القطوع المخروطية

الدائرة

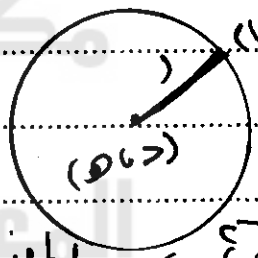
هي المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة (المركز) مقدار ثابت دائما هو (نصف القطر).

معادلة الدائرة التي مركزها $(د، هـ)$ ونصف قطرها $ر$ هي:

$$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = ر^2$$

وتسمى المعادلة السابقة بالصورة القياسية لمعادلة الدائرة

ويمكن اشتقاقه المعادلة كما يلي



حسب قانون المسافة بين نقطتين فان

$ر = \sqrt{(س - د)^2 + (ص - هـ)^2}$ وبتربيع الطرفين

$\Leftarrow (س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = ر^2$

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي

$س^2 + ص^2 + 2ل س + 2ع ص + ه = صفر$

حيث المركز $(-ل، -ع)$

$= \left(-\frac{\text{معامل س}}{2}، -\frac{\text{معامل ص}}{2}\right)$

$ر = \sqrt{ل^2 + ع^2 - ه}$

نلاحظ انه يجب ان يكون

معامل $س^2$ = معامل $ص^2$

ويمكن تحويل الصورة العامة الى الصورة القياسية وذلك بأكمال المربع لكل من السينات والصادات

كما يمكن تحويل الصورة القياسية الى الصورة العامة بفك الاقواس

مكتبة الوسام
AlWesam
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال ①

جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها

① $(س-٥)^٢ + (ص+٧)^٢ = ١١$

الحل

المركز $(٥، -٧)$ ، $ر^٢ = ١١ \leftarrow ر = \sqrt{١١}$

② $س^٢ + (ص+٩)^٢ = ١٦$

الحل

المركز $(٠، -٩)$ ، $ر = \sqrt{١٦} = ٤$

③ $(٢(س-٣))^٢ + (-٢(-٢+ص))^٢ = ٣٦$

الحل

$٤(س-٣)^٢ + ٤(-٢+ص)^٢ = ٣٦$

بالقسمة على ٤ ←

$(س-٣)^٢ + (ص-٢)^٢ = ٩$

المركز $(٣، ٢)$

$ر = \sqrt{٩} = ٣$

④ $س^٢ + ص^٢ + ٤س + ٦ص - ١٢ = ٠$

الحل

المعادلة صورة عامة مرتبة

$٢ل = ٤ \Leftarrow ل = ٢$

$٢ك = ٦ \Leftarrow ك = ٣$

المركز $(-٢، -٣)$

$ر = \sqrt{ل^٢ + ك^٢ - هـ} = \sqrt{(-٢)^٢ + (-٣)^٢ - ١٢}$

$= \sqrt{٤ + ٩ + ١٢} = \sqrt{٢٥} = ٥$

⑤ $٢س^٢ + ٢ص^٢ - ١٢س = ١٤$

الحل

المعادلة صورة عامة مرتبة بالقسمة على ٢

$س^٢ + ص^٢ - ٦س - ٧ = ٠$

$٢ل = -٦ \Leftarrow ل = -٣$

$٢ك = صفر \Leftarrow ك = صفر$

المركز $(٣، ٠)$

$ر = \sqrt{(٣)^٢ + (٠)^٢ - (-٧)}$

$= \sqrt{٩ + ٠ + ٧} = \sqrt{١٦} = ٤$

(٦) $٣س^٢ + ٩س - ١ = ٥ص - ٣ص^٢ - ٢$

الحل

معادلة غير مرتبة نرتبها ونجعلها تساوي صفر

$٣س^٢ + ٣ص^٢ + ٩س - ٥ص + ١ = ٠$

بالقسمة على ٣

$س^٢ + ص^٢ + ٣س - \frac{٥}{٣}ص + \frac{١}{٣} = ٠$

$-٢ل = ٣ \Leftarrow ل = -\frac{٣}{٢}$

$-٢ك = -\frac{٥}{٣} \Leftarrow ك = \frac{٥}{٦}$

المركز $(-\frac{٣}{٢}, \frac{٥}{٦})$

$ر = \sqrt{\frac{٩}{٤} + \frac{٢٥}{٣٦} - \frac{١}{٣}} = \sqrt{\frac{٩٤}{٣٦}} = \frac{\sqrt{٩٤}}{٦}$

(٧) وزارة (٢٠١٨)

حيث طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها

$(٤س + ٤)^٢ + (٣ص - ١٠)^٢ = ٣٦$

الحل

$١٦(س + ١)^٢ + ٩(ص - ٥)^٢ = ٣٦$

$٤(س + ١)^٢ + ٤(ص - ٥)^٢ = ٣٦$

بالقسمة على ٤

$(س + ١)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٩$

$ر = \sqrt{٩} \Leftarrow ر = ٣$

ملاحظة هامة

١. إيجاد معادلة الدائرة عندما تعطى معلومات كافية عليها.

بشكل عام نستخدم الصورة القياسية لمعادلة الدائرة ونقوم بإيجاد الثوابت $د، هـ، و$ التي في المعادلة وذلك إما عن طريق معرفة إحداثيات المركز وطول نصف القطر $ر$ أو من خلال تكوين معادلات تشمل تلاقي الثوابت اعتمادًا على المعلومات المعطاة.

٢. عين استخدام الصورة العامة للدائرة في الحالات التالية.

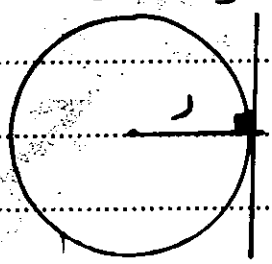
١. عندما تعطى إحداثيات ثلاث نقاط معلومة تمر بها تلاقي الدائرة

٢. عندما تعطى إحداثيات نقطتين يمر بهما تلاقي الدائرة ويقع مركزها على مستقيم معلوم.

مكتبة الوسام

ملاحظة هامة

١. نصف القطر يكون عمودي على المماس دائمًا



٢. بعد النقطة $(س_1، ص_1)$ عن المستقيم $أ س + ب ص + جـ = صفر$

$$= \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

٣. البعد بين نقطتين

= $\sqrt{(\text{فرق السينات})^2 + (\text{فرق الصادات})^2}$

مثال ①

١. جد معادلة الدائرة التي مركزها $(-٢، ١٦)$ ونصف قطرها ٤ سم

الحل

$م = (-٢، ١٦)$ $ر = ٤$

المعادلة هي

$(س + ٢)^2 + (ص - ١٦)^2 = ١٦$

٢. جد معادلة الدائرة التي مركزها $(٢، -٥)$ وطول قطرها = ٦ سم

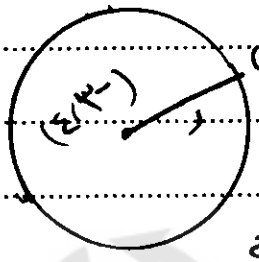
الحل

$م = (٢، -٥)$ $ر = \frac{٦}{٢} = ٣$

المعادلة هي

$(س - ٢)^2 + (ص + ٥)^2 = ٩$

٣. جد معادلة الدائرة التي مركزها $(-٤، ٣)$ وتمر بنقطة الأصل.



الحل

$م = (-٤، ٣)$

$ر =$ البعد بين نقطتين

$= \sqrt{(-٤ - ٠)^2 + (٣ - ٠)^2}$

$= \sqrt{٢٥} = ٥$

المعادلة هي

$(س + ٤)^2 + (ص - ٣)^2 = ٢٥$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

٤) جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ومساحتها $= 36\pi$

الحل

المركز $(0,0)$ ، مساحة الدائرة $= \pi r^2$

$36\pi = \pi r^2 \leftarrow r^2 = 36$

$\leftarrow r = 6$

المعادلة هي $x^2 + y^2 = 36$

٥) جد معادلة الدائرة التي مركزها $(1,-1)$ وتمر بالنقطة $(4,3)$

الحل

المركز $(1,-1)$

r = المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(4-1)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{9+16}$

$= \sqrt{25} = 5$

المعادلة هي

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5^2$

مثال ③

① إذا كانت $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

تمثل معادلة دائرة مركزها $(2,-3)$

جد) الثوابت A, B ب) مساحة الدائرة

الحل

$-A = -4 \leftarrow A = 4$ ولكن $A = \frac{-D}{2}$

$B = 6 \leftarrow -B = -6 \leftarrow \frac{B}{2} = -3$ ولكن $B = \frac{-E}{2}$

$r = \sqrt{A^2 + B^2 - C} = \sqrt{16+36+3} = \sqrt{55}$

مساحة الدائرة $= \pi r^2 = 55\pi$

② إذا كانت

$5x^2 + 5y^2 - 10x + 20y + 5 = 0$

تمثل معادلة دائرة نصف قطرها (r)

جد قيمة الثابت A حيث $A > 0$ ؟

الحل

نرتب المعادلة ونكتبها على الصورة العامة بالقسمة على 5

$x^2 + y^2 - 2Ax + 4y + 1 = 0$

$-A = -2A \leftarrow A = 2$

$B = 4 \leftarrow -B = -4$

$r = \sqrt{A^2 + B^2 - C} \leftarrow 2 = \sqrt{4A^2 + 16 - 1}$

بتربيع الطرفين $\leftarrow 4 = 4A^2 + 15 \leftarrow A^2 = 1$

$A = 1$ لأن $A > 0$

(٣) $(أ-١)س^2+٢ص^2-٦س+١٢ص=٨$

عثل معادلة دائرة جد

أ) قيمة الثابت أ ب) المركز ج) نصف القطر

الحل

لتكون معادلة دائرة يجب ان يكون معامل $س^2$ = معامل $ص^2$

$\Leftarrow أ-١=٢ \longleftarrow أ=٣$

ب) $٣س^2+٢ص^2-٦س+١٢ص-٨=٠$

بالقسمة على ٢ ←

$س^2+ص^2-٣س+٦ص-٤=$ صفر

$-٢ل=-٣ \longleftarrow ل=\frac{-٣}{-٢}$

$-٢ك=٦ \longleftarrow ك=٣$

المركز $(\frac{٣}{٢}، -٣)$

ج) $ر=\sqrt{\frac{٩}{٤}+٩+٤}=\sqrt{\frac{٦١}{٤}}=\frac{\sqrt{٦١}}{٢}$

٤. اوجد معادلة الدائرة التي نهايتا قطر منها النقطتان $(٤، ١)$ ، $(-٦، -٣)$

الحل

المركز = منتصف القطر

$= (\frac{٤-٦}{٢}، \frac{١-٣}{٢}) = (-١، -١)$

معادلة الدائرة هي

$(س+١)^2+(ص+١)^2=ر^2$

بتعويض احدى النقطتين لايجاد ر

$(٤، ١) \longleftarrow (٤+١)^2+(١+١)^2=ر^2$

$\longleftarrow ١+١٦=ر^2 \longleftarrow ر^2=١٧$

المعادلة هي

$(س+١)^2+(ص+١)^2=١٧$

= احداثيات منتصف المسافة

$= (\frac{٣+٥}{٢}، \frac{-١+٣}{٢}) = (٤، ١)$

ملاحظة هامة

١. الدائرة تمس محور السينات فان

نصف القطر = | الاحداثي الصادي للمركز |

$ر = |ك|$

٢. الدائرة تمس محور الصادات فان

نصف القطر = | الاحداثي السيني للمركز |

$ر = |أ|$

مثال (٤)

١) جد معادلة الدائرة التي مركزها (٤،٤) وتمس المستقيم الذي معادلته

$ص = ٢س - ٣$

الحل

المركز (٤،٤) ، نجد بعد المركز عن المستقيم ، نرتب معادلة المستقيم

$٢س - ص + ٣ = ٠$

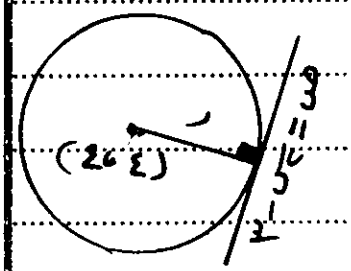
$أ = ٢ ، ب = -١ ، جـ = ٣$

$ر = \left| \frac{٢ \times ٤ + (-١) \times ٤ + ٣}{\sqrt{٤ + ١}} \right|$

$ر = \frac{١}{\sqrt{٥}}$

معادلة الدائرة هي

$(س - ٤)^٢ + (ص - ٤)^٢ = \frac{١}{٥}$



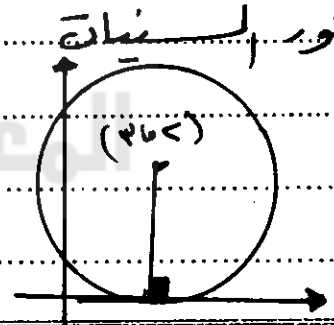
٢) جد معادلة الدائرة التي مركزها (٢،٣) وتمس محور السينات

الحل

$م = (٣،٢)$

$ر = ٣$ من الرسم

$(س - ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$



٣) جد معادلة الدائرة التي مركزها $(-٤، -٣)$ وتمس محوري الصادات

الحل

$ر = |أ| \Leftarrow ر = |-٤| = ٤$

المعادلة هي

$(س + ٤)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ١٦$

٤) جد معادلة الدائرة التي مركزها $(٢، -١)$ وتمس المستقيم الذي معادلته $س = -٢$

الحل

نجد بعد المركز عن المستقيم

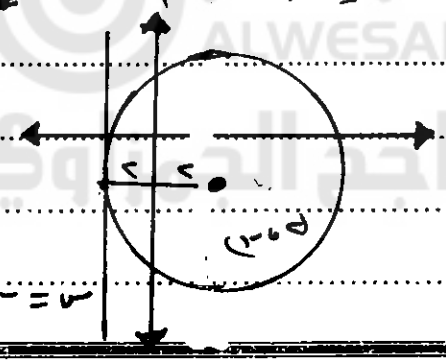
$س + ٢ = ٠$ حيث $أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٢$

$ر = \left| \frac{١ \times ٢ + ٠ \times -١ + ٢}{\sqrt{١^٢ + ٠^٢}} \right| = \left| \frac{٤}{١} \right| = ٤$

المعادلة هي

$(س - ٢)^٢ + (ص + ١)^٢ = ١٦$

أو عن طريق الرسم نجد بعد



مركز الوسام AL WESAM
الوسام للعلم : ناجح الجمزاوي

٥. جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين ص = -١/٣ س = ٣ ونصف قطرها ٣ وحدات.

الحل

١. نجد المركز (د، هـ) عن المستقيم ص + ١ = ٠

$\leftarrow ر = \left|\frac{هـ+١}{\sqrt{١+٠}}\right|$

$\leftarrow ر = |هـ+١|$

لكن $ر = ٣ \leftarrow |هـ+١| = ٣$

$هـ+١ = ٣$ أو $هـ+١ = -٣$

$\leftarrow هـ = ٢$ $هـ = -٤$

٢. نجد المركز (د، هـ) عن المستقيم

$س - ٣ = ٠$

$ر = \left|\frac{د-٣}{\sqrt{١+٠}}\right| \leftarrow ر = |د-٣|$

لكن $ر = ٣ \leftarrow |د-٣| = ٣$

$د-٣ = ٣$ أو $د-٣ = -٣$

$د = ٦$ $د =$ مرفوض

حالات أربع

١. المركز (٦، ٢)، $ر = ٣$

المعادلة هي $(س-٦)^٢ + (ص-٢)^٢ = ٩$

٢. المركز (٦، -٤)، $ر = ٣$

المعادلة هي $(س-٦)^٢ + (ص+٤)^٢ = ٩$

٣. المركز (٠، ٢)، $ر = ٣$

المعادلة هي $س^٢ + (ص-٢)^٢ = ٩$

٤. المركز (٠، -٤)، $ر = ٣$

المعادلة هي $س^٢ + (ص+٤)^٢ = ٩$

٦. جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمات $س = ٢$، $س = ٨$، $ص = ١$

الحل

١. نجد المركز (د، هـ) عن المستقيم $س - ٢ = ٠$

$\leftarrow ر = \left|\frac{د-٢}{\sqrt{١+٠}}\right| \leftarrow ر = |د-٢|$ ①

٢. نجد المركز (د، هـ) عن المستقيم $س - ٨ = ٠$

$\leftarrow ر = \left|\frac{د-٨}{\sqrt{١+٠}}\right| \leftarrow ر = |د-٨|$ ②

٣. نجد المركز (د، هـ) عن المستقيم $ص - ١ = ٠$

$\leftarrow ر = \left|\frac{هـ-١}{\sqrt{١+٠}}\right| \leftarrow ر = |هـ-١|$ ③

من ① و ②

$|د-٢| = |د-٨|$

$د-٢ = د-٨$ مرفوض أو $د-٢ = -د+٨$

$٢د = ١٠$

$د = ٥$

من ③ $\leftarrow ر = |د-٢| \leftarrow ر = ٣$

← $ر = |هـ - ١| \leftarrow ٣ = |هـ - ١|$

← $هـ - ١ = ٣$ أو $هـ - ١ = -٣$

$هـ = ٤$ $\quad$ $هـ = -٢$

∴ المركز $(٥، ٤)$ ، $ر = ٣$

المعادلة هي

$(س - ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٩$

∴ المركز $(٥، -٢)$ ، $ر = ٣$

المعادلة هي

$(س - ٥)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٩$

---

٧) جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين $س = ٣$ ، $ص = -١$ وتمر بالنقطة $(٢، ٩)$

الحل

∴ بعد المركز $(د، هـ)$ عن المستقيم $س - ٣ = صفر$

← $ر = |د - ٣| \quad ---①$

∴ بعد المركز $(د، هـ)$ عن المستقيم $ص + ١ = صفر$

← $ر = |هـ + ١| \quad ---②$

من ①، ② ←

$|د - ٣| = |هـ + ١|$

← $د - ٣ = هـ + ١$ أو $د - ٣ = -هـ - ١$

$د = هـ + ٤$ $\quad$ $د = -هـ + ٢$

① عندما $د = هـ + ٤$ تكون معادلة الدائرة $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ر^٢$

نعوض $(٢، ٩)$

$(٩ - د)^٢ + (٢ - هـ)^٢ = ر^٢$

لكن $د = هـ + ٤$ ، $ر = |هـ + ١|$ من ①

← $(٩ - هـ - ٤)^٢ + (٢ - هـ)^٢ = (هـ + ١)^٢$

← $٢٥ - ١٠هـ + هـ^٢ + ٤ - ٤هـ + هـ^٢ = هـ^٢ + ٢هـ + ١$

← $هـ^٢ - ١٤هـ + ٢٩ = هـ^٢ + ٢هـ + ١$

← $(هـ - ١٤)(هـ - ٢) = صفر$

← $هـ = ١٤$ ، $هـ = ٢$

عندما $هـ = ١٤ \leftarrow د = ١٨$ ، $ر = ١٥$

المعادلة هي

$(س - ١٨)^٢ + (ص - ١٤)^٢ = ٢٢٥$

عندما $هـ = ٢ \leftarrow د = ٦$ ، $ر = ٣$

المعادلة هي $(س - ٦)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٩$

② عندما $د = -هـ + ٢$ معادلة الدائرة $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ر^٢$

بتعويض $د = -هـ + ٢$ ، $ر^٢ = (هـ + ١)^٢$

← $(س + هـ - ٢)^٢ + (ص - هـ)^٢ = (هـ + ١)^٢$

← يتبع الحل

نتبعوين (٢٥٩)

$\leftarrow (٧+هـ)^{٢} + (٢-هـ)^{٢} = (١+هـ)^{٢}$

$\leftarrow$

$٤٩ + ١٤هـ + هـ^{٢} + ٤ - ٤هـ + هـ^{٢} = هـ^{٢} + ٢هـ + ١$

$هـ^{٢} + ١٠هـ + ٥٣ = هـ^{٢} + ٢هـ + ١$

$هـ^{٢} + ٨هـ + ٥٢ = صفر$

المميز صفر سالب لا تكمل .

مثال ⑧

جد معادلة الدائرة التي تمس محور السينات في النقطة $(٣، ٠)$ ويقع مركزها على المستقيم $ص = ٤$ ؟

الحل

بما أن الدائرة تمس محور السينات

فإن $ر = |هـ|$

المركز يقع على المستقيم $ص = ٤$

$\leftarrow هـ = ٤ \leftarrow ر = ٤$

المعادلة هي

$(س - د)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ١٦$

النقطة $(٣، ٠)$ تحقق المعادلة

$(٣ - د)^{٢} + (٠ - ٤)^{٢} = ١٦$

$(٣ - د)^{٢} = ١٦ - ١٦ = ٠$

$٣ - د = ٠ \leftarrow د = ٣$

المعادلة هي $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ١٦$

مثال ⑦

جد معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات في النقطة $(٠، ٢)$ ويقع مركزها على المستقيم $س = -٣$.

الحل

الدائرة تمس محور الصادات

$\leftarrow ر = |د|$

المركز $(د، هـ)$ يقع على المستقيم $س = -٣$

$\leftarrow د = -٣$

$\leftarrow ر = |-٣| = ٣$

معادلة الدائرة $(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = ر^{٢}$

$\leftarrow (س + ٣)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = ٩$

$(٠، ٢)$ تحقق معادلة الدائرة

$٩ + (٢ - هـ)^{٢} = ٩$

$\leftarrow (٢ - هـ)^{٢} = ٠ \leftarrow هـ = ٢$

معادلة الدائرة هي

$(س + ٣)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٩$

مثال (٧)

جد معادلة الدائرة التي تمس محور السينات عند النقطة (٧، ٠) وتمس محور الصادات في النقطة (٠، ٢)

الحل

تمس محور السينات ← ر = |هـ|

← ر^{٢} = هـ^{٢} لكن ر^{٢} = هـ^{٢}

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = هـ^{٢}

المركز (٧، ٢، هـ)

(س − ٧)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = هـ^{٢}

لكن تمر بالنقطة (١، ٢)

(١ − ٧)^{٢} + (٢ − هـ)^{٢} = هـ^{٢}

٣٦ + ٤ − ٤هـ + هـ^{٢} = هـ^{٢}

٤هـ = ٤٠ ← هـ = ١٠

← ر = ١٠

المعادلة هي

(س − ٧)^{٢} + (ص − ١٠)^{٢} = ١٠٠

مثال (٨)

جد معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات في النقطة (٠، ٢) وتمر بالنقطة (١، ١).

الحل

الدائرة تمس محور السينات ← ر = |هـ|

المركز (١، هـ)

← يتبع الحل

(١، ١)

(١، هـ)

بالنقطة (١، ١).

الحل

المركز (د، ٢) وطول الدائرة تمس محور الصادات فان ر = |د|

المعادلة هي

(س − د)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = د^{٢}

تمر بالنقطة (١، ١) تحقق معادلتها

(١ − د)^{٢} + (١ − ٢)^{٢} = د^{٢}

١ − ٢د + د^{٢} + ١ = د^{٢}

− ٢د + ٢ = ٠ ← د = ١

المعادلة هي

(س − ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ١

مثال (٩)

جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم ص = ٢س + ٤ وتمس محور السينات عند النقطة (١، ٠)؟

الحل

الدائرة تمس محور السينات ← ر = |هـ|

المركز (١، هـ)

(١، ٠)

المركز (١، ٣) كيف معادلة المستقيم

$ص = ٢ \times ١ + ٤ = ٦ \leftarrow ٦ = ر$

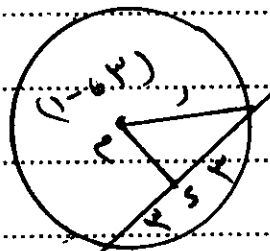
المعادلة هي

$(س - ١)^٢ + (ص - ٦)^٢ = ٣٦$

مثال (١٠)

جد معادلة الدائرة التي مركزها (٢، -١) وتقطع من المستقيم الذي معادلته $٣س - ٥ص + ١٨ = ٠$ وتر طوله ٦ وحدات

الحل



نأخذ المسافة بين المركز والمستقيم

$ف = \frac{|٣ \times ٢ - ٥ \times -١ + ١٨|}{\sqrt{٣^٢ + ٥^٢}} = \frac{|٦ + ٥ + ١٨|}{\sqrt{٣٤}} = \frac{٢٩}{\sqrt{٣٤}}$

$ر^٢ = (\sqrt{٢٩})^٢ + ٩ = ٢٩ + ٩ = ٣٨$

بطريقة فيثاغورس

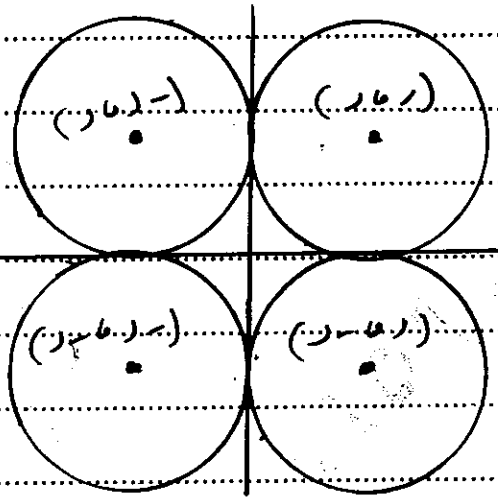
المعادلة هي

$(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٣٨$

ملاحظة هامة

إذا قست الدائرة المحورين المسنيات والصادات فإن

$ر = |أ| = |ب|$



مثال (١١)

جد معادلة الدائرة التي تمس الربع الثالث وتمس المحورين علماً بأن قطرها ٦ وحدات

الحل

القطر = ٦ $\leftarrow$ ر = ٣ تمس

الربع الثالث المماس (-٣، -٣)

المعادلة هي

$(س + ٣)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٩$

مثال (١٢)

جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتقع في الربع الثاني وتقع مركزها على المستقيم $ص = ٣$.

الحل

المركز $(-٣، ٣)$ وتقع على المستقيم $ص = ٣ \leftarrow ر = ٣$ المركز هو $(-٣، ٣)$ المعادلة هي

$(س + ٣)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$

مثال (١٣)

جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتقع في الربع الرابع وتقع مركزها على المستقيم $٤س + ٣ص = ٥$

الحل

المركز $(ر، -ر)$ في الربع الرابع تقع على المستقيم $٤س + ٣ص = ٥$

كتعويض معادلة $٤ر - ٣ر = ٥ \leftarrow ر = ٥$

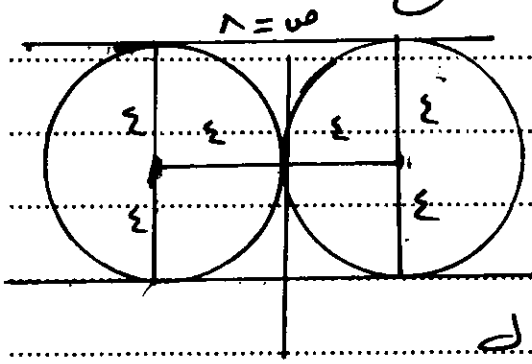
المركز $(٥، -٥)$

معادلة الدائرة هي

$(س - ٥)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥$

مثال (١٤)

جد معادلة الدائرة التي تمس محوري الإحداثيات والمعادلات وتمس المستقيم $ص = ٨$ في جميع الحلول الممكنة



الحل

الحل الأول

$م = (٤، ٤)$ ، $ر = ٤$

$(س - ٤)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ١٦$

الحل الثاني

$م = (-٤، ٤)$ ، $ر = ٤$

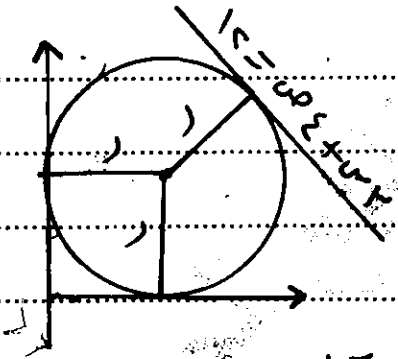
$(س + ٤)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ١٦$

مثال (١٥)

جد معادلة الدائرة التي تمس محوري الإحداثيات والمعادلات وتمس المستقيم $٣س + ٤ص = ١٢$ وتقع في الربع الأول

← يتبع الحل

الحل



المركز (ر، ر)

بعد المركز عن المماس المائل = ر

$$ر = \frac{|٣ر + ٤ر - ١٢|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|٧ر - ١٢|}{٥}$$

$٥ر = |٧ر - ١٢|$

$٥ر = -٧ر + ١٢$ أو $٥ر = ٧ر - ١٢$

$١٢ر = ١٢$ ، $-٢ر = -١٢$

$ر = ١$ ، $ر = ٦$

عندما $ر = ٦$ فإن المركز $(٦، ٦)$

المعادلة $(س - ٦)^٢ + (ص - ٦)^٢ = ٣٦$

عندما $ر = ١$ فإن المركز $(١، ١)$

المعادلة هي $(س - ١)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١$

مثال دائرتين مجيء الربع الأول صغيرة وكبيرة

مثال (١٦)

جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتمر بالنقطة $(-١، ٨)$

الحل

الدائرة تمر بالنقطة $(-١، ٨)$ تقع في الربع الثاني المركز $(-ر، ر)$

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ر^٢$

$(س + ر)^٢ + (ص - ر)^٢ = ر^٢$

وتمر بالنقطة $(-١، ٨)$

$(-١ + ر)^٢ + (٨ - ر)^٢ = ر^٢$

$١ - ٢ر + ر^٢ + ٦٤ - ١٦ر + ر^٢ = ر^٢$

$ر^٢ - ١٨ر + ٦٥ = ٠$

$(ر - ١٣)(ر - ٥) = ٠$ ، $ر = ١٣$ ، $ر = ٥$

أولاً $ر = ١٣$ ← المعادلة هي

$(س + ١٣)^٢ + (ص - ١٣)^٢ = ١٦٩$

ثانياً $ر = ٥$ ، المعادلة هي

$(س + ٥)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$

مثال (١٧)

اوجد معادلة الدائرة التي مركزها في الربع الرابع وتمس المستقيم $٣س - ٤ص + ٧ = ٠$ وتحد بالمركز مع الدائرة التي معادلتها $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٦ص - ١٧ = ٠$

← يتبع الحل

الحل

نجد الموكن المشترك

$2ل = -ع \leftarrow ل = -2$

$2ك = 6 \leftarrow ك = 3$

الموكن $(-ل ، -ك) = (2 ، -3)$

نجد نصف القطر

$ا = 3 ، ب = -ع ، ج = 7$

$ر = \left| \frac{2 + ع(-3) - 3(2)}{\sqrt{9+1}} \right|$

$ر = \frac{ع}{ه} = 5$

معادلة الدائرة هي

$(س - 2)^2 + (ص + 3)^2 = 25$

مثال (18)

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن $(س ، ص)$ ، بحيث تتحرك على بعد ثابت قدره 5 وحدات عن النقطة $(2 ، -1)$ ؟

الحل

المحل الهندسي هو دائرة مركزها $(2 ، -1)$ وطول قطرها $= 5$

$(س - 2)^2 + (ص + 1)^2 = 25$

مثال (19)

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة $د(س ، ص)$ والتي تتحرك في المستوى الديكارتي بحيث أن

$س = 3 + 4جتا ه ، ص = 5 + 4جتا ه$

حيث ه : زاوية متغيرة .

الحل

$س = 3 + 4جتا ه \leftarrow 4جتا ه = س - 3$

$جتا ه = \frac{س - 3}{4}$

$ص = 5 + 4جتا ه \leftarrow 4جتا ه = ص - 5$

$جتا ه = \frac{ص - 5}{4}$

$جتا^2 ه = \frac{(س - 3)^2}{16} ، جتا^2 ه = \frac{(ص - 5)^2}{16}$

$جتا^2 ه + جتا^2 ه = 1$

$\frac{(س - 3)^2}{16} + \frac{(ص - 5)^2}{16} = 1$

المعادلة هي

$س^2 + ص^2 - 6س + 4ص = صفر$

الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٢٠)

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط

$(0,0)$ ، $(-6,0)$ ، $(-3,6)$

الحل

٣ نقاط ← الصورة العامة

$س^2 + ص^2 + ج_1 س + ج_2 ص + ج_3 = 0$

$(0,0) \leftarrow 0 + 0 + 0 + 0 + ج_3 = 0$

$\boxed{ج_3 = 0}$

$(-6,0) \leftarrow 36 + 0 - 6ج_1 + 0 + 0 = 0$

$6ج_1 = -36 \leftarrow ج_1 = -6$

$(-3,6) \leftarrow 9 + 36 - 6ج_1 + 6ج_2 + 0 = 0$

$6ج_2 = -6ج_1 - 45$

$= 36 - 45 = -9$

$ج_2 = -\frac{3}{2}$

المعادلة $س^2 + ص^2 - 6س - 3ص = 0$

مثال (٢١) تدريب

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط

$(0,0)$ ، $(8,0)$ ، $(4,-6)$

الحل

$س^2 + ص^2 - 8س = 0$

مثال (٢٢)

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط

$(1,5)$ ، $(-2,6)$ ، $(-1,1)$ ويقع مركزها على محور السينات

الحل

المركز يقع على محور السينات $\Leftarrow ك = صفر$

المعادلة هي

$س^2 + ص^2 + ج_1 س + ج_2 ص + ك = 0$

$(-1,3) \leftarrow 1 + 9 - ج_1 + 3ج_2 + ك = 0$

$-ج_1 + 3ج_2 + ك = -10 \quad \cdots (1)$

$(1,5) \leftarrow 1 + 25 + ج_1 + 5ج_2 + ك = 0$

$ج_1 + 5ج_2 + ك = -26 \quad \cdots (2)$

معادلة (١) − معادلة (٢) ينتج أن

$4ج_1 = 16 \leftarrow ج_1 = 4$

وبالتعويض في معادلة (١) ينتج أن

$-4 + 3ج_2 + ك = -10 \leftarrow ك = -3ج_2 - 6$

المعادلة هي

$س^2 + ص^2 + 4س - 2ص - 3ج_2 - 6 = 0$

مثال (٢٣)

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٣، ٢) و (٤، ١٦) ويقع مركزها على محور الصادات.

الحل

المركز على محور الصادات ← ل = ٠

المعادلة هي

$س^2 + ص^2 + جـ س + ٤ ص + ٥ = ٠$

(٣، ٢) ←

$٩ + ٤ + ٣ جـ + ٤ + ٥ = ٠$

$١٣ + ٣ جـ + ٥ = ٠$ ... (١)

(٤، ١٦) ←

$١٦ + ١ + ٤ جـ + ٥ = ٠$

$١٧ + ٤ جـ + ٥ = ٠$ ... (٢)

معادلة (١) − معادلة (٢)

$-٤ + جـ = ٠ \leftarrow جـ = ٤$

$\leftarrow ل = ٢$

بتعويضها في (١) ينتج أن

$١٣ + ٨ + ٥ = ٠ \leftarrow ٥ = -٢١$

المعادلة هي

$س^2 + ص^2 + ٤ س + ٤ ص - ٢١ = ٠$

مثال (٢٤) دائرة $س^2 + ص^2 + ٤ س - ٦ ص - ٣ = ٠$

دائرة مماسة لها

$س^2 + ص^2 - ١٢ س + ٤ ص - ٤٦ = ٠$

نصف قطرها (٦ وحدات) ويقع مركزها في الربع الرابع، جد إحداثيات مركز الدائرة.

الحل

بالقسمة على ٢

$س^2 + ص^2 - ٦ س + ٢ ص - ٣ = ٠$

$٢ ل = ٢ \leftarrow ل = ١$

$-٣ = -٦ \leftarrow ل = ٣$

$ر = \sqrt{٩ + ل^2 + ٣} = ٦$

$٣٦ = ٩ + ل^2 \leftarrow ل^2 = ٢٧ \leftarrow ل = \pm ٣\sqrt{٣}$

مركز الدائرة $(٣، -٣\sqrt{٣})$

مثال (٢٥)

جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها

$-٤ س^2 - ٤ ص^2 + ١٦ ص - ٤ جـ - ٤ = ٠$

الحل: بالقسمة على (-٤)

$س^2 + ص^2 - ٤ ص + ٦ جـ + ١ = ٠$

$٢ ك = -٤ \leftarrow ك = -٢ \leftarrow ٢ ل = ٦ \leftarrow ل = ٣$

$ر = \sqrt{٤ + ٩ + ١} = ٤$ المركز $(-٣، ٢)$

ورقة عمل

س١ : طول نصف القطر العمودي على محور السينات المار بالنقطة (٤، ٠) في الدائرة $س^2 + ص^2 = 25$

ج : ٦

س٢ جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمات

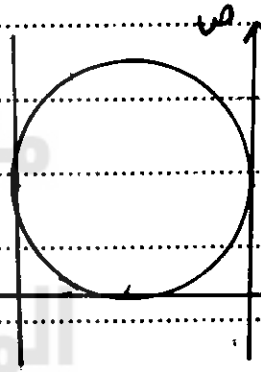
$ص = -1$ ، $ص = -7$ ، $س = -1$

ج : ① $(س-2)^2 + (ص+4)^2 = 9$

② $(س+4)^2 + (ص+4)^2 = 9$

س٣ وزارة (٢٠١٠)

جد معادلة الدائرة الممثلة بالشكل المجاور وتمس محوري السينات والصادات والمستقيم $س = -4$



ج : $(س+2)^2 + (ص-2)^2 = 4$

س٤ وزارة (٢٠١٢)

جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم $ص = -7 - 2س$ وتمس محور الصادات عند النقطة (٠، ٣)

ج : $(س-2)^2 + (ص-3)^2 = 4$

س٥ وزارة (٢٠١٣)

جد معادلة الدائرة التي طول قطرها (١٤ وحدة) ومركزها النقطة (م، ٣) حيث م > ٠ وتمس المستقيم الذي معادلته $3س + 4ص = صفر$

ج : $(س-5)^2 + (ص-5)^2 = 49$

س٦ وزارة (٢٠١٣)

تتحرك النقطة و(س، ص) في المستوى بحيث $س = 2 + 2$ جاه ، $ص = 4 + 2$ جتاه حيث ه زاوية متغيرة جد معادلة المحل الهندسي للنقطة و(س، ص) وبين نوعه

ج : دائرة $(س-3)^2 + (ص-4)^2 = 4$

س٧ :

جد معادلة الدائرة التي تمس محور السينات في النقطة (٠،٢) ويقع مركزها على المستقيم ص = ٣س + ١

ج / (س - ٢)^٢ + (ص - ٧)^٢ = ٤٩

س٨ : وزارة (٢٠١٣)

جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها في الربع الأول وتمس كلا من المستقيمان س = ٣ ، ص = ٢ ، س = ٩

ج / (س - ٦)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٩

س٩ :

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (١،٥) ، (٣،-١) ويقع مركزها على محور السينات

ج / س^٢ + ص^٢ + ٨س - ٢٤ = ٠

س١٠ :

جد معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها ٣ سم ، وتمس المستقيمين ص = -١ ، س = ٣ (الربع الرابع)

ج / ٤ معادلات

س١١ :

جد معادلة الدائرة التي تمس محوري السينات والصادات ويقع مركزها على المستقيم ص = ٤س + ٦

ج / نجرب ٤ حالات ثم نختبر المركز لنحصر معادلة المستقيم

س١٢ :

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (٠،٢) وتمس محور الصادات وتمس المستقيم ص = ١

ج / (س - ٥)^٢ + (ص + ٤)^٢ = ٢٥

س١٣ : اوجد معادلة دائرة طولها قطر منها هما نقطتا تقاطع المستقيم ٤س - ٣ص = ٢٤ مع المحورين

ج / (س - ٣)^٢ + (ص + ٤)^٢ = ٢٥

س١٤

جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها

$3س^2 + 3ص^2 - 9س - 15ص - 6 = 0$

س١٥

في المعادلة $س^2 + ص^2 + 18س - 6ص + ج = 0$

ما قيمة ج بحيث تمثل هذه المعادلة دائرة .

س١٦

جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها

$(س + 6)^2 + (ص - 12)^2 = 8^2$

س١٧

جد معادلة الدائرة التي مركزها يقع على المستقيم $ص = س + 1$ وتمس محور السينات عند النقطة $(-3, 0)$

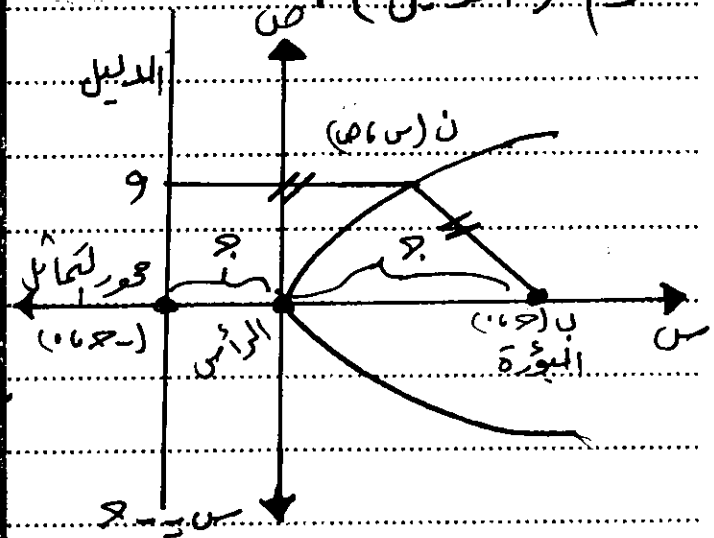
مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

القطع المكافئ

التعريف

هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط بحيث تبعد كل منها عن نقطة ثابتة (البؤرة) بساوي بعدها عن مستقيم معلوم (الدليل).



$\overline{ن ب} = \overline{ن و}$

ويعرف الاختلاف المركزي للقطع المكافئ بأنه $هـ = \frac{ن ب}{ن و} = 1$

خصائصه

١. المحور: محور التماثل

٢. البؤرة: عبارة عن نقطة على المحور تقع داخل المنحنى

٣. الدليل: عبارة عن مستقيم يتعامد مع المحور ويقع خلف المنحنى

٤. الرأس: عبارة عن نقطة في المنتصف تماماً بين البؤرة والدليل

ملاحظة

يرمز للبعد البؤري بالرمز ح

تكوين معادلة القطع المكافئ

نرسم يدقة حسب الاهتمام بنوع المحور بحيث

١. في المحور السيني نربع الصادات

٢. في المحور الصادي: نربع السينات

ح: بعد الرأس عن البؤرة

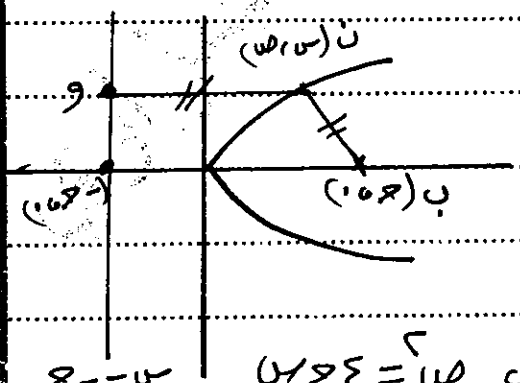
ح: بعد الرأس عن الدليل ح٢

الرأس يقع بمنتصف المسافة بين البؤرة والدليل

والمسافة بين البؤرة والدليل = ٢ح

أولاً: الوضع القياسي

يكون رأس القطع نقطة الأصل (٠،٠) وضلع بؤرة حالات:

١) 

المعادلة هي $ص^2 = ٤حس$ ، $س = -ح$

البرهان

$\overline{نب} = \overline{نو}$

$\overline{نب} = \sqrt{(س-ح)^2 + (ص-٠)^2}$

$\overline{نو}$: بعد النقطة ن (س، ص) عن المستقيم $س + ح = ٠$ الدليل

$\overline{نو} = \left|\frac{س+ح}{\sqrt{١+٠}}\right| = |س+ح|$

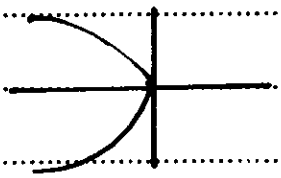
$\sqrt{(س-ح)^2 + ص^2} = |س+ح|$ تربيع الطرفين

$(س-ح)^2 + ص^2 = (س+ح)^2$

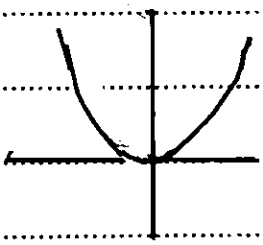
$س^2 - ٢حس + ح^2 + ص^2 = س^2 + ٢حس + ح^2$

$ص^2 = ٤حس$

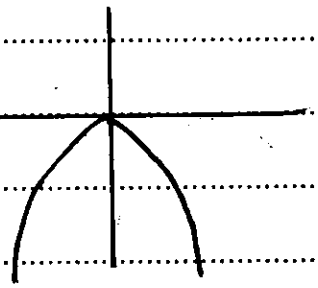
٢) معادلته $ص^2 = -٤حس$



٣) معادلته $س^2 = ٤حص$



٤) معادلته $س^2 = -٤حص$



ملاحظة

البؤرة عكس اتجاه الفتحة

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ①

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠،٠) و البؤرة (٠،٥)

الحل

اتجاه الفتحة للأعلى معادلته هي

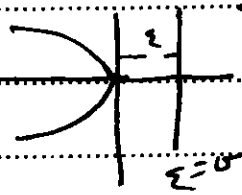
$س^2 = 4جـ ص$

جـ = ٥ بعد الرأس عن البؤرة

المعادلة هي $س^2 = 20 ص$

مثال ②

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠،٠) ودليله = ٤



الحل

$ص^2 = -4جـ س$

جـ = ٤

معادلته $ص^2 = -16 س$

مثال ③

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠،٠) وعين بالنقطة (١،٢)

←

الحل

هناك حلان

١. الفتحة للأعلى $س^2 = 4جـ ص$

بتعويض النقطة (١،٢) ، س = ١ ، ص = ٢

$\leftarrow 1 = 4 \times 2 \times جـ \leftarrow جـ = \frac{1}{8}$

المعادلة هي $س^2 = \frac{1}{2} ص$

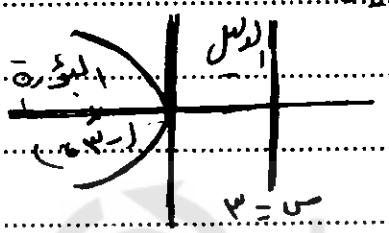
٢. الفتحة لليمين

$ص^2 = 4جـ س$ بتعويض (١،٢)

$\leftarrow جـ = 1$ المعادلة هي $ص^2 = 4س$

مثال ④

جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (-٣،١) ودليله س = ٣



الحل

احداثيات الرأس = $(\frac{3+-3}{2}, 1)$

= (٠،١) لأن الرأس منتصف المسافة بين البؤرة والدليل ، الفتحة لليسار

معادلته $ص^2 = -4جـ س$

جـ = ٣ ← المعادلة هي

$ص^2 = -12 س$

مثال ⑤

اوجد عناصر القطع المكافئ

$ص^2 = 16س$

الحل

$ص^2 = 4حس \leftarrow 4ح = 16$

$\leftarrow ح = 4$

الرأس $(0,0)$ البؤرة $(4,0)$

معادلة المحور $ص = 0$ ، معادلة الدليل $س = -4$

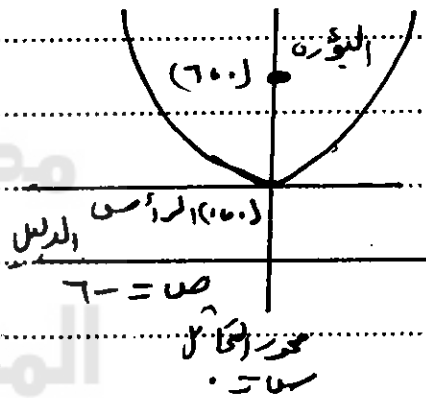
مثال ⑥

اوجد عناصر القطع $2س^2 = 48ص$

الحل

بالقسمة على 2 $\leftarrow س^2 = 24ص$

$4ح = 24 \leftarrow ح = 6$ القطع للأعلى



مثال ⑦

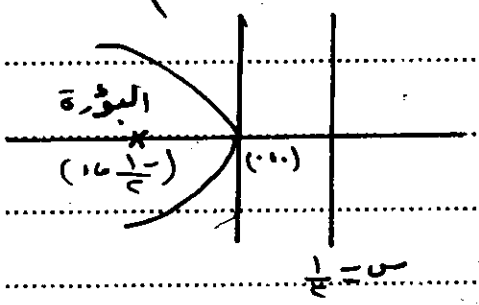
اوجد عناصر القطع المكافئ

$2ص^2 + 4س = 0$

الحل

$2ص^2 = -4س \leftarrow ص^2 = -2س$

$4ح = 2 \leftarrow ح = \frac{1}{2}$



مثال ⑧

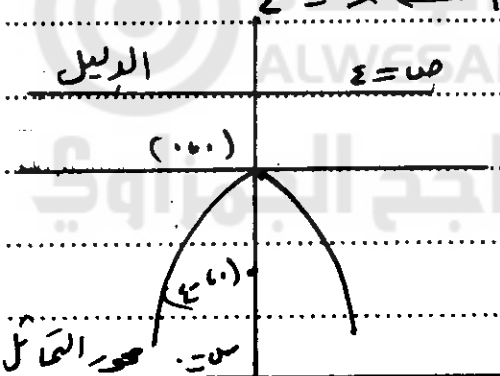
اوجد عناصر القطع المكافئ

$س^2 = -16ص$

الحل

القطع للأعلى

$4ح = -16 \leftarrow ح = -4$



مكتبة العلوم ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

ثانياً القطع المكافئ بوضع الانسحاب

الرأس $(د، هـ)$

ملاحظات هامة

١. الانسحاب لليمين: يزداد الاحداثي السيني مع بقاء ص ثابتة

٢. الانسحاب لليسار: يقل الاحداثي السيني مع بقاء ص ثابتة

٣. الانسحاب للأعلى: يزداد الاحداثي الصادي مع بقاء س ثابتة

٤. الانسحاب للأسفل: يقل الاحداثي الصادي مع بقاء س ثابتة

٥. المستقيم الافقي معادلته ص = ؟

٦. المستقيم العمودي معادلته س = ؟

٧. لإكمال المربع للمتغير س نجعل معامل $س^2$ يساوي ١، ونضيف $(\frac{\text{معامل س}}{2})^2$ للطرفين

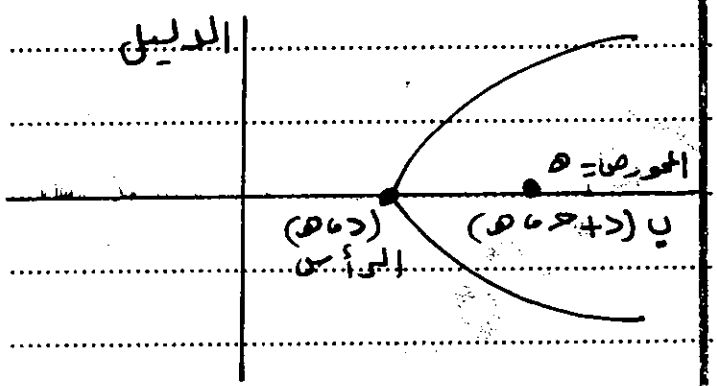
٨. الطرف الايمن مربع كامل

٩. س يرتبط مع د، ص يرتبط مع هـ

١٠. أقرب نقطة للبؤرة هي نقطة الرأس ونبعدها عن الرأس = $\frac{هـ}{4}$

حالات القطع المكافئ حيث رأسه $(د، هـ)$

١. سيني لليمين (الفتحة لليمين)



$س = د - \frac{هـ}{4}$

الرأس $(د، هـ)$.

البؤرة $(د + \frac{هـ}{4}، هـ)$

معادلة المحور ص = هـ

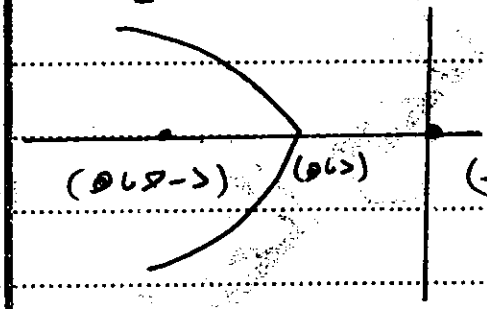
معادلة الدليل $س = د - \frac{هـ}{4}$

معادلة القطع المكافئ هي

$(ص - هـ)^2 = 4\frac{هـ}{4}(س - د)$

ALWESAM

٢. سيني لليسار (الفتحة لليسار)



الدليل س = د+جـ

الرأس (د، هـ)

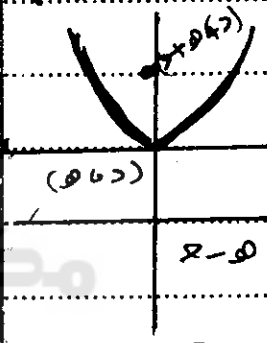
البؤرة (د-جـ، هـ)

معادلة الدليل س = د+جـ

معادلة القطع هي

$(ص-هـ)^2 = -4جـ(س-د)$

٣. صادي للأعلى (الفتحة للأعلى)



الرأس (د، هـ)

البؤرة (د، هـ+جـ)

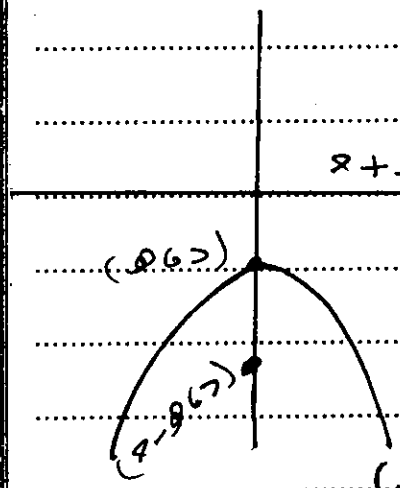
معادلة المحور س = د

معادلة الدليل ص = هـ-جـ

معادلة القطع هي

$(س-د)^2 = 4جـ(ص-هـ)$

٤. صادي للأسفل (الفتحة للأسفل)



الرأس (د، هـ)

البؤرة (د، هـ-جـ)

معادلة المحور س = د

معادلة الدليل ص = هـ+جـ

معادلة القطع هي

$(س-د)^2 = -4جـ(ص-هـ)$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ①

جد عناصر القطع المكافئ

$(ص-1)^2 = 12(س+2)$

الحل

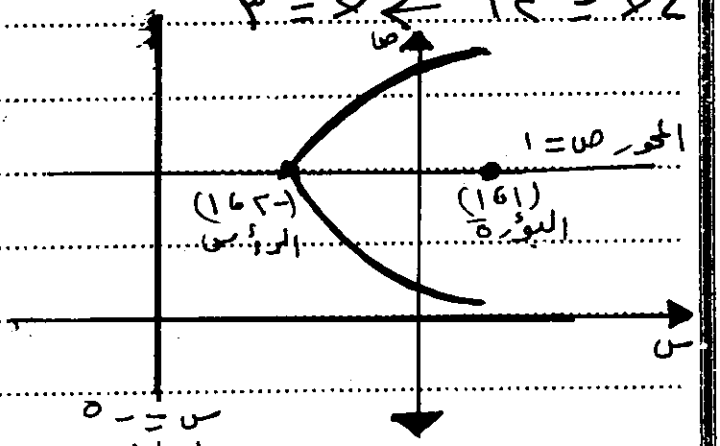
القطع على الصورة

$(ص-هـ)^2 = 4جـ(س-د)$ الفتح لليمين

$-هـ = -1 \leftarrow هـ = 1$

$-د = 2 \leftarrow د = -2$ } الرأس $(-2، 1)$

$4جـ = 12 \leftarrow جـ = 3$



مثال ②

جد عناصر القطع المكافئ

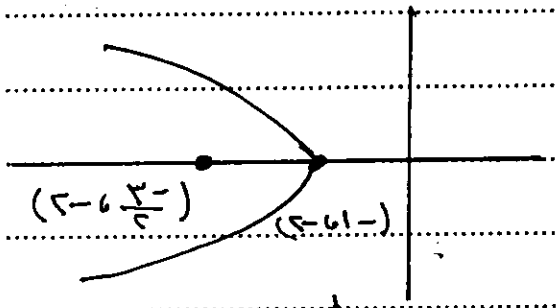
$(ص+2)^2 = -8(س+1)$

الحل

د ، هـ

الرأس $(-1، -2)$

البؤرة $(-1-\frac{1}{2}، -2) = (-\frac{3}{2}، -2)$



معادلة المحور $ص = -2$

معادلة الدليل $س = -\frac{1}{2}$

مثال ③

جد عناصر القطع $ص^2 + 4س + 16 = 0$

الحل

ترتيب المعادلة $ص^2 = -4س - 16$

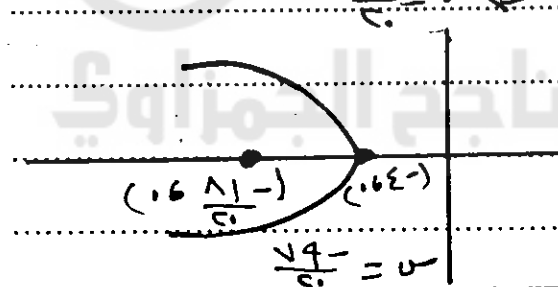
$ص^2 = -4(س+4)$ القسمة على 4

$ص^2 = -\frac{1}{5}(س+4)$

القطع على الصورة $(ص-هـ)^2 = -4جـ(س-د)$

$-4جـ = -\frac{1}{5} \leftarrow جـ = \frac{1}{20}$

$هـ = 0$ ، الرأس $(-4، 0)$



ملاحظة هامة جداً

١. اذا كانت المعادلة تحوي على $س^2$ ، $س$ نعمل أكمال مربع للمتغيرات للحصول على الصورة $(س - د)^2$

٢. اذا كانت المعادلة تحوي على $ص^2$ ، $ص$ نعمل أكمال مربع للصادات للحصول على الصورة $(ص - هـ)^2$

مثال ④

جد عناصر القطع

$س^2 - ٨س + ٨ص + ٣٢ = صفر$

الحل

نرتب المعادلة $س^2 - ٨س = -٨ص - ٣٢$

نكمل مربع للمتغير س باضافة $(\frac{-٨}{٢})^2$ للطرفين

$س^2 - ٨س + (\frac{-٨}{٢})^2 = -٨ص - ٣٢ + (\frac{-٨}{٢})^2$

$س^2 - ٨س + ١٦ = -٨ص - ٣٢ + ١٦$

$(س - ٤)^2 = -٨ص - ١٦$

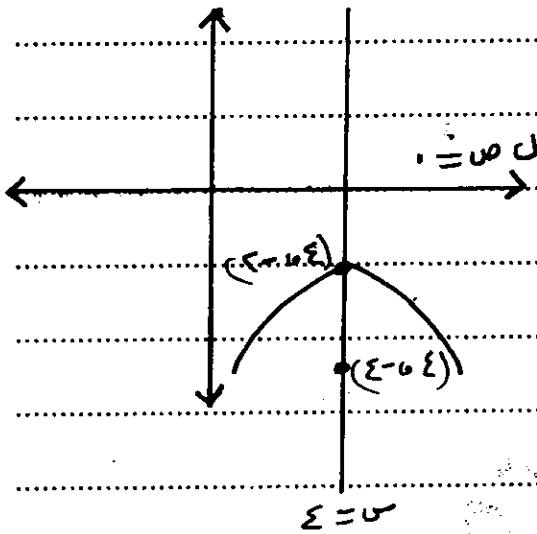
$(س - ٤)^2 = -٨(ص + ٢)$

الفتحة للأسفل

الرأس $(٤، -٢)$

$٤هـ = ٨ \leftarrow هـ = ٢$

البؤرة $= (٤، -٢ - ٢) = (٤، -٤)$



مثال ⑤ وزارة (٢٠١٥)

قطع مكافئ معادلته

$٦ص = ٤س^2 + ٨س - ٥$ جد

١. احداثيات الرأس ٢. البؤرة

٣. معادلة الدليل

الحل

نرتب المعادلة $٤س^2 + ٨س = ٦ص + ٥$

نكمل مربع للمتغير س بالقسمة على ٤

$س^2 + ٢س = \frac{٦}{٤}ص + \frac{٥}{٤}$

باضافة $(\frac{٢}{٢})^2 = ١$ للطرفين

← يتبع الحل

$س^2 + 2س + 1 = \frac{6}{4}ص + \frac{5}{4} + 1$

$(س+1)^2 = \frac{6}{4}ص + \frac{9}{4}$

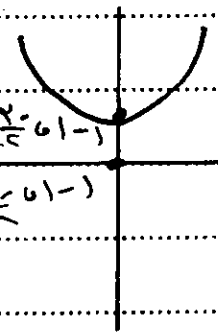
$(س+1)^2 = \frac{3}{2}(ص + \frac{3}{2})$

$(س+1)^2 = \frac{3}{2}(ص + \frac{3}{8})$

١. إ إلى أ $س = (-1, -\frac{3}{8})$

$4ح = \frac{3}{2} \leftarrow ح = \frac{3}{8}$

الفتحة للأعلى.



٢. إحداثيات البؤرة

$= (-1, -\frac{2}{2} + \frac{3}{8})$

$(-1, -\frac{9}{8})$

٣. معادلة الدليل $ص = -\frac{15}{8}$

الحل

نرتب المعادلة

$ص^2 + 2ص = -4س + 7$

أكمل المربع للصادات بإضافة $(\frac{2}{2})^2 = 1$

$ص^2 + 2ص + 1 = -4س + 7 + 1$

$(ص+1)^2 = -4س + 8$

$(ص+1)^2 = -4(س - 2)$

الفتحة لليسار

١. إ إلى أ $(2, -1)$

٢. $4ح = -4 \leftarrow ح = 1$

البؤرة هي $(2-1, -1) = (1, -1)$

٣. معادلة الدليل هي $س = 3$

٤. معادلة المحور $ص = -1$

مثال ⑦ وزارة (٢٠١٧) صيغة قطع مكافئ؟ معادلته

$ص^2 + 2ص + 4س - 7 = 0$

جد كلاً مما يأتي لهذا القطع

١. احداثي الرأس ٢. احداثي البؤرة

٣. معادلة الدليل ٤. معادلة المحور

مثال ⑦ وزارة (٢٠١٩) صيغة قطع مكافئ؟ معادلته

$ص^2 - 4ص + 8س - 4 = 0$

جد كل مما يأتي لهذا القطع

١. احداثي الرأس ٢. احداثي البؤرة

٣. معادلة المحور ٤. معادلة الدليل

← يتبع الحل

الحل

ترتيب الحافظة $ص^2 - 4ص = -8س + 4$

اكمال المربع للصادات باضافة $(\frac{4}{2})^2 = 4$

$ص^2 - 4ص + 4 = -8س + 4 + 4$

$(ص-2)^2 = -8(س-1)$

الفتح لليسار

١. الرأس $(1, 2)$

٢. $4ح = 8 \leftarrow ح = 2$

احداثيات البؤرة $= (1-2, 2) = (-1, 2)$

٣. معادلة المحور $ص = 2$

٤. معادلة الدليل $س = 3$

مثال ⑧ وزارة (٢٠١٠)

قطع مكافئ معادلته

$2ص^2 - 12ص - 16س = 14$

جد كلاً مما يلي

١. احداثي الرأس ٢. احداثي البؤرة

٣. معادلة الدليل ٤. معادلة المحور

الحل

نرتب المعادلة

$2ص^2 - 12ص = 16س + 14$

بالقسمة على ٢

$ص^2 - 6ص = 8س + 7$

باضافة $(\frac{6}{2})^2 = 9$ للطرفين

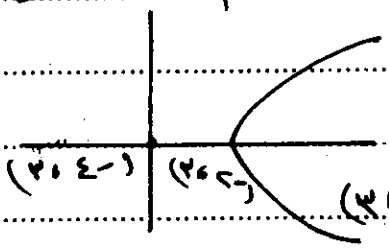
$ص^2 - 6ص + 9 = 8س + 7 + 9$

$(ص-3)^2 = 8س + 16$

$(ص-3)^2 = 8(س+2)$

الرأس $= (-2, 3)$

$4ح = 8 \leftarrow ح = 2$ الفتح لليمين



البؤرة

$(-2+2, 3) = (0, 3)$

معادلة الدليل $س = -4$

معادلة المحور $ص = 3$

مثال ⑨ وزارة (٢٠١١)

جد معادلة الدائرة التي مركزها في بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $ص = \frac{1}{4}س^2 + س + 3$ ومس دليله

الحل

$\frac{1}{4}س^2 + س = ص - 3$ بالضرب في ٤

$س^2 + 4س = 4ص - 12$

يتبع الحل ←

$(س+٢)^{٢} = ٤ص - ٨$

$(س+٢)^{٢} = ٤(ص-٢)$

الرأس $(-٢، ٢)$

$٤د = ٤ \leftarrow د = ١$ الفتحة لأعلى

البؤرة $(-٢، ٢) = (-٢، ٣)$

معادلة الدليل $ص = ١$

المطلوب معادلة الدائرة التي مركزها $(-٢، ٣)$ وتمس المستقيم $ص = ١$

نصف القطر $= ر =$ بعد النقطة $(-٢، ٣)$ عن المستقيم $ص - ١ = ٠$

$أ = ٠$ ، $ب = ١$ ، $جـ = -١$

$ر = \left| \frac{١-٣}{\sqrt{١+٠}} \right| = |\frac{-٢}{١}| = ٢$

معادلة الدائرة هي

$(س+٢)^{٢} + (ص-٣)^{٢} = ٤$

تدريب وزارة (٢٠١٣)

جد معادلة محور القطع

$س = ص^{٢} - ٢ص + ٥$

$ج \leftarrow ص = ١$

مثال (١٠)

اوجد عناصر القطع المكافئ الذي معادلته $ص = (٢س-٢)^{٢}$

الحل

$(٢(س-١))^{٢} = ص$

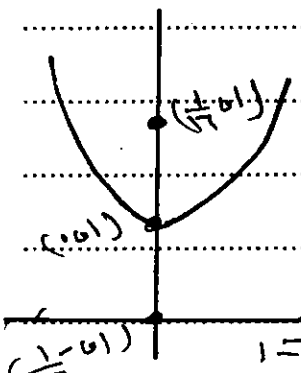
$٤(س-١)^{٢} = ص$ بالقسمة على ٤

$(س-١)^{٢} = \frac{١}{٤} ص$

الفتحة لأعلى

الرأس $(١، ٠)$

$٤د = \frac{١}{٤} \leftarrow د = \frac{١}{١٦}$



مثال (١١)

قذف جسم عموديًا لأعلى بحيث إذا فارق الأرض بعد ن ثانية ارتفع عن سطح الأرض بمقدار $ف(ن) = ٤٠ن - ٦ن^{٢}$ م، اوجد أقصى ارتفاع يصله الجسم مستخدمًا مفهوم القطع المكافئ

الحل

نعتمد على الزوج $(س، ص)$ بدلًا من $(ن، ف)$

← لتتبع الحل

← ص = ٤ س² - ٦ س نرتب المعادلة

٦ س² - ٤ س = - ص بالقسمة على ٦

س² - ٤/٦ س = - ١/٦ ص

اضافة (٤/١٢)² = ٤ الى الطرفين

س² - ٤/٦ س + ٤ = - ١/٦ ص + ٤

(س - ٢/٣)² = - ١/٦ (ص - ٤٢/٣)

الفتحة للأسفل

الرأس (٢/٣ ، ٤٢/٣)

النقطة (٢/٣ ، ٤٢/٣) قيمة قصوى عظمى

اقصى ارتفاع = ٤٢/٣

مثال (١٢)

جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (-٢/٣ ، ٤٢/٣) ورأسه (-٢/٣ ، ٢٢/٣)

الحل

من الشكل القطع على الصورة:

(س - ه)² = ٤ د (ص - و)

د = ٤ - ٣ = ١

المعادلة هي

(س + ٢/٣)² = ٤ (ص - ٢٢/٣)

ملاحظة هامة

لكتابة معادلة القطع المكافئ يلزم معرفة:

١. نوع القطع المكافئ (اتجاهه)

٢. قيمة د

٣. احداثيات الرأس وملاحظة أن

المسافة البؤرية = فرع لسيان

المسافة العمودية = فرع لصادات

المسافة = |ب - ب| ← (ب، ص) (ب، و)

المسافة = |ص - و| ← (ب، ص) (ه، و)

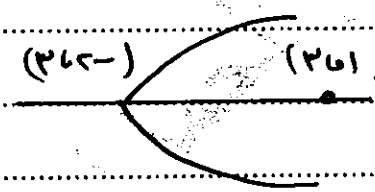
مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٣)

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (-٢، ٣) والبؤرة (١، ٣)

الحل



الفتحة لليمين

معادلته هي

$(ص - هـ)^2 = 4 حـ (س - د)$

$حـ = 1 - (-2) = 3$

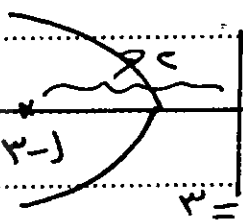
المعادلة هي $(ص - 3)^2 = 12 (س + 2)$

مثال (١٤)

جد معادلة القطع الذي بؤرته (-٣، ٠) ومعادلة دليله $س = 3$

الحل

من الشكل القطع على الصورة $(ص - هـ)^2 = -4 حـ (س - د)$



$2حـ = 6 \leftarrow حـ = 3$

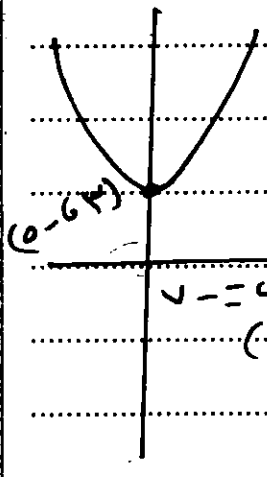
الرأس (٠، ٠) المعادلة هي

$ص^2 = -12 س$

مثال (١٥)

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٣، -٥) ودليله $ص = -7$

الحل



الفتحة للأعلى

معادلته

$(س - د)^2 = 4 حـ (ص - هـ)$

الرأس (٣، -٥)

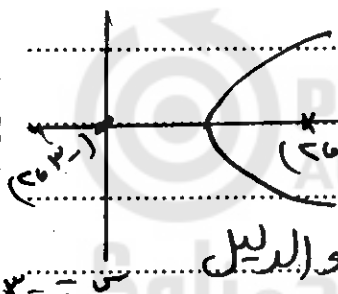
$\Leftarrow حـ = 2$

المعادلة هي $(س - 3)^2 = 8 (ص + 5)$

مثال (١٦)

جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (١، ٢) ودليله $س + 3 = 0$

الحل



الفتحة لليمين

الرأس منتصف

المسافة بين البؤرة والدليل

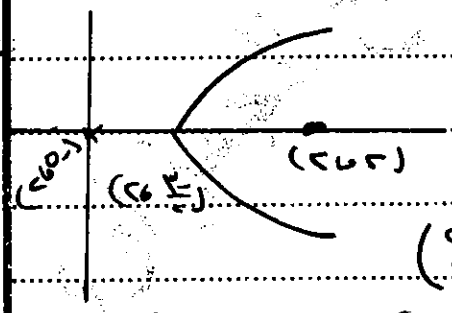
$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (-1، 2)$

$حـ = -1 - (-2) = 1 \Leftarrow (ص - 2)^2 = 8 (س + 1)$

مثال (١٧) وزارة (٢٠١٣) شتوي

جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٢، ٢) ومعادلة دليله $س = ٥$

الحل



الرأس $(\frac{٢+٥}{٢}، ٢) = (-\frac{٣}{٢}، ٢)$

$ح = ٢ - (-\frac{٣}{٢}) = ٢ + \frac{٣}{٢} = \frac{٧}{٢}$

المعادلة هي

$(ص - ٢)^٢ = ١٤ (س + \frac{٣}{٢})$

الرأس $(-\frac{٣}{٢}، ٢)$

$(س - ٢)^٢ = ٤ ح (ص - ١)$ ← بتعويض النقطة $(٥، ٤)$

$(٤ - ٢)^٢ = ٤ ح (٥ - ١)$

$١٦ = ٤ ح \leftarrow ح = \frac{١}{٤}$

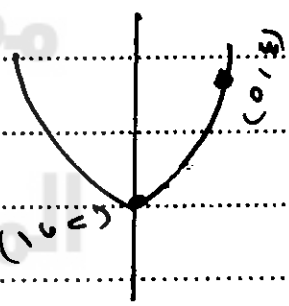
معادلته هي

$(س - ٢)^٢ = ١ (ص - ١)$

مثال (١٨)

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(٢، ١)$ ويمر بالنقطة $(٤، ٥)$ ومحورة يوازي محور الصادات.

الحل



المفتوح للأعلى

معادلته

$(س - د)^٢ = ٤ ح (ص - هـ)$

الرأس $(٢، ١)$

$(س - ٢)^٢ = ٤ ح (ص - ١)$ ← بتعويض النقطة $(٥، ٤)$

$(٤ - ٢)^٢ = ٤ ح (٥ - ١)$

$٤ = ١٦ ح \leftarrow ح = \frac{١}{٤}$

معادلته هي

$(س - ٢)^٢ = ١ (ص - ١)$

مثال (١٩) وزارة (٢٠١٨)

جد معادلة القطع المكافئ المقعر للأسفل الذي محورة $س = ٢$ ودليله $ص = ٥$ وتبعد بؤرته ٨ وحدات عن دليله.

الحل

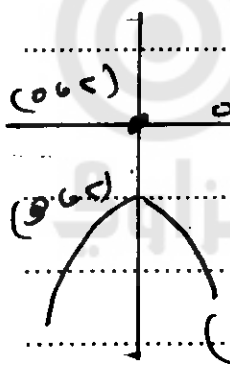
البعد البؤرة عن الدليل $= ٢ ح$

$٨ = ٢ ح \leftarrow ح = ٤$

$ح = ٥ - هـ$

$٤ = ٥ - هـ$

$هـ = ١$



معادلته

$(س - ٢)^٢ = -١٦ (ص - ١)$

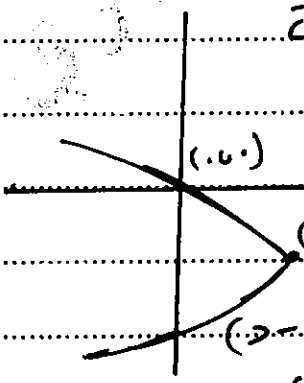
مثال (20)

اوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (1، -2) ويماثل حول المستقيم يوازي محور السينات ويمر منحناه بنقطة الأصل

الحل

محوره // محور السينات

الفتحة لليمين



$(ص - هـ)^2 = 4 د (س - د)$

الرأس $(1، -2)$

$(ص + 2)^2 = 4 د (س - 1)$

بتعويض النقطة $(0، 0)$

$(0 + 2)^2 = 4 د (0 - 1)$

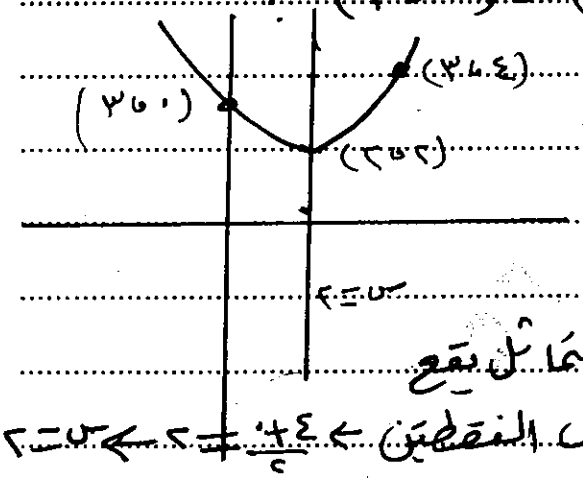
$4 = -4 د \leftarrow د = -1$

المعادلة هي

$(ص + 2)^2 = -4 (س - 1)$

مثال (21)

جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ورأسه يقع على المستقيم $ص = س$ ويمر بالنقطتين $(3، 4)$ ، $(3، 0)$ ؟



محوره يماثل يقع

بمنتصف النقطتين $\leftarrow \frac{4+0}{2} = 2 \leftarrow س = 2$

أي ان $د = 2$ ، وبما ان الرأس يقع على المستقيم $ص = س \leftarrow$

$ص = 2 \leftarrow هـ = 2$ الرأس $(2، 2)$

الفتحة للأعلى معادلته هي

$(س - د)^2 = 4 هـ (ص - هـ)$

$(س - 2)^2 = 4 هـ (ص - 2)$

يمر بالنقطة $(4، 3) \leftarrow$

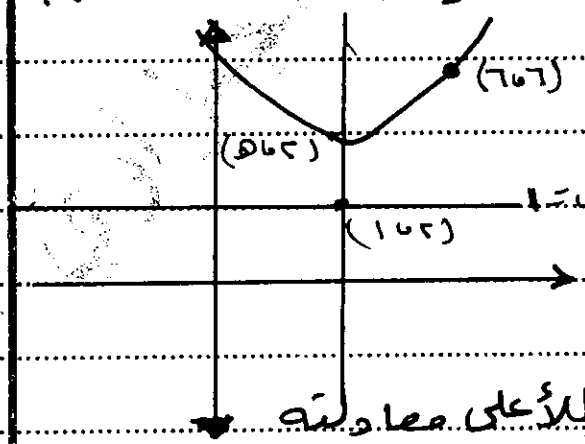
$(4 - 2)^2 = 4 هـ (3 - 2) \leftarrow 4 هـ = 4$

$هـ = 1 \leftarrow$

المعادلة هي $(س - 2)^2 = 4 (ص - 2)$

مثال (٢٢)

جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة محوره $س = ٢$ ودليله $ص = ١$ ويمر بالنقطة $(٦، ٦)$؟



المفتوح للأعلى معادلته هي $(س - د)^٢ = ٤ هـ (ص - هـ)$

$د = ٢$ ، $د = هـ - ١ \leftarrow هـ = د + ١$

المعادلة

$(س - ٢)^٢ = ٤ هـ (ص - هـ - ١)$

يمر بالنقطة $(٦، ٦) \leftarrow$

$(٦ - ٢)^٢ = ٤ هـ (٥ - هـ)$

$\leftarrow ١٦ = ٢٠ هـ - ٤ هـ^٢ \leftarrow$ بالقسمة ٤

$٤ = ٥ هـ - هـ^٢ \leftarrow هـ^٢ - ٥ هـ + ٤ = ٠$

$\leftarrow (هـ - ٤)(هـ - ١) = ٠$

$هـ = ٤$ أو $هـ = ١$

عندما $هـ = ٤ \leftarrow هـ = ٥$

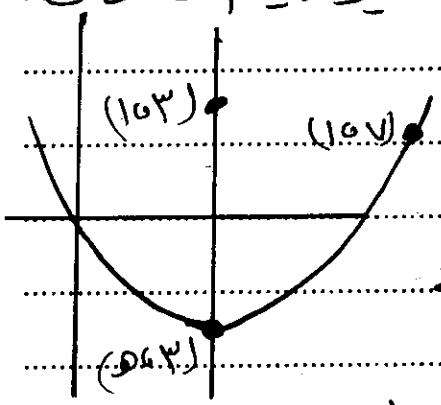
المعادلة $(س - ٢)^٢ = ٦ (ص - ٥)$

عندما $هـ = ١ \leftarrow هـ = ٢$

المعادلة $(س - ٢)^٢ = ٤ (ص - ٢)$

مثال (٢٣)

جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(٣، ١)$ ويمر بالنقطة $(١، ١٧)$ ومحوره يوازي الصادات الكل.



المرأس $= (٣، هـ)$

$د = ١ - هـ$

$\leftarrow هـ = ١ - د$

المعادلة

$(س - ٣)^٢ = ٤ د (ص - ١ + د)$

يعوض $(١٧، ١)$

$١٦ = ٤ د (١ - ١ + د) \leftarrow ١٦ = ٤ د^٢$

$د^٢ = ٤ \leftarrow د = \pm ٢$

عندما $د = ٢$ يكون للأعلى $هـ = -١$

المعادلة $(س - ٣)^٢ = ٨ (ص + ١)$

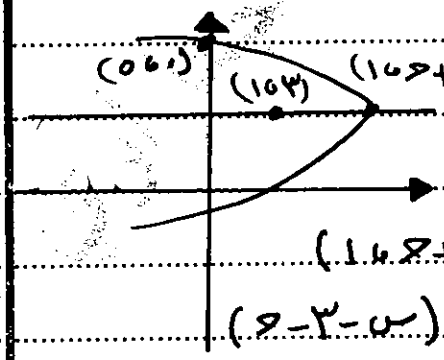
عندما $د = -٢$ يكون للأسفل $هـ = ٣$

المعادلة $(س - ٣)^٢ = -٨ (ص - ٣)$

مثال (٢٤)

جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٣، ١٦) ومحوره يوازي محور السينات وليمر بالنقطة (٥، ٠)

الحل



الرأس = (٣، ١٦ د + ٣)

$(ص - ١)^2 = -٤ د (س - ٣ - د)$

$(٠، ٥) \leftarrow ١٦ = -٤ د (-٣ - د)$

$٤ = ٣ د + د^2 \leftarrow د^2 + ٣ د - ٤ = ٠$

$(د + ٤)(د - ١) = ٠$

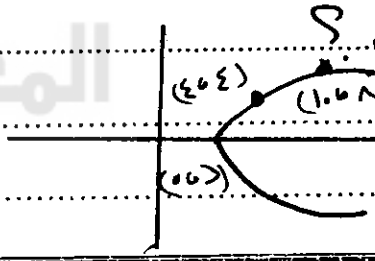
$د = ١ \leftarrow (ص - ١)^2 = -٤ (س - ٤)$

$د = -٤ \leftarrow (ص - ١)^2 = ١٦ (س + ١)$

مثال (٢٥)

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (٨، ١٠) ، (٤، ٤) ومحورة محور السينات ؟

الحل



الرأس (د، ٠)

$(ص - ٠)^2 = ٤ د (س - د)$

النقطة (٤، ٤)

$\leftarrow (٤ - ٠)^2 = ٤ د (٤ - د)$

$\leftarrow ١٦ = ٤ د (٤ - د)$ ---- (١)

النقطة (٨، ١٠)

$\leftarrow (١٠ - ٠)^2 = ٤ د (٨ - د)$

$١٠٠ = ٤ د (٨ - د)$ ---- (٢)

(٢) ÷ (١) $\Leftarrow \frac{١٠٠}{١٦} = \frac{٨ - د}{٤ - د}$

$٤٠٠ - ١٠٠ د = ١٢٨ - ١٦ د$

$٨٤ د = ٢٧٢ \leftarrow د = \frac{٦٨}{٢١}$

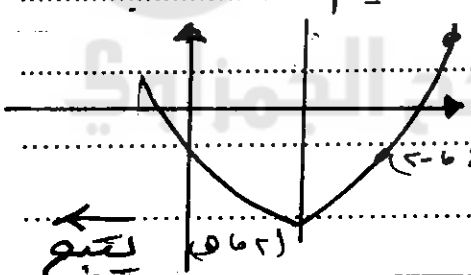
$\leftarrow ٤ د = \frac{٢٧٢}{٢١}$

المعادلة $(ص - ٠)^2 = ١٢ (س - \frac{٦٨}{٢١})$

مثال (٢٦) وزارة (٢٠١٨)

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (٦، ٨) ، (-٢، ٤) ومحورة المستقيم $س = ٢$ ؟

الحل



يتبع

الفتحة للأعلى

معادلته $(س-د)^2 = 4ه(ص-و)$

الرأس $(د، و) \Leftarrow د = 2$

المعادلة $(س-2)^2 = 4ه(ص-و)$

النقطة $(4، -2)$

$(4-2)^2 = 4ه(-2-و)$

$4 = 4ه(-2-و)$ ... ①

النقطة $(8، -6)$

$(8-2)^2 = 4ه(-6-و)$

$36 = 4ه(-6-و)$ ... ②

① ÷ ② $\Leftarrow \frac{4}{36} = \frac{-2-و}{-6-و}$

$\frac{1}{9} = \frac{-2-و}{-6-و}$

$-6-و = 9و+18$

$8و = -24 \Leftarrow و = -3$

بالتعويض في معادلة ① $\Leftarrow$

$4ه = 4(-2+3)$

$4ه = 4 \Leftarrow ه = 1$

المعادلة هي

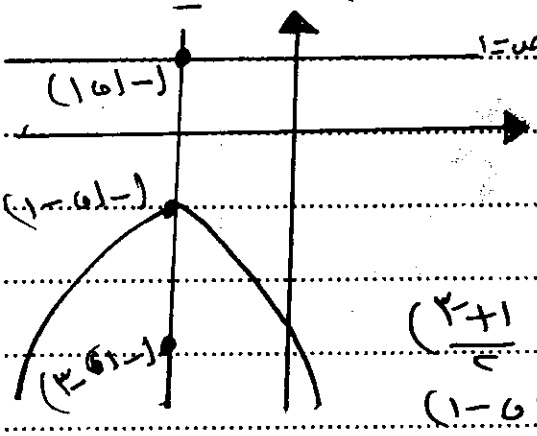
$(س-2)^2 = 4(ص+3)$

مثال ⑦ دائرة $(1، 2)$

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن $(س، ص)$ بحيث أن بعدها عن النقطة و $(-1، -3)$ يساوي بعدها عن المستقيم $ص = 1$ ؟

الحل

المحل الهندسي هو قطع مكافئ بؤرته $(-1، -3)$ ودليله $ص = 1$



الرأس

$= (-1، \frac{1-3}{2})$

$= (-1، -1)$

$ه = -1 - 1 = -2$

الفتحة للأسفل

$(س+1)^2 = -8(ص+1)$

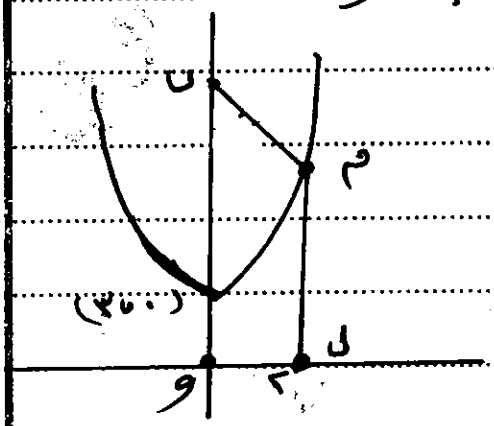
مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (28) وزارة (2012)

في الشكل المجاور، قطع مكافئ رأسه (2، 0) وبؤرته ب ودليله محور السينات والنقطة م (2، 10/3) تقع على منحناه. جد محيط الشكل الرباعي ل م ب و.

الحل



بعد الرأس عن الدليل = د

← د = 2 ← البؤرة (6، 0)

طول و ب = 6 ← طول و ل = 2

طول م ل = 10/3

وحسب تعريف القطع المكافئ فإن

م ل = م ب ← م ب = 10/3

محيط الشكل الرباعي

= 6 + 2 + 10/3 + 10/3

= 8 + 44/3 = 68/3

مثال (29) وزارة (2014) صيغة جد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلتي الدليل والمحور للقطع المخروطي الذي معادلته

$3س^2 - 4 = 8ص + 12س$

الحل

نرتب المعادلة

$3س^2 - 12س = 8ص + 4$

بالقسمة ع 3

$س^2 - 4س = \frac{8}{3}ص + \frac{4}{3}$ باضافة $(\frac{-4}{2})^2 = 4$

$س^2 - 4س + 4 = \frac{8}{3}ص + \frac{4}{3} + 4$

$(س - 2)^2 = \frac{8}{3}ص + \frac{16}{3}$

$(س - 2)^2 = \frac{8}{3}(ص + 2)$

احداثيات الرأس = (2، -2)

البؤرة = (2، -2 + 2/3) = (2، -4/3)

معادلة المحور س = 2

معادلة الدليل ص = $-\frac{8}{3} - 2 = -\frac{14}{3}$

$4د = \frac{8}{3}$

$د = \frac{2}{3}$

مثال (٢) دائرة (ج، ١٥) رسمت
جد احداثيي الرأس والبؤرة
ومعادلتي الدليل والمحور للقطع المكافئ
الذي معادلته $ص^2 - ٤س = ٨ص + ٣$

الحل

نرتب المعادلة $٤ص^2 - ٨ص = ٤س + ٣$

بالقسمة على ٤

$ص^2 - ٢ص = س + \frac{٣}{٤}$ أكمل

المربع باضافة $(\frac{٢}{٢})^2 = ١$

$ص^2 - ٢ص + ١ = س + \frac{٣}{٤} + ١$

$(ص - ١)^2 = س + \frac{٧}{٤}$

$(ص - ١)^2 = ١ (س + \frac{٧}{٤})$

الرأس $(-\frac{٧}{٤}، ١)$

$٤د = ١ \leftarrow د = \frac{١}{٤}$

البؤرة $(-\frac{٧}{٤} + \frac{١}{٤}، ١) = (-\frac{٦}{٤}، ١)$

معادلة الدليل

$س = -\frac{٧}{٤} - \frac{١}{٤} = -٢$

معادلة المحور $ص = ١$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الصورة العامة للقطع المكافئ

١. اذا كان محورة يوازي محور السينات فمعادلته

$س = أ ص^2 + ب ص + جـ$

اذا كانت $أ > 0$ للميمن

$أ < 0$ للسار

٢. اذا كان محورة يوازي محور الصادات فمعادلته

$ص = أ س^2 + ب س + جـ$

اذا كانت $أ > 0$ للأعلى

$أ < 0$ للأسفل

يستفاد منها خاصة اذا اعطيت ثلاث نقاط يمر بها القطع المكافئ

مثال (٢١)

جد معادلة القطع المكافئ الذي محورة يوازي محور الصادات ويمر بالنقط $(1, 0)$ ، $(2, 3)$ ، $(-1, 6)$

الحل

بما ان محوره يوازي محور الصادات فان معادلته $ص = أ س^2 + ب س + جـ$

النقطة $(1, 0)$ تحققه

$0 = أ(1)^2 + ب(1) + جـ$

$أ + ب + جـ = 0$ ---- (١)

النقطة $(2, 3)$ تحققه

$3 = أ(2)^2 + ب(2) + جـ$

$4أ + 2ب + جـ = 3$ ---- (٢)

النقطة $(-1, 6)$ تحققه

$6 = أ(-1)^2 + ب(-1) + جـ$

$أ - ب + جـ = 6$ ---- (٣)

بضرب معادلة (١) بـ -1 وجمعها مع (٢)

$-أ - ب - جـ = 0$

$3أ + 2ب + جـ = 3$

$2أ + ب = 3$ ---- (٤)

بضرب معادلة (١) بـ -1 وجمعها مع (٣)

$-أ - ب - جـ = 0$

$أ - ب + جـ = 6$

$-2ب = 6$

$ب = -3$

نعوض قيمة ب في معادلة (٤)

$2أ - 3 = 3$

$2أ = 6$

$أ = 3$

نعوض قيمة ب في معادلة (١)

$3 - 3 + جـ = 0$

$جـ = 0$

$ص = 3س^2 - 3س$

← نعوض في ④ $أ = ٢ \Leftarrow$

$ج + د = ٣ \leftarrow د = ١$

معادلة القطع هي

$ص = ٢س^{٢} - ٣س + ١$

تدريب ①

جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يوازي محور السينات ويمر بالنقاط

$(٤، ٢)$ ، $(-٢، ١)$ ، $(١، ١)$

$ص = س^{٢} - \frac{١}{٤}ص + \frac{٣}{٤}ص + ١$

مثال ③ وزارة (٢٠١٣)

جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات ويمر بالنقاط

$(١، ٣)$ ، $(٦، ٢)$ ، $(-٣، ٢)$

الحل

المعادلة هي $س = أص^{٢} + بص + ج$

النقطة $(١، ٣)$ تحقق

$٣ = أ + ب + ج$ ---- ①

النقطة $(٦، ٢)$

$٦ = ٩أ + ٣ب + ج$ ---- ②

النقطة $(٣، -٣)$

$٣ = ٩أ - ٣ب + ج$ ---- ③

معادلة ① - ② ←

$-٣ = -٨أ - ٢ب$ ---- ④

معادلة ② - معادلة ③ ←

$٣ = ٦ب \leftarrow ب = \frac{١}{٢}$ وبالتعويض في معادلة (٤) ينتج

$-٣ = -٨أ - ١ \leftarrow -٨أ = -٢ \leftarrow أ = \frac{١}{٤}$

وبالتعويض في معادلة ① ينتج ان

$٣ = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} + ج \leftarrow ٣ = ج + \frac{٣}{٤}$

$ج = ٣ - \frac{٣}{٤} = \frac{٩}{٤}$

معادلة القطع هي

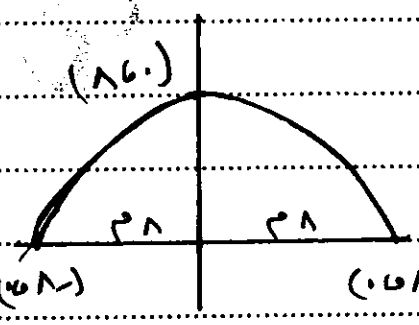
$س = \frac{١}{٤}ص^{٢} + \frac{١}{٢}ص + \frac{٩}{٤}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٣)

طول قاعدة جسر على شكل قطع مكافئ ١٦م، وارتفاع الجسر عند منتصفه ٨ أمتار عن سطح الارض. أكتب المعادلة التي تمثل هذا الجسر علماً بانه متماثل حول محور الصادات

الحل



القوس على الصورة

$(س - د)^2 = -٤ه(ص - و)$

الرأس (٨،٠) نعوضه

$س^2 = -٤ه(ص - ٨)$

لكلا النقطتين (٨،٠)، (-٨،٠) تحققه وكذلك

$(٨)^2 = -٤ه(٠ - ٨)$

$٦٤ = ٣٢ه \leftarrow ه = ٢$

المعادلة هي

$س^2 = -٨(ص - ٨)$

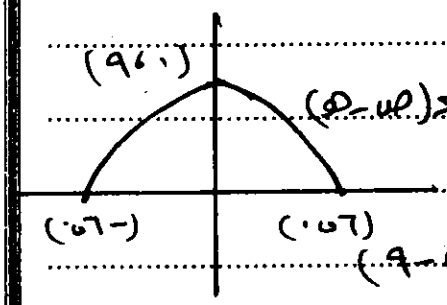
مثال (٣٤)

قوس على شكل قطع مكافئ طول قاعدته (١٢ متر)، رأس القوس يرتفع ٩ متر فوق سطح الارض، أجد معادلة هذا القوس، ثم جد مساحة تحت القوس

الحل

نعتبر (٠،٠) نقطة ارتكاز

ملاحظة (٠،٠) لنسهل البؤر



المعادلة هي

$(س - د)^2 = -٤ه(ص - و)$

الرأس (٩،٠)

$س^2 = -٤ه(ص - ٩)$

(٦،٠) تحققه

$٣٦ = -٤ه(٠ - ٩) \leftarrow ه = ١$

المعادلة هي

$س^2 = -٤(ص - ٩)$

لحساب المساحة نعتمد على التكامل ولكنه يجب تحويل المعادلة بدلالة ص

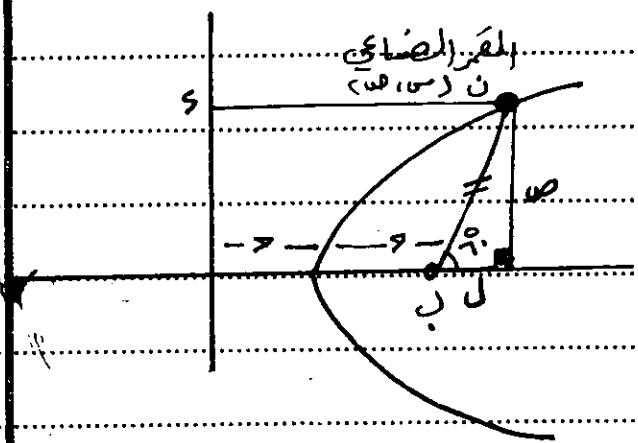
$س^2 = -٤ص + ٣٦ \leftarrow ص = ٩ - \frac{س^2}{٤}$

$م = \int_{-٦}^{٦} (٩ - \frac{س^2}{٤})\, دس$

$= ٧٢$

مثال (٣٥)

يدور قمر صناعي بشكل قطع مكافئ للكرة الأرض بؤرته مركز الأرض، وعندما كان على بعد ٤٠ مليون متر من مركز الأرض شكل الخط الواصل بينه وبين مركز الأرض زاوية قياسها ٦٠° مع المحور ما هو أقرب مسافة يمكن أن يقترب القمر الصناعي من مركز الأرض.



أقرب نقطة للبؤرة هي نقطة الرأس وبعدها هو ء المطلوب إيجاد ء

حسب تعريف القطع المكافئ ن ب = ن ء

ء + ل = ٤٠ لكن جتا ٦٠ = ل / ٤٠

← ١/٢ = ل / ٤٠ ← ٢ل = ٤٠ ← ل = ٢٠

٤٠ = ٢٠ + ٢ء

٢ء = ٢٠

ء = ١٠ ملايين متر

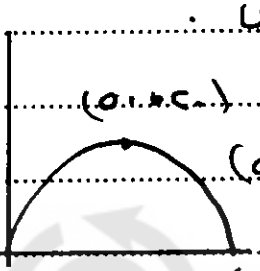
مثال (٣٦)

أطلقت قذيفة من جسم على سطح الأرض أفقيًا إلى أعلى وعادت إلى نفس المستوى وكان مسارها على شكل قطع مكافئ، فإذا كان أعلى ارتفاع وصلته القذيفة ٥٠ مترًا وأقصى مدى أفقي لها هو ٤٠ مترًا، معتبرًا نقطة انطلاق القذيفة (٠،٠) جد

١. معادلة القطع المكافئ

٢. ارتفاع القذيفة عن سطح الأرض عندما يكون هذا الارتفاع مثلي المسافة بين نقطة انطلاق القذيفة ووقوعها على الأرض.

الحل



رأس القطع هو (٥٠،٥٠)

نحو منه

(س − ٥٠)² = ٤ء(ص − ٥٠)

لكنه القطع يمر بالنقطة (٠،٠)

(٠ − ٥٠)² = ٤ء(٠ − ٥٠)

٤٠٠ = ٢٠٠ء ← ء = ٢

← يتبع الحل

$(س - ٢٠)^{٢} = -٨(ص - ٥٠)$

لكل الارتفاع = المسافة بين نقطة الانطلاق والمقطع العمودي له

اي ان $ص = س$

نعوض ← $(ص - ٢٠)^{٢} = -٨(ص - ٥٠)$

$ص^{٢} - ٤٠ص + ٤٠٠ = -٨ص + ٤٠٠$

$ص^{٢} - ٣٢ص = ٠$

$ص(ص - ٣٢) = ٠$ ← $ص = ٠$ نرفض

$ص = ٣٢$ الارتفاع = ٣٢م

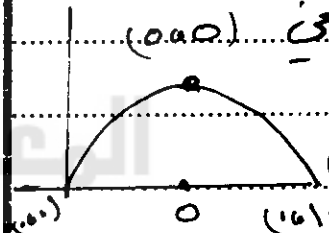
مثال (٣٧)

الشكل المجاور عمل واجهة مبنى على شكل قطع مكافئ يراد دهان المنطقة المظللة ماذا كان سعر المتر المربع للدهان نصف دينار - فاوجد تكلفة الدهان

الحل

نجد معادلة القطع المكافئ وضعه على الصورة

$(س - د)^{٢} = -٤هـ(ص - و)$



نعوض الرأس (٥،٥)

$(س - ٥)^{٢} = -٤هـ(ص - ٥)$

النقطة (٠،٠) تحقق معادلته

$(٠ - ٥)^{٢} = -٤هـ(٠ - ٥)$

$٢٥ = ٢٠هـ$ ⇐ $هـ = \frac{٥}{٤}$

نعوضها في المعادلة ⇐

$(س - ٥)^{٢} = -٥(ص - ٥)$

$س^{٢} - ١٠س + ٢٥ = -٥ص + ٢٥$

$٥ص = ١٠س - س^{٢}$

$ص = ٢س - \frac{١}{٥}س^{٢}$ المعادلة

المساحة $= \int_{٠}^{١٠} (٢س - \frac{١}{٥}س^{٢}) دس$ ← طول × عرض

$= \left[س^{٢} - \frac{١}{١٥}س^{٣}\right]_{٠}^{١٠} - ٣ \times ٦$

$= ١٠٠ - \frac{١٠٠٠}{١٥} - ١٨$

$= ١٠٠ - \frac{٢٠٠}{٣} - ١٨ = \frac{٤٦}{٣}$ م مربع

سعر الدهان $= \frac{١}{٢}$ دينار

التكلفة $= \frac{١}{٢} \times \frac{٤٦}{٣} = \frac{٤٦}{٦}$ دينار

مكتبة الوسام ALWESAM
العلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٣٨)

ما هي معادلة المسار اذا كانت

$س = ٢ - ٣ن$ ، $ص = \frac{١}{٢}ن^٢$ وما هو نوعه.

الحل

$س = ٢ - ٣ن \leftarrow ن = -\frac{١}{٣}س + \frac{٢}{٣}$

لكن $ص = \frac{١}{٢}ن^٢$ بتعويض قيمة ن

$ص = \frac{١}{٢}(-\frac{١}{٣}س + \frac{٢}{٣})^٢$

$ص = \frac{١}{٢}(\frac{١}{٩}س^٢ - \frac{٤}{٩}س + \frac{٤}{٩})$

$ص = \frac{١}{١٨}(س - ٢)^٢$ قطع مكافئ صادي للأعلى رأسه $(٢، ٠)$

$(س - ٢)^٢ = ١٨ص$

مثال (٣٩)

تتحرك النقطة و$(س، ص)$ في المستوى الديكارتي حيث معادلة المحل الهندسي لهذه النقطة اذا علمت ان

$س = ٥جا\theta + ٣جتا\theta$ ، $ص = ٥جا\theta جتا\theta$

الحل

$س = ٥جا\theta + ٣جتا\theta$ بتربيع الطرفين

$س^٢ = ٢٥جا^٢\theta + ٣٠جا\theta جتا\theta + ٩جتا^٢\theta$

$س^٢ = ١ + ٢٥جا\theta جتا\theta + ٨جتا^٢\theta$

لكن $ص = ٥جا\theta جتا\theta$

$س^٢ = ١ + ٢ص + ٨جتا^٢\theta$

$س^٢ = ٢ص + ٩ - ٨جا^٢\theta$

$س^٢ = ٢ص + ٩ - ٨(\frac{ص}{٥})$

$س^٢ = \frac{٢}{٥}(ص + \frac{٤٥}{٢} - ٤)$

$س^٢ = \frac{٢}{٥}(ص + \frac{٣٥}{٢})$ قطع مكافئ

مثال (٤٠)

ما هي معادلة المسار لحركة النقطة $(س، ص)$ اذا كانت $س = ٣جا\theta + ٢جتا\theta$ ، $ص = ٣جا٢\theta$

الحل

$س = ٣جا\theta + ٢جتا\theta$ بتربيع الطرفين

$س^٢ = ٩جا^٢\theta + ١٢جا\theta جتا\theta + ٤جتا^٢\theta$

$= ١ + ٦جا٢\theta + ٣جا^٢\theta$

$= ١ + ٣جا٢\theta$ لكن $ص = ٣جا٢\theta$

$س^٢ = ١ + ص$ قطع مكافئ للأعلى

مثال (٤١) ما هي معادلة المسار لحركة النقطة $(س، ص)$ اذا كانت $س = ٣جا\theta$ ، $ص = ٣جتا٢\theta$.

الحل $جتا٢\theta = ٢جتا^٢\theta - ١$ بمطابقة

$ص = ٢جتا^٢\theta - ١$ لكن $س = ٣جا\theta$

$ص = ٢(\frac{س}{٣})^٢ - ١$ $س^٢ = \frac{٩}{٢}(ص + ١)$

$ص + ١ = \frac{٢}{٩}س^٢$ قطع مكافئ

ورقة عمل

س١ وزارة (٢٠٠٩)

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (٠،٠) ، (٢،١) ومحورة المستقيم الذي معادلته س = ٢ ؟

ج: $(س-٢)^{٢} = -(ص-٤)$

س٢ وزارة (٢٠١٢) شتوية

جد معادلة القطع المكافئ الذي محورة يوازي محور الصادات وبؤرته (١،٢) ويمر بالنقطة (٥،-١) ويقع رأسه أسفل بؤرته.

ج: $(س-١)^{٢} = ١٦(ص+٢)$

س٣ وزارة (٢٠١٣) صيفية

قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل وبؤرته تقع على محور الصادات ويمر منحناه بالنقطة (-٤، ٥)

جد ١. احداثي بؤرته $(٠، \frac{-٤}{٥})$

٢. معادلة دليله $ص = \frac{٤}{٥}$

س٤ وزارة (٢٠١٤) شتوية

قطع مكافئ معادلته

$ص = \frac{١}{٤} - س - \frac{١}{٤}س^{٢}$ جد

١. احداثيات البؤرة و الرأس

٢. معادلة الدليل

ج: البؤرة $(-١، \frac{١}{٤})$ ، الدليل $ص = \frac{٣}{٤}$

س٥ جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته ص مركز الدائرة التي معادلتها

$س^{٢} + ص^{٢} - ٨س - ٤ص + ١١ = ٠$

ودليله س = ٨

ج. $(ص-٢)^{٢} = -٨(س-٦)$

س٦ قطع مكافئ معادلته (ص) وزارة (٢٠١٤)

$ص^{٢} - ٦ص - ٨س - ٣١ = ٠$ جد

١) احداثيات الرأس ج. $(-٣، ٥)$

٢) البؤرة ج. $(-٣، ٣)$

٣. الدليل ج. $س = -٧$

س٧ وزارة (٢٠٠١)

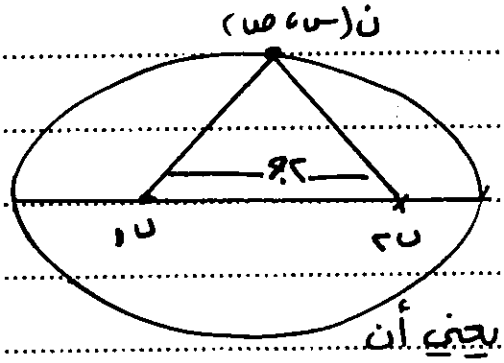
جد معادلة القطع المكافئ الذي محورة يوازي محور الصادات ويمر بالنقط $(٠، ٠)$ ، $(٠، ٤)$ ، $(١، ٤)$

ج $ص = س^{٢} + ٤س$

القطع الناقص

تعريف :

القطع الناقص هو المحل الهندسي لمجموعة النقط المستوية ن(س، ص) التي تتحرك بحيث يكون مجموع بعدي ن (س، ص) عن نقطتين ثابتتين (تسميان البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا هو ٢أ وهو طول المحور الأكبر



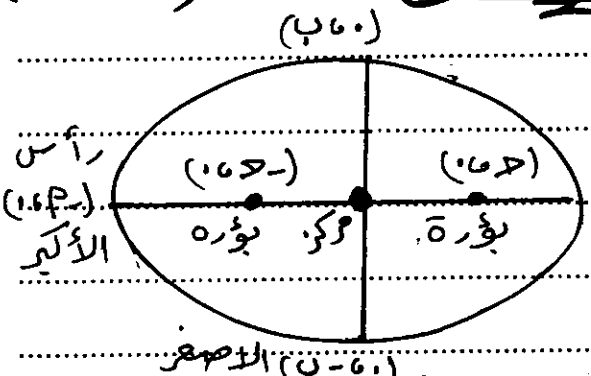
وهذا يعني أن

ن ب١ + ن ب٢ = أ ب٢

لاحظ ان محيط المثلث ن ب١ ب٢

= ٢أ + ٢ح

عناصر القطع الناقص (السيني)



يكون المحور الأكبر منطبقًا على محور السينات، ومحورة الأصغر على محور الصادات

للقطع الناقص رأسين وبؤرتين تقعان على المحور الأكبر دائمًا

أ = بعد المركز عن الرأس

ب = بعد المركز عن طرف المحور الأصغر

ح = بعد المركز عن البؤرة

طول المحور الأكبر = ٢أ

طول المحور الأصغر = ٢ب

يتبع ←

البعد البؤري = ٢ جـ (المسافة بين البؤرتين)

الاختلاف المركزي (هـ) = $\frac{جـ}{أ}$ < ١

لأن جـ < أ وعدد الاختلاف المركزي أقل من واحد صحيح قطع ناقص

أ > ب دائماً

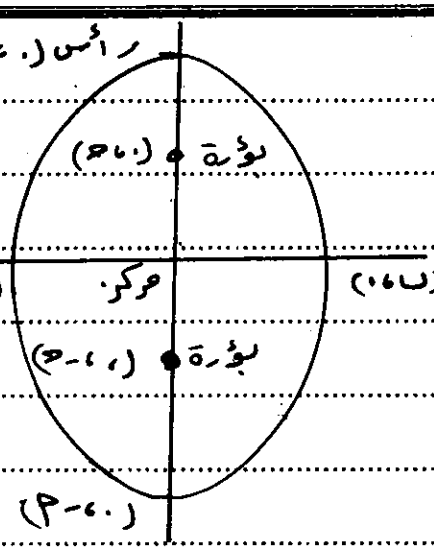
جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢} (حيث جـ > ٠)

بعد الرأس عن البؤرة القريبة منه هي (أ − جـ) وهي تمثل أقصر مسافة بين النقطة ن (س ، ص) والبؤرة

بعد الرأس عن البؤرة البعيدة عنه هي أ + جـ وهي تمثل أطول مسافة بين النقطة ن (س ، ص) والبؤرة

القطع الناقص الصادي

يكون المحور الأكبر منطبقاً على محور الصادات والمحور الأصغر على محور السينات



① معادلة القطع الناقص السيني هي

$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

② معادلة القطع الناقص الصادي هي

$\frac{س^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} = ١$

في معادلة القطع الناقص السيني يكون المقام الأكبر (أ^{٢}) مع السينات

في معادلة القطع الناقص الصادي يكون المقام الأكبر (أ^{٢}) مع الصادات

مكتبة الوسام
المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظات هامة

١. التربيع على المتغيرين واشارة $س^2$ ، $ص^2$ فتشابه

٢. المركز منتصف البؤرتين والرأسين وطولا المحور الأصغر لذلك قانون احداثي فنتصف قطعة مستقيمة $\left(\frac{س_1 + س_2}{2}, \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$

٣. مقاطع $س$ = مقاطع $ص = ١$ في المعادلات.

٤. معادلة المحور الأكبر تعاكس معادلة المحور الأصغر.

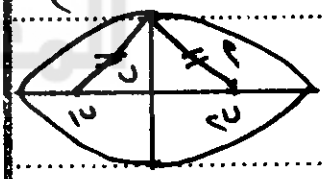
٥. الدائرة حالة خاصة من القطع الناقص وتحدث عندما $ا = ب$

فالدائرة هي قطع ناقص طول محوره الأكبر = طول محوره الأصغر

٦. في وضع خاص اذا كانت موقع النقطة $ن(س، ص)$ كما في الشكل تحصل مع العلاقة حسب فيثاغورس

$ا^2 = ب^2 + حـ^2$

$حـ^2 = ا^2 - ب^2$



اشتقاق معادلة القطع الناقص

حسب تعريف القطع الناقص فإن

$ن ب_1 + ن ب_2 = 2ا$

$\Leftarrow \sqrt{(س - حـ)^2 + ص^2} + \sqrt{(س + حـ)^2 + ص^2} = 2ا$

$\sqrt{(س - حـ)^2 + ص^2} = 2ا - \sqrt{(س + حـ)^2 + ص^2}$

بتربيع الطرفين نتيجة

$(س - حـ)^2 + ص^2 = 4ا^2 - 4ا\sqrt{(س + حـ)^2 + ص^2} + (س + حـ)^2 + ص^2$

$س^2 - 2حـس + حـ^2 = 4ا^2 - 4ا\sqrt{(س + حـ)^2 + ص^2} + س^2 + 2حـس + حـ^2$

$-2حـس = 4ا^2 - 4ا\sqrt{(س + حـ)^2 + ص^2} + 2حـس$

$4ا\sqrt{(س + حـ)^2 + ص^2} = 4ا^2 + 4حـس$

بالقسمة على 4 $\Leftarrow$

$ا\sqrt{(س + حـ)^2 + ص^2} = ا^2 + حـس$

وبالتربيع $\Leftarrow$

$ا^2((س + حـ)^2 + ص^2) = (ا^2 + حـس)^2$

$ا^2(س^2 + 2حـس + حـ^2 + ص^2) = ا^4 + 2ا^2حـس + حـ^2س^2$

$ا^2س^2 + 2ا^2حـس + ا^2حـ^2 + ا^2ص^2 = ا^4 + 2ا^2حـس + حـ^2س^2$

$ا^2س^2 - حـ^2س^2 + ا^2ص^2 = ا^4 - ا^2حـ^2$

$(ا^2 - حـ^2)س^2 + ا^2ص^2 = ا^2(ا^2 - حـ^2)$

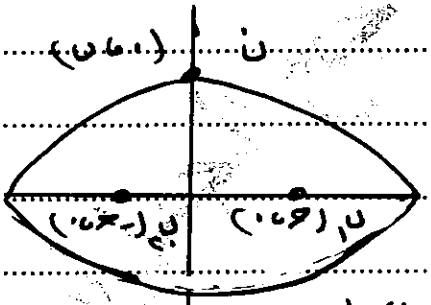
ولكن $حـ^2 = ا^2 - ب^2 \Leftarrow ب^2 = ا^2 - حـ^2$

$\Leftarrow ب^2س^2 + ا^2ص^2 = ا^2ب^2$ وبالقسمة على $ا^2ب^2 \Leftarrow$

$\frac{س^2}{ا^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$

في القطع الناقص اثبت ان

$ح^2 = ب^2 - ا^2$



البرهان

حسب تعريف القطع الناقص فإن

$ن ب_1 + ن ا = 2ب$

$= \sqrt{(٠ - ح)^2 + (ب - ٠)^2} + \sqrt{(٠ + ح)^2 + (ب - ٠)^2}$

$= \sqrt{ح^2 + ب^2} + \sqrt{ح^2 + ب^2} = 2ب$

$2\sqrt{ح^2 + ب^2} = 2ب$

بالتربيع $\sqrt{ح^2 + ب^2} = ب$

$\Leftarrow ح^2 + ب^2 = ب^2$

ومنها

$ح^2 = ب^2 - ا^2$

مثال ①

جد عناصر القطع الناقص $\frac{س^2}{25} + \frac{ص^2}{16} = 1$ ومثله بيانيا

الحل

قطع ناقص سيني ومركزه (٠، ٠)

$ب^2 = 25 \leftarrow ب = 5$

$ا^2 = 16 \leftarrow ا = 4$

$ح^2 = ب^2 - ا^2 \leftarrow ح^2 = 25 - 16 = 9$

$ح = 3$

الرأسين (٠، ±٥)، البؤرتين (٠، ±٣)

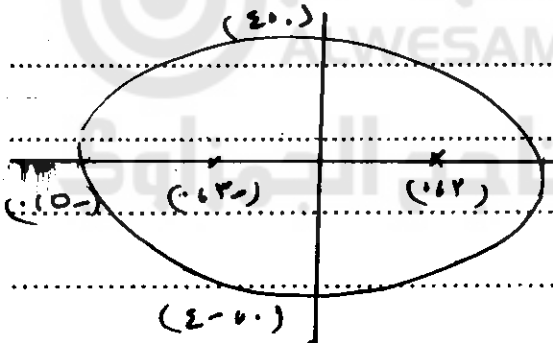
احداثيا طرفي المحور الاصغر (±٤، ٠)

طول المحور الأكبر $= 2ب = 10$ ومعادلته ص = ٠

طول المحور الأصغر $= 2ا = 8$ ومعادلته س = ٠

البعد البؤري $= 2ح = 6$

الاختلاف المركزي $= هـ = \frac{ح}{ب} = \frac{3}{5} < 1$



مكتبة الوسام ALWESAM

مثال (٢)

جد عناصر القطع الناقص

$\frac{س^2}{25} + \frac{ص^2}{144} = 1$

الحل

قطع ناقص سيني مركزه (٠،٠)

$ب^2 = 144 \leftarrow ب = \sqrt{144} = 12$

$أ^2 = 25 \leftarrow أ = \sqrt{25} = 5$

$جـ^2 = ب^2 - أ^2 \leftarrow جـ^2 = 144 - 25 = 119$

$جـ = \sqrt{119}$

الرأسين $(\pm 12 ، 0)$ البؤرتين $(\pm \sqrt{119} ، 0)$

اطوال المحاور/ المحور الأصغر $(\pm 5 ، 0)$

طول المحور الأكبر $= 2ب = 24$ وحدة طول

طول المحور الأصغر $= 2أ = 10$ وحدة طول

البعد البؤري $= 2جـ = 2\sqrt{119}$

الاختلاف المركزي $هـ = \frac{جـ}{ب} = \frac{\sqrt{119}}{12}$

بُعد الرأس عن البؤرة القريبة (أقصر مسافة)

$= ب - جـ = 12 - \sqrt{119}$

بُعد الرأس عن البؤرة البعيدة (أطول مسافة)

$= ب + جـ = 12 + \sqrt{119}$

مثال (٣)

جد اطوال المحاور والبؤرتين وطولي المحورين والاختلاف المركزي للقطع الناقص $س^2 + 4ص^2 = 16$

الحل

نرتب المعادلة بالقسمة على 16

$\frac{س^2}{16} + \frac{ص^2}{4} = 1$ سيني (أفقي)

المركز (٠،٠)

$ب^2 = 16 \leftarrow ب = 4$

$أ^2 = 4 \leftarrow أ = 2$

$جـ^2 = ب^2 - أ^2 = 16 - 4 = 12 \leftarrow جـ = \sqrt{12}$

البؤرتان $(\pm \sqrt{12} ، 0)$

الرأسان $(\pm 4 ، 0)$

طولا المحور الأصغر $(0 ، \pm 2)$

طول المحور الأكبر $= 2ب = 8$

طول المحور الأصغر $= 2أ = 4$

البعد البؤري $= 2جـ = 2\sqrt{12}$

الاختلاف المركزي $هـ = \frac{جـ}{ب} = \frac{\sqrt{12}}{4}$

مثال (٤)

جد عناصر القطع $ س^2 = 16 - \frac{16}{9} ص^2 $

الحل

نرتب المعادلة $ س^2 + \frac{16}{9} ص^2 = 16 $

بالقسمة على 16

$ \frac{س^2}{16} + \frac{\frac{16}{9} ص^2}{16} = \frac{16}{16} $

$ \frac{س^2}{8} + \frac{ص^2}{9} = 16 $ صادي عمودي

المركز (٠،٠)

$ p^2 = 9 \leftarrow p = 3 $

$ ب^2 = 8 \leftarrow ب = \sqrt{8} $

$ جـ^2 = p^2 - ب^2 = 9 - 8 = 1 $

$ جـ = 1 $

طول المحور الأكبر $ 2p = 6 $

" " الأصغر $ 2ب = 2\sqrt{8} $

البعد البؤري $ جـ = 2 $

الاختلاف المركزي $ هـ = \frac{جـ}{p} = \frac{1}{3} $

مثال (٥)

جد معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وطول محورة الأكبر ١٠ سم وطول محورة الأصغر ٨ سم.

الحل

المركز (٠،٠)

طول محورة الأكبر $ 2p = 10 \leftarrow p = 5 $

$ p^2 = 25 $

طول محورة الأصغر $ 2ب = 8 \leftarrow ب = 4 $

$ ب^2 = 16 $

يوجد حالتان

$ \frac{س^2}{25} + \frac{ص^2}{16} = 1 $ سيني

$ \frac{س^2}{16} + \frac{ص^2}{25} = 1 $ صادي

مثال (٦)

جد معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل والبؤرتان $ (\pm 1، 0) $ وطول محورة الأكبر = ٤ سم

الحل

قطع ناقص سيني $ \frac{س^2}{p^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1 $

← يتبع

مكتبة الرياض
المعلم: ناجح الجمزاوي

$2p = 4 \Leftarrow p = 2$

$c = 1$ ، $c^2 = p^2 - b^2 \Leftarrow 1 = 4 - b^2$

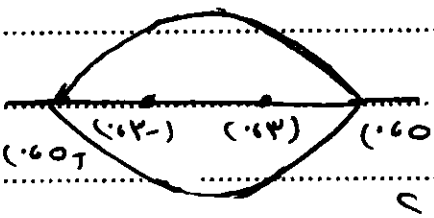
$\Leftarrow b^2 = 3$ ، $b = \sqrt{3}$

معادلته $\frac{س^2}{4} + \frac{ص^2}{3} = 1$

مثال (٧)

جد معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(\pm 1.3, 0)$ ويتقاطع مع محور السينات عندما $س = \pm 5$

الحل



القطع سيني

$\frac{س^2}{p^2} + \frac{ص^2}{b^2} = 1$

$p = 5 \leftarrow p^2 = 25$

$c = 3 \leftarrow c^2 = 9$

$c^2 = p^2 - b^2 \Leftarrow 9 = 25 - b^2$

$\leftarrow b^2 = 25 - 9 = 16$

المركز منتصف البؤرتين $= (0,0)$

$\frac{س^2}{25} + \frac{ص^2}{16} = 1$

مثال (٨)

جد معادلة قطع ناقص مركزه $(0,0)$ وطول محوره الأكبر ٨ ومار بالنقطة $(1, \sqrt{2})$ علماً بأن محورة الأكبر يقع على محور السينات

الحل

بما أن مركزه $(0,0)$ ومحوره الأكبر على محور السينات فالقطع على الصورة $\frac{س^2}{p^2} + \frac{ص^2}{b^2} = 1$

محوره الأكبر $2p = 8 \leftarrow p = 4$

$p^2 = 16$

تصبح المعادلة $\frac{س^2}{16} + \frac{ص^2}{b^2} = 1$

لكن النقطة $(1, \sqrt{2})$ تحقق

$\frac{1}{16} + \frac{2}{b^2} = 1 \Leftarrow \frac{1}{b^2} = \frac{3}{4}$

$\Leftarrow b^2 = \frac{4}{3}$

معادلة القطع $\frac{س^2}{16} + \frac{ص^2}{\frac{4}{3}} = 1$

ترتيب $\frac{س^2}{16} + \frac{3ص^2}{4} = 1$

مثال (٩)

جد معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وطول محوره الأصغر ٨ وحدات ومحوره الأكبر يقع على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه ٦ وحدات

الحل

بما ان مركزه (٠،٠) ومحوره الأكبر يقع على محور السينات فالقطع على الصورة $\frac{س^2}{م^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$

طول محوره الأصغر $2ب = 8$

$\leftarrow ب = 4 \leftarrow ب^2 = 16$

المسافة بين بؤرتيه $2جـ = 6$

$\leftarrow جـ = 3 \leftarrow جـ^2 = 9$

$جـ^2 = م^2 - ب^2 \leftarrow 9 = م^2 - 16$

$\leftarrow م^2 = 25$

المعادلة هي

$$\frac{س^2}{25} + \frac{ص^2}{16} = 1$$

مثال (١٠)

جد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه (٠،٠) وطول محوره الأصغر $2\sqrt{27}$ واختلافه المركزي $= \frac{1}{2}$

الحل

بما ان $هـ = \frac{1}{2} < 1 \leftarrow$ القطع ناقص

طول محوره الأصغر $2ب = 2\sqrt{27}$

$\leftarrow ب = \sqrt{27} \leftarrow ب^2 = 27$

$هـ = \frac{جـ}{م} \leftarrow \frac{1}{2} = \frac{جـ}{م} \leftarrow جـ = \frac{1}{2}م$

$\leftarrow جـ^2 = \frac{1}{4}م^2$

من العلاقة $جـ^2 = م^2 - ب^2$

$(\frac{1}{2}م)^2 = م^2 - 27$

$27 = م^2 - \frac{1}{4}م^2 \leftarrow 27 = \frac{3}{4}م^2$

$\leftarrow م^2 = 36$

المركز (٠،٠)

نوعه عاليان

$$\frac{س^2}{36} + \frac{ص^2}{27} = 1$$

$$\frac{س^2}{27} + \frac{ص^2}{36} = 1$$

مكتبة الوسام ALWESAM الأستاذ ناجح الجمزاوي

مثال (١١)

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٠،٠) ومحورة الكبير يقع على محور السينات بحيث ان بُعد الرأس عن البؤرة القريبة = ١ وبُعد الرأس عن البؤرة البعيدة = ٥

الحل

القطع ناقص سيني

$\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{ا^2} = ١$

$ب - جـ = ١$ --- (١)

$ب + جـ = ٥$ --- (٢)

بجمع المعادلتين $2ب = ٦ \leftarrow ب = ٣$

بالتعويض في (٢) $\leftarrow ٣ + جـ = ٥$

$\leftarrow جـ = ٢$

$جـ^2 = ب^2 - ا^2 \leftarrow ٤ = ٩ - ا^2$

$\leftarrow ا^2 = ٥$

معادلته هي

$\frac{س^2}{٩} + \frac{ص^2}{٥} = ١$

تدريب :

جد معادلة قطع ناقص رأساه $(٠، \pm ٦)$ واحدى بؤرتيه $(٠، ٥)$

$جـ = ٥$

$\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{ا^2} = ١$

$\frac{س^2}{١١} + \frac{ص^2}{٣٦} = ١$

تدريب

جد معادلة قطع ناقص مركزه $(٠، ٠)$ وبؤرتاه $(٠، \pm ٦)$ واختلافه المركزي $هـ = \frac{٣}{٥}$

$جـ = ٦$

$\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{ا^2} = ١$

$\frac{س^2}{٦٤} + \frac{ص^2}{١٠٠} = ١$

مثال (١٢)

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(١، ٢)$ واختلافه المركزي $\frac{٢}{٣}$ ومحوره الأكبر يقع على محور السينات.

الحل

$هـ = \frac{جـ}{ب} \leftarrow \frac{٢}{٣} = \frac{جـ}{ب} \leftarrow$

$\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{ا^2} = ١$

النقطة $(١، ٢)$

$\frac{١}{ب^2} + \frac{٤}{ا^2} = ١ \Leftarrow \frac{٤ ب^2 + ا^2}{ا^2 ب^2} = ١$

$\leftarrow$ يتبع

$\Leftarrow 4p^2 + u^2 = p^2 \quad \cdots ①$

بكن $م = \frac{ج}{أ} = \frac{ج}{3} \Leftarrow 3ج = 4$

$\Leftarrow ج = \frac{4}{3} p$

ومن العلاقة $ج^2 = p^2 - u^2 \Leftarrow$

$(\frac{4}{3} p)^2 = p^2 - u^2 \Leftarrow u^2 = p^2 - \frac{16}{9} p^2$

$\Leftarrow u^2 = \frac{5}{9} p^2 \quad \cdots ②$

لتعويض u^2 في معادلة ①

$\Leftarrow 4p^2 + \frac{5}{9} p^2 = \frac{5}{9} p^2 \times p^2$

$\frac{36+5}{9} p^2 = \frac{4}{9} p^2$

$\Leftarrow \frac{41}{9} p^2 - \frac{5}{9} p^4 = صفر$

$\frac{1}{9} p^2 (41 - 5p^2) = 0$

$p^2 = صفر$ مرفوض ، $41 - 5p^2 = 0$

$p^2 = \frac{41}{5}$ نعوضها في ②

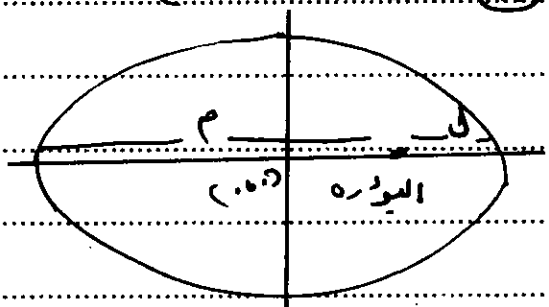
$u^2 = \frac{5}{9} \times \frac{41}{5} = \frac{41}{9}$

معادلة القطع

$\frac{س^2}{\frac{41}{5}} + \frac{ص^2}{\frac{41}{9}} = 1$

$\frac{5س^2}{41} + \frac{9ص^2}{41} = 1$

مثال (13) وزارة (2020)



في القطع الناقص المجاور اذا كانت

ل : المسافة بين احدى بؤرتيه ورأس

القريب منها ، م : المسافة بين البؤرة نفسها

والرأس البعيد عنها ، وكانت $\frac{ل}{م} = \frac{1}{5}$

وطول المحور الأصغر $4\sqrt{5}$ وحدة جد

كلاً مما يأتي

أ) احداثيات البؤرتين ب) احداثيات رأسين

ج) معادلة القطع د) الاختلاف المركزي

الحل

قطع ناقص معادلته $\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{أ^2} = 1$

$ل = أ - ج$ ، $م = أ + ج$

$\frac{ل}{م} = \frac{1}{5} \Leftarrow \frac{أ - ج}{أ + ج} = \frac{1}{5}$

$\Leftarrow 5أ + 5ج = أ - ج$

$\Leftarrow 4أ = 6ج \Leftarrow 2أ = 3ج$

$\Leftarrow 4أ^2 = 9ج^2 \Leftarrow 4أ^2 = 9(أ^2 - ب^2)$

$\Leftarrow 4أ^2 = 9أ^2 - 9ب^2 \Leftarrow 9ب^2 = 5أ^2$

$\Leftarrow ب^2 = \frac{5}{9} أ^2 \quad \cdots ①$

يتبع الحل

لكن $ج^2 = ب^2 + أ^2$ ، $ج = \sqrt{5}$ ، $ب = \sqrt{5}$

$ج^2 = ب^2 + أ^2 \leftarrow ج^2 = ب^2 + (\sqrt{5})^2$

$\leftarrow ج^2 = ب^2 + 5$ ---- ②

من معادلة ① $ج = \frac{2}{3}ب$ بالتعويض في معادلة ② ينتج ان

$\frac{4ب^2}{9} = ب^2 + 5 \leftarrow \frac{4ب^2}{9} - ب^2 = 5$

$\leftarrow ب^2 = 36 \leftarrow ب = 6$

$\leftarrow ج = \frac{2 \times 6}{3} = 4$

ب. احداثيات البؤرتين $(\pm 4, 0)$

ب. احداثيات الرأسين $(\pm 6, 0)$

ج. معادلة القطع $\frac{س^2}{36} + \frac{ص^2}{20} = 1$

د) الاختلاف المركزي $= \frac{ج}{أ} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

مثال (14) وزارة (2013)

جد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه نقطة الاصل ومحورة الأكبر يوازي محور السينات ويمر منحناه بالنقطة $(3, 1)$ واختلافه المركزي $(\frac{1}{2})$

الحل

قطع ناقص سيني $\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{أ^2} = 1$

$\frac{ج}{أ} = \frac{1}{2} \leftarrow أ = 2ج$ ---- ①

$(3, 1) \leftarrow$

$\frac{1}{أ^2} + \frac{9}{ب^2} = 1$ ---- ②

$ج^2 = أ^2 - ب^2$ ---- ③

من معادلة ① $\leftarrow \frac{أ}{2} = ج$ بالتعويض في ③

$\leftarrow \frac{أ^2}{4} = أ^2 - ب^2$

$ب^2 = أ^2 - \frac{أ^2}{4} \leftarrow ب^2 = \frac{3}{4}أ^2$ بالتعويض في ②

$\leftarrow \frac{1}{أ^2} + \frac{9}{\frac{3}{4}أ^2} = 1$

$\leftarrow \frac{1}{أ^2} + \frac{9 \times \frac{4}{3}}{أ^2} = 1$

$\leftarrow \frac{1}{أ^2} + \frac{12}{أ^2} = 1$

$\leftarrow \frac{12}{أ^2} = 1 \leftarrow أ^2 = 12 \leftarrow أ = 2\sqrt{3}$

ولكن $ب^2 = \frac{3}{4}أ^2 \leftarrow ب^2 = \frac{3}{4} \times 12$

$\leftarrow ب^2 = 9$

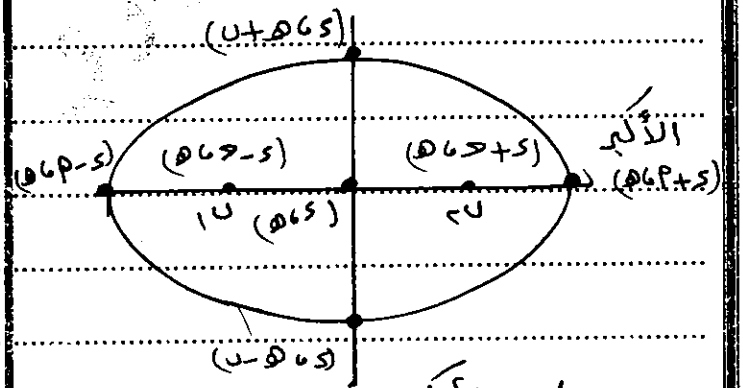
معادلة $\frac{س^2}{13} + \frac{ص^2}{\frac{39}{4}} = 1$

$\leftarrow \frac{س^2}{13} + \frac{4ص^2}{39} = 1$

حالات القطع الناقص

المركز (ك، هـ)

① - أذا كان محورة الأكبر منطبقاً أو يوازي محور السينات



معادلة المحور الأكبر ص = هـ

معادلة المحور الأصغر س = ك

ومعادلة القطع $\frac{(س-ك)^2}{ب^2} + \frac{(ص-هـ)^2}{ا^2} = ١$

الرأسين (ك+ب، هـ)، (ك-ب، هـ)

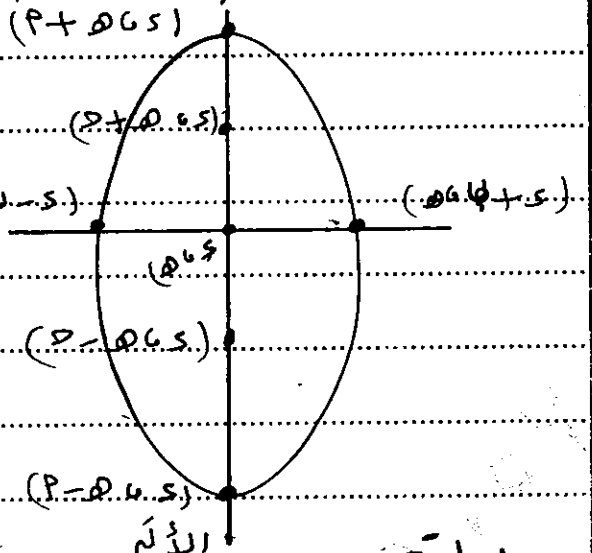
البؤرتين (ك+حـ، هـ)، (ك-حـ، هـ)

طرفي المحور الأصغر (ك، هـ+ا)، (ك، هـ-ا)

بُعد الرأس عن البؤرة القريبة (أقصر مسافة) = ب - حـ

بُعد الرأس عن البؤرة البعيدة (أطول مسافة) = ب + حـ

② - اذا كان محور الأكبر منطبقاً أو يوازي محور الصادات (الصادي)



معادلة $\frac{(س-ك)^2}{ب^2} + \frac{(ص-هـ)^2}{ا^2} = ١$

معادلة المحور الأكبر س = ك

معادلة المحور الأصغر ص = هـ

الرأسين (ك، هـ+ب)، (ك، هـ-ب)

البؤرتين (ك، هـ+حـ)، (ك، هـ-حـ)

طرفي المحور الأكبر (ك، هـ+ا)، (ك، هـ-ا)

= = الأصغر (ك+ا، هـ)، (ك-ا، هـ)

معلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٥)

جد عناصر القطع الناقص

$$\frac{(س+٢)^٢}{٢٥} + \frac{(ص-١)^٢}{٩} = ١$$

الحل

افقي سيني على صورة

$$\frac{(س-ه)^٢}{ب^٢} + \frac{(ص-د)^٢}{أ^٢} = ١$$

المركز $(ه، د) = (-٢، ١)$

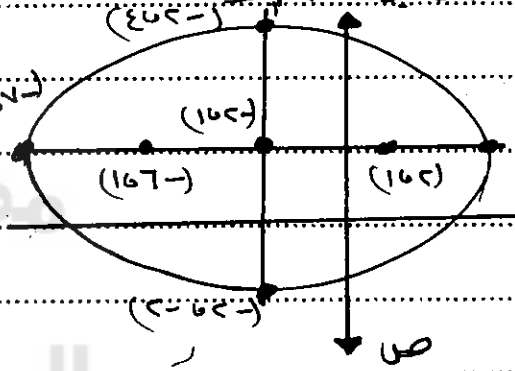
$أ^٢ = ٢٥ \leftarrow أ = ٥$

$ب^٢ = ٩ \leftarrow ب = ٣$

$ج^٢ = أ^٢ - ب^٢ = ٢٥ - ٩ = ١٦$

$ج = ٤$

طول المحور الأكبر $= ٢أ = ١٠$



طول المحور الأصغر $= ٢ب = ٦$

التقدير البؤري $= ٢ج = ٨$

$هـ = \frac{ج}{أ} = \frac{٤}{٥}$

مثال (١٦)

جد عناصر القطع الناقص الذي معادلته

$$\frac{(س-٤)^٢}{٨١} + \frac{(ص+١)^٢}{٢٥} = ١$$

الحل

قطع ناقص سيني

المركز $(٤، -١)$

$أ^٢ = ٨١ \leftarrow أ = ٩$

$ب^٢ = ٢٥ \leftarrow ب = ٥$

$ج^٢ = أ^٢ - ب^٢ = ٨١ - ٢٥ = ٥٦$

$ج = \sqrt{٥٦}$

الرأسين $(٤+٩، -١)$ ، $(٤-٩، -١)$

$= (١٣، -١)$ ، $(-٥، -١)$

البؤرتين $(٤+\sqrt{٥٦}، -١)$ ، $(٤-\sqrt{٥٦}، -١)$

طرفي المحور الأصغر

$(٤، -١+٥)$ ، $(٤، -١-٥)$

$= (٤، ٤)$ ، $(٤، -٦)$

طول المحور الأكبر $= ٢أ = ١٨$

ومعادلته $ص = -١$

طول المحور الأصغر $= ٢ب = ١٠$

ومعادلته $س = ٤$

يتبع الحل

البعد البؤري $= ح = \sqrt{٥٦} = ٢\sqrt{١٤}$

الاختلاف المركزي $(هـ) = \frac{ح}{م} = \frac{\sqrt{٥٦}}{٩}$

بُعد الرأس عن البؤرة القريبة (أقصر مسافة)

$= م - ح = ٩ - \sqrt{٥٦}$

بُعد الرأس عن البؤرة البعيدة (أطول مسافة)

$= م + ح = ٩ + \sqrt{٥٦}$

مثال (١٧) وزارة (٢٠١١)

قطع ناقص معادلته

$\frac{(ص+٤)^٢}{١٦} + \frac{(س-٣)^٢}{٦٤} = ١$

جد كلاً مما يأتي

١. احداثيات المركز

٢. احداثيات الرأسين والبؤرتين

الحل

١. احداثيات المركز $(٣، -٤)$

٢. $م^٢ = ٦٤ \leftarrow م = ٨$

$ب^٢ = ١٦ \leftarrow ب = ٤$

$ح^٢ = م^٢ - ب^٢ \leftarrow ح^٢ = ٦٤ - ١٦$

$ح^٢ = ٤٨ \leftarrow ح = \sqrt{٤٨} = ٤\sqrt{٣}$

قطع ناقص سيني

احداثيات الرأسين هما

$(٣، -٤+٨)$ ، $(٣، -٤-٨)$

$(٣، ٤)$ ، $(٣، -١٢)$

٣. احداثيات البؤرتين

$(٣، -٤+٤\sqrt{٣})$ ، $(٣، -٤-٤\sqrt{٣})$

مثال (١٨) وزارة (٢٠٠٩)

قطع ناقص معادلته

$س^٢ + ٤ص^٢ + ٢س + ٨ص = ٢٣$

جد كلاً مما يأتي

١- احداثيات المركز ٢) احداثيات الرأسين

٣. احداثيات البؤرتين ٤) الاختلاف المركزي

الحل

نقوم بإكمال مربع للمتغيرات والصادات

← يتبع الحل

ترتيب المعادلة

$س^2 + 6س + 4ص^2 - 8ص = 23$

$س^2 + 6س + 4(ص^2 - 2ص) = 23$

$س^2 + 6س + (\frac{6}{2})^2 + 4(ص^2 - 2ص + (\frac{2}{2})^2) = 23 + (\frac{6}{2})^2 + 4(\frac{2}{2})^2$

$س^2 + 6س + 9 + 4(ص - 1)^2 = 23 + 9 + 4$

$(س + 3)^2 + 4(ص - 1)^2 = 36$

بالقسمة على 36

$\frac{(س+3)^2}{36} + \frac{(ص-1)^2}{9} = 1$ ناقص

1. المركز $(-3, 1)$

2. $م^2 = 36 \leftarrow م = 6$

البؤرتين $(-3 + \sqrt{36-9}, 1)$ ، $(-3 - \sqrt{36-9}, 1)$

$(-3, 1+3\sqrt{3})$ ، $(-3, 1-3\sqrt{3})$

3. $ب^2 = 9 \leftarrow ب = 3$

$ح^2 = م^2 - ب^2 = 36 - 9 = 27$

$ح = \sqrt{27}$

4. البؤرتين $(-3, 1+\sqrt{27})$ ، $(-3, 1-\sqrt{27})$

5. الاختلاف المركزي

$ه = \frac{ح}{م} = \frac{\sqrt{27}}{6}$

مثال (19)

جد عناصر القطع الناقص

$4س^2 + 9ص^2 - 24س - 18ص + 9 = 0$

الحل

ترتيب المعادلة

$4س^2 - 24س + 9ص^2 - 18ص = -9$

$4(س^2 - 6س) + 9(ص^2 - 2ص) = -9$

$4(س^2 - 6س + (\frac{6}{2})^2) + 9(ص^2 - 2ص + (\frac{2}{2})^2) = -9 + 4(\frac{6}{2})^2 + 9(\frac{2}{2})^2$

$4(س^2 - 6س + 9) + 9(ص^2 - 2ص + 1) = -9 + 36 + 9$

$4(س - 3)^2 + 9(ص - 1)^2 = 36$

بالقسمة على 36

$\frac{(س-3)^2}{9} + \frac{(ص-1)^2}{4} = 1$

المركز $(3, 1)$

$م^2 = 9 \leftarrow م = 3$

$ب^2 = 4 \leftarrow ب = 2$

$ح^2 = م^2 - ب^2 = 9 - 4 = 5$

$ح = \sqrt{5}$

البؤرتان $(3 \pm \sqrt{5}, 1)$

$(3 + \sqrt{5}, 1)$ ، $(3 - \sqrt{5}, 1)$

$(\sqrt{6}, 1)$ ، $(\sqrt{0}, 1)$

طول المحور الأكبر $= 2م = 6$ معادلته $ص = 1$

طول المحور الأصغر $= 2ب = 4$ معادلته $س = 3$

طرفا المحور الأصغر $(3, 3)$ ، $(3, -1)$

ملاحظة هامة

لإيجاد معادلة القطع الناقص يجب معرفة

١. نوع القطع الناقص

٢. إحداثيات المركز (ى، هـ)

٣. قيم $ب^2$، $ن^2$

مثال (٢٠)

جد معادلة القطع الناقص الذي محوره الأصغر يساوي ٨، وبؤرتيه (١٦٥)، (-١٦١)، (١٦٥)

الحل

القطع على الصورة $\frac{(س-ى)^2}{ب^2} + \frac{(ص-هـ)^2}{ن^2} = ١$

محور الأصغر $2ن = ٨ \leftarrow ن = ٤$

$ن^2 = ١٦$

$ج^2 = ب^2 - ن^2 \leftarrow ٩ = ب^2 - ١٦ \leftarrow ب^2 = ٢٥$

$ب = ٥$

المركز بمتوسط البؤرتين $= (\frac{١+١}{٢}، \frac{٥-١}{٢})$

$= (١٦٢)$

معادلة القطع هي

$\frac{(س-٢)^2}{٢٥} + \frac{(ص-١)^2}{١٦} = ١$

مثال (٢١)

اوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه (٦١٢، -٢)، (٦٣، -٢) وبؤرتاه (٦٤، -٢)، (٦١٢، -٢)

الحل

(٦١٢، -٢) (٦١٥، -٢) (٦٨، -٢) (٦٤، -٢) (٦٣، -٢)

قطع ناقص سيني $\frac{(س-ى)^2}{ب^2} + \frac{(ص-هـ)^2}{ن^2} = ١$

المركز منتصف الرأسين $= (\frac{٣+١٣}{٢}، -٢)$

$= (٦٨، -٢)$

$ب = ١٣ - ٨ \leftarrow ب = ٥$

$ج = ١٢ - ٨ \leftarrow ج = ٤$

$ج^2 = ب^2 - ن^2 \leftarrow ١٦ = ٢٥ - ن^2$

$ن^2 = ٩ \leftarrow ن = ٣$

المعادلة هي

$\frac{(س-٨)^2}{٢٥} + \frac{(ص+٢)^2}{٩} = ١$

تدريب

جد معادلة قطع ناقص رأساه $(\pm 8, 4)$ والبعد البؤري يساوي 6 وحدات

ج $\frac{س^2}{64} + \frac{(ص-4)^2}{55} = 1$

مثال (22)

جد معادلة القطع الناقص الذي رأساه $(3, 6, -10)$ و $(3, 6, 8)$ واختلافه المركزي $(\frac{2}{3})$.

الحل

رأس $(3, 6, 8)$

مركز $(3, 6, -1)$

رأس $(3, 6, -10)$

قطع ناقص صادي

معادلته هي $\frac{(س-د)^2}{ب^2} + \frac{(ص-هـ)^2}{ا^2} = 1$

المركز $(3, 6, \frac{8+(-10)}{2}) = (3, 6, -1)$

$ا = 8 - 1 = 9$

$\frac{هـ}{ا} = \frac{ج}{ا} \leftarrow \frac{هـ}{9} = \frac{2}{3} \leftarrow هـ = 18 \div 3 = 6$

$ب^2 = 81 - 36 = 45$

$ب = \sqrt{45}$

المعادلة $\frac{(س-3)^2}{45} + \frac{(ص+1)^2}{81} = 1$

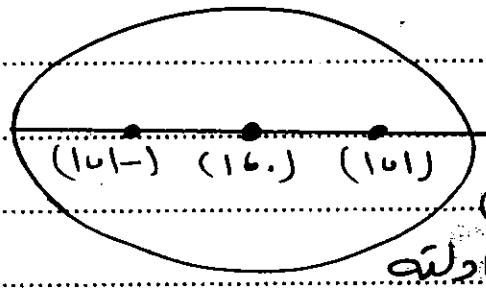
مثال (23) وزارة (2002)

قطع مخروطي اختلافه المركزي $هـ > 1$، وبؤرتاه تقعان في المستقيم $(-1, 0, 1)$ و $(1, 0, 1)$ ومركزه الأصل جد ما يلي

1. مركز القطع 2. معادلة القطع

3. الاختلاف المركزي.

الحل



قطع ناقص

بيني معادلته $\frac{(س-د)^2}{ا^2} + \frac{(ص-هـ)^2}{ب^2} = 1$

المركز $(\frac{1+(-1)}{2}, 1, 0) = (1, 0, 0)$

$د = 1 - 0 = 1$ و $ب = 1 - 0 = 1$

$ج^2 = ا^2 - ب^2 \leftarrow 1 = ا^2 - 1$

$ا^2 = 2 \leftarrow ا = \sqrt{2}$

المركز $(1, 0, 0)$

معادلته $\frac{س^2}{2} + \frac{(ص-1)^2}{1} = 1$

الاختلاف المركزي $هـ = \frac{ج}{ا} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

مكتبة الوسام ALWSAM المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٢٤) (وزاري ٢٠١٢)

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $ب_1(-٣، ٢)$ ، $ب_2(٩، ٢)$ وطول المحور الأكبر = ١٢ وحدة

الحل

$٢ج = ٩ - (-٣) = ١٢ \leftarrow ج = ٦$

$٢أ = ١٢ \leftarrow أ = ٦$

$ج^٢ = أ^٢ - ب^٢ \leftarrow ٣٦ = ٣٦ - ب^٢$

$ب^٢ = ٢٧$

المركز $\left(\frac{-٣+٩}{٢}، \frac{٢+٢}{٢}\right) = (٣، ٢)$

قطع ناقص محوره الأكبر يوازي المحور السيني

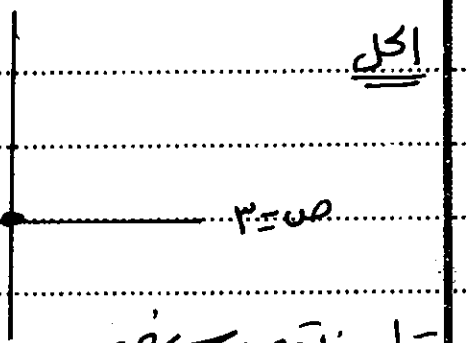
$\frac{(س-٣)^٢}{٣٦} + \frac{(ص-٢)^٢}{٢٧} = ١$

مثال (٢٥)

جد معادلة القطع الناقص الذي اختلافه المركزي يساوي ٠,٦ ويمر بالنقطة $(-٢، ٨)$ ومركزه يقع على المستقيم $س = ٢$ وبؤرتاه تقعان على المستقيم $ص = ٣$ ؟

الحل

الحل



قطع ناقص سيني $س = ٢$

$\frac{(س-٢)^٢}{ب^٢} + \frac{(ص-٣)^٢}{أ^٢} = ١$

المركز $(٢، ٣)$ والنقطة $(-٢، ٨)$

البؤرة $\leftarrow ج = ٢ - ٨ = ١٠$

$\frac{ج}{أ} = \frac{٦}{١٠} \leftarrow \frac{ج}{أ} = \frac{٦}{١٠} \Leftarrow ج = ٦$

$ج^٢ = أ^٢ - ب^٢ \leftarrow ٣٦ = ١٠٠ - ب^٢$

$ب^٢ = ٦٤ \leftarrow ب = ٨$

معادلته هي

$\frac{(س-٢)^٢}{١٠٠} + \frac{(ص-٣)^٢}{٦٤} = ١$

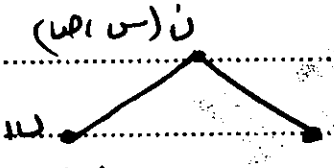
مثال (٢٦)

إذا كان $ب_1(-٠,٦، ٠,٣)$ ، $ب_2(٠,٦، ٠,٣)$ والنقطة ن $(س، ص)$ متحرك بحيث أن $ن ب_1 + ن ب_2 = ١٠$ أكتب معادلة المحل الهندسي للنقطة ن

يتبع الحل

الحل

من تعريف القطع الناقص



$ن ب + ن ج = 2م = 10$

$م = 5 \leftarrow م^2 = 25$

$2ح = 6 \leftarrow ح = 3 \leftarrow ح^2 = 9$

$ح^2 = م^2 - ب^2 \leftarrow 9 = 25 - ب^2$

$ب^2 = 16$

المركز ينصف البؤرتين $\therefore$ المركز $= (0،0)$

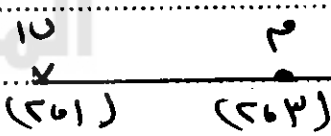
$\frac{س^2}{25} + \frac{ص^2}{16} = 1$

مثال (27)

اوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(2،3)$ وبؤرتاه $(1،2)$ $(5،2)$ وطول محورة الأكبر 6

أمثال البعد البؤري

الحل



من الشكل القطع على الصورة

$\frac{(س - ح)^2}{م^2} + \frac{(ص - ك)^2}{ب^2} = 1$

$ح^2 = 5 - 1 = 4 \leftarrow ح = \pm 2 \leftarrow ح^2 = 4$

محوره الأكبر $= 6 = 2م \leftarrow م = 3$

$م^2 = 9$

$ح^2 = م^2 - ب^2 \leftarrow 4 = 9 - ب^2 \leftarrow ب^2 = 5$

معادلة القطع هي

$\frac{(س - 3)^2}{9} + \frac{(ص - 2)^2}{5} = 1$

مثال (28) وزارة (2004)

قطع مخروطي اختلافه المركزي $(\frac{2}{3})$ واحد رأسيه $(1،2)$ والبؤرة القريبة من هذا الرأس هي $(1،1)$ ما معادلته؟

الحل

قطع ناقص سيني معادلته

يتبع

$\frac{(س-ي)^2}{م^2} + \frac{(ص-هـ)^2}{ن^2} = 1$

نجد الرأس عن البؤرة القريبة

$= م - ه = 3 - 1 \Leftarrow م - ه = ج$ ①

$\frac{ه}{م} = \frac{ج}{3} \Leftarrow م ج = 3 ه$ ②

من ① $\Leftarrow م = ج + ه$ وبالتعويض في ②

$\Leftarrow 3(ج+ه) = 3ه$

$\Leftarrow 3ج + 3ه = 3ه \Leftarrow ه = ٤$

$\leftarrow م = ٦$

$ه^2 = م^2 - ن^2 \leftarrow 16 = 36 - ن^2$

$ن^2 = 20 \Leftarrow ن = \sqrt{20}$

المركز $(ي، ه)$

$ي + ٤ = 1 \Leftarrow ي = -3$

المركز $(-3، 1)$

معادلته هي $\frac{(س+3)^2}{36} + \frac{(ص-1)^2}{20} = 1$

مثال (29) وزارة (2004)

جد معادلة القطع الناقص الذي طول محوره الأصغر يساوي (6) وحدات، أحد رأسيه (2، 4) وحدات البؤرة البعيدة عن هذا الرأس هي $(-5، 2)$ ؟

الحل

قطع ناقص سيني معادلته

$\frac{(س-ي)^2}{م^2} + \frac{(ص-هـ)^2}{ن^2} = 1$

بعد الرأس عن البؤرة البعيدة $= م + ه$

$\Leftarrow ن^2 = 6 \Leftarrow ن = 3$

$م + ه = 5 \Leftarrow م + ه = 9$ ①

$ه^2 = م^2 - ن^2 \Leftarrow ه^2 = م^2 - 9$ ②

من معادلة ① $\Leftarrow ه = 9 - م$ بالتعويض في ②

$\Leftarrow (9-م)^2 = م^2 - 9$

$81 - 18م + م^2 = م^2 - 9$

$18م = 90 \leftarrow م = \frac{90}{18} \Leftarrow ن = 5$

$ه = 9 - 5 \Leftarrow ه = 4$

المركز $(ي، ه) \Leftarrow ي + 5 = 4$

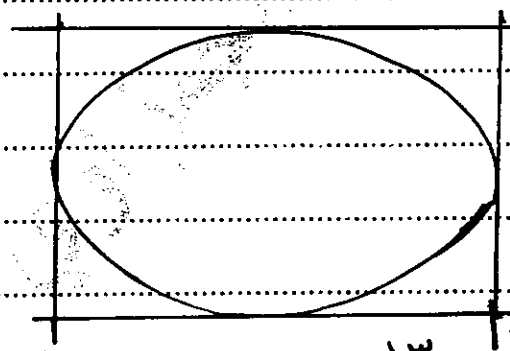
$ي = -1$ المركز $(-1، 2)$

معادلته هي $\frac{(س+1)^2}{25} + \frac{(ص-2)^2}{9} = 1$

مثال (٣٠) وزارة (٢٠٠٥)

جد معادلة القطع الناقص الذي يحس كلاً من المستقيمات س = ٣

س = ١٣ ، ص = -١ ، ص = ٧



المركز = $\left(\frac{٣+١٣}{٢}, \frac{٧+(-١)}{٢}\right) = (٨, ٣)$

طول المحور الأكبر = ١٣ - ٣ = ١٠

$٢ب = ١٠ \Leftarrow ب = ٥$

طول المحور الأصغر = ٧ - (-١) = ٨

$٢ج = ٨ \Leftarrow ج = ٤$

قطع ناقص سيني معادلته

$\frac{(س-ى)^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{(ص-هـ)^{٢}}{ج^{٢}} = ١$

$\frac{(س-٨)^{٢}}{٢٥} + \frac{(ص-٣)^{٢}}{١٦} = ١$

مثال (٣١) وزارة (٢٠٠٨)

قطع ناقص مساحته (٤٠π) وحدة مربعة ومركزه نقطة الأصل ومحور الأكبر ينطبق على محور الصادات وطول محوره الأصغر ١٠ وحدات أوجد معادلته.

ملاحظة هامة

مساحة القطع الناقص = $ب ج \pi$

الحل

معادلته $\frac{س^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ج^{٢}} = ١$

$٢ب = ١٠ \Leftarrow ب = ٥$

المساحة $= ب ج \pi$

$٤٠\pi = ب \times ج \times \pi = ٥ \times ج$

$ج = \frac{٤٠}{٥} = ٨$

معادلته هي

$\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٦٤} = ١$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (٣٢)

يدور القمر حول الارض في مدار على شكل قطع ناقص بحيث تقع الارض في احدى بؤرتي المدار (انظر الشكل المجاور) فاذا كانت اطول مسافة بين الارض والقمر تساوي (م) كم واقصر مسافة بينهما (ن) كم فاثبت ان الاختلاف المركزي لهذا القطع يساوي $\frac{م-ن}{م+ن}$

القمر

م

ن

الارض

الحل

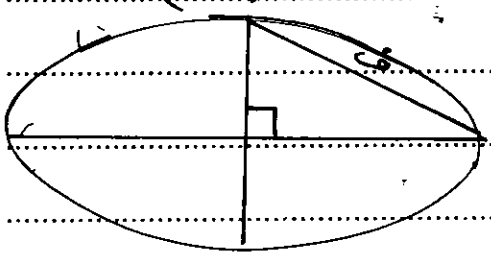
$م+ن = ٢ب \Leftarrow ب = \frac{م+ن}{٢}$

$م-ن = ٢ح \Leftarrow ح = \frac{م-ن}{٢}$

$هـ = \frac{ح}{ب} = \frac{\frac{م-ن}{٢}}{\frac{م+ن}{٢}} = \frac{م-ن}{م+ن}$

مثال (٣٣) وزارة (٢٠٠٠)

اذا كان البعد بين بؤرتي قطع ناقص يساوي نصف البعد بين طرفي محوريه الأكبر والاصغر فما قيمة الاختلاف المركزي



$ح = \frac{١}{٢}ف$

$ف^٢ = م^٢ + ن^٢ \Leftarrow ٤ح^٢ = م^٢ + ن^٢$

$ف = \sqrt{م^٢ + ن^٢}$ وبالتربيع

$١٦ح^٢ = م^٢ + ن^٢ \Leftarrow$ ـــ (١)

$٤ح^٢ = م^٢ - ن^٢$ ـــ (٢)

بالجمع $٢٠ح^٢ = ٢م^٢$

$ح^٢ = \frac{٢}{٢٠}م^٢ \Leftarrow ح = \frac{\sqrt{٢}}{١٠}م$

$هـ = \frac{ح}{ب} = \frac{\frac{\sqrt{٢}}{١٠}م}{\frac{١}{٢}م} = \frac{\sqrt{٢}}{٥}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٢٤)

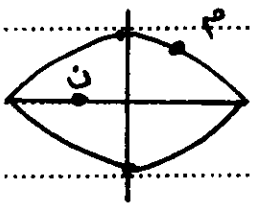
م ، ن نقطتان ماديتان ، النقطة م تدور على شكل قطع ناقص بحيث النقطة ن محور احدى بؤرتي هذا القطع فاذا كان طول المحور الأكبر يساوي ١٠ والاختلاف المركزي ٣/٥

اوجد

١. اعظم مسافة بين النقطتين م ، ن

٢- اطول مسافة بين النقطتين م ، ن

الحل



المحور الأكبر

$2a = 10 \Leftarrow a = 5$

$e = \frac{c}{a} \Leftarrow \frac{3}{5} = \frac{c}{5}$

$5c = 15 \quad c = 3$

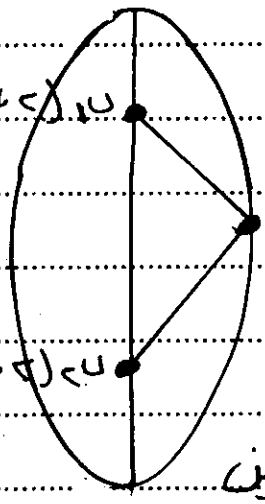
١. اعظم مسافة بين م ، ن $= a - c = 5 - 3 = 2$

٢. اطول مسافة بين م ، ن $= a + c = 5 + 3 = 8$

مثال (٢٥)

اوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $ب_1(2,17)$ ، $ب_2(2,5)$ وفيه محيط المثلث $ب_1ب_2$ = ٣٦ حيث و نقطة على القطع

الحل



من شكل القطع و على الصورة

$$\frac{(س-ي)^2}{ب^2} + \frac{(ص-هـ)^2}{ا^2} = 1$$

المركز منتصف البؤرتين

$م = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{17+5}{2}\right) = (2, 11)$

$2ا = 17 - 5 = 12 \Leftarrow ا = 6$

$ا^2 = 36$

محيط المثلث $= 2ا + 2ج$

$36 = 12 + 2ج \Leftarrow ج = 12$

$ب^2 = ا^2 - ج^2 \Leftarrow 36 = 144 - ب^2$

$ب^2 = 108$

$$\frac{(س-2)^2}{108} + \frac{(ص-11)^2}{144} = 1$$

مثال (٣٦) وزارة (٢٠١٠)

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه مركز الدائرة التي معادلتها

$(س-٦)^٢ + (ص-٤)^٢ = ٣٦$

وطول محورة الاصغر يساوي طول قطر هذه الدائرة ومعادلة محورة الاصغر $س = -١$

الحل

$(س-٣)^٢ + (ص-٢)^٢ = ٣٦$

$٤(س-٣)^٢ + ٤(ص-٢)^٢ = ٣٦$

بالقسمة على ٤ ←

$(س-٣)^٢ + (ص-٢)^٢ = ٩$

مركز الدائرة $(٣، ٢)$ ، $ر^٢ = ٩ \Leftarrow ر = ٣$

المطلوب معادلة القطع الناقص الذي أحد بؤرتيه $(٣، ٢)$ وطول محورة الاصغر يساوي (٦) ومعادلة محوره الاصغر $س = -١$

$(٣، ٢)$ $(-١، ٢)$

مركز

قطع ناقص سيني

$\frac{(س-د)^٢}{م^٢} + \frac{(ص-هـ)^٢}{ب^٢} = ١$

المركز $(-١، ٢)$

$هـ = ٣-١ \Leftarrow هـ = ٤ ، ٢ب = ٦$

$\Leftarrow ب = ٣$

$ج^٢ = م^٢ - ب^٢ \Leftarrow ١٦ = م^٢ - ٩$

$\Leftarrow م^٢ = ٢٥$

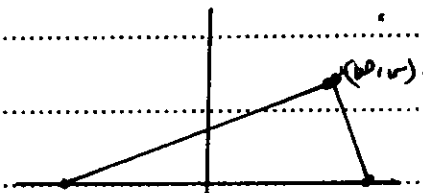
المعادلة هي $\frac{(س+١)^٢}{٢٥} + \frac{(ص-٢)^٢}{٩} = ١$

مثال (٣٧) وزارة (٢٠١٢)

حيث الشكل المجاور اذا تحركت النقطة ن $(س، ص)$ في المستوى بحيث يكون

$ن م + ن ع + م ع = ٢٨$ وحدة

معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن $(س، ص)$:



الحل

المحل الهندسي هو قطع ناقص سيني

بؤرتاه $(٤، ٠)$ ، $(-٤، ٠)$

ومركزه $(٠، ٠)$

معادلته $\frac{س^٢}{م^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

$م = ٤$

يتبع الحل ←

ن م + ن ع = ٢ م (تعريف القطع)

٢ م + ٨ = ٢ ٨

← ٢ م = ٢٠ ← م = ١٠

ح٢ = م٢ − ب٢ ← ١٦ = ١٠٠ − ب٢

ب٢ = ٨٤

ب = √٨٤ معادلة هي

س٢/١٠٠ + ص٢/٨٤ = ١

(ص − ٢)٢ = ١٦ جتا٢ هـ

جتا٢ هـ = (ص − ٢)٢ / ١٦ ... ①

① + ②

جا٢ هـ + جتا٢ هـ = ١

(س − ٥)٢/٩ + (ص − ٢)٢/١٦ = ١

قطع ناقص صادي

مثال (٣٨)

تتحرك النقطة و(س، ص) في المستوى الديكارتي بحيث ان

س = ٥ + ٣ جا هـ ، ص = ٢ + ٤ جتا هـ

حيث هـ : زاوية متغيرة

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة و(س، ص) وحدد نوعه؟

الحل

س − ٥ = ٣ جا هـ وبالتربيع

(س − ٥)٢ = ٩ جا٢ هـ

⇐ جا٢ هـ = (س − ٥)٢ / ٩ ... ①

ص − ٢ = ٤ جتا هـ بالتربيع

تدريب

تتحرك النقطة و(س، ص) بحيث ان س = ٥ جا هـ ، ص = ٣ جتا هـ فاوجد معادلة المسار لها .

مثال (٣٩)

تتحرك النقطة و(س، ص) في المستوى بحيث ان

س = ٢ (جتا ن − جا ن)

ص = ٧ (جتا ن + جا ن)

فاثبت ان المعادلة الديكارتية لهذا المنحنى هي قطع ناقص

← يتبع الحل

الحل

$س = م(\text{جتا}\theta - \text{جا}\theta)$

$\frac{س}{م} = \text{جتا}\theta - \text{جا}\theta$ بالتربيع

$\frac{س^2}{م^2} = \text{جتا}^2\theta - 2\text{جا}\theta\text{جتا}\theta + \text{جا}^2\theta$

$= 1 - \text{جا}2\theta$ ـــ ①

$\frac{ص}{ن} = \text{جتا}\theta + \text{جا}\theta$ التربيع

$\frac{ص^2}{ن^2} = \text{جتا}^2\theta + 2\text{جا}\theta\text{جتا}\theta + \text{جا}^2\theta$

$\frac{ص^2}{ن^2} = 1 + \text{جا}2\theta$ ـــ ②

① + ②

$\frac{س^2}{م^2} + \frac{ص^2}{ن^2} = 2$ بالقسمة على ②

$\frac{س^2}{م^2} + \frac{ص^2}{2ن^2} = 1$

مثال (٤) وزارة (٢٠٠١)

إذا كانت المعادلة

$ل س^2 + 5ص^2 = 17$ تمثل معادلة

قطع ناقص سيني ثابتة أن

$ل = \frac{17}{ن^2 + 2د^2}$

الحل

بقسمة المعادلة على 17

$\frac{ل س^2}{17} + \frac{5ص^2}{17} = 1$

$\frac{س^2}{\frac{17}{ل}} + \frac{ص^2}{\frac{17}{5}} = 1$

$م^2 = \frac{17}{ل} \leftarrow ل \times م^2 = 17$

$ل = \frac{17}{م^2}$ ولكن $د^2 = م^2 - ن^2$

$\leftarrow ن^2 + د^2 = م^2$

$ل = \frac{17}{ن^2 + 2د^2}$

مثال (٤)

جسر معقوس على شكل نصف قطع ناقص طول قاعدته الأفقية ١٠٠م وأقصى ارتفاع له ٢٠م أوجد ارتفاع الجسر على بعد ١٠م من مركز القاعدة

← يتبع الحل

الحل

الجسر على شكل قطع ناقص

معادلته

$\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{أ^2} = 1$

طول محورة الأكبر $= 2أ = 100$

$أ = 50 \Leftarrow أ^2 = 2500$

$ب = 20 \Leftarrow ب^2 = 400$

بعوض $أ^2, ب^2$ تصبح المعادلة

$\frac{س^2}{2500} + \frac{ص^2}{400} = 1$

النقطة $(10, ص)$ تحققه

$\Leftarrow \frac{100}{2500} + \frac{ص^2}{400} = 1$

$\Leftarrow \frac{ص^2}{400} = \frac{24}{25} \Leftarrow 25ص^2 = 400 \times 24$

$\Leftarrow ص^2 = 384$

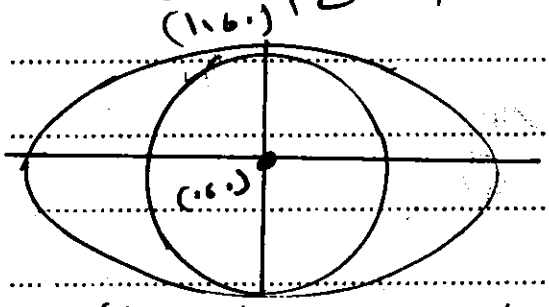
$ص = \sqrt{384}$ م

مثال (43) وزارة (2014)

عمل الشكل المجاور دائرة وقطع ناقص حيث كان مركز كل منهما $(0, 0)$، إذا كانت مساحة القطع الناقص تساوي ثلثي مساحة الدائرة المرسومة داخله فجد:

1- الاختلاف المركزي للقطع الناقص

2- معادلة القطع الناقص



الحل

مساحة القطع $= \frac{2}{3} \times$ مساحة الدائرة

$\pi أ ب = \frac{2}{3} \pi ن^2$

$\pi \times أ \times 10 = \frac{2}{3} \pi \times (10)^2$

$أ = \frac{100}{10} = 10$ لكل $ن = 10$

$ب = 10 \times \frac{2}{3} \Leftarrow ب = \frac{20}{3}$

$ح^2 = أ^2 - ب^2 \Leftarrow ح^2 = 100 - \frac{400}{9}$

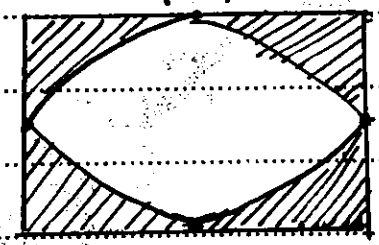
$ح = \frac{\sqrt{500}}{3}$

الاختلاف المركزي $= \frac{ح}{أ} = \frac{\frac{\sqrt{500}}{3}}{10}$

معادلة القطع $\frac{س^2}{400} + \frac{ص^2}{100} = 1$

مثال (٤٣)

الشكل المجاور عبارة عن قطع ناقص داخل مستطيل جد مساحة المنطقة المظللة



الحل

القطع على الصورة $\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{أ^2} = 1$

من الشكل $2أ = 10 \Leftarrow أ = 5$

$2ب = 6 \Leftarrow ب = 3$

المساحة = مساحة المستطيل - مساحة القطع

$= 10 \times 6 - 3 \times 5 \times \pi$

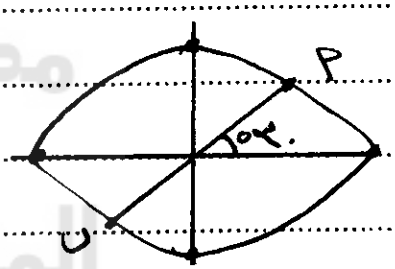
$= 60 - 15\pi$

مثال (٤٤)

الشكل المجاور P عبارة عن قطع ناقص معادلته

$4س^2 + 3ص^2 = 27$

جد طول $\overline{PQ}$



الحل

ميل $\overline{PQ} = ظا 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

معادلة $\overline{PQ}$

$ص = \frac{1}{\sqrt{3}} س$ بالتعويض في المعادلة

$4س^2 + 3(\frac{1}{\sqrt{3}} س)^2 = 27$

$4س^2 + 3 \times \frac{1}{3} س^2 = 27$

$3س^2 = 27 \Leftarrow 4س^2 = 27 \Leftarrow س^2 = 9$

$س = \pm 3$

$ص = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 3 \Leftarrow ص = \pm \sqrt{3}$

$P(3, \sqrt{3})$ $Q(-3, -\sqrt{3})$

طول $\overline{PQ} = \sqrt{(3+3)^2 + (\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{36 + 3} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٤٥)

اذا كانت $\frac{س^2}{ل-٣} + \frac{ص^2}{٥-ل} = ١$

فاوجد قيمة (قيم) ل التي تجعل المعادلة تمثل قطعًا ناقصًا

ملاحظة هامة

يجب ان يكون معامل $س^2 > ٠$، ومعامل $ص^2 > ٠$ في معادلة القطع الناقص.

الحل

$ل - ٣ > ٠$ ، $٥ - ل > ٠$

$ل > ٣$ ، $ل < ٥$

$ل \in (٣، ٥)$

مثال (٤٦)

قطع ناقص معادلته $\frac{س^2}{ب^2} + \frac{ص^2}{\frac{٣}{٤}ب^2} = ١$

أثبت انه في هذا القطع يكون البعد بين رأسيه يساوي ضعف البعد بين بؤرتيه.

الحل

$ح^2 = ب^2 - ب^2 \Leftarrow ح^2 = ب^2 - \frac{٣}{٤}ب^2$

$ح^2 = \frac{١}{٤}ب^2 \Leftarrow ب^2 = ٤ح^2$

$ب = ٢ح$

البعد بين الرأسين $= ٢ب = ٢(٢ح)$

$= ٤ح$ (البعد بين البؤرتين)

مثال (٤٧) وزارة (٢٠١٢)

يتحرك نقطة ن $(س، ص)$ في المستوى بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين

$س = ٤ جا هـ - ٥ جتا هـ$

$ص = ٣ جا هـ + ٥ جتا هـ$

حيث هـ : زاوية متغيرة أوجد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن $(س، ص)$

الحل

$س^2 = ١٦ جا^2 هـ - ٤٠ جا هـ جتا هـ + ٢٥ جتا^2 هـ$

$= ١ - ٢٥ جا^2 هـ + ٢٥ جا هـ جتا هـ$

$= ١ - ٢٥ جا^2 هـ$ ---- ①

$ص^2 = ٩ جا^2 هـ + ٣٠ جا هـ جتا هـ + ٢٥ جتا^2 هـ$

$= ٢٥ + ٣٠ جا هـ جتا هـ - ١٦ جا^2 هـ$

$= ٢٥ - ٢٥ جا^2 هـ$ ---- ②

بجمع ①، ②

$\Leftarrow$ حاصه $= 2$ ص^2 نعوضها في ① $\Leftarrow$

س$^2 = 1 - 2$ ص^2

س$^2 + 2$ ص$^2 = 1$

$\frac{\text{س}^2}{1} + \frac{\text{ص}^2}{\frac{1}{2}} = 1$

قطع ناقص

تدريب

اذا كانت المعادلة

4 س$^2 + 9$ ص$^2 = 15$ تمثل معادلة قطع ناقص محوره الأكبر يوازي محور السينات اثبت ان

$4 = \frac{15}{\text{ب}^2 + 2^2}$

مثال (٤٨) وزارة (٢٠١٤) صيغة جد معادلة القطع الناقص الذي طول محوره الاصغر (٢) وحدة وبؤرتاه هما نقطتي تقاطع منحنى القطع المكافئ الذي معادلته س$^2 =$ ص مع منحنى القطع الناقص الذي معادلته ص$^2 = 10 - 2$ س^2

الحل

نجد نقطتي التقاطع

س$^2 =$ ص نعوضها في ص$^2 = 10 - 2$ س^2

س$^4 + 2$ س$^2 - 10 = 0$

(س$^2 + 5$)(س$^2 - 2$) $= 0$

س$^2 + 5 \neq 0$ ، س$^2 = 2 \Leftarrow$ س $= \pm\sqrt{2}$

عندما س $= \sqrt{2}$ فان ص $= 2$

$(\sqrt{2}, 2)$

عندما س $= -\sqrt{2} \Leftarrow$ ص $= 2$ $(-\sqrt{2}, 2)$

2 حـ $= 2 \Leftarrow \sqrt{2}$ حـ $= 2 \Leftarrow$ حـ $= \sqrt{2}$

مركز القطع هو $(0, 2)$ وهو منتصف المسافة بين البؤرتين

المعادلة $\frac{(\text{س} - \text{د})^2}{\text{م}^2} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{ب}^2} = 1$

لكن 2 ب $= 2 \Leftarrow$ ب $= 1 \Leftarrow$ ب$^2 = 1$

م$^2 =$ ب$^2 +$ حـ$^2 = 1 + 3 = 4$

المعادلة $\frac{(\text{س} - 0)^2}{4} + \frac{(\text{ص} - 3)^2}{1} = 1$

مثال (٤٩) وزارة (٢٠١٥)

قطع ناقص مساحته (40π) وحدة مربعة وراساه $(\pm 8, 0)$

جد معادلته

الحل

مساحة القطع $= \pi \times ب \times ب = 40\pi$

$ب \times ب = 40$

$ب = 8 \leftarrow ب^2 = 64$

$\leftarrow 8 \times ب = 40 \leftarrow ب = 5$

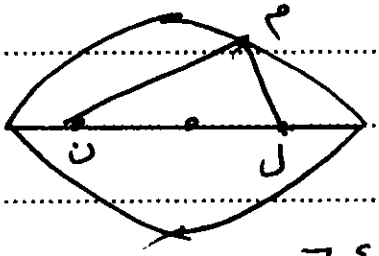
$ب^2 = 25$

المركز $(0, 0)$ سيني

المعادلة

$$\frac{س^2}{64} + \frac{ص^2}{25} = 1$$

مثال (٥٠) وزارة (٢٠١٤) صمم الشكل المجاور على شكل منحنى قطع ناقص مركزه نقطة الأصل $(0, 0)$ ويؤثر بالنقطتين ل، ن واختلافه المركزي (0.6) ما إذا كان محيط المثلث م ل ن يساوي 64 فجد معادلة هذا القطع



الحل

$م^2 + ح^2 = 64$

$\leftarrow م + ح = 32 \ldots\ldots (1)$

لكن $\frac{ح}{م} = 0.6 \leftarrow ح = 0.6 م$

بالتعويض في (1)

$م + 0.6 م = 32 \leftarrow 1.6 م = 32$

$\leftarrow \boxed{م = 20}$

$\because ح = 12 \leftarrow ح^2 = م^2 - ب^2$

$\leftarrow 144 = 400 - ب^2$

$ب^2 = 400 - 144 = 256$

القطع سيني $\frac{(س-1)^2}{400} + \frac{(ص-1)^2}{256} = 1$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

رياض ومدارس جامعة الزرقاء

الثاني الثانوي العلمي | الوحدة الخامسة / القطوع المخروطية | ناجح الجمزاوي

0795656881 | 0788656057

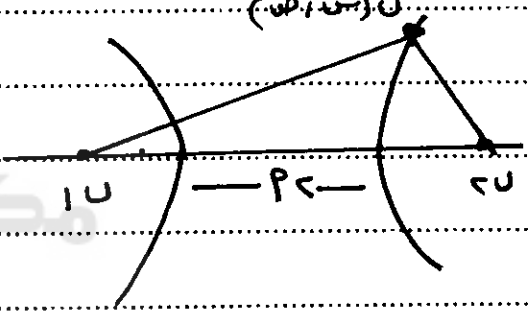
القطع الزائد

تعريف

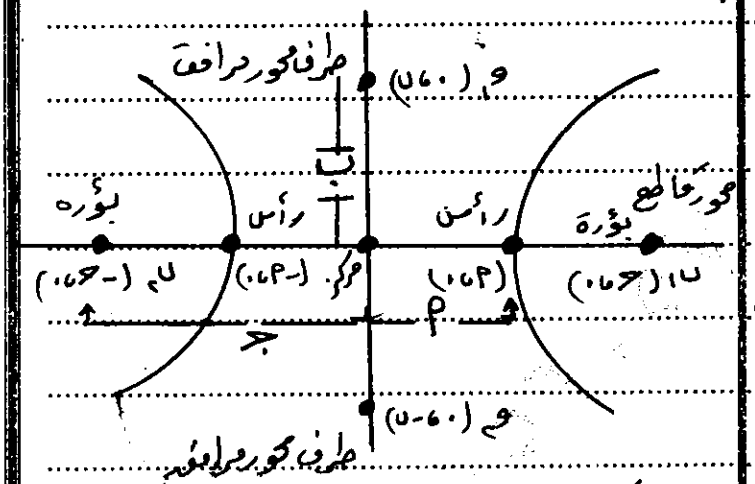
القطع الزائد: هو المحل الهندسي لمجموعة النقط المستوية ن(س، ص) التي تتحرك بحيث يكون الفرق المطلق لبعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارًا ثابتًا هو ٢ب.

٢ب: طول المحور القاطع والنقطتين الثابتتين (البؤرتين)

ويعني أن $|ن ن_1 - ن ن_2| = ٢ب$



عناصر القطع الزائد



١. المركز م

٢. البؤرتان ل١، ل٢ (حـ، ٠)، (-حـ، ٠)

٣. الرأسان (ب، ٠)، (-ب، ٠)

٤. طرفا المحور المرافق (٠، ب)، (٠، -ب)

٥. المحور القاطع: هو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين

٦. المحور المرافق: هو القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين و، و

٧. ب = بعد المركز عن الرأس

ب = بعد المركز عن طرف المحور المرافق

حـ = بعد المركز عن البؤرة

مكتبة الوسام
ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

طول المحور القاطع = ٢ أ ومعادلته ص = ٠

طول المحور المرافق = ٢ ب ومعادلته س = ٠

البعد البؤري = ٢ جـ (المسافة بين البؤرتين)

جـ > أ ولا يوجد علاقة بين أ ، ب

الاختلاف المركزي هـ : $\frac{جـ}{أ} > ١$

لأن جـ > أ

بُعد الرأس عن البؤرة القريبة = أ - جـ

بُعد الرأس عن البؤرة البعيدة = أ + جـ

$جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$

١. معادلة القطع الزائد السيني

$$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

٢. معادلة القطع الزائد الصادي

$$\frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{س^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

وتميز بين القطع الزائد السيني عن الصادي من خلال الإشارة الموجبة

- إذا كانت إشارة الموجب مع السينات فهو سيني
- إذا كانت إشارة الموجب مع الصادات فهو صادي

$أ^{٢}$ مع الموجب دائماً

$ب^{٢}$ مع السالب دائماً

برهان معادلة القطع الزائد السيني

$$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

البرهان

$|ن ن_{١}| - |ن ن_{٢}| = ٢أ$

$$\sqrt{(س-جـ)^{٢} + ص^{٢}} - \sqrt{(س+جـ)^{٢} + ص^{٢}} = ٢أ$$

$$\sqrt{(س-جـ)^{٢} + ص^{٢}} = \pm ٢أ + \sqrt{(س+جـ)^{٢} + ص^{٢}}$$

$$(س-جـ)^{٢} + ص^{٢} = (\pm ٢أ)^{٢} + (س+جـ)^{٢} + ص^{٢} + \sqrt{(س+جـ)^{٢} + ص^{٢}}$$

بتربيع الطرفين

$(س-هـ)^2 + ص^2 = ٤ب^2 \pm ٤ب\sqrt{(س+هـ)^2 + ص^2}$

$+ (س+هـ)^2 + ص^2$

$س^2 - ٢هـس + هـ^2 + ص^2 = ٤ب^2 \pm ٤ب\sqrt{(س+هـ)^2 + ص^2}$

$+ س^2 + ٢هـس + هـ^2$

$\Leftarrow -٢هـس = ٤ب^2 + ٤ب\sqrt{(س+هـ)^2 + ص^2}$

$+ ٢هـس$

$\pm ٤ب\sqrt{(س+هـ)^2 + ص^2} = ٤ب^2 + ٤هـس$

بالقسمة على ٤

$\pm ب\sqrt{(س+هـ)^2 + ص^2} = ب^2 + هـس$

بالتربيع

$ب^2((س+هـ)^2 + ص^2) = ب^4 + ٢ب^2هـس + هـ^2س^2$

$ب^2(س^2 + ٢هـس + هـ^2 + ص^2) = ب^4 + ٢ب^2هـس + هـ^2س^2$

$ب^2س^2 + ٢ب^2هـس + ب^2هـ^2 + ب^2ص^2 = ب^4 + ٢ب^2هـس + هـ^2س^2$

$ب^2س^2 + ب^2هـ^2 + ب^2ص^2 = ب^4 + هـ^2س^2$

$ب^2س^2 - هـ^2س^2 + ب^2ص^2 = ب^4 - ب^2هـ^2$

$(ب^2 - هـ^2)س^2 + ب^2ص^2 = ب^2(ب^2 - هـ^2)$

لكن $هـ^2 = ب^2 + ب^2 \Leftarrow ب^2 = هـ^2 - ب^2$

$\Leftarrow -ب^2س^2 + ب^2ص^2 = ب^2 \times -ب^2$ بالقسمة

على $-ب^2$ $\quad ب^2س^2 - ب^2ص^2 = ب^2ب^2$

بالقسمة على $ب^2ب^2$ فينتج أن

$\frac{س^2}{ب^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

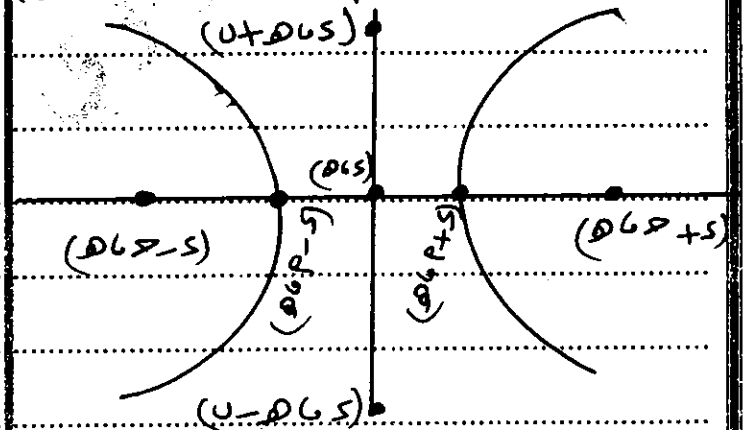
مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

حالات القطع الزائد

المركز (ك ، هـ)

① إذا كان محورة القاطع ينطبق على أو يوازي محور السينات (سيني افقي)



المعادلة

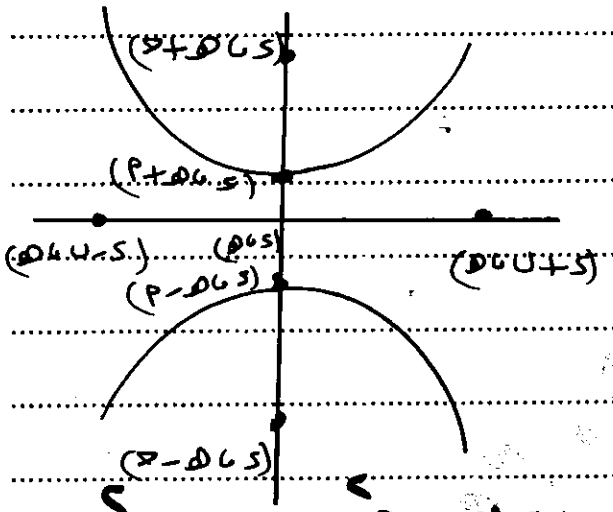
$$\frac{(س - ك)^2}{أ^2} - \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = 1$$

الاشارة عكس البسط

معادلة المحور القاطع ص = هـ

معادلة المحور المرافق س = ك

② اذا كان محورة القاطع ينطبق أو يوازي محور الصادات (صادي عمودي)



المعادلة

$$\frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} - \frac{(س - ك)^2}{ب^2} = 1$$

معادلة المحور القاطع س = ك

معادلة المحور المرافق ص = هـ

ملاحظات هامة

١. أ^٢ هي مقام الموجب بإشارة س أو ص مختلفة

٢. اذا كانت أ^٢ تحت س^٢ (الرسمة افقية) سيني

٣. اذا كانت أ^٢ تحت ص^٢ (الرسمة عمودية) صادي

٤. معامل س = معامل ص = ١

٥ - المركز يتوسط الرأسين والبؤرتين والطرفين

٦. معادلة المحور القاطع تعاكس المحور المرافق

مثال ①

جد عناصر القطع الزائد

$\frac{س^2}{25} - \frac{ص^2}{16} = 1$

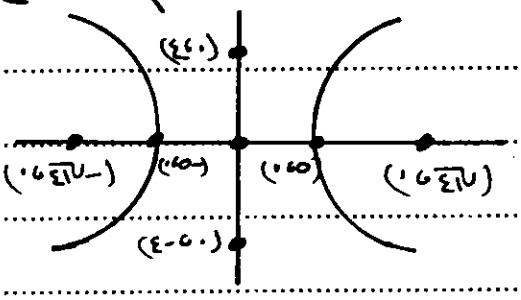
الحل

المركز (٠،٠)

$ا^2 = 25 \Leftarrow ا = 5$ ، $ب^2 = 16 \Leftarrow ب = 4$

ومن العلاقة $ج^2 = ا^2 + ب^2$

$ج^2 = 25 + 16 = 41 \Leftarrow ج = \sqrt{41}$



طول المحور القاطع $2ا = 10$

طول المحور المرافق $2ب = 8$

البعد البؤري $2ج = 2\sqrt{41}$

الاختلاف المركزي $هـ = \frac{ج}{ا} = \frac{\sqrt{41}}{5} > 1$

مثال ②

جد عناصر القطع $س^2 - 4ص^2 + 4 = 0$

الحل

بما ان $س^2$ ، $ص^2$ مختلفة في الإشارة

∴ القطع زائد

نرتب $س^2 - 4ص^2 = -4$ بالقسمة على -4

$\frac{س^2}{-4} - \frac{4ص^2}{-4} = \frac{-4}{-4}$

$ص^2 - \frac{س^2}{4} = 1$ (صادي)

المركز (٠،٠)

$ا^2 = 1 \Leftarrow ا = 1$ ، $ب^2 = 4 \Leftarrow ب = 2$

$ج^2 = ا^2 + ب^2 = 1 + 4 = 5 \Leftarrow ج = \sqrt{5}$

طول المحور القاطع $2ا = 2$

طول المحور المرافق $2ب = 4$

البعد البؤري $2ج = 2\sqrt{5}$

الاختلاف المركزي $هـ = \frac{ج}{ا} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$

البؤرتان $(٠، \pm\sqrt{5})$

الرأسان $(٠، \pm 1)$

طرفا المحور المرافق $(\pm 2، ٠)$

معادلة المحور القاطع $س = ٠$

معادلة المحور المرافق $ص = ٠$

تدريب

جد عناصر القطع $س^2 - ص^2 = -1$

طول المحور المقاطع $أ ب = 4$

طول المحور المرافق $ج د = 2\sqrt{5}$

البعد البؤري $2جـ = 6$

الاختلاف المركزي $هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{3}{2}$

معادلة المحور المقاطع $ص = 1$

معادلة المحور المرافق $س = 0$

مثال ② جد عناصر القطع الزائد $\frac{س^2}{8} - \frac{(ص-1)^2}{1} = \frac{1}{2}$

الحل

نرتب المعادلة بالضرب في 2

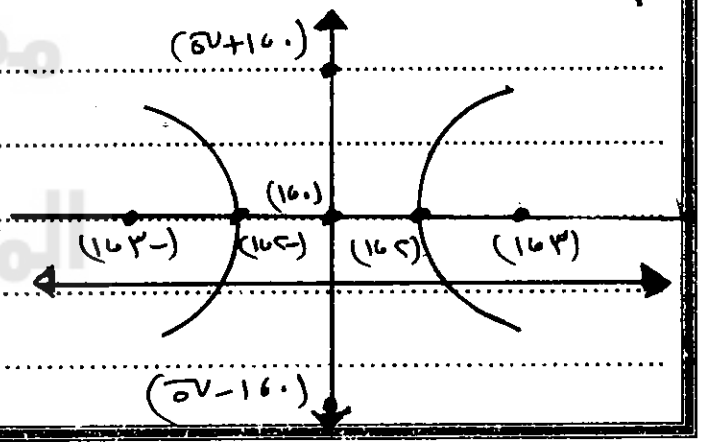
$\frac{س^2}{4} - \frac{(ص-1)^2}{5} = 1$

المركز $(0، 1)$

$أ^2 = 4 \Leftarrow أ = 2$ ، $ب^2 = 5 \Leftarrow ب = \sqrt{5}$

من العلاقة $جـ^2 = أ^2 + ب^2 \Leftarrow جـ^2 = 4 + 5 = 9$

$\Leftarrow جـ = 3$



مثال ④ وزارة (2013)

قطع مخروطي معادلته $\frac{(ص+\frac{3}{2})^2}{4} - \frac{(س+2)^2}{3} = \frac{29}{4}$

جد ما يأتي

1. مركز القطع 2. رأسي القطع

3. طول المحور المرافق 4. الاختلاف المركزي

الحل

نضرب المعادلة في $\frac{4}{29}$

$\frac{(ص+\frac{3}{2})^2}{29} - \frac{(س+2)^2}{\frac{29}{4}} = 1$

قطع زائد حسيني

يتبع الحل

١. المركز $(-٢، \frac{-٣}{٢})$

$\therefore P^٢ = \frac{٣٩}{١٢} = \frac{١٣}{٤} \Leftarrow P = \frac{\sqrt{١٣}}{٢}$

احداثيات البؤرتين =

$(-٢ + \frac{\sqrt{١٣}}{٢}، \frac{-٣}{٢})$ ، $(-٢ - \frac{\sqrt{١٣}}{٢}، \frac{-٣}{٢})$

$\therefore ب^٢ = \frac{٣٩}{٤} \Leftarrow ب = \frac{\sqrt{٣٩}}{٢}$

طول المحور المرافق $= ٢ب = \sqrt{٣٩}$

$٤ \cdot P^٢ = ب^٢ + د^٢ \Leftarrow د^٢ = \frac{٣٩}{٤} + \frac{١٣}{٤}$

$= \frac{٥٢}{٤} \Leftarrow د = \frac{\sqrt{٥٢}}{٢}$

الاختلاف المركزي $= \frac{د}{P} = \frac{\frac{\sqrt{٥٢}}{٢}}{\frac{\sqrt{١٣}}{٢}} = \sqrt{٤} = ٢$

مثال ⑤

جد عناصر القطع الزائد

$\frac{(٣س - ٩)^٢}{٣٦} - \frac{(ص + ٤)^٢}{٣٦} = ١$

يتبع كل

نرتب المعادلة

$\frac{(٣س - ٣)^٢}{٣٦} - \frac{(ص + ٢)^٢}{٣٦} = ١$

$\frac{٩(س - ٣)^٢}{٣٦} - \frac{٤(ص + ٢)^٢}{٣٦} = ١$

$\frac{(س - ٣)^٢}{٤} - \frac{(ص + ٢)^٢}{٩} = ١$

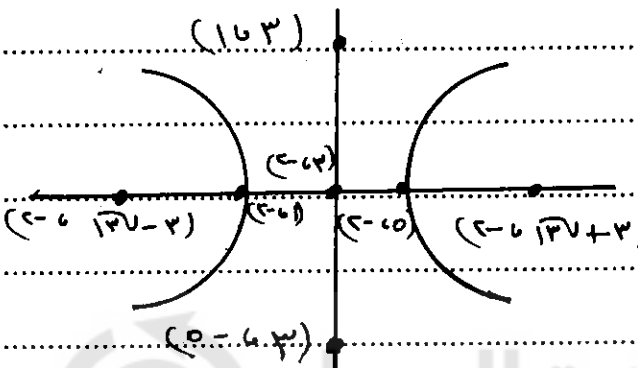
سيني افقي

المركز $(٣، -٢)$ ، $P^٢ = ٤ \Leftarrow P = ٢$

$ب^٢ = ٩ \Leftarrow ب = ٣$

من العلاقة $د^٢ = P^٢ + ب^٢ = ٤ + ٩ = ١٣$

$د = \sqrt{١٣}$



طول المحور القاطع $= ٢P = ٤$

معادلة المحور القاطع $\Leftarrow س = -٢$

طول المحور المرافق $= ٢ب = ٦$

معادلة المحور المرافق $\Leftarrow ص = ٣$

البعد البؤري $= ٢د = ٢\sqrt{١٣}$

مثال ⑥ (وزارة ٢٠١٠)

قطع زائد معادلته

$9س^2 - 18س = 4ص^2 + 8ص + 31$

جد عناصره

الحل

اكمال مربع لسينات و الصادات

$9س^2 - 18س - 4ص^2 - 8ص = 31$

$9(س^2 - 2س) - 4(ص^2 + 2ص) = 31$

$9(س^2 - 2س + (\frac{2}{2})^2) - 4(ص^2 + 2ص + (\frac{2}{2})^2)$

$= 31 + 9 - 4$

$9(س^2 - 2س + 1) - 4(ص^2 + 2ص + 1) = 36$

$9(س-1)^2 - 4(ص+1)^2 = 36$

بالقسمة على ٣٦

$\frac{9(س-1)^2}{36} - \frac{4(ص+1)^2}{36} = \frac{36}{36}$

$\frac{(س-1)^2}{4} - \frac{(ص+1)^2}{9} = 1$

قطع زائد سيني

المركز $(1، -1)$

$ح^2 = 4 \leftarrow ح = 2$

احداثي الرأسين

$(1+2، -1)$ و $(1-2، -1)$

$(3، -1)$ و $(-1، -1)$

$ب^2 = 9 \leftarrow ب = 3$

$ح^2 = م^2 + ب^2 \leftarrow ح^2 = 4 + 9 = 13$

$ح = \sqrt{13}$

احداثي البؤرتين

$(1+\sqrt{13}، -1)$ و $(1-\sqrt{13}، -1)$

طول المحور المقاطع $= 2م = 4$ ، معادلة $ص = -1$

الاختلاف المركزي $= \frac{ح}{م} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

مثال ⑦

جد معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل واحداثيات طرفي المحور المرافق $(0، \pm 6)$ وطول محوره القاطع ١٦ وحدة

الحل

$\frac{(ص-ك)^2}{ب^2} - \frac{(س-د)^2}{م^2} = 1$

المركز منتصف الطرفان $(0، 0)$

$\frac{ص^2}{ب^2} - \frac{س^2}{م^2} = 1$

$2ب = 6 \leftarrow ب = 3$

$2م = 16 \leftarrow م = 8$

$\frac{ص^2}{9} - \frac{س^2}{64} = 1$

يتبع الحل

طول محورة القاطع $2P = 16 \Leftarrow$

$P = 8 \Leftarrow P^2 = 64$

طول المحور المرافق $2b = 2 \times 6 = 12$

$b = 6 \Leftarrow b^2 = 36$

المعادلة هي $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

مثال ⑧

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(0, \pm 10)$ وطول محوره القاطع يساوي 8 ؟

الحل

قطع زائد صادي مركزه $(0,0)$

$\frac{y^2}{P^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$2P = 8 \Leftarrow P = 4$ ، $c = 10$

$c^2 = P^2 + b^2 \Leftarrow 100 = 16 + b^2$

$b^2 = 84$

معادلته هي

$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{84} = 1$

مثال ⑨

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\pm 10, 0)$ ويمر بالنقطة $(8, -2)$

الحل

الرأسين $(\pm 6, 0)$

قطع زائد سيني مركزه $(0,0)$

$\frac{x^2}{P^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

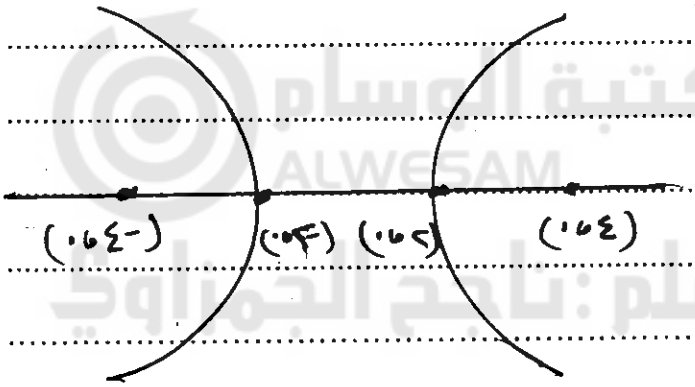
$P = 6$

$c^2 = P^2 + b^2$ ، $c = 10$

$100 = 36 + b^2 \Leftarrow b^2 = 64$

معادلته هي

$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$



مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑩

جد معادلة القطع الزائد الذي محورة القاطع هو محور الصادات ومركزه (٠،٠) وطولا محوريه ٦ ، ٨ سم

الحل

بما ان مركزه (٠،٠) ومحورة القاطع محور الصادات

فالقطع على الصورة $\frac{ص^2}{م^2} - \frac{س^2}{ل^2} = ١$

صادي محوري

وحيث انه لا شرط على م ، ل فنوجد حالتان

الحالة الأولى

إذا كان محوره القاطع ٢م = ٦ ← م = ٣

← م² = ٩

ومحورة المرافق ٢ل = ١٠ ← ل = ٥

ل² = ٢٥

المعادلة هي $\frac{ص^2}{٩} - \frac{س^2}{٢٥} = ١$

الحالة الثانية

محوره القاطع ٢م = ١٠ ← م = ٥

م² = ٢٥ ، ومحورة المرافق ٢ل = ٦

← ل = ٣ ← ل² = ٩

$\frac{ص^2}{٢٥} - \frac{س^2}{٩} = ١$

مثال ⑪

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٠،٠) ويمر بالنقطة (٢،٣) وطول محورة المرافق يساوي ٢√٣ ؟

الحل

ممكن ان يكون قطع زائد سيني أو صادي

أولاً قطع زائد سيني

$\frac{س^2}{م^2} - \frac{ص^2}{ل^2} = ١$

٢ل = ٢√٣ ← ل = √٣

يمر بالنقطة (٢،٣) نعوض

$\frac{٤}{م^2} - \frac{٩}{٣} = ١ \leftarrow \frac{٤}{م^2} - \frac{ص^2}{ل^2} = ١$

← ٤ = ٤م² ← ٤ = م² ← م = ١

معادلته هي $س^2 - \frac{ص^2}{٣} = ١$

ثانياً قطع زائد صادي

$\frac{ص^2}{م^2} - \frac{س^2}{ل^2} = ١$ ، ٢ل = ٢√٣ ← ل = √٣

$\frac{ص^2}{م^2} - \frac{٣}{٣} = ١$ نعوض (٢،٣)

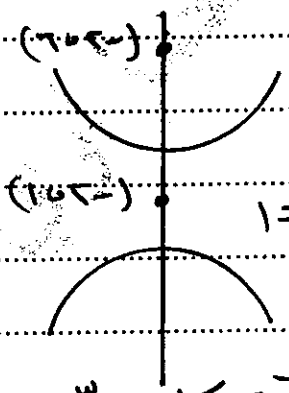
$\frac{٩}{م^2} - \frac{٤}{٣} = ١ \leftarrow م^2 = \frac{٢٧}{٥}$

معادلته $\frac{ص^2}{\frac{٢٧}{٥}} - \frac{س^2}{٣} = ١$

مثال (١٢)

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(-٢، ١)$ واحدى بؤرتيه $(-٢، ٦)$ وطول محوره المرافق ٦ وحدات.

الحل



القطع على الصورة

$$\frac{(ص-و)^2}{ب^2} - \frac{(س-ه)^2}{أ^2} = ١$$

المركز $(-٢، ١)$

محورة المرافق $٢ب = ٦ \leftarrow ب = ٣$

$ب^2 = ٩$

$ج = ٦ - ١ = ٥ \Leftarrow ج^2 = ٢٥$

$ج^2 = ب^2 + أ^2 \Leftarrow ٢٥ = ٩ + أ^2$

$\Leftarrow أ^2 = ١٦$

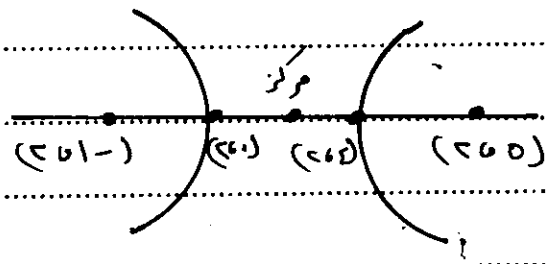
المعادلة هي $\frac{(ص-١)^2}{١٦} - \frac{(س+٢)^2}{٩} = ١$

مثال (١٣)

جد معادلة القطع الزائد بؤرتاه $(-٢، ٦)$ و $(-٢، ٥)$ ورأساه $(-٢، ٤)$ و $(-٢، ٠)$

قطع زائد رأسي معادلته:

$$\frac{(س-ه)^2}{ب^2} - \frac{(ص-و)^2}{أ^2} = ١$$



المركز منتصف الرأسين

$(-٢، \frac{٤+٠}{٢}) = (-٢، ٢)$

$و = ٤ - ٢ \leftarrow و = ٢$

$ج = ٥ - ٢ \Leftarrow ج = ٣$

$ج^2 = أ^2 + ب^2 \leftarrow ٩ = ٤ + ب^2$

$ب^2 = ٥$

معادلته هي

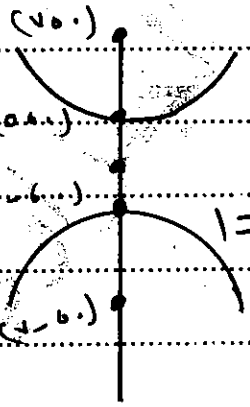
$$\frac{(س+٢)^2}{٤} - \frac{(ص-٢)^2}{٥} = ١$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٤)

جد معادلة قطع زائد بؤرتاه $(٧ \pm ٠, ٠)$ ويتقاطع مع محور الصادات عندما $ص = \pm ٥$

الحل



١ القطع على الصورة

$$\frac{(ص-هـ)^٢}{ب^٢} - \frac{(س-د)^٢}{ل^٢} = ١$$

$$ج^٢ = ل^٢ + ب^٢ \leftarrow ٧^٢ = ل^٢ + ٥^٢ \leftarrow ٤٩ = ل^٢ + ٢٥$$

$$\leftarrow ل^٢ = ٢٤$$

المعادلة هي $\frac{ص^٢}{٢٥} - \frac{س^٢}{٢٤} = ١$

مثال (١٥)

جد معادلة القطع الزائد الذي محوره المرافق موازٍ للسينات ومركزه $(٣, ٢)$ واختلافه المركزي $(\frac{٥}{٣})$، وبعد الرأس عن البؤرة القريبة منه يساوي ٤ ؟

الحل

المحور القاطع يوازي محور الصادات ←

← قطع زائد صادي معادلته

$$\frac{(ص-هـ)^٢}{ب^٢} - \frac{(س-د)^٢}{ل^٢} = ١$$

المركز $(٢, ٣)$

$$\frac{ج}{ب} = \frac{٥}{٣} \leftarrow ٣ج = ٥ب \quad \cdots (١)$$

$ج - ب = ٤$ بُعد الرأس عن البؤرة القريبة

$$\leftarrow ج = ب + ٤$$ وبالتعويض في (١)

$$\leftarrow ٣ب + ١٢ = ٣(ب + ٤) \leftarrow ٥ب = ٣ب + ١٢$$

$$\leftarrow ٢ب = ١٢ \leftarrow ب = ٦$$

$$\leftarrow ج = ١٠$$

$$ج^٢ = ب^٢ + ل^٢ \leftarrow ١٠٠ = ٣٦ + ل^٢$$

$$\leftarrow ل^٢ = ٦٤ \leftarrow ل = ٨$$

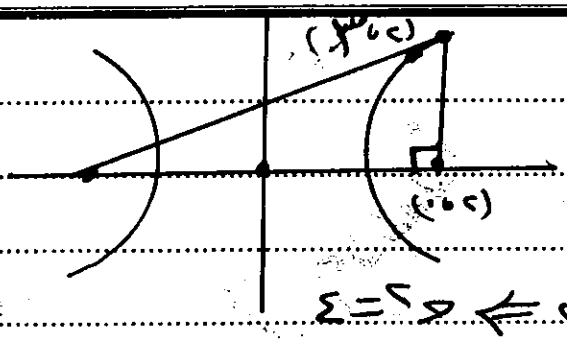
$$\frac{(ص-٣)^٢}{٣٦} - \frac{(س-٢)^٢}{٦٤} = ١$$

مثال (١٦)

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(٢, ٣)$ وإحدى بؤرتيه $(٠, ٢)$

← يتبع الحل

المعلم: ناجح الجمزاوي



$\because$ د = ك $\Leftarrow$ د^2 = ك^2

النقطة (٣، ٢ ك) تحقق القطع

على الصورة $\frac{س^2}{ب^2} - \frac{ص^2}{ك^2} = ١$

نعوض النقطة (٣، ٢ ك)

$\frac{٩}{ب^2} - \frac{ك^2}{ك^2} = ١ \Leftarrow \frac{٤ك^2 - ٩ب^2}{ب^2 ك^2} = ١$

$\Leftarrow ٤ك^2 - ٩ب^2 = ب^2 ك^2$ ---- (١)

$\Leftarrow$ د^2 = ب^2 + ك^2 $\Leftarrow$ ٤ = ب^2 + ك^2

$\Leftarrow$ ك^2 = ٤ - ب^2 نعوضها في (١)

$\Leftarrow ٤(٤ - ب^2) - ٩ب^2 = ب^2(٤ - ب^2)$

$١٦ - ٤ب^2 - ٩ب^2 = ٤ب^2 - ب^4$

$ب^4 - ١٧ب^2 + ١٦ = ٠$

$(ب^2 - ١٦)(ب^2 - ١) = ٠$ $\Leftarrow$ ب^2 = ١٦ مرفوض

لأن د > ٢

ب^2 = ١

لكن ك^2 = ٤ - ب^2 = ٤ - ١ = ٣

المعادلة هي $\frac{س^2}{١} - \frac{ص^2}{٣} = ١$

حل آخر

من خلال تعريف القطع الزائد وظريته فيثاغورس

مثال (١٧) وزارة (٢٠١١)

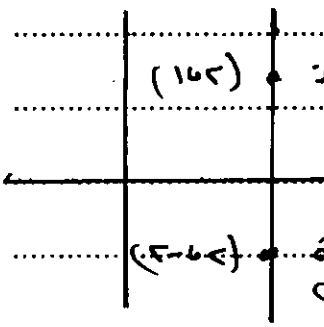
قطع زائد مركزه النقطة (١، ٢) واحدى بؤرتيه النقطة (٦، ٢-) وطوله لبؤري ثلاثة امثال طول محوره القاطع جد كلاً مما يأتي

١. احداثيات كل من الرأسين

٢. الاختلاف المركزي

٣. معادلة القطع

الحل



قطع زائد صادي

معادلته $\frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} - \frac{(س - د)^2}{ك^2} = ١$

المركز (١، ٢) $\Leftarrow$ هـ = ٢ - ٢ = ٠

د^2 = ٣ × ٢^2 $\Leftarrow$ ٦ = ٢ب $\Leftarrow$ ب = ٣

د^2 = ب^2 + ك^2 $\Leftarrow$ ٩ = ١ + ك^2

$\Leftarrow$ ك = ٢$\sqrt{٢}$

١. احداثيات الرأسين (١، ٣) و (١، ٣-)

(ب، ٠) (-ب، ٠)

٢) هـ = $\frac{د}{ب} = \frac{٣}{٣} = ١$

٣) معادلته هي $\frac{(ص - ١)^2}{١} - \frac{(س - ١)^2}{٨} = ١$

مثال (١٨)

جد المحل الهندسي لمجموعة النقط (س، ص) التي تتحرك بحيث ان القوه المطلقه لبعدها عن النقطتين (١، ١) ، (-١، ١) يساوي ٤ وحدات

الحل

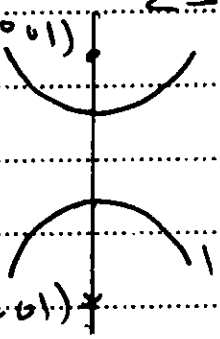
من تعريف القطع الزائد المحل الهندسي هنا قطع زائد بؤرتيه (١، ١) ، (-١، ١)

وطول محوره القاطع ٢ب = ٤

← ب = ٢ ← ب^{٢} = ٤

من اشكال القطع على الصورة

$\frac{(ص - و)^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{(س - ء)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$



المركز يتوسط البؤرتين

م = $(\frac{١+١}{٢}، \frac{٥+-١}{٢}) = (١، ٢)$

٢جـ = ٥ - -١ = ٦ ← جـ = ٣

جـ^{٢} = ٩ لكن جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} ← ٩ = ٤ + ب^{٢}

ب^{٢} = ٥

معادلة $\frac{(ص - ٢)^{٢}}{٤} - \frac{(س - ١)^{٢}}{٥} = ١$

مثال (١٩)

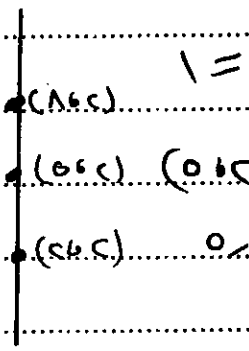
قطع مخروطي بؤرتاه (٢، ٢) ، (٨، ٢) اذا كان البعد بين احد رأسيه والبؤره القريبه يساوي (١) جد معادلته

الحل

صنا صيه الممكنه ان يكون القطع المخروطي قطع ناقص أو قطع زائد

① اذا كان قطع ناقص يكون صيغة

$\frac{(س - ء)^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{(ص - و)^{٢}}{أ^{٢}} = ١$



المركز $(\frac{٢+٨}{٢}، ٢) = (٥، ٢)$

البعد بين الرأس عن البؤره القريبه = ١

← جـ - أ = ١ ← ٣ - أ = ١ ← أ = ٢

جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} ← ٩ = ١٦ - ب^{٢}

← ب^{٢} = ٧ ← ب = $\sqrt{٧}$

معادلة هي $\frac{(س - ٥)^{٢}}{٧} + \frac{(ص - ٢)^{٢}}{١٦} = ١$

② اذا كان قطع زائد

معادلة $\frac{(ص - و)^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{(س - ء)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

← يتبع الحل

المركز (٤، ٥)

$ج = ٨ - ٥ \leftarrow ج = ٣$

البعد البؤري $= ١$

$ج - ب = ١ \leftarrow ٣ - ب = ١ \leftarrow ب = ٢$

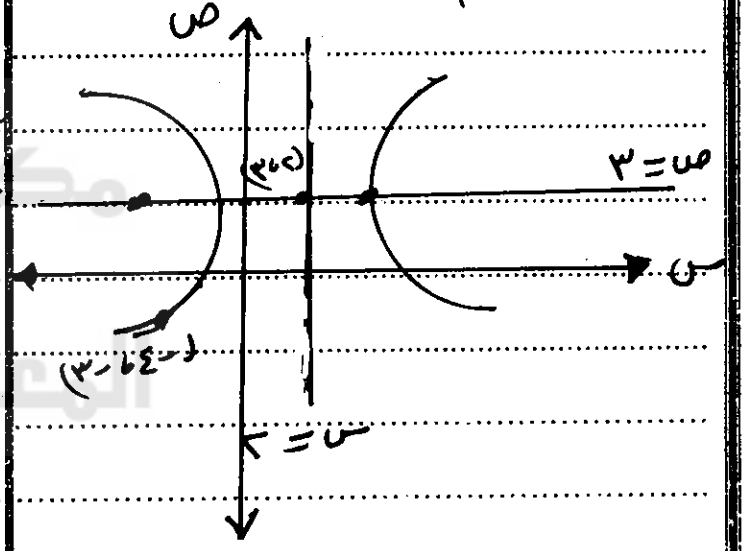
$ج^٢ = ب^٢ + د^٢ \leftarrow ٩ = ٤ + د^٢$

$\leftarrow د = \sqrt{٥}$ معادلة هي

$\frac{(ص - ٥)^٢}{٤} - \frac{(س - ٤)^٢}{٥} = ١$

مثال (٢٠)

جد معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي يساوي $\frac{\sqrt{١٣}}{٣}$ ويمر بالنقطة $(-٤، ٣)$ ومركزه يقع على المستقيم $س = ٢$ وبؤرتاه تقعان على المستقيم $ص = ٣$.



قطع زائد سيني معادلته

$\frac{(س - د)^٢}{ب^٢} - \frac{(ص - هـ)^٢}{ب^٢} = ١$

مركز $(٢، ٣) \leftarrow \frac{(س - ٢)^٢}{ب^٢} - \frac{(ص - ٣)^٢}{ب^٢} = ١$

$\frac{د}{ب} = \frac{\sqrt{١٣}}{٣} \leftarrow ٣ج = \sqrt{١٣}\, ب$ ... ①

تحقق معادلته $(-٤، ٣)$

$\frac{(-٤ - ٢)^٢}{ب^٢} - \frac{(٣ - ٣)^٢}{ب^٢} = ١$

$\frac{٣٦}{ب^٢} - \frac{٣٦}{ب^٢} = ١$ ... ②

$ج^٢ = ب^٢ + د^٢$ ... ③

من ① $\leftarrow ج = \frac{\sqrt{١٣}}{٣} ب \leftarrow ج^٢ = \frac{١٣}{٩} ب^٢$

$\leftarrow ج^٢ = \frac{٧}{٣} ب^٢$ بتعويضها في (٣)

$\frac{٧}{٣} ب^٢ = ب^٢ + د^٢ \leftarrow د^٢ = \frac{٧}{٣} ب^٢ - ب^٢ = \frac{٤}{٣} ب^٢$

$\leftarrow \frac{٤}{٣} ب^٢ = د^٢$ وبالتعويض في معادلة ②

$\frac{٣٦}{ب^٢} - \frac{٣٦}{\frac{٤}{٣} ب^٢} = ١ \leftarrow \frac{٣٦}{ب^٢} - \frac{٢٧}{ب^٢} = ١ \leftarrow \frac{٩}{ب^٢} = ١$

$\leftarrow ب^٢ = ٩$ ، كما $د^٢ = \frac{٤}{٣} ب^٢$

$\leftarrow د^٢ = \frac{٤}{٣} \times ٩ = ١٢$

المعادلة $\frac{(س - ٢)^٢}{٩} - \frac{(ص - ٣)^٢}{١٢} = ١$

مثال (٢١)

ما معادلة قطع زائد اختلافه المركزي يساوي ٢، وبؤرتاه هما نفس بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته

$$\frac{س^2}{25} + \frac{ص^2}{9} = 1$$

الحل

من القطع الناقص $\frac{س^2}{25} + \frac{ص^2}{9} = 1$

اخفي

$أ^2 = 25 \leftarrow أ = 5$ ، $ب^2 = 9 \leftarrow ب = 3$

$جـ^2 = أ^2 - ب^2 \leftarrow جـ^2 = 25 - 9 = 16$

$\leftarrow جـ = 4$

المركز $(0، 0)$ ← البؤرتان للقطع الناقص هما $(4، 0)$ ، $(-4، 0)$

وهما ايضاً بؤرتا القطع الزائد

$جـ = 4 = 4 - 4 = 8 \Leftarrow جـ = 4$

$جـ^2 = 16$

وحيث $هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{4}{أ} = 2 \Leftarrow أ = 2$

$\leftarrow ب^2 = جـ^2 - أ^2$ ، $جـ = 4$

$16 = 4 + ب^2 \leftarrow ب^2 = 12$

معادلة القطع الزائد $\frac{س^2}{4} - \frac{ص^2}{12} = 1$

مثال (٢٢) وزارة (٢٠٠٩)

جد معادلة القطع الزائد الذي احد رأسيه مركز الدائرة التي معادلتها $(س - 8)^2 + (ص - 6)^2 = 16$ وطول محورة المرافق يساوي طول قطر هذه الدائرة ومركزه يقع على المستقيم $س = -1$

الحل

$(س - 8)^2 + (ص - 6)^2 = 16$

$(س - 4)^2 + (ص - 8)^2 = 16$

$\frac{4(س-4)^2}{4} + \frac{4(ص-8)^2}{4} = \frac{16}{4}$

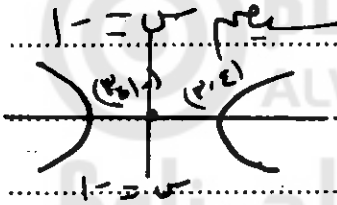
$(س - 4)^2 + (ص - 8)^2 = 4$

المركز $(4، 8)$ ، $ر^2 = 4 \leftarrow ر = 2$

طول قطر الدائرة $= 4$

المطلوب معادلة القطع الزائد الذي احد رأسيه $(4، 3)$ وطول محوره المرافق $= 4$

ومركزه يقع على المستقيم $س = -1$



قطع زائد سيني

$أ = 4 - 1 = 3$

$جـ = 4 \leftarrow جـ^2 = 16$

معادلته

$\frac{(س+1)^2}{9} - \frac{(ص-3)^2}{4} = 1$

مثال (٢٣) وزارة (٢٠١٥)

اذا كان المحور المرافق للقطع الزائد $س^2 - ص^2 = ١$ أطول بوحدتين من المحور الأصغر للقطع الناقص $\frac{س^2}{١٦} + \frac{ص^2}{٤٩} = ١$ ، فما قيمة ل ؟

الحل

في القطع الزائد $ب^2 = ل \Leftarrow ب = \sqrt{ل}$

∴ طول المحور المرافق $= ٢\sqrt{ل}$

في القطع الناقص $ب^2 = ١٦ \Leftarrow ب = ٤$

طول المحور الأصغر $= ٢ب = ٨$

لكن طول المحور المرافق للزائد أطول بوحدتين من المحور الأصغر في الناقص

$\therefore ٢\sqrt{ل} = ٨ + ٢ \Leftarrow ٢\sqrt{ل} = ١٠$

$\sqrt{ل} = ٥ \Leftarrow ل = ٢٥$

مثال (٢٤) وزارة (٢٠٠٩)

جد معادلة الدائرة التي تمر بمركز القطع الزائد الذي بؤرتيه $(٣\sqrt{٢}, ١)$ ، $(-٧\sqrt{٢}, ١)$ وتمر بالنقطة $(٤\sqrt{٢}, ٤)$ ويقع مركزها على محور الصادات

الحل

مركز القطع الزائد $\left(\frac{٣\sqrt{٢} - ٧\sqrt{٢}}{٢}, ١\right)$

$= (-٢\sqrt{٢}, ١)$

المطلوب معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $(-٢\sqrt{٢}, ١)$ ، $(٤\sqrt{٢}, ٤)$ ويقع مركزها على محور الصادات

معادلة الدائرة هي

$س^2 + ص^2 + د س + هـ ص + و = صفر$

$(-٢\sqrt{٢}, ١) \Leftarrow ٨ + ١ - ٢د + هـ + و = ٠$

لأن $ل = ٠$ (المركز على محور الصادات)

$\Leftarrow -٢د + هـ + و = -٩ \quad \cdots (١)$

$(٤\sqrt{٢}, ٤) \Leftarrow ٣٢ + ١٦ + ٤د + ٤هـ + و = ٠$

$\Leftarrow ٤د + هـ + و = -٤٨ \quad \cdots (٢)$

معادلة (١) − معادلة (٢) $\Leftarrow$

$-٦د = ٣٩ \Leftarrow د = \frac{-٣٩}{٦}$

$د = \frac{-١٣}{٢}$ وبالتعويض في (١)

$\Leftarrow ٢ \times \frac{-١٣}{٢} + هـ + و = -٩$

$\Leftarrow -١٣ + هـ + و = -٩ \Leftarrow هـ + و = ٤ \quad \cdots (٣)$

معادلة (٢) $\Leftarrow$

$٤ \times \frac{-١٣}{٢} + ٤هـ + و = -٤٨$

$\Leftarrow -٢٦ + ٤هـ + و = -٤٨ \Leftarrow ٤هـ + و = -٢٢ \quad \cdots (٤)$

معادلة (٤) − معادلة (٣) $\Leftarrow$

$٣هـ = -٢٦ \Leftarrow هـ = \frac{-٢٦}{٣}$

وبالتعويض في (٣)

$\frac{-٢٦}{٣} + و = ٤ \Leftarrow و = \frac{٣٨}{٣}$

معادلة الدائرة هي

$س^2 + ص^2 - ١٣س - \frac{٢٦}{٣}ص + \frac{٣٨}{٣} = صفر$

مثال (٢٥)

اوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه رأس القطع المكافئ $س^2 = ٣ص - ٦$ وطول محورة القاطع $= ١٦$ وطول محورة المرافق $= ٨$

الحل

القطع المكافئ $(س - ٢)^2 = ٣(ص - ٢)$

على الصورة $(س - د)^2 = ٤ه(ص - هـ)$

للأعلى $\Leftarrow$ رأس القطع المكافئ $= (٢، ٢)$ $=$ مركز القطع الزائد

محورة القاطع $= ٢ب = ١٦ \Leftarrow ب = ٨$

$ب^2 = ٦٤$

محورة المرافق $= ٢ج = ٨ \Leftarrow ج = ٤$

$ج^2 = ١٦$

نوجد حالتان: لأن المعلومات لا تحدد نوع القطع الزائد:

① $\frac{(س - د)^2}{ب^2} - \frac{(ص - هـ)^2}{ج^2} = ١$ سني

$\frac{(س - ٢)^2}{٦٤} - \frac{(ص - ٢)^2}{١٦} = ١$

② $\frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} - \frac{(س - د)^2}{ج^2} = ١$ صادي

$\frac{(ص - ٢)^2}{٦٤} - \frac{(س - ٢)^2}{١٦} = ١$

تدريب

ما معادلة القطع المكافئ الذي دليله محور السينات ويؤثر هي مركز القطع الزائد الذي معادلته

$٤س^2 - ٤ص^2 - ٨س + ٦ص = ٢٦$

مثال (٢٦)

قطع مخروطي معادلته هي

$س^2 + ٢ص = \frac{٤}{س - ٢ص}$ ما اختلاف المركزي

الحل

$س^2 + ٢ص = \frac{٤}{س - ٢ص}$ بالضرب المتبادلي

$(س + ٢ص)(س - ٢ص) = ٤$

$س^2 - ٤ص^2 = ٤$ بالقسمة على ٤

$\frac{س^2}{٤} - \frac{ص^2}{١} = ١$

$م^2 = ٤ \Leftarrow م = ٢$

$ب^2 = ١ \Leftarrow ب = ١$

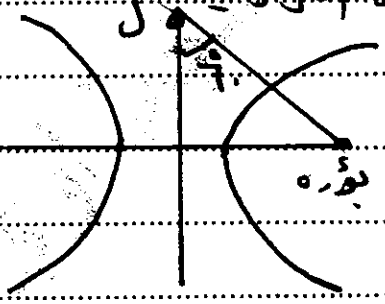
$ه^2 = م^2 + ب^2 \Leftarrow ه^2 = ٤ + ١ = ٥$

$\Leftarrow ه = \sqrt{٥}$

$ه = \frac{ه}{م} = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$

مثال (٢٧)

الشكل المجاور يمثل قطع زائد حيث النقطة ل تمثل طرف المحور المرافق وقد الاختلاف المركزي



الحل

$\because$ طا ٦٠° = المقابل / المجاور

$= \frac{ج}{ب} = \sqrt{٣}$

$\Leftarrow ج = \sqrt{٣}\, ب$ ---- ①

$ج^٢ = ب^٢ + ب^٢ \Leftarrow (\sqrt{٣}\, ب)^٢ = ب^٢ + ب^٢$

$٣ب^٢ = ب^٢ + ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = ب^٢$

$ب = ب$ ، $\because$ ل $\in$ ص

$\therefore \frac{ج}{ب} = \frac{\sqrt{٣}\, ب}{ب} = \sqrt{٣}$

مثال (٢٨)

إذا كان الاختلاف المركزي للقطع المخروطي $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ هو $\frac{١}{٢}$

والاختلاف المركزي للقطع المخروطي $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ هو $هـ_٢$

بين أن $(هـ_١)^٢ + (هـ_٢)^٢ = ٢$

الحل

ناقص $هـ_١ = \frac{ج}{أ} = \frac{\sqrt{أ^٢ - ب^٢}}{أ}$

$\Leftarrow (هـ_١)^٢ = \frac{أ^٢ - ب^٢}{أ^٢}$

زائد $هـ_٢ = \frac{ج}{أ} = \frac{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}{أ}$

$(هـ_٢)^٢ = \frac{أ^٢ + ب^٢}{أ^٢}$

$(هـ_١)^٢ + (هـ_٢)^٢ = \frac{أ^٢ - ب^٢}{أ^٢} + \frac{أ^٢ + ب^٢}{أ^٢}$

$= \frac{٢أ^٢}{أ^٢} = ٢$

مثال (٢٩) وزارة (٢٠٠٥)

إذا كان $هـ_١$ ، $هـ_٢$ يمثلان الاختلافين المركزيين للقطعين المخروطيين

$\frac{س^٢}{ل^٢} - \frac{ص^٢}{ل^٢} = ١$ ، $\frac{ص^٢}{ك^٢} - \frac{س^٢}{ل^٢} = ١$

فاثبت أن

$\frac{١}{(هـ_١)^٢} + \frac{١}{(هـ_٢)^٢} = ١$

$\Leftarrow$ يتبع الحل

مكتبة وسام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

الحل

$\frac{س^2}{ل^2} - \frac{ص^2}{ك^2} = 1$ قطع زائد سيني

$ب = ل$ ، $د = ك$ ، $ح^2 = ب^2 + د^2$

$= ل^2 + ك^2$

$\Leftarrow ح = \sqrt{ل^2 + ك^2}$

$هـ_1 = \frac{ح}{ب} = \frac{\sqrt{ل^2 + ك^2}}{ل}$

$(هـ_1)^2 = \frac{ل^2 + ك^2}{ل^2} \Leftarrow \frac{1}{(هـ_1)^2} = \frac{ل^2}{ل^2 + ك^2}$

$\frac{ص^2}{ك^2} - \frac{س^2}{ل^2} = 1$ قطع زائد صادي

$ب = ك$ ، $د = ل$

$ح^2 = ب^2 + د^2 \Leftarrow ح^2 = ك^2 + ل^2$

$ح = \sqrt{ك^2 + ل^2}$

$هـ_2 = \frac{ح}{ب} = \frac{\sqrt{ك^2 + ل^2}}{ك}$

$(هـ_2)^2 = \frac{ك^2 + ل^2}{ك^2} \Leftarrow \frac{1}{(هـ_2)^2} = \frac{ك^2}{ك^2 + ل^2}$

$\frac{1}{(هـ_1)^2} + \frac{1}{(هـ_2)^2} = \frac{ل^2}{ل^2 + ك^2} + \frac{ك^2}{ك^2 + ل^2}$

$= \frac{ل^2 + ك^2}{ل^2 + ك^2} = 1$

مثال (٢٠)

تحرك النقطة $(س ، ص)$ بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين

$س = حا\theta + جتا\theta$ ، $ص = 2 حا\theta جتا\theta$

جد معادلة المحل الهندسي لهذه النقطة وحدد نوعه.

الحل

$س^2 = حا^2\theta + 2 حا\theta جتا\theta + جتا^2\theta$

$= 1 + 2 حا\theta جتا\theta$ ..... ①

$ص = 2 حا\theta جتا\theta$ بالتعويض

$ص^2 = 4 حا^2\theta جتا^2\theta$

$\frac{ص^2}{2} = 2 حا^2\theta جتا^2\theta$ نعوض في ①

$س^2 = 1 + \frac{ص^2}{2} \Leftarrow$

$\frac{س^2}{1} - \frac{ص^2}{2} = 1$ قطع زائد

مثال (٢١)

تتحرك النقطة $ن(س ، ص)$ حيث أن $س = 3$ ظاθ ، $ص = 5$ قاθ فأكتب معادلة المسار لها ونوع المسار.

← ليتبع الحل

الحل

$س = ٣ ظا\theta \Leftarrow ظا\theta = \frac{س}{٣}$

$ظا^٢\theta = \frac{س^٢}{٩}$

$ص = ٥ قا\theta \Leftarrow قا\theta = \frac{ص}{٥}$

$قا^٢\theta = \frac{ص^٢}{٢٥}$

لكن $قا^٢\theta - ظا^٢\theta = ١$

$\frac{ص^٢}{٢٥} - \frac{س^٢}{٩} = ١$ قطع زائد محوري

ملاحظة هامة

المعادلة تمثل قطع زائد.

١. معامل $س^٢$ ، معامل $ص^٢$ مختلفين في الإشارة

معامل $س^٢$ × معامل $ص^٢ < ٠$

∴ قطع زائد سيني $\Leftarrow$

معامل $س^٢ > ٠$ ، معامل $ص^٢ < ٠$

٢. قطع زائد صادي

معامل $س^٢ < ٠$ ، معامل $ص^٢ > ٠$

مثال (٣٢)

$س = قا\theta$ ، $ص = ٧ + ظا\theta$

جد معادلة المحل للنقطة المتحركة و $(س، ص)$

الحل

$س = قا\theta \Leftarrow س^٢ = قا^٢\theta$

$س^٢ = ١ + ظا^٢\theta$ ولكن

$ص = ٧ + ظا\theta \Leftarrow ص - ٧ = ظا\theta$

$س^٢ = ١ + (ص - ٧)^٢$

$س^٢ - (ص - ٧)^٢ = ١$ قطع زائد سيني

١ ١

مثال (٣٣)

جد قيمة الثابت $(ل)$ التي تجعل المعادلة $٤س^٢ - (ل + ٥)ص^٢ = ٧$ تمثل قطع زائد.

الحل بالقسمة على ٧

$\frac{٤س^٢}{٧} - \frac{(ل+٥)ص^٢}{٧} = ١$

بما أن معامل $س^٢ > ٠$ ، فإن معامل $ص^٢ < ٠$

$\Leftarrow -(ل + ٥) < ٠ \Leftarrow ل + ٥ > ٠$

$ل > -٥$ $ل \in (-٥، \infty)$

مثال (٣٤) وزارة (٢٠١٠)

جد قيم (م) التي تجعل

$\frac{س^2}{٧-م} + \frac{ص^2}{٤-م} = ١$ تمثل معادلة قطع زائد

الحل

معامل $س^2$ × معامل $ص^2$ < ٠

$(٧-م)(٤-م) < ٠$

	٤		٧	
	+	−	−	+

$م \in (٤, ٧)$

ملاحظات اساسية للتمييز بين انواع معادلات القطوع:

١. معادلة الدائرة

معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ بينهما اشارة +

٢. معادلة القطع الناقص

معامل $س^2$ ≠ معامل $ص^2$ وبينهما اشارة (+)

٣. معادلة القطع الزائد

اشارة معامل $س^2$ تختلف عن اشارة $ص^2$

٤. معادلة القطع المكافئ

التربيع فقط على $س^2$ أو على $ص^2$ فقط

٥. الاختلاف المركزي للدائرة = ٠

٦. الاختلاف المركزي للقطع المكافئ = ١

مثال (٣٥)

ما مجموعة ميم لأ التي تحل المعادلة

$٣س^{٢} + لأ ص^{٢} = ١٢$

① دائرة ⟺ لأ = ٣ فقط

② قطع ناقص ⟺ لأ أي عدد موجب ≠ ٠

لأ ∈ (٠ ، ∞) − {٣}

③ قطع زائد ⟺ لأ أي عدد سالب

لأ ∈ (−∞ ، ٠)

④ قطع مكافئ

لا يمكن أن يكون مكافئ

مثال (٣٦) وزارة (٢٠١٢)

ماذا تمثل $٤س^{٢} + ٦ص - ١٢ = ٤ص^{٢} + ٨س$

هو القطوع المخروطية

الحل

$٤س^{٢} - ٤ص^{٢} + ٦ص - ٨س - ١٢ = ٠$

قطع زائد

مثال (٣٧) وزارة (٢٠١١)

إذا كانت $\frac{س^{٢}}{ل} + \frac{ص^{٢}}{ل - ١٦} = ١$

ل عدد ثابت وكانت ٠ < ل < ١٦

ماذا يمثل الحل الهندسي

الحل

بما أن ٠ < ل < ١٦ فإن

معامل $س^{٢} > ٠$ ، معامل $ص^{٢} < ٠$

⟸ قطع زائد

مثال (٣٨) وزارة (٢٠١٤) شتوية

جد معادلة القطع المخروطي الذي

تتحرك النقطة ن (س ، ص) على

منحناه بحيث يكون الفرق المطلق

بين بعديها عن النقطتين

(٢ ، ٢) ، (٢ ، ١٠) يساوي ٦ وحدات

الحل القطع ناقص سيني

البؤرتين (٢ ، ٢) ، (٢ ، ١٠)

المركز $(٢ ، \frac{٢ + ١٠}{٢}) = (٢ ، ٦)$

⟸ لتتبع الحل

مكتبة الوسام العربية

المعلم: ناجح الجمزاوي

$\frac{(س-٦)^2}{م^2} - \frac{(ص-٢)^2}{ن^2} = ١$

$م^2 = ٦ \Leftarrow م = ٣$

$ج^2 = م^2 + ن^2 \Leftarrow ١٦ = ٩ + ن^2$

$ن^2 = ٧ \Leftarrow ن = \sqrt{٧}$

$\frac{(س-٦)^2}{٩} - \frac{(ص-٢)^2}{٧} = ١$

مثال (٣٩) وزارة (١٤٥) صيغة

جد احداثيات المركز والرأسين والبؤرتين والاختلاف المركزي للقطع المخروطي الذي معادلته

$٩س^2 + ٨ص - ٤ = ٤ص^2 + ٣٦س$

الحل

$٩س^2 - ٤ص^2 - ٣٦س + ٨ص = ٤$

قطع زائد أكمال المربع

$٩س^2 - ٣٦س - ٤ص^2 + ٨ص = ٤$

$٩(س^2 - ٤س + \frac{٤}{٤}) - ٤(ص^2 - ٢ص + \frac{١}{١}) = ٤$

$= ٤ + ٣٦ - ٤$

$٩(س^2 - ٤س + ٤) - ٤(ص^2 - ٢ص + ١) = ٣٦$

بالقسمة على ٣٦

$\frac{٩(س-٢)^2}{٣٦} - \frac{٤(ص-١)^2}{٣٦} = \frac{٣٦}{٣٦}$

$\frac{(س-٢)^2}{٤} - \frac{(ص-١)^2}{٩} = ١$

المركز (٢، ١) القطع سيني

$م^2 = ٤ \Leftarrow م = ٢$

$ن^2 = ٩ \Leftarrow ن = ٣$

$ج^2 = م^2 + ن^2 = ١٣ \Leftarrow ج = \sqrt{١٣}$

الرأسين (٢ ± ٢، ١) ← (٤، ١) (٠، ١)

البؤرتين (٢ ± $\sqrt{١٣}$، ١)

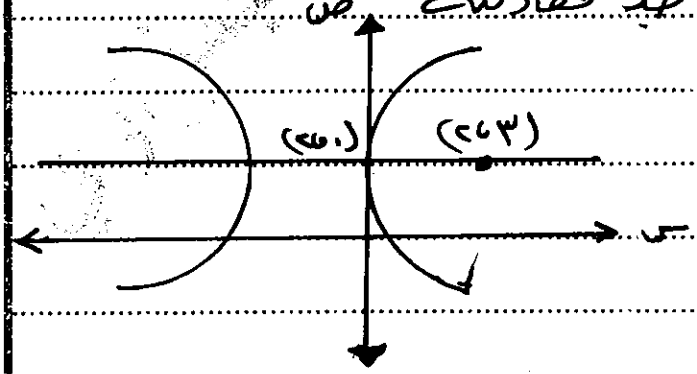
$هـ = \frac{ج}{م} = \frac{\sqrt{١٣}}{٢} > ١$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٤٠) وزارة (٢٠١٥) شتوية

معتمدًا الشكل أدناه والذي يمثل منحنى قطع مخروطي إحدى بؤرتيه المنعكسة (٣، ٢) وحيد مركزي يساوي ٣ وحيد معادلته



الحل قطع زائد سيني

$\frac{د}{ب} = ه = ٣ \leftarrow د = ٣ب$ ---①

$د = ب + ج^{٢} \leftarrow ٣ = ب + ج^{٢}$ ---②

بتعويض ② في ①

$٣ب = ب + ٣ \leftarrow ٣ب = ب + ج^{٢} \leftarrow ب = \frac{٣}{٢}$

$ج^{٢} = \frac{٩}{٤} \leftarrow د = \frac{٩}{٢} \leftarrow ٣ب = \frac{٩}{٢} \leftarrow ٣ب = \frac{٨١}{٤}$

لكنه $ل^{٢} = د^{٢} - ب^{٢}$

$= \frac{٨١}{٤} - \frac{٩}{٤} = \frac{٧٢}{٤}$

المركز $(٣ - د، ٢)$ أو $(٠ - ب، ٢)$

$(٣ - \frac{٩}{٢}، ٢)$ $(٠ - \frac{٣}{٢}، ٢)$

$(-\frac{٣}{٢}، ٢)$

المعادلة هي

$\frac{(س + \frac{٣}{٢})^{٢}}{\frac{٩}{٤}} - \frac{(ص - ٢)^{٢}}{\frac{٧٢}{٤}} = ١$

$= \frac{٤(س + \frac{٣}{٢})^{٢}}{٩} - \frac{٤(ص - ٢)^{٢}}{٧٢} = ١$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

رياض ومدارس جامعة الزرقاء

الثاني الثانوي العلمي | الوحدة الخامسة / القطوع المخروطية | ناجح الجمزاوي

0795656881 | 0788656057

ورقة عمل

س١ جد الاختلاف المركزي لقطع زائد فيه طول محوره القاطع يساوي طول محوره المرافق

الجواب $\frac{\sqrt{2}}{2}$

س٢ وزارة (٢٠١١)

قطع زائد معادلته $٤س^٢ - ٣ص^٢ + ١٨ص = ٤$

جد ميل المماس الذي يصل محوره القاطع موازيًا لمحور الصادات

ج لا يوجد

س٣ جد معادلة الدائرة التي مركزها هو مركز القطع المخروطي

$٤س^٢ + ٨س = ٣ص^٢ - ١٦ص + ٤$

بأن الدائرة تمس المستقيم

$٣س - ٤ص = ١$

ج

$(س+١)^٢ + ص^٢ = \frac{١٦}{٢٥}$

س٤ النقطة (٠،٣) إحدى بؤرتي القطع الزائد $٥س^٢ - ٤ص^٢ = ٨$

جد قيمة $\frac{ل}{ك}$ ج: $\frac{ل}{ك} = \frac{٨}{٥}$

س٥ وزارة (٢٠١٠)

جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (٤،٠)، (-٢،٠) ويمر بالنقطة $(٦، \frac{٨}{٣})$

ج: $\frac{(ص-١)^٢}{٩} - \frac{س^٢}{٤} = ١$

س٦ وزارة (٢٠٠٧)

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (٢،١)، (-٨،١) ويقع احد رأسيه على محور السينات

ج: $\frac{(ص+٣)^٢}{٩} - \frac{(س-١)^٢}{١٦} = ١$

س٧ ما قيمة م التي تجعل معادلة $(م-١)س^٢ + ٢م ص^٢ = ١٠$ تمثل قطع زائد

ج $م = (-\infty، ٠) \cup (١، \infty)$

المحل الهندسي

هي معادلة تمثل نوع المعادلة الناتجة عن حركة نقطة في المستوى الديكارتي ويتم التعامل معه باحدى الطرق التالية

١. عندما ينطبق النص تماماً مع تعريف نطبق معادلة ذلك القطع

٢. عندما لا ينطبق على احدى التعريفات نعتمد على الهندسة.

المسافة بين نقطتين

$$= \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

البعد بين نقطة وقيم

$$\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

احداثيات منتصف قطعة وقيمه

$$\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}, \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$

مثال ①

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة $م(س، ص)$ التي تبعد بعداً ثابتاً قدره ٣ وحدات عن النقطة $ب(-٢، ٣)$.

الحل

بما ان النقطة $م(س، ص)$ تتحرك بحيث يبقى بعدها ثابت عن النقطة الثابتة $ب(-٢، ٣)$ فالمحل الهندسي هنا عبارة عن دائرة مركزها $(-٢، ٣)$ ونصف قطرها ٣ وحدات

$م(س، ص)$

$ب(-٢، ٣)$

$$\sqrt{(س - (-٢))^٢ + (ص - ٣)^٢} = ٣$$

وبالتربيع

$$(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$$

مثال (٢)

ما معادلة الحل الهندسي لمجموعة النقط ن(س، ص) المتحركة في المستوى بحيث مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين P(٤، ٠)، ل(-٤، ٠) يساوي ١٠ وحدات

الحل

من تعريف قطع ناقص

$2P = 10 \Leftarrow P = 5$

$ل^2 = P^2 - ح^2 \Leftarrow ح = 4 \Leftarrow ح^2 = 16$

$ل^2 = 9$

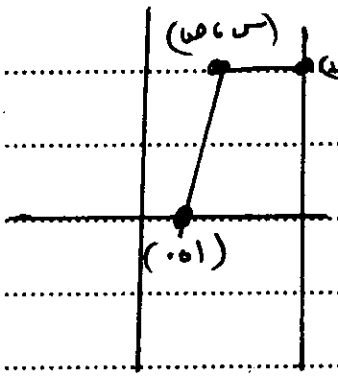
القطع ناقص مركزه (٠، ٠)

$\frac{ص^2}{25} + \frac{س^2}{9} = 1$

مثال (٣)

جد معادلة الحل الهندسي للنقطة (س، ص) التي تتحرك في المستوى بحيث بعدها عن المستقيم س = ٩ يساوي ثلاثة امثال بعدها عن النقطة ل(١، ٠)

الحل



$\sqrt{(س-1)^2 + (ص-0)^2} = 3\sqrt{(س-9)^2 + (ص-ص)^2}$

$(س-1)^2 + ص^2 = 9(س-9)^2$ بالتربيع

$س^2 - 2س + 1 + ص^2 = 9(س^2 - 18س + 81)$

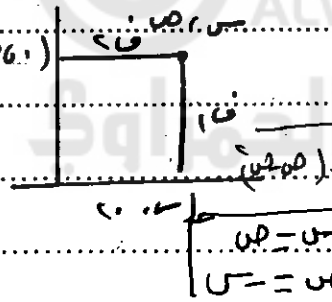
$س^2 - 2س + 1 + ص^2 = 9س^2 - 162س + 729$

$8س^2 + ص^2 - 160س + 728 = 0$ بالقسمة على ٨

$\frac{س^2}{9} + \frac{ص^2}{8} = 1$ قطع ناقص

مثال (٤)

جد معادلة الحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعدين متساويين من الاحداثيين



$ف^2 = س^2 + ص^2 = \sqrt{(س-0)^2 + (ص-ص)^2}$

$|ص| = |س| \Leftarrow ص^2 = س^2$

$ص = س$ أو $ص = -س$

مثال ⑥

ما معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقط ن(س، ص) المتحركة في المستوى بحيث مجموع مربعي بعديها عن النقطتين الثابتتين ؟(٤، ١٠) ، ك(-٤، ١٠) يساوي مقدار ثابت = ٨٠

الحل

النص لا ينطبق على اي تعريف

(البعد عن (٤، ١٠))^2 + (بعد ن عن (-٤، ١٠))^2 = ٨٠

$\left(\sqrt{(س-٤)^2+(ص-١٠)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(س+٤)^2+(ص-١٠)^2}\right)^2 = ٨٠$

$(س-٤)^2 + ص^2 - ٢٠ص + ١٠٠ + (س+٤)^2 + ص^2 - ٢٠ص + ١٠٠ = ٨٠$

$س^2 - ٨س + ١٦ + ص^2 - ٢٠ص + ١٠٠ + س^2 + ٨س + ١٦ + ص^2 - ٢٠ص + ١٠٠ = ٨٠$

$٢س^2 + ٢ص^2 - ٤٠ص + ٢٣٢ = ٨٠$

$٢س^2 + ٢ص^2 - ٤٠ص + ١٥٢ = ٠$

$س^2 + ص^2 - ٢٠ص + ٧٦ = ٠$

$س^2 + (ص-١٠)^2 = ٢٤$ دائرة

مثال ⑦ وزارة (٢٠١٨)

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة م(س، ص) المتحركة في المستوى بحيث تبعد بعدًا ثابتًا مقداره ٣ وحدات عن المستقيم الذي معادلته ٣س + ٤ص = ٥ وتمر اثناء حركتها بمركز الدائرة التي معادلتها $(س-٤)^2 + (ص-٢)^2 = ٩$ ؟

الحل

البعد م عن المستقيم (٣س + ٤ص - ٥ = ٠) = ٣

$\left|\frac{٣س + ٤ص - ٥}{\sqrt{٣^2+٤^2}}\right| = ٣ \Leftarrow \left|\frac{٣س + ٤ص - ٥}{٥}\right| = ٣$

$\Leftarrow \frac{٣س + ٤ص - ٥}{٥} = ٣$ أو $\frac{٣س + ٤ص - ٥}{٥} = -٣$

$\Leftarrow ٣س + ٤ص - ٥ = ١٥$ أو $٣س + ٤ص - ٥ = -١٥$

$٣س + ٤ص - ٢٠ = ٠$ $٣س + ٤ص + ١٠ = ٠$

مركز الدائرة (٤، ٢)

المستقيم يمر بالنقطة (٤، ٢) تحقق معادلته وهذا النقطة تحقق معادلة المستقيم

$٣س + ٤ص - ٢٠ = ٠$

الحل الهندسي هو خط مستقيم يوازي المستقيم $٣س + ٤ص = ٥$ معادلته هي $٣س + ٤ص - ٢٠ = ٠$

لاحظ ان النقطة (٤، ٢) لا تحقق المستقيم الثاني

مثال (٧)

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة $P(س، ص)$ بحيث تتحرك على بعدين متساويين من النقطتين $(٢، ٥)$ ، $(٤، ١)$

الحل

$$\sqrt{(س-٢)^٢ + (ص-٥)^٢} = \sqrt{(س-٤)^٢ + (ص-١)^٢}$$

وبتربيع الطرفين

$$(س-٢)^٢ + (ص-٥)^٢ = (س-٤)^٢ + (ص-١)^٢$$

$$س^٢ - ٤س + ٤ + ص^٢ - ١٠ص + ٢٥ = س^٢ - ٨س + ١٦ + ص^٢ - ٢ص + ١$$

$$٤س - ٨ص + ١٢ = صفر$$

الحل الهندسي خط مستقيم معادلته

$$٤س - ٨ص + ١٢ = صفر$$

مثال (٨)

$ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمان معادلتاهما بالترتيب $٣س + ٤ص - ١ = ٠$

$٤س - ٣ص + ٢ = ٠$ جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة $P(س، ص)$ والتي تتحرك على بعدين متساويين من المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ ؟

الحل

$$\text{بعد } P(س، ص) \text{ عن } ل_١ = \text{بعد } P(س، ص) \text{ عن } ل_٢$$

$$\left|\frac{٣س + ٤ص - ١}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}}\right| = \left|\frac{٤س - ٣ص + ٢}{\sqrt{٤^٢ + (-٣)^٢}}\right|$$

$$= \left|\frac{٣س + ٤ص - ١}{٥}\right| = \left|\frac{٤س - ٣ص + ٢}{٥}\right|$$

① $\frac{٣س + ٤ص - ١}{٥} = \frac{٤س - ٣ص + ٢}{٥}$

$\Leftarrow ٣س + ٤ص - ١ = ٤س - ٣ص + ٢$

$\Leftarrow -س + ٧ص - ٣ = صفر$

② $\frac{٣س + ٤ص - ١}{٥} = -\frac{٤س - ٣ص + ٢}{٥}$

$\Leftarrow ٣س + ٤ص - ١ = -٤س + ٣ص - ٢$

$٧س + ص + ١ = ٠$

الحل الهندسي هو خطان مستقيمان معادلتيهما

$س + ٧ص - ٣ = ٠$ ، $٧س + ص + ١ = ٠$

مثال (9)

اوجد المحل الهندسي للنقطة المتحركة (س، ص) بحيث بعدها عن النقطة (د، هـ + حـ) يساوي بعدها عن المستقيم ص = هـ - حـ حيث (د، هـ، حـ) ثوابت

الحل

بُعد (س، ص) عن النقطة (د، هـ + حـ)

= بُعدها عن ص = هـ - حـ

$$\sqrt{(س-د)^2 + (ص-(هـ+حـ))^2} = \left| \frac{ص-(هـ-حـ)}{\sqrt{1^2+1^2}} \right|$$

نربع الطرفين

$$(س-د)^2 + (ص-(هـ+حـ))^2 = (ص-(هـ-حـ))^2$$

$$(س-د)^2 + ص^2 - 2ص(هـ+حـ) + (هـ+حـ)^2 = ص^2 - 2ص(هـ-حـ) + (هـ-حـ)^2$$

$$(س-د)^2 = -2ص(هـ-حـ) + 2ص(هـ+حـ) - (هـ+حـ)^2 + (هـ-حـ)^2$$

$$(س-د)^2 = 4هـحـ - 4ص هـحـ$$

$$(س-د)^2 = 4هـحـ(1-ص)$$

كما هو مطلوب

مثال (10) وزارة (2014)

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن (س، ص) في المستوى بحيث تبعد بعدًا ثابتًا مقداره وحدتين عن المستقيم 6ص = 8س + 4 ومر اثناء حركتها بالنقطة (1/2، -2)

الحل

بُعد ن عن المستقيم 6ص - 8س - 4 = 0

يساوي 2

$$\left| \frac{-8س - 6ص + 4}{\sqrt{36+64}} \right| = 2$$

$$\left| \frac{-8س - 6ص + 4}{10} \right| = 2$$

إما $-8س - 6ص + 4 = 20$ أو

$-8س - 6ص + 4 = -20$

بتعويض النقطة (1/2، -2)

$-8 \times \frac{1}{2} - 6 \times -2 + 4 = 20$ محققة

المعادلة هي

$-8س - 6ص + 4 = 20$

مكتبة الجواد ALWGAD

المعلم: ناجح الجمزاوي

تدريب ①

اذا كانت م (٢، ٠) ، ن (-٣، ٠)

اوجد المحل الهندسي للنقطة المتحركة

ن (س، ص) بحيث ا ن

م ن = √٢ ب ن

ج : س² + ص² + ١٨ س + ٩ = ٠

دائرة

تدريب ②

اذا كانت م (٢، ٠) ، ن (-٣، ٠)

جد المحل الهندسي للنقطة ن (س، ص)

بحيث ا ن

(ل ن)² + (ح ن)² = ٢ (م ن)² حيث

ح (ا، ٠)

ج : س = ١/٢ ص مستقيم محوري

تدريب ③

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة

م (س، ص) في المستوى بحيث تبعد

دائما مقدارها ٣ وحدات عن

المستقيم ص = -١ ويمر اثناء حركتها

بالنقطة ب (٠، -٤)

ج : المحل الهندسي مستقيم يوازي المستقيم ص = -١

مسألة ص ٢٠٤

مثال ⑪

ما معادلة المحل الهندسي للنقطة

(س، ص) بحيث يكون س = ن²

ص = ٥ ن

الحل

ص = ٥ ن ← ن = ص/٥

س = ن² ← س = ص²/٢٥

ص² = ٢٥ س

قطع مكافئ

مثال ⑫

ما معادلة المحل الهندسي للنقطة

(س، ص) بحيث س = حاهـ - حتاهـ + ١

ص = √٢ حاهـ حتاهـ - ٢

الحل

س - ١ = حاهـ - حتاهـ

ص + ٢ = √٢ حاهـ حتاهـ

(س - ١)² = حا²هـ - ٢ حاهـ حتاهـ + حتا²هـ

(ص + ٢)² = ٤ حاهـ حتاهـ

نتج كل

$\Leftarrow$ ما هو ضباط $= \frac{(ص+2)^2}{4}$

بالتعويض في (1)

$(س-1)^2 = 1 - \frac{(ص+2)^2}{4}$

$(س-1)^2 + \frac{(ص+2)^2}{4} = 1$ قطع ناقص

تدريب (4)

المتكلم ب $(\frac{3}{5}, 0.6)$ نقطة تقع في البؤرة اليمنى وكان (ل) مستقيم معادلته $س = \frac{م}{هـ}$ حيث $م = 0.6$ ، $هـ = 0.6$

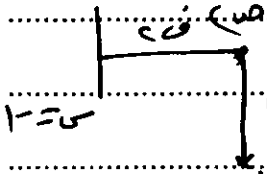
جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة و $(س، ص)$ بحيث أن بعدها عن النقطة ب $(\frac{3}{5}, 0.6)$ يساوي هـ X بعد النقطة و $(س، ص)$ عن المستقيم ل

ح قطع زائد معادلته

$\frac{س^2}{م^2} + \frac{ص^2}{م^2(هـ^2-1)} = 1$

مثال (13) وزارة (ص، ص) بؤرة جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة $(س، ص)$ والتي يكون بعدها عن النقطة $(3، 0.6)$ مساويا لبعدها عن المستقيم $س = -1$

الحل



$ف_1 = ف_2$

$\sqrt{(س-3)^2 + (ص-0.6)^2} = |\frac{س+1}{1}|$

$\sqrt{(س-3)^2 + (ص-0.6)^2} = |س+1|$ (تربيع)

$(س-3)^2 + (ص-0.6)^2 = (س+1)^2$

$س^2 - 6س + 9 + ص^2 - 1.2ص + 0.36 = س^2 + 2س + 1$

$ص^2 - 1.2ص - 8س + 8.36 = 0$ قطع مكافئ

حل آخر

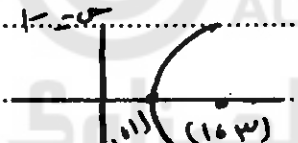
الحل الهندسي هو قطع مكافئ بؤرته (3، 0.6) ودليله $س = -1$

المركز $(\frac{3+(-1)}{2}، 0.6)$

$= (1، 0.6)$

الدليل $(-1، 0.6)$

$ح = 2$ المعادلة $(ص-0.6)^2 = 8(س-1)$



ورقة عمل

س١: النقطة ن(س، ص) تتحرك بحيث أن بعدها عن المستقيم ص = ٤ يساوي ٣/٤ أمثال بعدها عن النقطة (٠، ٣) أكتب معادلة المحل الهندسي وبين نوعه

ج: ٨ ص^٢ = ٩ س^٢ + ٩٦ ص + ١٢٨

قطع ناقص

س٢: جد معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقط المستوية ن(س، ص) إذا كان الفرق المطلق لبعديها عن النقطتين (١٥، ٠)، (-١٥، ٠) يساوي مقدارًا ثابتًا ٨ وحدات

س٣: جد معادلة المحل الهندسي للنقطة تتحرك على بعدين متساويين من النقطتين (٣، ٠)، (-٣، ٠)

س٤: أ ب ح مثلث محيطه ٣٢ سم حيث احداثيات الرأسين أ، ب هما أ(٥، ٠)، ب(-٥، ٠) والرأس ح يتحرك في المستوى، جد المحل الهندسي الذي يمسح من تحرك الرأس ح وعادلته

س٥: إذا كانت ب١، ب٢، ب٣، ب٤ نقطتين ثابتتين عين نوع المحنى الذي يمثله النقط ن(س، ص) بحيث أن ن ب١ + ن ب٢ = ل، ب١ ب٢ < ل

قطع ناقص

س٦: الحاويتان س = $\frac{1}{4}$ (ن - ١)^٢، ص = ن حيدان موقع جسم على منحنى في اللحظة ن أكتب معادلة المحنى الذي يتحرك عليه الجسم على الصورة س = ق(ص) ثم عين نوع هذا القطع وعناصره الأساسية

تمت
بحمد الله

٢٠١٤ / ٢٠١٥

مع تحيات

الاستاذ ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM

٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١

المعلم: ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي