الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

المساحات

النوع الأول:-

احسب المساحة المحصورة بين منحنى ومحور السينات

١ احسب المساحة المحصورة بين
$ق(س) = ٤ - س^٢$ ومحور السينات

الحل $٤ - س^٢ = ٠$

$س^٢ = ٤ \leftarrow س = \pm ٢$

$$م = \int_{-٢}^{٢} |٤ - س^٢| \, دس = ٤س - \frac{س^٣}{٣} \Big|_{-٢}^{٢}$$

$$(٨ - \frac{٨}{٣}) - (-٨ + \frac{٨}{٣})$$

$$٨ - \frac{٨}{٣} + ٨ - \frac{٨}{٣}$$

$$\frac{٤٨}{٣} - \frac{١٦}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$$

٢ أوجد المساحة بين $ق(س) = س^٢ - ٤س$ ومحور السينات

الحل: $س^٢ - ٤س = ٠$

$س(س - ٤) = ٠$

$س = ٠ \quad / \quad س = ٤$

$$= \int_{٠}^{٤} س^٢ - ٤س \, دس$$

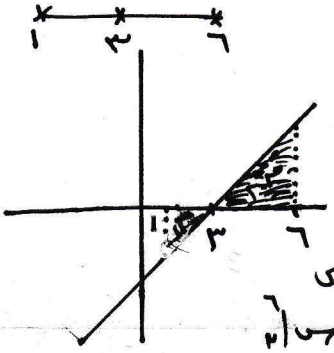
$$= \frac{س^٣}{٣} - \frac{٤س^٢}{٢} \Big|_{٠}^{٤} = \frac{٦٤}{٣} - \frac{١٦ \times ٢}{٢ \times ١} - ٠$$

$$\frac{٦٤}{٣} - \frac{٤٨}{٣} = \frac{١٦}{٣}$$

٣ $ق(س) = س^٣ - س$ ومحور السينات
أوجد المساحة المحصورة بينهما **واجب**

٤ احسب المساحة المحصورة بين
$ق(س) = ٢س - ٦$ ومحور السينات
والمستقيم $س = ١$ ، $س = ٦$

الحل: $٢س - ٦ = ٠ \leftarrow س = ٣$



$م_١ = \int_{١}^{٣} (٠) - (٢س - ٦) \, دس$

$م_٢ = \int_{٣}^{٦} (٢س - ٦) - (٠) \, دس$

$م = م_١ + م_٢$

$= \int_{١}^{٣} ٦ - ٢س \, دس + \int_{٣}^{٦} ٢س - ٦ \, دس$

$= ٦س - س^٢ \Big|_{١}^{٣} + س^٢ - ٦س \Big|_{٣}^{٦}$

$= (١٨ - ٩) - (٦ - ١) + (٣٦ - ٢٤) - (٩ - ١٨)$

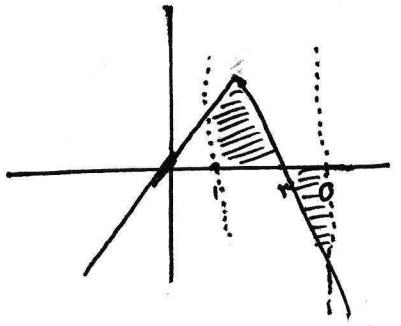
$= ٩ - ٥ + ١٢ + ٩ = ٣٥$

٥ احسب المساحة المحصورة بين
$ق = ٣س - س^٢$ ومحور السينات
لكل $[١ ، ٥]$

الحل $٣س - س^٢ = ٠$

$س(٣ - س) = ٠$

$س = ٠ \quad / \quad س = ٣$



$$م = \int_{١}^{٣} (٣س - س^٢) - (٠) \, دس + \int_{٣}^{٥} (٠) - (٣س - س^٢) \, دس$$

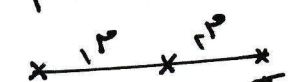
$$= \frac{٣س^٢}{٢} - \frac{س^٣}{٣} \Big|_{١}^{٣} + \frac{س^٣}{٣} - \frac{٣س^٢}{٢} \Big|_{٣}^{٥} = \cdots$$

٦ تدريب: احسب المساحة بين $ق = ٣ - ٢س$ والمحاور
الجواب $= \frac{٨}{٣}$

٧ احسب المساحة بين $ص = جاس - \frac{١}{٢}$
ومحور السينات في $[-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$

الحل:

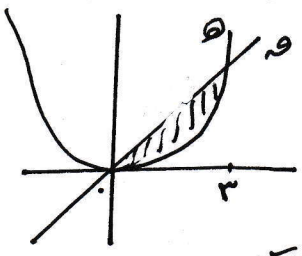
$جاس - \frac{١}{٢} = ٠ \leftarrow جاس = \frac{١}{٢} \leftarrow س = \frac{\pi}{٦}$



$$م_١ = \int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٦}} جاس - \frac{١}{٢} \, دس$$

$$م_٢ = \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} \cdots$$

٨ احسب المساحة المحصورة بين
$ق = ٣س - س^٢$ ، $ص = س^٢$



$ص = ق$

$٣س - س^٢ = س^٢$

$٢س^٢ - ٣س = ٠$

$س(٢س - ٣) = ٠$

$س = ٠ \quad / \quad س = ٣$

$$م = \int_{٠}^{٣} ٣س - ٢س^٢ \, دس = \cdots$$

٩ اذا كان $ص = جـ$ يقسم المساحة بين
$ص = س^٢$ ، $ص = ٤$ الى قسمين متساويين
فما قيمة جـ

الحل:- نجد المساحة بين $ص = س^٢$ ، $ص = ٤$

$س^٢ = ٤ \leftarrow س = \pm ٢$

$$م = \int_{-٢}^{٢} ٤ - س^٢ \, دس = \cdots = \frac{٣٢}{٣}$$

نجد المساحة بين $ص = س^٢$ ، $ص = جـ$

$س = \pm \sqrt{جـ} \leftarrow م = \int_{-\sqrt{جـ}}^{\sqrt{جـ}} جـ - س^٢ \, دس = \cdots = \frac{٤}{٣} جـ \sqrt{جـ}$

$\frac{٤}{٣} جـ \sqrt{جـ} = \frac{١}{٢} \times \frac{٣٢}{٣}$

$جـ \sqrt{جـ} = ١٦$

$جـ^٣ = ٢٥٦$

$جـ = \sqrt[٣]{٢٥٦}$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

النوع الثاني :-
المساحة بين أكثر من اقترانين
في هذه الحالة يجب الرسم وتحديد المنطقة المطلوبة وايجاد نقاط التقاطع وايجاد المساحة كل منطقة ثم جمع المساحات .

١ احسب المساحة بين $و = س^2 + ١$ و $ص = ٣ - س$ والمحاور

الحل

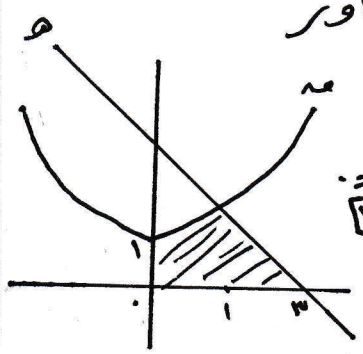
$و = ص$

$س^2 + ١ = ٣ - س$

$س^2 + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠$

$س = -٢$ مرفوض ✗ ، $س = ١$ ✓



$ص = ٠$

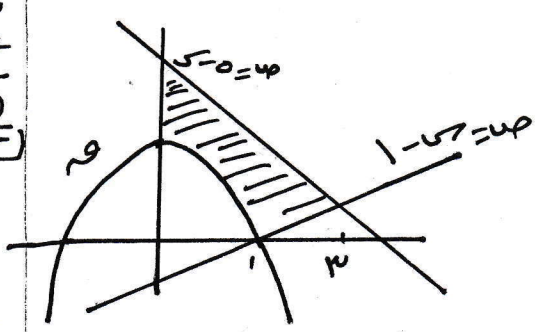
$٣ - س = ٠$

$س = ٣$ ✓

$م = \int_{٠}^{١} س^2 + ١ \, دس + \int_{١}^{٣} ٣ - س \, دس$

$= \left| \frac{س^3}{٣} + س \right|_{٠}^{١} + \left| ٣س - \frac{س^2}{٢} \right|_{١}^{٣} = \frac{١٠}{٣}$ وحدة مساحة

٢ احسب المساحة بين $و = ١ - س^2$ و $ص = ٥ - س$ / $ص = س - ١$ ومحور الصادات



$و = ص$

$١ - س^2 = س - ١$

$س^2 + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠$

$س = -٢$ ✗ ، $س = ١$ ✓

$ص = ص$

$٥ - س = س - ١$

$٦ = ٢س$

$س = ٣$ ✓

$= \int_{١}^{٣} (٥ - س) - (١ - س^2) \, دس + \int_{٠}^{١} (٥ - س) - (س - ١) \, دس$

$= \int_{٠}^{١} ٤ - س + س^2 \, دس + \int_{١}^{٣} ٦ - ٢س \, دس$

$= \left| ٤س - \frac{س^2}{٢} + \frac{س^3}{٣} \right|_{٠}^{١} + \left| ٦س - س^2 \right|_{١}^{٣} = \frac{٤٧}{٦}$ وحدة مساحة

٣ $و = س^3$ / $ه = -٢س$ / $ص = ٨$

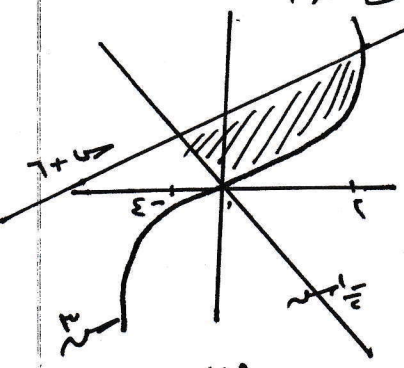
احسب المساحة .

والجواب

الجواب = ٢٨

٤ $و = س^3$ / $ص = \frac{١}{٢}س$ / $ص = س + ٦$

احسب المساحة المحصورة .



$و = ص$

$س^3 = \frac{١}{٢}س$

$س^3 + \frac{١}{٢}س = ٠$

$س(س^2 + \frac{١}{٢}) = ٠$ مرفوض

$س = ٠$ ✓

$و = ص$

$س^3 = س + ٦$

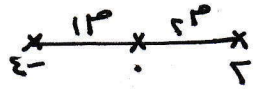
$س^3 - س - ٦ = ٠$

بالتجريب $س = ٢$ ✓

$ص = ص$

$س + ٦ = \frac{١}{٢}س$

$س = ٤$ ✓



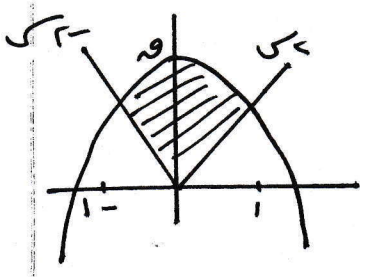
$= \int_{-٤}^{٢} (س + ٦) - (\frac{١}{٢}س) \, دس + \int_{٢}^{٠} (س + ٦) - س^3 \, دس$

$= ٢٢$

٥ احسب المساحة المحصورة بين $ص = |٢س|$ ، $و = ٣ - س^2$

الحل

$ص = |٢س|$ ، $س = ٢$ ، $س = ٠$



$٣ - س^2 = -٢س$

$س^2 - ٢س - ٣ = ٠$

$س^2 + ٢س - ٣ = ٠$

$(س - ٣)(س + ١) = ٠$

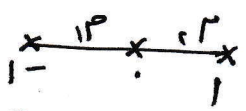
$س = ٣$ مرفوض ✗ ، $س = -١$ ✓

$٣ - س^2 = ٢س$ ← ك

$س^2 + ٢س - ٣ = ٠$ مرفوض

$(س + ٣)(س - ١) = ٠$

$س = -٣$ ✗ ، $س = ١$ ✓

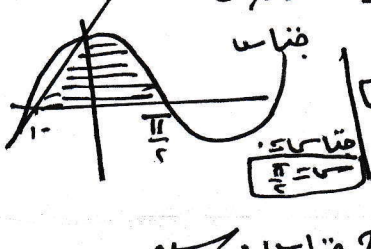


$= \int_{-١}^{١} (٣ - س^2) - (-٢س) \, دس + \int_{١}^{٢} (٣ - س^2) - (٢س) \, دس$

$= \left| ٣س + س^2 - \frac{س^3}{٣} \right|_{-١}^{١} + \left| ٣س - س^2 - \frac{س^3}{٣} \right|_{١}^{٢} = \frac{١٠}{٣}$ وحدة مساحة

٦ احسب المساحة بين $و = جتاس$ $ص = س + ١$ وفوق محور السينات

الحل :-



$جتاس = س + ١$

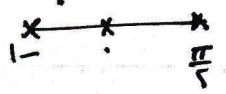
$س = ٠$

$جتاس = ٠$

$س = -١$

$جتاس = ٠$

$س = \frac{\pi}{٢}$



$= \int_{-١}^{\frac{\pi}{٢}} جتاس + س + ١ \, دس$

$= ٣/٢$

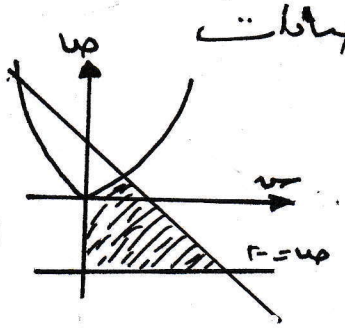
الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٧ $ق(س) = \frac{ك}{س}$ ، $ص = س - ١$ ، $س = ٤$

٨ $ص = \frac{٣}{س^{٢}}$ ، $ص = س - ٢$ ، $ص = ٣$

و اجب

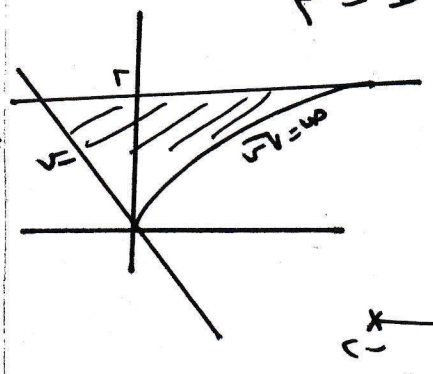
٩ $ق = س^{٤}$ ، $ث = ٢$ ، $ص = -٢$ ، $س = ٠$
وحجم الصادات



الحل:
$ق = ث$
$س^{٤} = ٢ - س$
$س^{٤} + س - ٢ = ٠$
$(س+٢)(س-١) = ٠$
$س = -٢$ مرفوض / $س = ١$
$ص = ث$

$ح = \pi \int_{١}^{٤} [(س - (-٢))^{٢} - (س^{٤} - (-٢))^{٢}] \, دس$
$= \pi \int_{١}^{٤} (س^{٢} + ٤س + ٤ - س^{٨} - ٤س^{٤} - ٤) \, دس$
$= \pi \int_{١}^{٤} (-س^{٨} - ٤س^{٤} + س^{٢} + ٤س) \, دس$
$= \pi [-\frac{١}{٩}س^{٩} - س^{٥} + \frac{١}{٣}س^{٣} + ٢س^{٢}]_{١}^{٤}$
$= \pi [(-\frac{١}{٩}(٤)^{٩} - (٤)^{٥} + \frac{١}{٣}(٤)^{٣} + ٢(٤)^{٢}) - (-\frac{١}{٩} - ١ + \frac{١}{٣} + ٢)]$
$= \pi [(-\frac{٢٦٢١٤٤}{٩} - ١٠٢٤ + \frac{٦٤}{٣} + ٣٢) - (\frac{٥}{٩})]$
$= \pi [-٢٩١٢٦ - \frac{٥}{٩}]$
$= \frac{٢٦٢١٤٠}{٩} \pi$ وحدة حجم

١٠ احسب المساحة بين $ص = ٢س$
$ق = -س$ ، $ث = ٢$

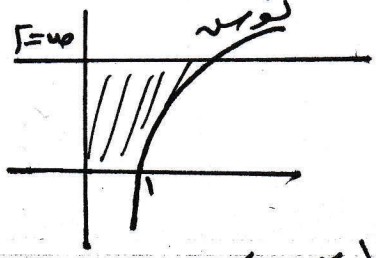


$ص = ق$ | $ص = ث$
$-س = ٢س$ | $ص = ٢$
$س = ٠$ | $س = ٢$

$ح = ٤$

$\int_{-٢}^{٠} [-س - (٢س)] \, دس + \int_{٠}^{٢} [٢ - (٢س)] \, دس$
$= \int_{-٢}^{٠} (-٣س) \, دس + \int_{٠}^{٢} (٢ - ٢س) \, دس$
$= [-\frac{٣}{٢}س^{٢}]_{-٢}^{٠} + [٢س - س^{٢}]_{٠}^{٢}$
$= (٠) - (-\frac{١٢}{٢}) + (٤ - ٤) - (٠)$
$= ٦ + ٠ = ٦$ وحدة مساحة

١١ $ق(س) = لو_{٢}س$ وحجم الصادات
وحجم السينات والمستقيم $ص = ٢$



الحل:
$لو_{٢}س = ٠$ | $لو_{٢}س = ٢$
$س = ١$ | $س = ٢^{٢}$

$ح = \pi \int_{١}^{٤} ٢^{٢} \, دس + \pi \int_{١}^{٤} (لو_{٢}س)^{٢} \, دس$
$= \pi [٤س]_{١}^{٤} + \pi \int_{١}^{٤} (لو_{٢}س)^{٢} \, دس$ ← اجزاء
$= ١٢\pi + \pi [س(لو_{٢}س)^{٢} - \int ٢لو_{٢}س \, دس]_{١}^{٤}$
$= ١٢\pi + \pi [س(لو_{٢}س)^{٢} - ٢\int لو_{٢}س \, دس]_{١}^{٤}$
$= ١٢\pi + \pi [س(لو_{٢}س)^{٢} - ٢(س لو_{٢}س - \int \frac{١}{لو ٢} \, دس)]_{١}^{٤}$
$= ١٢\pi + \pi [س(لو_{٢}س)^{٢} - ٢س لو_{٢}س + ٢س]_{١}^{٤}$
$= ١٢\pi + \pi [(٤(لو_{٢}٤)^{٢} - ٢(٤)لو_{٢}٤ + ٢(٤)) - (٢)]$
$= ١٢\pi + \pi [(٤(٢)^{٢} - ٨(٢) + ٨) - ٢]$
$= ١٢\pi + \pi [١٦ - ١٦ + ٨ - ٢]$
$= ١٢\pi + ٦\pi = ١٨\pi$ وحدة حجم

١٢ احسب المساحة بين $ق = س^{٤} - ٤$
$ث = س + ٢$ ، $ل = ٢$ ، $س = ٤$ في الربع الأول

١٣ $ق(س) = لو س$ ، وحجم السينات
والمستقيم $س = ٥$

١٣ $ق = \frac{١}{\sqrt{س}}$ وحجم السينات و $س = ٥$
$س = ١$

١٤ $ق = س^{٣}$ ، $ص = ١$ ، $ص = ٨$ ، $س = ٠$ فقط

١٥ $ق = س$ ، $ث = \frac{١}{س}$ ، $ص = ٢$

١٦ $ق = س$ ، $ث = \frac{١}{س}$ ، $ص = ٢$ ، $س = ٠$ فقط

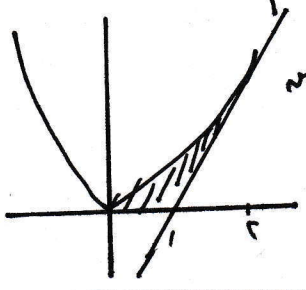
١٧ $ق = س^{٢} + ٢$ ، $ص + ص = ٤$ ، $ص = ٤ - س$
$س = ٠$ = محور $ص$ ، $ص$ = محور $س$

١٨ $ص = س^{٣}$ ، $\frac{ص}{س} = ٤$ ،

١٩ $ق = س^{٢}$ ، وحجم السينات و الحاس
المنحنى $ق$ عند $(٢،٤)$

الحل: بحاجة لمعرفة معادلة الحاس
$ق = ٢س$
$م = ٢ \times ٢ = ٤$
المعادلة: $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$
$ص - ٤ = ٤(س - ٢)$
$ص = ٤س - ٤$

$\Leftarrow$ لدينا: $ق = س^{٢}$ / $ص = ٤س - ٤$ / وحجم السينات

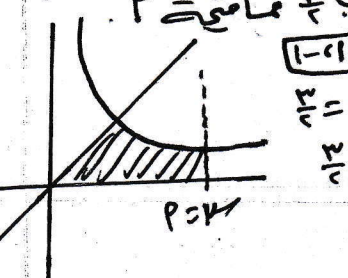


$س^{٢} = ٤س - ٤$
$س^{٢} - ٤س + ٤ = ٠$
$(س-٢)(س-٢) = ٠$
$س = ٢$

$٤س - ٤ = ٠$
$س = ١$

$ح = \pi \int_{١}^{٢} [(٤س - ٤)^{٢} - (س^{٢})^{٢}] \, دس$
$= \pi \int_{١}^{٢} (١٦س^{٢} - ٣٢س + ١٦ - س^{٤}) \, دس$
$= \pi [\frac{١٦}{٣}س^{٣} - ١٦س^{٢} + ١٦س - \frac{١}{٥}س^{٥}]_{١}^{٢}$
$= \pi [(\frac{١٢٨}{٣} - ٦٤ + ٣٢ - \frac{٣٢}{٥}) - (\frac{١٦}{٣} - ١٦ + ١٦ - \frac{١}{٥})]$
$= \pi [\frac{٣٢}{٣} - \frac{٣٢}{٥}]$
$= \frac{٦٤}{١٥} \pi$ وحدة حجم

٢٠ اذا كانت المساحة بين محور السينات
ومنحنى $ص = س^{٢}$ والمستقيم $ص = \frac{١}{س^{٢}}$
$س = P$ ، $P > ١$ تساوي $\frac{٣}{٤}$ مساحتي P



الحل: $س = \frac{١}{س^{٢}} \leftarrow ١ = س^{٣} \leftarrow س = ١$
$م = \int_{١}^{P} (س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}}) \, دس = \frac{٣}{٤}$
$= [\frac{١}{٣}س^{٣} + \frac{١}{س}]_{١}^{P} = \frac{٣}{٤}$
$= \frac{١}{٣}P^{٣} + \frac{١}{P} - \frac{١}{٣} - ١ = \frac{٣}{٤}$
$\frac{١}{٣} + لو P - لو ١ = \frac{٣}{٤}$
$\frac{١}{٣} + لو P = \frac{٣}{٤}$
$لو P = \frac{٥}{١٢} \leftarrow P = ١$

الأستاذ
إياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٢١ معتمداً على الرسم المجاور احسب المساحة المحصورة بين $ق(س) = ٤ - س^{٢}$ والمستقيم $ل(س) = ٣س$

الحل:-

نجد نقاط التقاطع

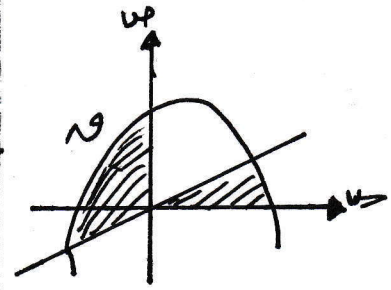
$ق = ل$

$٣س = ٤ - س^{٢}$

$س^{٢} + ٣س - ٤ = ٠$

$(س + ٤)(س - ١) = ٠$

$س = -٤$ / $س = ١$



$م = \int_{-٤}^{١} (ق - ل)$ دس $= \int_{-٤}^{١} (٤ - س^{٢} - ٣س)$ دس

$= [٤س - \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٣س^{٢}}{٢}]_{-٤}^{١}$

$= (٤ - \frac{١}{٣} - \frac{٣}{٢}) - (-١٦ + \frac{٦٤}{٣} - ٢٤)$

$= \frac{١٣١}{٦}$

٢٢ معتمداً على الرسم المجاور احسب المساحة المظللة حيث $ق = س^{٢}$

$ل = ٦ - س$

الحل:-

نجد نقاط التقاطع

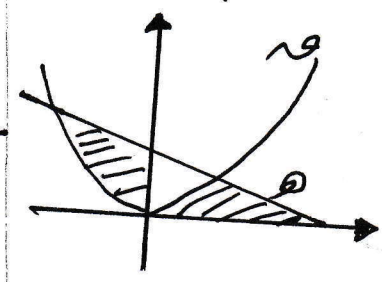
$ق = ل$

$س^{٢} = ٦ - س$

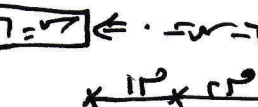
$س^{٢} + س - ٦ = ٠$

$(س + ٣)(س - ٢) = ٠$

$س = -٣$ / $س = ٢$



ل يقطع محور السينات $\Leftarrow ٦ - س = ٠ \Leftarrow س = ٦$



$م = م_{١} + م_{٢} + م_{٣}$

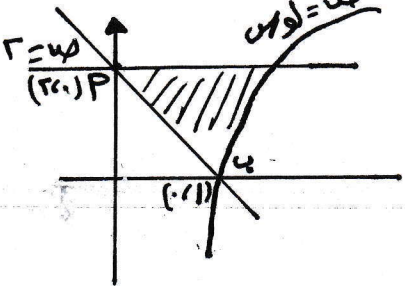
$= \int_{-٣}^{٢} (ق - ل)$ دس $+ \int_{٢}^{٦} (ق - ل)$ دس

$= \int_{-٣}^{٢} (س^{٢} + س - ٦)$ دس $+ \int_{٢}^{٦} (٦ - س - س^{٢})$ دس

$= [\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} - ٦س]_{-٣}^{٢} + [٦س - \frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣}]_{٢}^{٦}$

$= \frac{١٢٥}{٦}$

٢٣ معتمداً على الرسم المجاور احسب المساحة المظللة



الحل:- نجد معادلة $\overleftrightarrow{ق ب}$ = الميل $= \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = -٢$

المعادلة: $ص - ٠ = -٢(س - ١) \Leftarrow ص = -٢س + ٢$

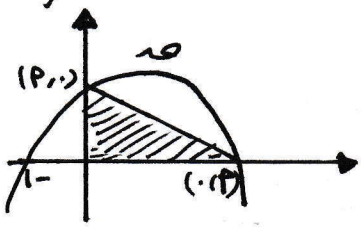
لو $ص = ٢ \Leftarrow س = ق$

$م = \int_{١}^{ق} (-٢س + ٣)$ دس $+ \int_{ق}^{٢} (\ln س)$ دس

: : : : : : : اجزاء

$ق = ٢ - ق$

٢٤ معتمداً على الرسم المجاور اذا كان $ق = (١ + س)(P - س)$ وكانت مساحة المثلث تساوي ٨ احسب المساحة المحصورة بين ق ومحور السينات



الحل:-

نجد معرفة ميت P

$(١ + س)(P - س) = ٠$

$س = -١$ / $س = P$

ق يقطع الصادات عندما $س = ٠$

$ق(٠) = (١ + ٠)(P - ٠) = P$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times P \times P = \frac{١}{٢} P^{٢} = ٨$

$\Leftarrow P^{٢} = ١٦ \Leftarrow P = \pm ٤$

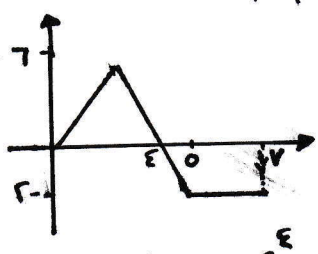
نأخذ $P = ٤ \Leftarrow ق = (١ + س)(٤ - س)$

$\Leftarrow م = \int_{-١}^{٤} (١ + س)(٤ - س)$ دس

$= \int_{-١}^{٤} ٤ + ٣س - س^{٢}$ دس $= [٤س + \frac{٣س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣}]_{-١}^{٤}$

$= \frac{١٢٥}{٦}$

٢٥ معتمداً على الرسم المجاور احسب مايلي



① $\int_{٥}^{٧} ق(س)$ دس

② $\int_{٤}^{٥} |ق(س)|$ دس

③ $|\int_{٤}^{٧} ق(س)$ دس$|$

④ المساحة بين ق ومحور السينات على $[٤، ٧]$

الحل: $م_{١} = \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٦ = ١٢ \Leftarrow \int_{٤}^{٥} ق(س)$ دس $= ١٢$

$م_{٢} = \frac{١}{٢} \times ١ \times ٢ = ١ \Leftarrow \int_{٥}^{٧} ق(س)$ دس $= -١$

$م_{٣} = ٢ \times ٢ = ٤ \Leftarrow \int_{٤}^{٧} ق(س)$ دس $= -٤$

① $\int_{٥}^{٧} ق(س)$ دس $= ١٢ + (-١) = ١١$

② $\int_{٤}^{٧} |ق(س)|$ دس $= ١٢ + ١ + ٤ = ١٧$

③ $|\int_{٤}^{٧} ق(س)$ دس$| = |١٢ - ١ - ٤| = ٧$

④ $م = م_{١} + م_{٢} + م_{٣} = ١٧$