الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

النقاط الحرجة

في
-١
-٢
-٣
-٤
-٥

سؤال:
احسب النقاط والقيم الحرجة للاقترانات التالية:

① ق(س) = س³ − ٦س² + ١٢س + ١٢ ، س ∈ [٠، ٥]

الحل: ق′ = ٣س² − ٦ = ٠
س = ٣

الحرجة {٠، ٥، ٣}

② ق = س³/٣ − ٤س − ١٢ ، س ∈ [١، ٦)

ق′ = س² − ٤ = صفر ⟸ س = ٢ ، −٢ ∉ يهمل

٦ ∉ تهمل

الحرجة = {١، ٢}

③ ق(س) = |س − ٣| + س

نعيد التعريف ق = { ٣ ، س ≥ ٣
٢س − ٣ ، س < ٣

ق′ = { ٠ ، س > ٣
٢ ، س < ٣
غ.م ، س = ٣

⟸ الحرجة = (−∞، ٣]

④ ق = [٢س + ١] ، س ∈ [٠، ٥]
الحرجة = [٠، ٥].

⑤ ق(س) = $\sqrt{س^2 - ٦س}$

نجد المجال س² − ٦س = صفر
س(س − ٦) ≥ ٠
س = ٠ ، ٦

(−∞، ٠] ∪ [٦، ∞)

ق′(س) = $\frac{٢س - ٦}{٢\sqrt{س^2 - ٦س}}$

الحرجة = {٠، ٦}

البسط
٢س − ٦ = ٠ ⟸ س = ٣ ∉ تهمل

المقام
س² − ٦س = ٠
س = ٠، ٦

⑥ اذا كانت ق′(س) = $\frac{س - ٣}{س + ١٣}$
فما قيم س الحرجة على [١، ٦]

الحل:
البسط ⟸ س = ٢
المقام س = −١٣ ∉ تهمل
⟸ الحرجة {١، ٦، ٢}

⑦ اذا كانت
ق = ٢س³ − ٢أس² + ٦س + ٩
وكان له حرجة عندما س = ٢
فما قيم أ.

⑧ اذا كانت ق = $\sqrt{س^3/٣ - ٣س}$ ما النقاط الحرجة. على [−٢، ٢]

ق′ = $\frac{س^2 - ٣}{٢\sqrt{س^3/٣ - ٣س}}$ = ٠

س² − ٣ = ٠
س = ١ ، −١

س³/٣ − ٣س = ٠
س(س²/٣ − ٣) = ٠
س = ٠ ، س = √٣ ، −√٣

الحرجة = {−٢، ٢، ١، −١، −√٣، √٣}.

⑨ ق = { س² − س ، ٠ ≤ س ≤ ١
س − ١ ، ١ < س ≤ ٣

فما النقاط الحرجة.

الحل: ق′ = { ٢س − ١ ، ٠ < س < ١
١ ، ١ < س < ٣

ق′ = ٠ ⟸ ٢س − ١ = ٠ ⟸ س = ½ ∈ (٠، ١)

الحرجة = {٠، ½، ٣}

١

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

التزايد والتناقص

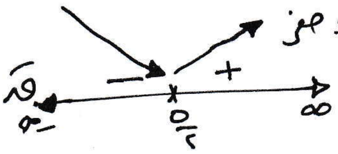
① نجد الحرجة
② نعين خط الاعداد
③ نختبر الاشارات على اقتران قَ(س).
④ + ⟸ متزايد
− ⟸ متناقص
٠ ⟸ ثابت.

سؤال :
اوجد فترات التزايد والتناقص لكل مما يلي

① ق(س) = س² − ٥س + ١٨

الحل: قَ(س) = ٢س − ٥ = صفر

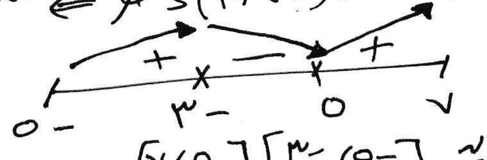
س = $\frac{٥}{٢}$



متناقص (−∞، $\frac{٥}{٢}$]
متزايد [$\frac{٥}{٢}$، ∞).

② ق(س) = $\frac{س^٣}{٣}$ − س² − ١٥س − ١٢
س ∈ [−٥، ٧]

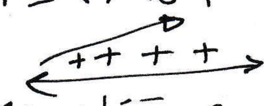
قَ(س) = س² − ٢س − ١٥ = صفر
(س − ٥)(س + ٣) = صفر ⟸ س = ٥ ، −٣



متزايد [−٥، −٣] ، [٥، ٧]
متناقص [−٣، ٥]

③ ق(س) = س³ + ٣س + ٩

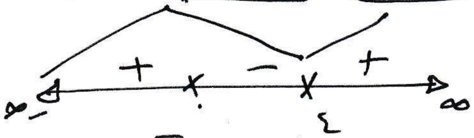
قَ = ٣س² + ٢ = ٠ ⟸ س² = $\frac{-٢}{٣}$ X
مستحيل



ق متزايد على ح

④ ق(س) = س³ − ٦س²

قَ = ٣س² − ١٢س = صفر
٣س(س − ٤) = ٠
س = ٠ ، س = ٤
الحرجة = {٠، ٤}

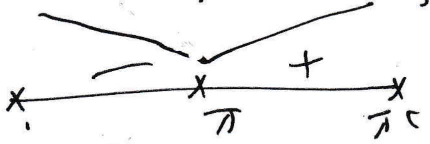


متزايد على [٤، ∞) ، (−∞، ٠]
متناقص [٠، ٤]

⑤ ق = ٢س + $\frac{١}{٢س}$ واجب.

⑥ ق = ٥ جتاس لكل [٠، ٢π]

قَ = −٥ جاس = صفر
جاس = ٠ ⟸ س = π ، ٢π
الحرجة = {٠، π، ٢π}



ق متزايد على [π، ٢π] متناقص [٠، π]

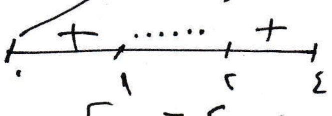
⑦ ق(س) = $\begin{cases} س + ٢ ، & س \le ١ \\ [س + ٣] ، & ١ < س < ٢ \\ س^٣ − ٥ ، & س \ge ٢ \end{cases}$

اجب التزايد والتناقص على [٠، ٤]

الحل
نعرّف السؤال ق(س) = $\begin{cases} س + ٢ ، & س \le ١ \\ ٣ ، & ١ < س < ٢ \\ س^٣ − ٥ ، & س \ge ٢ \end{cases}$

قَ = $\begin{cases} ١ ، & س < ١ \\ ٠ ، & ١ < س < ٢ \\ ٣س^٢ ، & س > ٢ \end{cases}$

الحرجة = {٠، ٤، ١، ٢}



متزايد [٠، ١] ، [٢، ٤]
ثابت [١، ٢]

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

واجب

٨) اذا كانت ق متزايد على ح ، هـ متناقص على ح وكانت ل(س) = ٧ق(س) − ٣ هـ^٢(س)
بين أنه ل متزايد على ح.

الحل: ل' = ٧ ق' − ٦ هـ(س) × هـ'(س)
ق' > ٠ ⇐ ٧ ق' > ٠
هـ^٢ > ٠ ، لأنه مربع
هـ' < ٠ لأنه متناقص
⇐ هـ × هـ' < ٠
⇐ −٦ هـ × هـ' > ٠
⇐ ل' = موجب + موجب = موجب
⇐ ل متزايد

٩) اذا كانت هـ' = ق ، هـ = ق'
وكانت ل = ق^٢(س) − هـ^٢(س)
اثبت أن ل(س) اقتران ثابت

الحل ل' = ٢ق ق' − ٢هـ هـ'
= ٢هـ' × هـ − ٢هـ هـ' = صفر
⇐ ل = ثابت.

١٠) ق(س) = (س+٢)^٣ + جا^٢ س اثبت أنه ق متزايد على [٠، π/٢]
ق' = ٣(س+٢)^٢ + ٢ جاس جتاس
٣(س+٢)^٢ موجب لكل س ∈ (٠، π/٢)
جتاس جاس موجب لكل س ∈ (٠، π/٢)
⇐ ق' > ٠ لكل (٠، π/٢)
⇐ متزايد على (٠، π/٢)

١١) حدد فترات التزايد والتناقص لكل مما يلي
أ) ق(س) = س^٢ + ٢س + ٥
الحل

− | +
−١

٢) ق(س) = ١/٣ س^٣ − ١/٢ س^٢ − ٦س على [−٥، ٥]

+ | − | +
−٥ ، −٢ ، ٣ ، ٥

٣) ق(س) = |٤ − ٤س|

− | +
−∞ ، ١ ، ∞

٤) ق(س) = س + ١/س ، س ≠ ٠

+ | − | − | +
−∞ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ∞

٥) ق(س) = { ٨ − س^٢ ، −٢ ≤ س < ٢
(س+٢) ، ٢ ≤ س ≤ ٧

+ | − | +
−٢ ، ٠ ، ٢ ، ٧

التزايد والتناقص

1) حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران $ق(س) = س^3 - ٣س^2 + ١$ ؟؟

الحل: $ق(س) = س^3 - ٣س^2 + ١$

$ق'(س) = ٣س^2 - ٦س = $ صفر

$٣س(س - ٢) = $ صفر ← $س = ٠ ، ٢$

ق(س) متزايد في $(-\infty ، ٠]$ ، وفي $[٢ ، \infty)$

ومتناقص في $[٠ ، ٢]$

2) حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران $ق(س) = جتا٢س ، س \in [٠ ، ٢\pi]$ ؟؟

الحل: $ق(س) = جتا٢س ، س \in [٠ ، ٢\pi]$

$ق'(س) = -٢ جا٢س = $ صفر

$جا٢س = $ صفر

$٢س = \pi ، ٢\pi ، ٣\pi$

$س = \frac{\pi}{2} ، \pi ، \frac{3\pi}{2}$

ق متناقص في $[٠ ، \frac{\pi}{2}]$ وفي $[\pi ، \frac{3\pi}{2}]$

ومتزايد في $[\frac{\pi}{2} ، \pi]$ وفي $[\frac{3\pi}{2} ، ٢\pi]$

3) حدد فترات التزايد والتناقص لكل من الاقترانات الآتية:

أ) $ق(س) = س^2 + ٦س - ٧$

ب) $ق(س) = س - |٣ - س| ، س \in [-٢ ، ٦]$

جـ) $ق(س) = جا^2س ، س \in [٠ ، ٢\pi]$

د) $ق(س) = (س - ١)^3$

هـ) $ق(س) = \sqrt{٤ - س^2} ، س \in [-٢ ، ٢]$

و) $ق(س) = س^{\frac{3}{5}}$

ز) $ق(س) = س + جاس ، س \in [٠ ، \frac{\pi}{2}]$

ح) $ق(س) = \begin{cases} س^2 + ١ & ، س \le ٠ \\ ١ & ، ٠ < س < ٢ \\ \sqrt{س - ٢} & ، س \ge ٢ \end{cases}$

ط) $ق(س) = \frac{س - ٣}{س^2 + ٩}$

ي) $ق(س) = \begin{cases} ١ - ٢س & ، -٢ \le س < ١ \\ |٢س - ٤| & ، ١ \le س < ٤ \end{cases}$

الحل: أ) $ق'(س) = ٢س + ٦ = $ صفر

$٢س = -٦ \leftarrow س = -٣$

ق متناقص في $(-\infty ، -٣]$

ومتزايد في $[-٣ ، \infty)$

ب) الحل: $٣ - س = $ صفر

$س = ٣$

$ق(س) = س - \begin{cases} ٣ - س & ، -٢ \le س < ٣ \\ س - ٣ & ، ٣ \le س \le ٦ \end{cases}$

$= \begin{cases} -٣ + ٢س & ، -٢ \le س < ٣ \\ ٣ & ، ٣ \le س \le ٦ \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢ & ، -٢ < س < ٣ \\ ٠ & ، ٣ < س < ٦ \end{cases}$

ق متزايد في $[-٢ ، ٣]$ وثابت في $[٣ ، ٦]$

جـ) ق'(س) = ٢ جا س جتا س = صفر

جا س = صفر ← س = π

جتا س = صفر ← س = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$

++ −− ++ −−

0 ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ ، 2π

ق(س) متزايدة في $[0 ، \frac{\pi}{2}]$ وفي $[\pi ، \frac{3\pi}{2}]$

ومتناقصة في $[\frac{\pi}{2} ، \pi]$ وفي $[\frac{3\pi}{2} ، 2\pi]$

د) ق'(س) = ٣(س − ١)^2 = صفر ← س = ١

ق متزايدة ع ح

ق' +++ ++ (١)

هـ) ق'(س) = $\frac{-2س}{2\sqrt{4 - س^2}}$

ق' = صفر ← −٢س = صفر ← س = صفر

ق' غير موجودة عند س = ٢ ، −٢

ق' +++ −−− (-2 ، 0 ، 2)

ق متزايدة في $[-2 ، 0]$

ومتناقصة في $[0 ، 2]$

و) ق'(س) = $\frac{3}{5}$ س$^{-\frac{2}{5}}$ = $\frac{3}{5 س^{\frac{2}{5}}}$

= $\frac{3}{5\sqrt[5]{س^2}}$

+++ +++ (٠)

ق' غير موجودة عند س = صفر

ق متزايدة على ح

ز) ق'(س) = ١ + جتا س = صفر

جتا س = −١ ← س = $\pi \notin (0 ، \frac{\pi}{2})$

ق متزايدة في $[0 ، \frac{\pi}{2}]$

+++ ($\frac{\pi}{2}$)

ح) ق'(س) = $\begin{cases} 2س & س < 0 \\ \text{صفر} & 0 < س < 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{س-2}} & س > 2 \end{cases}$

ق' = صفر ← ٢س = صفر ← س = صفر

− −−−−− (٠ ، ٢)

ق متناقصة في $(-\infty ، 0]$

ومتزايدة في $[2 ، \infty)$ وثابتة في $[0 ، 2]$

ط) ق'(س) = $\frac{(س^2 + 9) \times 1 - (س - 3) \times 2س}{(س^2+9)^2}$

= $\frac{س^2 + 9 - 2س^2 + 6س}{(س^2 + 9)^2}$

ق' = صفر ← $-س^2 + 6س + 9$ = صفر

$س^2 - 6س - 9$ = صفر

المميز $ب^2 - 4أجـ = 36 - 4 \times 1 \times -9$

= $36 + 36 = 72$

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ}$

= $\frac{6 \pm \sqrt{36 \times 2}}{2}$ = $\frac{6 \pm 6\sqrt{2}}{2}$

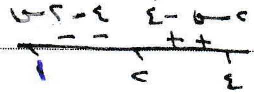
= $3 \pm 3\sqrt{2}$

− + − ($3 - 3\sqrt{2}$ ، $3 + 3\sqrt{2}$)

ق متناقص في (-∞ ، ٢ - ٢√٢] وفي [٢ + ٢√٢ ، ∞)

ومتزايد في [٣ - ٣√٢ ، ٣ + ٢√٢]

ي) ٢س - ٤ = صفر



س = ٢

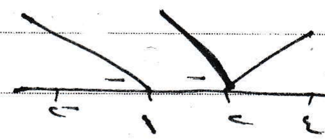
ق(س) = { ١ - ٢س ، -٢ ≤ س < ١
٤ - ٢س ، ١ ≤ س < ٢
٢س - ٤ ، ٢ ≤ س < ٤ }

ق غير متصل عند س = ١

ومتصل عند س = ٢

ق'(س) = { -٢ ، -٢ < س < ١
-٢ ، ١ < س < ٢
٢ ، ٢ < س < ٤ }

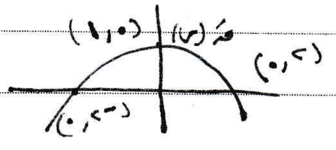
ق' غير موجودة عند س = -٢ ، ١ ، ٢ ، ٤



ق متناقص في [-٢ ، ١) وفي [١ ، ٢]

ومتزايد في [٢ ، ٤]

٤ بالاعتماد على الشكل الذي يمثل منحنى اقتران المشتقة الأولى للاقتران ق كثير الحدود من الدرجة الثالثة ، جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق



الحل:

ق متزايد في [-٢ ، ٢] لأن ق' > صفر (فوق السينات) ومتناقص في (-∞ ، -٢]

وفي [٢ ، ∞) ق' < صفر (تحت السينات)

٥ إذا كان ق'(س) = هـ'(س) ، لكل س ∈ ح

اثبت أن ق(س) - هـ(س) = ثابتاً ؟؟

الحل: نفرض ل(س) = ق(س) - هـ(س)

ل'(س) = ق'(س) - هـ'(س) = صفر

لأن ق'(س) = هـ'(س)

∴ ل(س) ثابت

٦ إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين على [أ ، ب] وقابلين للاشتقاق على (أ ، ب) وكان كل من ق(س) ، هـ(س) متزايد على [أ ، ب] وكان ل(س) = ق(س) + هـ(س)

فأثبت أن ل(س) متزايد على [أ ، ب]

الحل: ق'(س) > صفر لأن ق(س) متزايد

هـ'(س) > صفر لأن هـ(س) متزايد

ل(س) = ق(س) + هـ(س)

ل'(س) = ق'(س) + هـ'(س) > صفر

∴ ل(س) متزايد

الأستاذ
إياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

وضح القيم القصوى لكل مما يلي:

① ق(س) = س² − ٢س + ٥

ق'(س) = ٢س − ٢ = ٠ ⇐ س = ١

صغرى محلية عند س = ١

بحيث ق(١) = ١ − ٢ + ٥ = ٤

② ق = س³ − ٣س

ق' = ٣س² − ٣ = صفر ⇐ س² = ١ ⇐ س = ±١

س = −١ / عظمى محلية

ق(−١) = ٢

س = ١ / صغرى محلية

ق(١) = −٢

③ ق(س) = |٢س − س²|

٢س − س² = ٠

س(٢ − س) = ٠

س = ٠ ، س = ٢

$$ق = \begin{cases} ٢س − س^٢ ، & ٠ \le س \le ٢ \\ س^٢ − ٢س ، & س < ٠ \\ س^٢ − ٢س ، & س > ٢ \end{cases}$$

$$ق' = \begin{cases} ٢ − ٢س ، & ٠ < س < ٢ \\ ٢س − ٢ ، & س < ٠ \\ ٢س − ٢ ، & س > ٢ \\ غ.م ، & س = ٠ ، ٢ \end{cases}$$

٢ − ٢س = ٠ ، س = ١ ∈ (٠، ٢) / حرجة ⇐ الحرجة = {٠، ١، ٢}

س = ٠ / صغرى محلية / ق(٠) = صفر

س = ١ / عظمى محلية / ق(١) = ١

س = ٢ / صغرى محلية / ق(٢) = ٠

④ ق(س) = $\sqrt[3]{(س^٢ − ٤س)^٢}$

ق = (س² − ٤س)^{٢/٣}

ق' = $\frac{٢}{٣}$ (س² − ٤س)^{−١/٣} (٢س − ٤)

$$= \frac{٢(٢س − ٤)}{٣\sqrt[3]{س^٢ − ٤س}}$$

البسط = ٠ ⇐ ٢(٢س − ٤) = ٠ ⇐ س = ٢

المقام = ٠ ⇐ س² − ٤س = ٠

س(س − ٤) = ٠

س = ٠ ، س = ٤

س = ٠ / صغرى محلية / ق(٠) = ٠

س = ٢ / عظمى محلية / ق(٢) = $\sqrt[3]{١٦}$

س = ٤ / صغرى محلية / ق(٤) = ٠

⑤ ق = (س³ − ٩س)^{١/٣}

ق' = $\frac{١}{٣}$ (س³ − ٩س)^{−٢/٣} (٣س² − ٩)

$$= \frac{٣س^٢ − ٩}{٣(س^٣ − ٩س)^{٢/٣}} = \frac{٣س^٢ − ٩}{٣\sqrt[3]{(س^٣ − ٩س)^٢}}$$

البسط = ٠ ⇐ ٣س² − ٩ = ٠ ⇐ س = ±√٣

المقام = ٠ ⇐ س³ − ٩س = ٠ ⇐ س(س² − ٩) = ٠

س = ٠ ، ٣ ، −٣

الحرجة = {±√٣ ، ±٣ ، ٠}

لأن المقام موجب ندرس إشارة البسط

متزايد (−∞، −√٣] ، [√٣، ∞)

متناقص [−√٣، √٣]

س = −√٣ / عظمى محلية

س = √٣ / صغرى محلية

⑥ ق = $\frac{س^٢}{\sqrt{س − ١}}$ ، س > ١

الحل: $ق' = \frac{٢س \times \sqrt{س − ١} − \frac{١}{٢\sqrt{س − ١}} \times س^٢}{س − ١}$

$ق' = \frac{٣س^٢ − ٤س}{٢(س − ١)^{٣/٢}}$ ⇐ أصفار البسط: ٣س² − ٤س = ٠ ، س(٣س − ٤) = ٠ ، س = ٠ ✗ / س = ٤/٣ حرجة.

ق متزايدة [٤/٣، ∞) متناقصة (١، ٤/٣]

س = ٤/٣ / صغرى محلية مطلقة.

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٧) ق(س) = (س − أ)² + (س − ب)² + (س − جـ)²

اثبت أنه يوجد حرجة عند س = (أ + ب + جـ)/٣ بحيث أ، ب، جـ ثوابت.

الحل: ق'(س) = ٢(س − أ) + ٢(س − ب) + ٢(س − جـ) = ٠

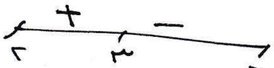
٢س + ٢س + ٢س = ٢أ + ٢ب + ٢جـ

٦س = ٢(أ + ب + جـ)

س = (أ + ب + جـ)/٣ (الحرجة)

٨) ق(س) = س − |س − ٣| على [−٢، ٦]

نعرف:

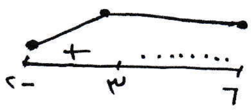


ق = { س − −(س − ٣) ، −٢ ≤ س ≤ ٣ ؛ س − (س − ٣) ، ٣ ≤ س ≤ ٦ }

ق = { ٢س − ٣ ، −٢ ≤ س < ٣ ؛ ٣ ، ٣ ≤ س ≤ ٦ }

ق' = { ٢ ، −٢ < س < ٣ ؛ ٠ ، ٣ < س < ٦ ؛ غ.م ، س = −٢، ٣، ٦ }

الحرجة: أطراف: −٢، ٦ ؛ ق' = ٠ : (٣، ٦) ؛ تحول: س = ٣



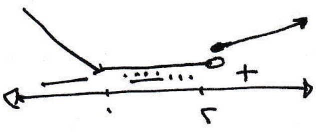
ق متزايد على [−٢، ٣]

ق ثابت على [٣، ٦]

٩) ق(س) = { س² + ١ ، س ≤ ٠ ؛ ١ ، ٠ < س ≤ ٢ ؛ √(س − ٢) ، س > ٢ }

الحل: ق غير متصل عند س = ٢

ق' = { ٢س ، س < ٠ ؛ ٠ ، ٠ < س < ٢ ؛ ١/(٢√(س − ٢)) ، س > ٢ }



الحرجة = [٠، ٢) ∪ {٢}

ق متناقص (−∞، ٠]

متزايد [٢، ∞)

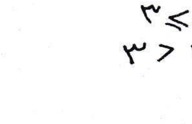
ثابت [٠، ٢]

١٠) احسب أصغر قيمة للاقتران ق(س) = |س − ٣| − ٥

الحل: ق(س) = |س − ٣| − ٥

ق = { س − ٨ ، س ≥ ٣ ؛ −س − ٢ ، س < ٣ }

ق' = { ١ ، س > ٣ ؛ −١ ، س < ٣ ؛ غ.م ، س = ٣ }



س = ٣ / صغرى محلية ومطلقة

بحيث ق(٣) = −٥

⇐ أصغر قيمة هي −٥.

١١) ق(س) = س⁴ − ٦س² − ٨س + ٣

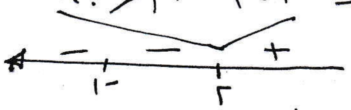
الحل: ق' = ٤س³ − ١٢س − ٨ = ٠

بالتجريب: س = −١ ⇐ تركيبية:

(س + ١)(س² − س − ٢) = ٠

(س + ١)(س − ٢)(س + ١) = ٠

س = −١ ، ٢ الحرجة



ق متزايد [٢، ∞)

متناقص (−∞، ٢]

س = ٢ / صغرى محلية ومطلقة

بحيث ق(٢) = −٢١

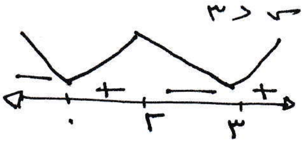
١٢) ق(س) = س²|س − ٣| ، احسب النقاط القصوى

الحل: ق = { س³ − ٣س² ، س ≥ ٣ ؛ ٣س² − س³ ، س < ٣ }

ق' = { ٣س² − ٦س ، س > ٣ ؛ ٦س − ٣س² ، س < ٣ ؛ غ.م ، س = ٣ }

٣س² − ٦س = ٠ ؛ ٣س(س − ٢) = ٠ ؛ س = ٠ ✗ ، س = ٢ ✗ لأن س > ٣

٦س − ٣س² = ٠ ؛ س = ٠ ، س = ٢ ✓ ✓ لكل س < ٣



الحرجة = {٠، ٢، ٣}

(٢، ق(٢)) = (٢، ٤) عظمى محلية

(٠، ق(٠)) = (٠، ٠) صغرى محلية ومطلقة

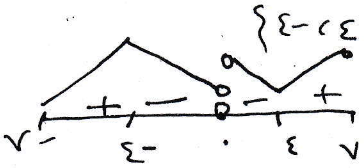
(٣، ق(٣)) = (٣، ٠) صغرى محلية ومطلقة

١٣) ق(س) = س + ١٦/س ، س ∈ [−٧، ٧] − {٠}

الحل: ق متصل على [−٧، ٧] − {٠}

ق' = ١ + −١٦/س² = (س² − ١٦)/س²

الحرجة = {−٧، ٧، ٤، −٤}



ق متزايد على [−٧، −٤] ، [٤، ٧]

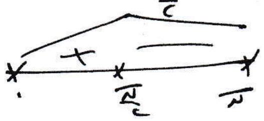
متناقص [−٤، ٠) ، (٠، ٤]

ق(−٤) = −٨ / عظمى محلية

ق(٤) = ٨ / صغرى محلية

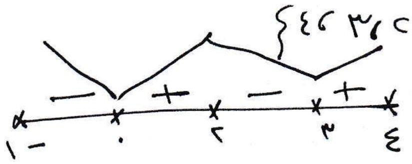
الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١) ق(س) = √جاس ، س ∈ [٠، π]
اجد القيم القصوى
الحل: قَ(س) = جتاس / (٢√جاس) ، صفر
جتاس = ٠ | ٢√جاس = ٠
س = π/٢ | س = ٠ ، π



س = π/٢ / عظمى محلية ق(π/٢) = ١
س = ٠ / صغرى ق(٠) = ٠
س = π صغرى ق(π) = ٠

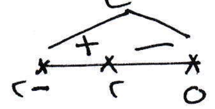
٢) ق(س) = س²|س − ٣| ، س ∈ [−١، ٤]
جد القيم القصوى
الحل:
ق(س) = { −س³ + ٣س² ، −١ ≤ س < ٣ ؛ س³ − ٣س² ، ٣ ≤ س ≤ ٤ }
قَ(س) = { −٣س² + ٦س ، −١ < س < ٣ ؛ ٣س² − ٦س ، ٣ < س < ٤ ؛ غ.م ، س = ٣ }
قَ = ٠ ← ٣س² − ٦س = ٠ ← س = ٠، ٢
الحرجة {−١، ٠، ٢، ٣، ٤}



س = −١ / عظمى محلية ق(−١) = ٤
س = ٢ / = ق(٢) = ٤
س = ٤ = ق(٤) = ١٦ / مطلقة
س = ٣ / صغرى محلية ق(٣) = ٠
س = ٠ / صغرى محلية ق(٠) = ٠

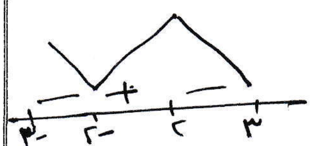
٣) ق(س) = ٢س⁴ − ب س لها قيمة صغرى عند س = ١ ، ما قيمة ب.
الحل قَ(١) = ٠
٨ − ب = ٠
٨ − ب = ٠
٨ = ب

٤) ق = ٤س − س² على [−٢، ٥]
قَ = ٤ − ٢س = ٠ ← س = ٢



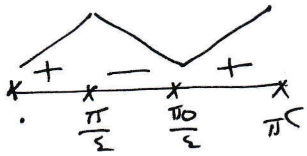
ق(٢) = ٨ − ٤ = ٤ / عظمى مطلقة
ق(−٢) = −٨ − ٤ = −١٢ / صغرى مطلقة
ق(٥) = ٢٠ − ٢٥ = −٥ / صغرى

٥) ق = ١٢س − س³ ، س ∈ [−٣، ٣]
قَ = ١٢ − ٣س² = ٠
س = ±٢
الحرجة {−٣، −٢، ٢، ٣}



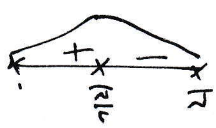
ق(−٣) = −٩ / عظمى
ق(٢) = ١٦ / عظمى مطلقة
ق(−٢) = −١٦ / صغرى محلية مطلقة
ق(٣) = ٩ / صغرى

٦) ق = جتاس + جاس ، س ∈ [٠، ٢π]
قَ = −جاس + جتاس = ٠
جتاس = جاس
س = π/٤ ، ٥π/٤



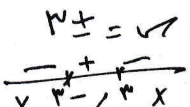
ق(٠) = ١ / صغرى
ق(٥π/٤) = −١/√٢ + −١/√٢ = −٢/√٢ / صغرى مطلقة
ق(π/٤) = ١/√٢ + ١/√٢ = ٢/√٢ / عظمى مطلقة
ق(٢π) = ١ + ٠ = ١ / عظمى

٧) ق = س جاس + جتاس ، س ∈ [٠، π]
قَ = س جتاس + جاس − ~~جاس~~ = ٠
س جتاس = ٠
$\boxed{س = \pi/٢}$ $\boxed{س = ٠}$

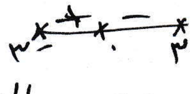


ق(π/٢) = π/٢ × ١ + ٠ = π/٢ عظمى مطلقة
ق(٠) = ٠ + ١ = ١ / صغرى
ق(π) = ٠ + (−١) = −١ صغرى مطلقة

٨) ق = √(٩ − س²)
نحدد المجال ← ٩ − س² = ٠ ← س = ±٣



ق معرف على [−٣، ٣]
قَ = −٢س / (٢√(٩ − س²)) = ٠
−٢س = ٠ ، $\boxed{س = ٠}$ | ٩ − س² = ٠ ، س = −٣ ، ٣

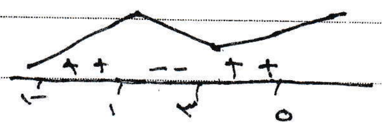


ق(٠) = ٣ / عظمى مطلقة
ق(−٣) = ٠ ، ق(٣) = ٠ / صغرى مطلقة

القيم القصوى

1] جد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = س³ − ٦س² + ٩س ، س ∈ [−١، ٥]

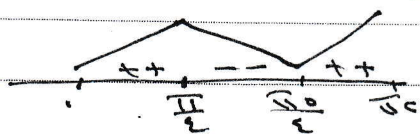
الحل: ق(س) = س³ − ٦س² + ٩س
س ∈ [−١، ٥]
ق'(س) = ٣س² − ١٢س + ٩ = صفر ÷ ٣
س² − ٤س + ٣ = صفر
(س − ٣) (س − ١) = صفر
س = ٣ ، ١



النقاط الحرجة (−١، −١٦)، (١، ٤)، (٣، ٠)، (٥، ٢٠)
ق(−١) = −١٦ صغرى مطلقة
ق(١) = ٤ عظمى محلية
ق(٣) = صفر محلية
ق(٥) = ٢٠ عظمى مطلقة

2] جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران ق(س) = جتاس + جاس ، س ∈ [٠، ٢π]

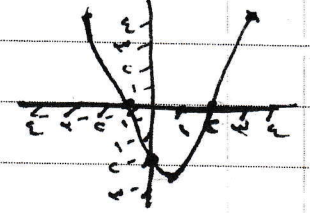
الحل: ق(س) = جتاس + جاس ، س ∈ [٠، ٢π]
ق'(س) = − جاس + جتاس = صفر
جتاس = جاس
س = $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$



ق($\frac{\pi}{4}$) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{2}{\sqrt{2}}$ قيمة عظمى محلية

ق($\frac{5\pi}{4}$) = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ + $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{-2}{\sqrt{2}}$ قيمة صغرى محلية

3] الشكل التالي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران كثير الحدود ق(س) المعرف على الفترة [−٣، ٣]
اعتمد على ذلك في تعيين:
١) النقط الحرجة للاقتران ق
٢) القيم القصوى المحلية للاقتران ق
٣) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق



الحل:
١- الحرجة عند
س ∈ {−٢، −١، ٢، ٣}
٢- قيمة صغرى محلية عند
س = −١ هي ق(−١) وقيمة عظمى محلية
عند س = ٢ هي ق(٢)
٣- ق متزايد في [−٢، −١]، في [٢، ٣]
ومتناقص في [−١، ٢]

4] جد القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية (إن وجدت) وبين المطلقة منها لكل من الاقترانات الآتية:

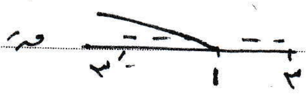
أ) ق(س) = س² − ٦س + ٥ ، س ∈ [−٣، ١]
ب) ق(س) = ١٢س − س³ ، س ∈ [−٢، ٣]
جـ) ق(س) = س² + ٤س − ٥ ، س ∈ ح
د) ق(س) = { س² + ٥ ، −٢ ≤ س < ٣ ؛ ١١ − ٢س ، ٣ < س < ٧
هـ) ق(س) = س² |س − ١٢| ، س ∈ ح
و) ق(س) = س³ − $\frac{س^4}{4}$ ، س ∈ [−١، ٤]
ز) ق(س) = $\sqrt{جاس}$ ، س ∈ [٠، ٢π]
ح) ق(س) = $\sqrt[3]{(س^2 - ٤س - ٥)^2}$ ، س ∈ ح
ط) ق(س) = س³ + ١ ، س ∈ ح

Private Developed
Kingdom Schools

مدارس المملكة
الأهلية المتطورة
تأسست عام 2004

الحل

٣) ق'(س) = ٢س − ٦ = صفر ⟸ س = ٣



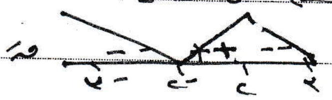
ق(−٣) = ٣٢ قيمة عظمى مطلقة

ق(١) = صفر قيمة صغرى مطلقة

٤) ق'(س) = ١٢ − ٣س² = صفر

١٢ = ٣س² ⟸ س² = ٤

س = ±٢



ق(−٣) = −٩

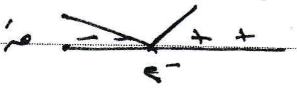
ق(٢) = ١٦ عظمى محلية ومطلقة

ق(−٢) = −١٦ صغرى محلية ومطلقة

ق(٣) = ٩

ج) ق'(س) = ٢س + ٤ = صفر ⟸ س = −٢

ق(−٢) = −٩ صغرى محلية ومطلقة



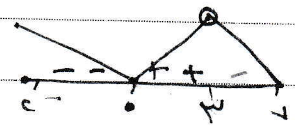
د) ق(س) غير متصل عند س = ٣

ق'(س) = { ٢س ، −٢ < س < ٣
{ ٢ ، ٣ < س < ٧

ق' = صفر ⟸ ٢س = صفر ⟸ س = صفر

ق' غير موجود عند س = ٣

ق(−٢) = ٩



وبما انه في ق(٣⁻) = ١٤ > ٩

∴ لا توجد قيمة عظمى مطلقة

ق(٠) = ٥ صغرى محلية

ق(٧) = −٤ (غير موجودة)

لا توجد صغرى مطلقة

هـ) س = صفر

س = ٢

ق(س) = س² × { ٢ − س ، س < ٢
{ س − ٢ ، س ≥ ٢

= { ٢س² − س³ ، س < ٢
{ س³ − ٢س² ، س ≥ ٢

ق'(س) = { ٤س − ٣س² ، س < ٢
{ ٣س² − ٤س ، س > ٢

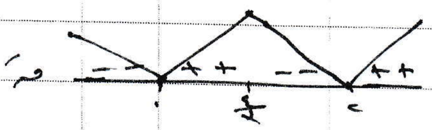
ق' = صفر ⟸ ٤س − ٣س² = صفر

س(٤ − ٣س) = صفر ⟸ س = صفر ، ٤/٣

٣س² − ٤س = صفر

س(٣س − ٤) = صفر ⟸ س = صفر ، ٤/٣ ×

ق' غير موجودة عند س = ٢



ق(٠) = صفر صغرى محلية ومطلقة

ق(٢) = صفر صغرى محلية ومطلقة

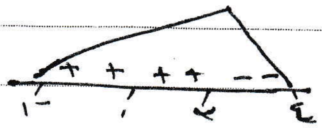
ق(٤/٣) = ٣٢/٢٧ عظمى محلية

و) ق(س) = س³ − س⁴/٤ ، س ∈ [−١، ٤]

ق'(س) = ٣س² − س³ = صفر

س²(٣ − س) = صفر

س = صفر ، ٣



م(−١) = $\frac{-5}{4}$ صغرى مطلقة

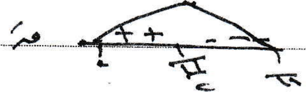
م(٤) = صفر

م(٣) = $\frac{27}{4}$ قيمة عظمى محلية ومطلقة

ز) مَ(س) = $\frac{\text{جتاس}}{2\sqrt{\text{جاس}}}$

مَ = صفر ← جتاس = صفر ← س = $\frac{\pi}{2}$

مَ غير موجودة ← جاس = صفر ← س = ٠ ، π



م(٠) = صفر صغرى مطلقة

م(π) = صفر صغرى مطلقة

م($\frac{\pi}{2}$) = ١ عظمى محلية ومطلقة

ح) م(س) = $(\text{س}^2 - 4\text{س})^{\frac{2}{3}}$

مَ(س) = $\frac{2}{3}(\text{س}^2 - 4\text{س})^{-\frac{1}{3}} \times (2\text{س} - 4)$

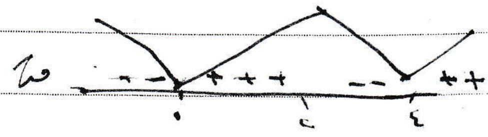
= $\frac{2(2\text{س} - 4)}{3\sqrt[3]{\text{س}^2 - 4\text{س}}}$

مَ = صفر ← ٢س − ٤ = صفر ← س = ٢

مَ غير موجودة ← س² − ٤س = صفر

س(س − ٤) = صفر

س = صفر ، س = ٤

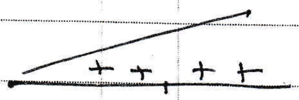


م(٢) = $\sqrt[3]{16}$ عظمى محلية

م(١) = صفر صغرى محلية ومطلقة

م(٤) = صفر صغرى محلية ومطلقة

ط) مَ(س) = ٣س² = صفر ← س = صفر



م متزايد على ح ، لا توجد قيم قصوى

$\boxed{5}$ جد قيم كل من الثابتين أ، ب التي تجعل للاقتران م(س) = س³ + أس² + ب س نقطتين حرجتين عند س = −١ ، س = ٢ ؟؟

الحل: م(س) = س³ + أس² + ب س

مَ(س) = ٣س² + ٢أس + ب

مَ(−١) = ٣ − ٢أ + ب = صفر

−٢أ + ب = −٣

مَ(٢) = ١٢ + ٤أ + ب = صفر

٤أ + ب = −١٢

بالطرح: ٦أ = −٩ ← أ = $\frac{-9}{6}$ = $\frac{-3}{2}$

بالتعويض

−٢ × $\frac{-3}{2}$ + ب = −٣

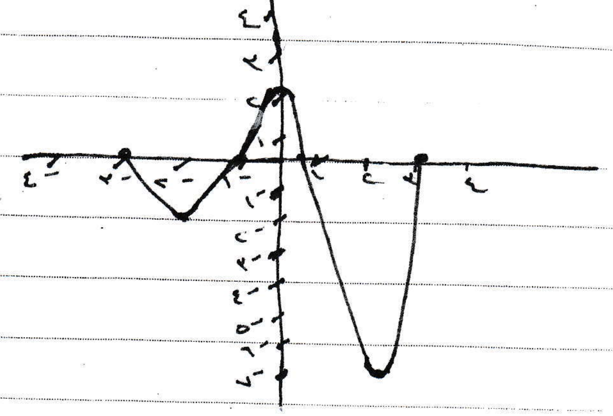
٣ + ب = −٣ ← ب = −٦

$\boxed{6}$ الشكل التالي يمثل منحنى كثير الحدود م(س) المعرف على الفترة [−٣ ، ٣] اعتمد على ذلك في تعيين:

أ) النقط الحرجة للاقتران م

ب) القيم القصوى للاقتران م

جـ) مجالات التزايد والتناقص



أ) (-٣،٠) ، (-٢،-٢) ، (٠،٢) ، (٢،-٧)
(٣،٠) نقاط حرجة

ب) ق(-٢) = -٢ صغرى محلية
ق(٠) = ٢ عظمى محلية ومطلقة
ق(٢) = -٧ صغرى محلية ومطلقة

جـ) ق(س) متزايد في [-٢،٠] وفي [٢،٣]
ومتناقص [-٣،-٢] وفي [٠،٢]