(1 - جاس)(1 + جاس)}{2ص^2} = -جاس$

$2ص\, ص'' + \frac{\cancel{ص^2}(1 - جاس)}{2\cancel{ص^2}} = -جاس$

$2ص\, ص'' + \frac{(1 - جاس)}{2} = -جاس$

نضرب بالمقامات

$4ص\, ص'' + (1 - جاس) = -2جاس$

$4ص\, ص'' + 1 + جاس = 0$

$4ص\, ص'' + ص^2 = 0 \Leftarrow ص'' = \frac{-ص^2}{4ص} = \frac{-ص}{4}$

المطلوب: $ص + 4ص''$

$= ص + 4 \times \left(\frac{-ص}{4}\right)$

$= ص - ص = صفر$ وهو المطلوب

[6] اذا كانت $ص^2 = \frac{7}{س^2 + 5}$ أثبت أن $س\, ص^3 + 7 \frac{دص}{دس} = صفر$

البرهان:

نشتق ضمنيا:

$2ص \frac{دص}{دس} = \frac{-7 \times 2س}{(س^2 + 5)^2}$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-14س}{(س^2 + 5)^2} \times \frac{1}{2ص}$

• لكن $ص^2 = \frac{7}{س^2 + 5} \Leftarrow س^2 + 5 = \frac{7}{ص^2}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-14س}{\left(\frac{7}{ص^2}\right)^2} \times \frac{1}{2ص} = \frac{-14س\, ص^4}{49} \times \frac{1}{2ص}$

$= \frac{-2س\, ص^3}{14} = \frac{-س\, ص^3}{7}$

$\Leftarrow$ المطلوب:

$س\, ص^3 + 7 \frac{دص}{دس}$

$= س\, ص^3 + \cancel{7} \times \frac{-س\, ص^3}{\cancel{7}}$

$= س\, ص^3 - س\, ص^3 = صفر$ وهو المطلوب

[7] $ص = جان$ ، $س = جتان$

اثبت أن $\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{-1}{جا^3ن}$.

البرهان:

$\frac{دص}{دن} = جتان$ ، $\frac{دس}{دن} = -جان$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$\frac{دص}{دس} = جتان \times \frac{1}{-جان} = \frac{جتان}{-جان} = -ظتان$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = -(-قتا^2ن) \times \frac{دن}{دس}$

$= \frac{1}{جا^2ن} \times \frac{1}{-جان} = \frac{-1}{جا^3ن}$ وهو المطلوب