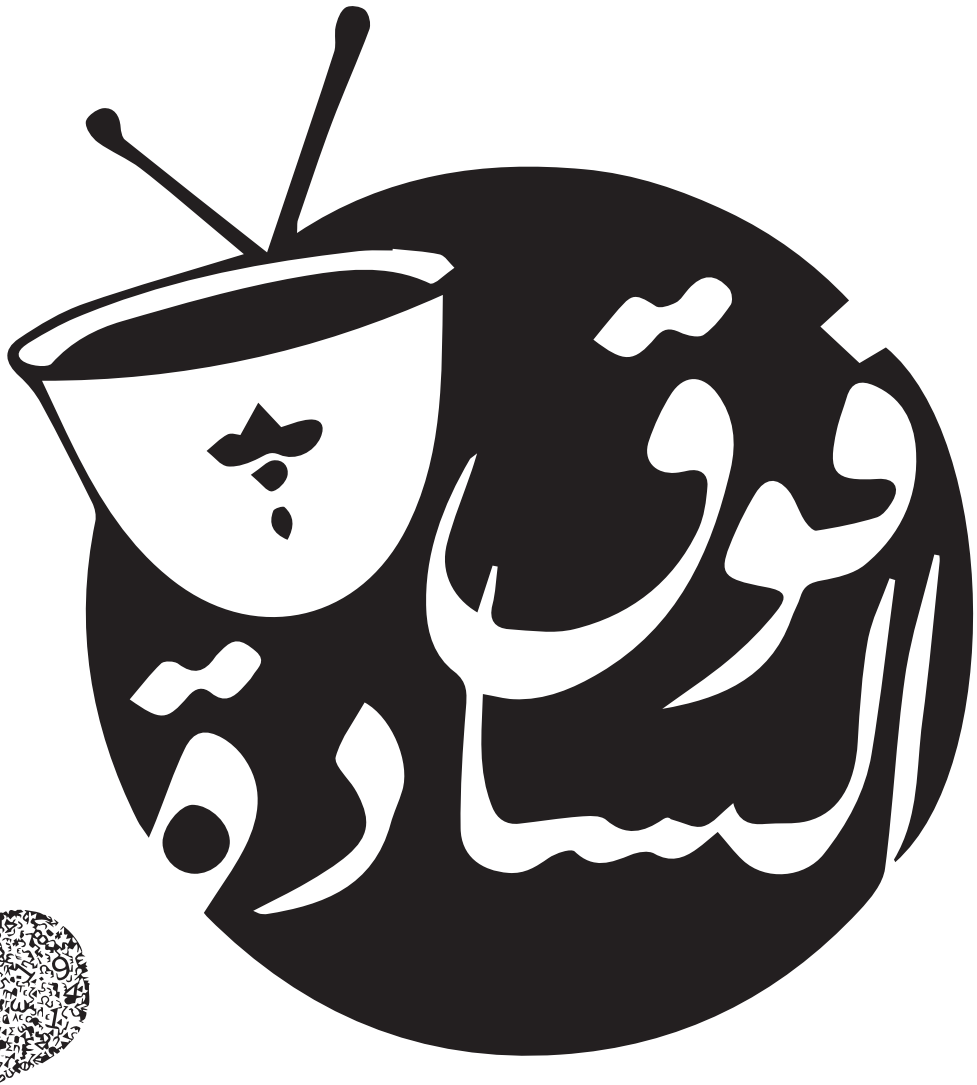
المستوى الرابع | للفروع المشتركة

الأسئلة المقترحة لمادة
الرياضيات

٢٠١٦
صيفي



عندما يعشق الرياضيات

محمد العبداللات

www.facebook.com/moh.abdallat

الوحدة ١ : التكامل

١) أوجد قيمة التكاملات:

١) $\int (٢هـ^{١-٢س} + \frac{٤}{٥جتا^{٢}س} - س^{-٥})$ دس

الحل:

$= \frac{٢هـ^{١-٢س}}{-٢} + \frac{٤}{٥}$ ظا س $+ \frac{س^{-٤}}{٤} + ج$

٢) $\int (\frac{هـ}{س} + \sqrt[٥]{س} + \frac{٢}{س^{٢}} - جا س)$ دس

الحل:

$\int (\frac{هـ}{س} + س^{\frac{١}{٥}} + ٢س^{-٢} - جا س)$ د س

$= هـ لو_{هـ}|س| + \frac{٥}{٦} س^{\frac{٦}{٥}} - ٢ س^{-١} +$ جتا س $+ ج$

٣) $\int (١ -$ جتا ٢ س ظا ٢ س $+ هـ^{-٢س} + ٤ قا^{٢} س)$ د س

الحل:

$= س + \frac{جتا٢س}{٢} + \frac{هـ^{-٢س}}{-٢} + ٤$ ظا س $+ ج$

٤) $\int (٦ - ٢س)(٥ س^{٢} + ٤ س - ١)$ د س

الحل: $\int (٣٠ س^{٢} + ٢٤ س - ٦ - ١٠ س^{٣} - ٨ س^{٢} + ٢س)$ دس

$\frac{٢٢س^{٣}}{٣} + \frac{٢٦س^{٢}}{٢} - ٦س - \frac{١٠س^{٤}}{٤} + ج$

٥) $\int \sqrt[٣]{س} (\frac{٦\sqrt[٥]{س} + هـ^{٦-س}}{\sqrt[٣]{س}})$ د س

الحل: $\int (٦ س^{\frac{١}{٥}} + هـ^{٦-س})$ د س

$= ٦ \frac{س^{\frac{٦}{٥}}}{\frac{٦}{٥}} + \frac{هـ^{٦-س}}{-١} + ج$

يسخر من الجروح. كل من لا يعرف الألم.

٦) $\int_{١}^{٤} (٢ س + \sqrt{س})$ د س

الحل:

$= \frac{٢س^{٢}}{٢} \Big|_{١}^{٤} + \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{١}^{٤}$

$= ١٦ + \frac{٢}{٣} (\sqrt{٦٤} - ٠)$

$= ١٦ + \frac{١٦}{٣} = \frac{٦٤}{٣}$

٧) $\int_{١}^{٢} (٢هـ^{س-١} + \frac{٢}{س-٣} + ٢ س)$ دس

$= ٢هـ^{س-١} \Big|_{١}^{٢} + ٢ لو_{هـ}|س-٣| \Big|_{١}^{٢} + س^{٢} \Big|_{١}^{٢}$

$= ٢ (هـ^{١} - هـ^{٠}) + ٢ (لو_{هـ}^{١} - لو_{هـ}^{٢}) + ٣$

$= ٢ هـ + ٢ (٠ - لو_{هـ}^{٢}) + ١$

$= ٢ هـ - ٢ لو_{هـ}^{٢} + ١$

٢) إذا علمت أن $ق'(س) = هـ + \frac{١}{س^{٢}}$ أوجد ق(١) إذا علمت أن ق(- ١) = - هـ

الحل: $ق'(س) = هـ + \frac{١}{س^{٢}}$

$\leftarrow \int ق'(س)$ دس $= \int (هـ + \frac{١}{س^{٢}})$ د س

$\leftarrow ق(س) = هـ س + - س^{-١} + ج$

ق(- ١) = - هـ + ١ + جـ = - هـ $\leftarrow$ جـ = - ١

ق(س) = هـ س – س $^{-١}$ - ١

$\leftarrow$ ق(١) = هـ - ١ - ١ = هـ - ٢

٣) إذا علمت أن ميل المماس يُعطى بالعلاقة (٤ – ٢س) (س – ١) أوجد قاعدة الاقتران إذا علمت أن منحنى العلاقة يمر بالنقطة (٠، ٨)

الحل: ميل المماس = $\vec{ف}$ (س)

$\vec{ف}$ (س) = (٤ – ٢ س) (س – ١)

$\vec{ف}$ (س) = (٤ س – ٤ – ٢ س^{٢} + ٢ س)

$\vec{ف}$ (س) = (٦ س – ٤ – ٢ س^{٢})

$\int \vec{ف}$ (س)دس = $\int$ (٦ س – ٤ – ٢ س^{٢}) د س

ق(س) = ٣ س^{٢} – ٤ س - $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} + جـ

(٠ ، ٨) ← ق(٠) = ٨

ق(٠) = ٠ – ٠ – ٠ + جـ = ٨ ← جـ = ٨

ق(س) = ٣ س^{٢} – ٤ س - $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} + ٨

٤) إذا كان تسارع جسيم يُعطى بالعلاقة ت(ن) = ٣ هـ $^{٣ن-٣}$ م / ث^{٢}

جد سرعتهُ بعد ثانية واحدة، علماً أن سرعته الابتدائية ٤ م/ث.

الحل: $\int$ ت(ن) د ن = $\int$ ٣ هـ $^{٣ن-٣}$ د ن

ت ← ع ← ف

ع(ن) = $\frac{٣}{٣}$ هـ $^{٣ن-٣}$ + جـ

السرعة الابتدائية ٤ م/ ث ← ع(٠) = ٤

ع(٠) = هـ $^{-٣}$ + جـ = ٤ ← جـ = ٤ - هـ $^{-٣}$

ع(ن) = هـ $^{٣ن-٣}$ + ٤ – هـ $^{-٣}$

← ع(١) = ١ + ٤ – هـ $^{-٣}$

ع(١) = ٥ – هـ $^{-٣}$ م / ث

يتحرك جسيم وفق العلاقة ت(ن) = ٢٤ ن م/ث^{٢}، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ن ثانية من بدء الحركة إذا علمت أن :

ع(٠) = ٥ م/ث، ف(٠) = ١٢ م.

الحل:

ت ← ع ← ف

$\int$ ت(ن) د ن = $\int$ ٢٤ ن د ن

ع(ن) = $\frac{٢٤ن^{٢}}{٢}$ + جـ

ع(ن) = ١٢ ن^{٢} + جـ

ع(٠) = ٥

ع(٠) ٠ + جـ = ٥ ← جـ = ٥

ع(ن) = ١٢ن^{٢} + ٥

$\int$ ع(ن) د ن = $\int$ ١٢ ن^{٢} + ٥ د ن

ف(ن) = ٤ ن^{٣} + ٥ ن + جـ ← ف(٠) = ١٢

ف(٠) = ٠ + ٠ + جـ = ١٢

جـ = ١٢

ف(ن) = ٤ن^{٣} + ٥ ن + ١٢

٦) يتحرك عريس وفق العلاقة:

ع(ن) = ٣ن (ن + ٢) م/ث، جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ٥ ثوانٍ من بدء الحركة علماً بأن ف(١) = ١٠ م.

الحل:

ت ← ع ← ف

ع(ن) = ٣(ن) (ن + ٢)

$\int$ ع(ن) د ن = $\int$ ٣ ن (ن + ٢) د ن

ف(ن) = $\int$ (٣ن^{٢} + ٦ ن) د ن

ف(ن) = ن^{٣} + ٣ ن^{٢} + جـ

ف(١) = ١٠

ف(١) = ١ + ٣ + جـ = ١٠

جـ = ٦

ف(ن) = ن^{٣} + ٣ن^{٢} + ٦

ف(٥) = ١٢٥ + ٧٥ + ٦

ف(٥) = ٢٠٦ م

٧) إذا علمت أن $\int$ $\vec{ف}$ (س) د س =

لـو$_{هـ}$ |س^{٢}+١| + أ س - $\int_{١}^{٢}$ ٣ س د س

وكان $\vec{ف}$ (١) = ٦، فجد قيمة الثابت أ ؟

الحل: $\frac{د ص}{د س}$ ($\int_{ }^{ }$ قَ (س) دس) =

$\frac{د ص}{د س}$ (لـو$_{هـ}$ $|س^{٢}+١|$ + أ س - $\int_{١}^{٢}$ ٣س د س)

← قَ (س) = $\frac{٢س}{س^{٢}+١}$ + أ – ٠

قَ (١) = $\frac{٢}{٢}$ + أ = ٦ ← **أ = ٥**

---

٨) إذا كان $\int_{ }^{ }$ ق(س) د س = ٤ س^{٣} + ٢ فجد

قَ (١)

الحل:

ق(س) = ١٢ س^{٢}

قَ (س) = ٢٤ س

قَ (١) = ٢٤ (١)

قَ (١) = ٢٤

---

٩) إذا كان ق(س) متصلاً وكان ق(١) = ٤،

ق(٢) = ١٢، $\int_{١}^{٢}$ أ قَ (س) د س = ١٦ فجد

قيمة الثابت أ ؟

الحل: $\int_{١}^{٢}$ أ قَ (س) د س = ١٦

أ $\int_{١}^{٢}$ قَ (س) د س = ١٦

أ ق(س) $\Big|_{١}^{٢}$ = ١٦

أ (ق(٢) – ق(١)) = ١٦ ← أ (١٢ – ٤) = ١٦

٨ أ = ١٦ ← أ = ٢

كن جبلا ولا ترهبك قوة الضربات.

---

١٠) إذا كان جـ عدداً ثابتاً وكان ق(جـ) = ١٢،

ق(٠) = ٨، $\int_{ب}^{جـ}$ (قَ (س) – هـ^{س}) د س = ٠

فجد هـ^{جـ}

---

١١)إذا كانت هَ (س) = ٤س هي مشتقة الاقتران هـ(س) المعرّف على الفترة [-٢، ٥]،

هـ(-٢) = ٤، فجد هـ (٥)

---

١٢) إذا كان $\int_{ب}^{٢}$ ٢ق(س) د س = ٢٠ ،

$\int_{٤}^{٢}$ ٣ ق(س) د س = ٢١،

أوجـد $\int_{٤}^{ }$ (٣س^{٢} – ق(س)) دس

الحل: نجهز ← $\int_{ب}^{٢}$ ٢ق(س) د س = ٢٠

$\frac{٢}{٢}$ $\int_{ب}^{٢}$ ق(س) د س = $\frac{٢٠}{٢}$

← $\int_{ب}^{٢}$ ق(س) د س = ١٠

$\int_{٤}^{٢}$ ٣ق(س) د س = ٢١

$\frac{٣}{٣}$ $\int_{٤}^{٢}$ ق(س) د س = $\frac{٢١}{٣}$

← $\int_{٤}^{٢}$ ق(س) د س = ٧ ← $\int_{ب}^{٤}$ ق(س) د س =

$\int_{ب}^{٢}$ ق(س) د س + $\int_{٤}^{٢}$ ق(س) د س

$\int_{ب}^{٤}$ ق(س) د س = ١٠ – ٧ = ٣

المطلوب ← $\int_{٤}^{ب}$ (٣س^{٢} – ق(س)) دس =

$\int_{٤}^{ب}$ ٣س^{٢} د س - $\int_{٤}^{ب}$ ق(س) د س =

س^{٣} $\Big|_{٤}^{ب}$ + ٣ = ٦٤ - ٣ = - ٦١

١٣)إذا علمت $\int_{١}^{٢}$ (٢ س + ق(س)) د س = ٢٠،

$\int_{٢}^{١}$ $\frac{ع(س)}{٢}$ د س = - ٥، أوجد

$\int_{١}^{٢}$ (١ + ق(س) + ٣ ع(س)) د س

نجهز المعطيات

← $\int_{١}^{٢}$ ٢س د س + $\int_{١}^{٢}$ ق(س) د س = ٢٠

س^{٢} $\Big|_{١}^{٢}$ + $\int_{١}^{٢}$ ق(س) د س = ٢٠

← ٣ + $\int_{١}^{٢}$ ق(س) د س = ٢٠

$\int_{١}^{٢}$ ق(س) د س = ١٧

$\int_{٢}^{١}$ $\frac{ع(س)}{٢}$ د س = - ٥

← $\int_{١}^{٢}$ ع(س) د س = ١٠

المطلوب: نوزع التكامل

($\int_{١}^{٢}$ ١ د س + $\int_{١}^{٢}$ ق(س) د س +

٣ $\int_{١}^{٢}$ ع(س) د س) = (س $\Big|_{١}^{٢}$ + ١٧ + ٣ × ١٠)

= ١ + ١٧ + ٣٠ = ٤٨

١٤) فإن ق(س) = { ٣س(س – ٤)، – ١ ≤ س ≤ ١
٦ – ٢س ، ١ < س ≤ ٣ }

أوجد $\int_{-١}^{٣}$ ق(س) د س

الحل: $\int_{-١}^{٣}$ ق(س) د س = $\int_{-١}^{١}$ ق(س) د س +

$\int_{١}^{٣}$ ق(س) د س

$\int_{-١}^{٣}$ ق(س) د س = $\int_{-١}^{١}$ ٣س(س – ٤) دس +

$\int_{١}^{٣}$ (٦ – ٢ س) د س

$\int_{-١}^{٣}$ ق(س) د س = $\int_{-١}^{١}$ (٣س^{٢} – ١٢س) دس

+ $\int_{١}^{٣}$ (٦ – ٢ س) د س

= س^{٣} $\Big|_{-١}^{١}$ - ٦ س^{٢} $\Big|_{-١}^{١}$ + ٦ س $\Big|_{١}^{٣}$ - س^{٢} $\Big|_{١}^{٣}$

= ٢ + ١٢ – ٨ = ٦

١٥) إيجاد المجاهيل:

١) إذا علمت أن $\int_{١}^{٢} ك^{٣}\,د س = \int_{٣}^{٤} ١٠٠٠\,د س$

أوجد قيمة ك ؟

$ك^{٣} س \Big|_{١}^{٢} = ١٠٠٠ س \Big|_{٣}^{٤} \leftarrow ك^{٣} = ١٠٠٠$

$\leftarrow \sqrt[٣]{ك^{٣}} = \sqrt[٣]{١٠٠٠} \leftarrow ك = ١٠$

٢) جد قيمة الثابت جـ بحيث :

$\int_{١}^{جـ} (٣س^{٢} - ٢)\,دس = ٩ - ٢جـ$

الحل: $س^{٣} \Big|_{١}^{جـ} - ٢س \Big|_{١}^{جـ} = ٩ - ٢جـ$

$\leftarrow جـ^{٣} - ١ - ٢(جـ - ١) = ٩ - ٢جـ$

$جـ^{٣} - ١ - ٢جـ + ٢ = ٩ - ٢جـ$

$\leftarrow جـ^{٣} - ١ - ٢جـ + ٢ - ٩ + ٢جـ = ٠$

$جـ^{٣} - ٨ = ٠ \leftarrow جـ^{٣} = ٨ \leftarrow جـ = ٢$

٣) إذا علمت أن $\int_{٤+١٢}^{٢-١٤} ق(س)\,دس$ = صفر، جد قيمة الثابت أ ؟

الحل: ٤ أ – ٢ = ٢ أ + ٤

٤ أ – ٢ أ = ٤ + ٢

٢ أ = ٦ ← أ = ٣

١٦) أوجد قيمة التكاملات التالية:

١) $\int \frac{٢س}{جتا^{٢}(١ - س^{٢})}\,دس$

الحل:

$\int ٢س\,قا^{٢}(١ - س^{٢})\,د س$

ص = ١ – س^{٢}

$\frac{رص}{رس} = -٢س$

$د س = \frac{رص}{-٢س}$

$\int ٢س\,قا^{٢}ص\,\frac{رص}{-٢س}$

$- \int قا^{٢}ص\,د ص = - ظا ص + جـ$

$= - ظا(١ - س^{٢}) + جـ$

٢) $\int \frac{-٨ + ١٠س}{(٦ - ٥س^{٢} + ٨س)^{٥}}\,دس$

الحل:

$\int (٨ - ١٠س)(٦ - ٥س^{٢} + ٨س)^{-٥}\,دس$

ص = ٦ – ٥ س^{٢} + ٨ س

$\frac{رص}{رس} = -١٠س + ٨$

$د س = \frac{رص}{-١٠س + ٨}$

$\int (٨ - ١٠س)ص^{-٥}\,\frac{رص}{-١٠س + ٨}$

$\int ص^{-٥}\,د ص = \frac{ص^{-٦}}{-٦} + جـ$

$= \frac{(٦ - ٥س^{٢} + ٨س)^{-٦}}{-٦} + جـ$

فكّر: ٣) أوجد: $\int_{٠}^{١} (س - ١)\,هـ^{س^{٢} - ٢س}\,دس$

أوجد : ٤) $\int س\,جتا\,س^{٢}\,ظا\,س^{٢}\,دس$

أوجد: ٥) $\int (٦س^{٢} - ٢)\sqrt{س^{٣} + س - ١٩}\,د س$

أوجد: ٦) $\int ٦س\,جا(س^{٢} - ١)\,د س$

أوجد: ٧) $\int_{١}^{٢} ٤س\,\overline{قـ}(س^{٢} + ١)\,د س$ إذا علمت أن ق(٢) = ٥، ق(٥) = - ٨

الحل: فرع ٧)

ص = س^{٢} + ١

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ س

د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{٢س}}$

س = ١ ← ص = ٢

س = ٢ ← ص = ٥

$\int_{٢}^{٥}$ ٤ س $\overline{\text{ق}}$ (ص) $\frac{\text{د ص}}{\text{٢س}}$

٢ $\int_{٢}^{٥}$ $\overline{\text{ق}}$ (ص) د ص = ٢ (ق(ص) $\Big|_{٢}^{٥}$)

= ٢ (ق(٥) – ق(٢))

= ٢(- ٨ – ٥) = ٢(- ١٣) = - ٢٦

مهم: أوجد ١) $\int$ (س^{٢} +٥)^{٢} دس

٢) $\int_{٠}^{٢}$ $\frac{\text{٣س + ٦}}{\text{س}^{٢}\text{ + ٥س + ٦}}$ د س

٣) $\int$ $\frac{\text{١٦س – ١٢}}{\text{٤س}^{٢}\text{ – ٦س + ١}}$ دس

٤) إذا كان $\int_{٢}^{١٠}$ $\overline{\text{ق}}$ (س) دس = ٣٠ جد قيمة:

$\int_{١}^{٣}$ (٢ س $\overline{\text{ق}}$ (س^{٢} + ١) د س

١٧) جد المساحة المحصورة المغلقة بين :

ق(س) = ٢ س – ٢ ومحور السينات والمستقيمان

س = ٠، س = ٣

الحل:

ق(س) = ٠ ← ٢ س – ٢ = ٠ ← س = ١

م$_{١}$ = $\int_{٠}^{١}$ ٢ س – ٢ د س = س^{٢} $\Big|_{٠}^{١}$ - ٢س

= ١ – ٢ = | - ١ | = ١

م$_{٢}$ = $\int_{١}^{٣}$ (٢س – ٢) د س

= س^{٢} $\Big|_{١}^{٣}$ - ٢س $\Big|_{١}^{٣}$ = ٨ – ٤ = ٤

م كلية = م$_{١}$ + م$_{٢}$ = ١ + ٤ = ٥ وحدة مربعة

١٨) جد المساحة المحصورة المغلقة بين:

ق(س) ٤ – ٤ س^{٢} ومحور السينات ؟

ق(س) = ٠ ← ٤ – ٤ س^{٢} = ٠

٤ س^{٢} = ٤ ← س^{٢} = ١ ← س = ± ١

المساحة = $\int_{-١}^{١}$ ٤ – ٤ س^{٢} د س =

٤س $\Big|_{-١}^{١}$ - $\frac{٤}{٣}$ س^{٣} $\Big|_{-١}^{١}$ = ٤(٢) - $\frac{٤}{٣}$(٢)

= ٨ - $\frac{٨}{٣}$ = $\frac{\text{٨ – ٢٤}}{٣}$ = $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة

١٩) جد المساحة المحصورة بين :

ق(س) = ٢س – س^{٢} ومحور السينات والفترة [١، ٣]

الحل: ق(س) = ٠

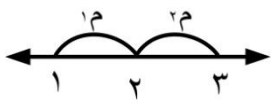
٢ س – س^{٢} = ٠

س (٢ – س) = ٠

س = ٠ س = ٢

س = ٠ ∌ [١، ٣]

س = ٢ ∈ [١، ٣]



م$_{١}$ = $\int_{١}^{٢}$ ٢ س – س^{٢} د س = س٢ $\Big|_{١}^{٢}$ - $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ $\Big|_{١}^{٢}$

= ٣ - $\frac{٧}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

$م_{٢} = \int_{٢}^{٣} ٢ س - س^{٢}$ د س $= س^{٢}$ $\left|\frac{س^{٣}}{٣}\right|_{٢}^{٣} - \left|\right|_{٢}^{٣}$

$= (٩ - ٤) - \frac{(٨ - ٢٧)}{٣} = ٥ - \frac{١٩}{٣}$

$= \left|\frac{-٤}{٣}\right| = \frac{٤}{٣}$

م كلية $= م_{١} + م_{٢} = \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٣} = \frac{٦}{٣} = ٢$ وحدة مربعة

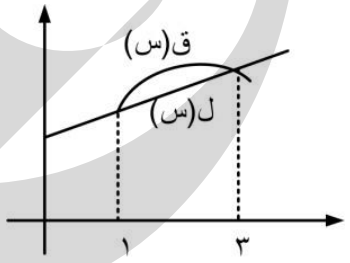
مهم: جد المساحة المحصورة بين :
ق(س) $= ٢ - س^{٢}$ و هـ(س) $= ٣ س - ٢$

مهم: جد المساحة المحصورة بين :
ق(س) $= \frac{١}{٢} س^{٢}$، هـ(س) $= ٢ س$

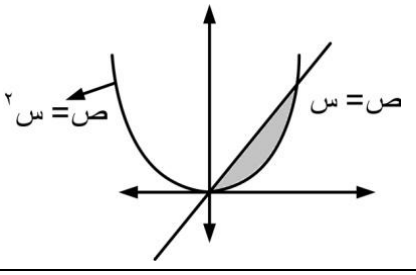
مهم: جد المساحة المحصورة بين :
ص $- س = ٦$ ، ص $= س^{٢}$

٢٠) إذا علمت أن $\int_{١}^{٣} ٢$ ق(س) د س $= ١٢$

$\int_{٣}^{١}$ ل(س) د س $= -٤$، احسب مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانين في الفترة [١، ٣]



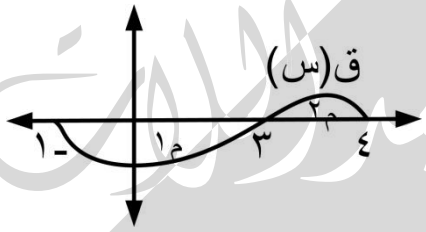
في الشكل التالي احسب مساحة المنطقة المظللة:



٢١) في الشكل المجاور $م_{١} = ٧$ ، $م_{٢} = ٣$ أوجد :
١) المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات في الفترة [- ١، ٤]

٢) $\int_{٣}^{-١}$ ق(س) د س

٣) $\int_{٤}^{٣}$ (٢ س + ق(س)) د س



٢٢) إذا كان الإيراد الحدي لبيع س وحدة هو :
دَ(س) $= ٣$ س(س + ٦) ، جد الإيراد الكلي الناتج عن بيع ٣ وحدات ؟

دَ (س) $= ٣$ س (س + ٦)

$\int$ دَ(س) د س $= \int$ ٣ س (س + ٦) د س

د(س) $= \int$ (٣ $س^{٢}$ + ١٨ س) د س

د(س) $= س^{٣} + ٩ س^{٢} +$ جـ

د(٠) $= ٠ \leftarrow$ جـ $= ٠$

د(س) $= س^{٣} + ٩ س^{٢} + ٠$ المطلوب د(٣)

د(٣) $= ٢٧ + ٨١ = ١٠٨$

٢٣)إذا كان اقتران (السعر – الطلب) ع = ق(س) $= ٤ - \frac{س}{٢}$ جد فائض المستهلك عند ثبات السعر

$ع_{١} = ٢$

الحل: $ف_{ك} = \int_{٠}^{س_{١}}$ ق(س) د س $- س_{١} \times ع_{١}$

لإيجاد $س_{١}$ ق(س) $= ع_{١}$

$٤ - \frac{س}{٢} = ٢$

٨ – س = ٤

س = ٤

فـك = $\int_{٠}^{٤}$ (٤ - $\frac{س}{٢}$) د س –٤ × ٢

فـك = ٤ س $\Big|_{٠}^{٤}$ - $\frac{س^{٢}}{٤}$ $\Big|_{٠}^{٤}$ - ٨

فـك = ١٦ – ٤ – ٨ = ٤

٢٤) إذا كان اقتران (السعر – الطلب) لمنتج هو :
ع = هـ(س) ٣ س^{٢} + ٦ ، جد فائض المنتج عند ثبات السعر ع$_{١}$ = ٥٤ دينار.

٢٥) إذا كان اقتران (السعر – الطلب) هو :
ع = ق(س) = ٤٣ – ٤ س، وكان اقتران (السعر–العرض) هو ع = هـ(س) = س + ٣، فجد فائض المستهلك ؟

الحل: فـك = $\int_{٠}^{س_{١}}$ ق(س) د س – ع$_{١}$ × س$_{١}$

لإيجاد س$_{١}$ ق(س) = هـ (س)
٤٣ – ٤ س = س + ٣
س + ٣ – ٤٣ + ٤ س = ٠
٥ س – ٤٠ = ٠
٥ س = ٤٠
س$_{١}$ = ٨
لإيجاد ع$_{١}$ نعوض س$_{١}$ في ق(س) أو هـ(س)
هـ(٨) = ٨ + ٣ = ١١
ع$_{١}$ = ١١

فـك = $\int_{٠}^{٨}$ (٤٣ – ٤ س) د س – ١١ × ٨

فـك = ٤٣ س $\Big|_{٠}^{٨}$ - ٢ س^{٢} $\Big|_{٠}^{٨}$ - ٨٨

فـك = ٣٤٤ – ١٢٨ – ٨٨
فـك = ١٢٨

أشقى مخلوقات الأرض. إنسان بذاكرة قوية..

الوحدة ٢: الاحتمالات والإحصاء

١)إذا كانت (٢ ن – ١) ! – ٤ ! = ٩٦ أوجد ن
الحل: (٢ ن – ١) ! – ٢٤ = ٩٦
(٢ ن – ١) ! = ١٢٠
٢ ن – ١ = ٥
٢ ن = ٦
ن = ٣

٢إذا كانت (ن – ٢) ! = ٣(ن – ٣) ! جد قيمة ن
الحل: (ن – ٢) (ن – ٣) ! = ٣(ن – ٣) !
ن – ٢ = ٣
ن = ٥

- بكم طريقة يمكن جلوس ٤ طالبات على ٥ مقاعد مرتبة ؟
- بكم طريقة يمكن ترتيب كلمة (السلط) بحيث لا يشترط أن تكون للكلمة معنى ؟
- بكم طريقة يمكن تكوين رقم من منزلتين من مجموعة الأعداد {١، ٣، ٤، ٩} بحيث لا يُسمح بالتكرار ويشترط أن يكون الرقم أقل من ٤٥ ؟

٣) إذا كان $\frac{١}{٢}$ ل (ن، ٣) = ٣٠ جد ن
الحل: ل(ن، ٣) = ٦٠
٥ × ٤ × ٣ = ٦٠
ن = ٥

٤) إذا كانت $\frac{١}{٥}$ ل (ن، ٣) = ل(ن، ٢) جد ن

$\frac{١}{٥}$ ن(ن- ١)(ن- ٢) = (ن) (ن-١)

ن = ٧

إذا كان $\binom{ن}{٣}$ = ٥ل (ن، ٢) جد قيمة (ن – ٣٢)!

الحل: $\frac{ل(٣،ن)}{!٣}$ = ٥ ن (ن – ١)

$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{!٣}$ = ٥ ن (ن – ١)

$$\frac{ن-٢}{٦} = \frac{٥}{١}$$

ن – ٢ = ٣٠

ن = ٣٢ المطلوب (٣٢ – ٣٢)! = ١

٦) إذا كان $\binom{ن}{٢}$ = ١٥ ، جد:

١) ل (ن، ٢) ٢) ل (٦، ن)

الحل: $\frac{ل(٢،ن)}{!٢} = ١٥$

$$\frac{ن(ن-١)}{٢} = \frac{١٥}{١}$$

ن (ن – ١) = ٣٠

٦ × ٥ = ٣٠

ن = ٦

١) ل (٦، ٢) = ٣٠

٢) ل (٦، ٦) = ٧٢٠

٧)إذا كانت $\binom{١٠}{٢س-٢} = \binom{١٠}{٢}$ جد قيمة س ؟

الحل: ٢ س – ٢ = ٢ ← ٢ س = ٤ ← س = ٢

٢ س – ٢ = ٨ ← ٢ س = ١٠ ← س = ٥

٨)لجنة فيها ٦ معلمين و ٥ طلاب بكم طريقة يمكن اختيار رئيس من المعلمين ونائب له من الطلاب و٣ أعضاء من المجموعة المتبقية ؟

الحل: = ل (٦، ١) × ل (٥، ١) × $\binom{٩}{٣}$

$= ٦ \times ٥ \times \frac{ل(٣،٩)}{!٣}$

$= ٣٠ \times \frac{٧ \times ٨ \times ٩}{٦} = ٢٥٢٠$

٩)إذا كان عدد المعلمين ٥ وعدد الطلاب ٣ بكم طريقة يمكن تكوين لجنة رباعية بحيث:

١) تتكون من معلمين اثنين على الأقل ؟

٢) تتكون من طالب واحد على الأكثر ؟

الحل:

١) $\binom{٥}{٢}\binom{٣}{٢} + \binom{٥}{٣}\binom{٣}{١} + \binom{٥}{٤}\binom{٣}{٠}$

$= ١ \times ٥ + ٣ \times ١٠ + ٣ \times ١٠ =$

$= ٥ + ٣٠ + ٣٠ = ٦٥$

٢) $\binom{٥}{٤}\binom{٣}{٠} + \binom{٥}{٣}\binom{٣}{١}$

$= ٥ \times ١ + ١٠ \times ٣ =$

$= ٣٥ \times ٥ = ٣٥$

١٠)في تجربة رمي قطعة نقدية ٣ مرات متتالية وتسجيل الناتج تباعاً إذا دلَّ المتغيّر العشوائي س على ظهور الصورة أوجد:

١) قيم س الممكنة.

٢) الفضاء العيني.

٣) كون جدول التوزيع الاحتمالي.

٤) ما احتمال عدم ظهور صورة.

٥) ما احتمال ظهور صورة واحدة على الأقل ؟

الحل: ١) س = {٠، ١، ٢، ٣ }

٢) Ω = {(ص، ص،ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ك)، (ك، ك، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ص،ص)، (ك، ص، ك)، (ص، ك، ص)}

٣)

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

٤) ل (س = ٠) = $\frac{١}{٨}$

٥) ل (س ≤ ١) = ١ – ل (س= ٠)

$= ١ - \frac{١}{٨} = \frac{٧}{٨}$

١١) إذا كان س متغيراً عشوائياً ذا حدين معاملاه:

ن = ٢، أ = ٠,١ ، فجد

١) قيم س الممكنة ٢) ل(س ≤ ١)

٣) جدول التوزيع الاحتمالي.

في البدايات تظهر المشاعر. وفي النهايات تظهر الأخلاق...

١٢) إذا كان س متغيراً عشوائياً ذا حدين وكانت :

ن = ٤، ل (س ≤ ١) = $\frac{١٥}{١٦}$ فجد:

١) قيمة أ ٢) ل (س = ٤)

الحل: ١) ل (س ≤ ١) = $\frac{١٥}{١٦}$

١ – ل (س = ٠) = $\frac{١٥}{١٦}$

١ - $\binom{٤}{٠}$ (أ)^{٠} (١ – أ)$^{٤-٠}$ = $\frac{١٥}{١٦}$

١ – ١ × ١ × (١ – أ)^{٤} = $\frac{١٥}{١٦}$

١ – (١ – أ)^{٤} = $\frac{١٥}{١٦}$

(١ – أ)^{٤} = $\frac{١}{١٦}$ ← ١ – أ = $\frac{١}{٢}$ ← أ = $\frac{١}{٢}$

٢) ل (س = ٤) = $\binom{٤}{٤}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}\left(١-\frac{١}{٢}\right)^{٤-٤}$

١ × $\frac{١}{١٦}$ × ١ ← = $\frac{١}{١٦}$

١٣) عند رمي حجر نرد ٤ مرات متتالية جد احتمال ظهور العدد (٢) في ثلاث رميات ؟

ن = ٤ ← أ = $\frac{١}{٦}$

ل (س = ٣) = $\binom{٤}{٣}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٣}\left(١-\frac{١}{٦}\right)^{٤-٣}$

ل (س = ٣) = $\frac{\text{ل}(٣،٤)}{!٣} \times \frac{١}{٢١٦} \times \binom{٥}{٦}^{١}$

= ٤ × $\frac{١}{٢١٦}$ × $\frac{٥}{٦}$ = $\frac{٥}{٣٢٤}$

١٤)إذا كانت نسبة القطع المعيبة في إنتاج أحد المصانع ١٠ % فإذا أخذت ٥ قطع من إنتاج المصنع بطريقة عشوائية فما احتمال أن لا تزيد عدد القطع المعيبة على قطعة واحدة ؟

الحل: ن = ٥ أ = ٠,١

ل(س ≤ ١) = ل(س = ١) + ل (س = ٠)

= $\binom{٥}{١}\left(\frac{١}{١٠}\right)^{١}$ (١ – ٠,١)$^{٥-١}$ +

$\binom{٥}{٠}$ (٠,١)^{٠} (١ – ٠,١)$^{٥-٠}$

= ٥ × $\frac{١}{١٠}$ × (٠,٩)^{٤} + ١ × ١ × (٠,٩)^{٥}

= ٠,٥٩٠٤٩ + ٠,٣٢٨٠٥ = ٠,٩١٨٥٤

١٥)إذا كانت احتمالية نجاح عملية جراحية يساوي ٨٠% وتم إجراء عمليتين كوِّن جدول التوزيع الاحتمالي.

١٦) يمثّل الجدول المجاور التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي فجد قيمة الثابت أ ؟

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٣	٠,٢	٠,١٥	أ

الحل: $\sum_{س=٠}^{٣}$ ل(س) = ١

٠,٣ + ٠,٢ + ٠,١٥ + أ = ١

٠,٦٥ + أ = ١ ← أ = ٠,٣٥

١٧) صَفّ مكوّن من ٢٠ طالبة إذا كانت علامات الطالبات صبا ودالين ومديحة ٩٠، ٨٠، س، على الترتيب وعلامتهن المعيارية ٣، ٢، - ١ فجد علامة مديحة ؟

١٨) إذا كان علامتي الطالبتين شهد، وعد في أحد الاختبارات ٨٠، ٧٠ والعلامتين المعياريتين لهما ٣، ٢ أوجد الوسط الحسابي ؟

الحل: ع = $\frac{س_{١} - س_{٢}}{ز_{١} - ز_{٢}}$

← ع = $\frac{٧٠-٨٠}{١-٣}$ = ١٠ ← ع = ١٠

ز$_{س_{١}}$ = $\frac{س_{١} - سَ}{ع}$ ← $\frac{٣}{١}$ = $\frac{٨٠-سَ}{١٠}$

٣٠ = ٨٠ – سَ ← سَ = ٥٠

كلما أحسنت نيتك أحسن الله حالك.

١٩) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ٧٠ والعلامة الخام ٦٠ وكانت العلامة تنحرف ٣ انحرافات تحت الوسط الحسابي جد الانحراف المعياري ؟

$\bar{س} = ٧٠$ $\quad$ س = ٦٠

ع = ؟؟ $\quad$ $ز_{س} = -٣$

$$ز_{س} = \frac{س - \bar{س}}{ع} \leftarrow \frac{-٣}{١} = \frac{٦٠ - ٧٠}{ع}$$

$$-٣ ع = -١٠ \leftarrow ع = \frac{١٠}{٣}$$

٢٠)إذا كانت العلامات المعيارية للطلبة ليث، هيثم، محمد، هي ٢، ١، ٠,٧٥ على الترتيب وكان الوسط الحسابي لعلامات الطلبة هي ٦٨ والفرق بين علامتي ليث ومحمد ١٠، جد:

١) الانحراف المعياري لعلامات الصف.

٢) علامة الطالب هيثم.

٣) علامة الطالب التي تنحرف تحت الوسط انحرافين معياريين.

الحل: $ز_{ليث} = ٢$ $\quad ز_{هيثم} = ١$ $\quad ز_{محمد} = \frac{٧٥}{١٠٠}$

$\bar{س} = ٦٨$ $\quad ز_{ليث} - ز_{محمد} = ١٠$

١) $$ع = \frac{س_{ليث} - س_{محمد}}{ز_{ليث} - ز_{محمد}} = \frac{١٠}{٢ - \frac{٧٥}{١٠٠}}$$

$$= \frac{١٠}{\frac{١٢٥}{١٠٠}} = \frac{١٠٠}{١٢٥} \times ١٠$$

$$ع = \frac{١٠٠٠}{١٢٥} = ٨$$

٢) $$ز_{هيثم} = \frac{س_{هيثم} - \bar{س}}{ع} \leftarrow ١ = \frac{س - ٦٨}{٨}$$

س – ٦٨ = ٨ ← $س_{هيثم} = ٧٦$

٣) س = ؟؟ $\quad ز_{س} = -٢$ ، $\bar{س} = ٦٨$ ، ع = ٨

$$ز_{س} = \frac{س - \bar{س}}{ع} \leftarrow \frac{-٢}{١} = \frac{س - ٦٨}{٨}$$

← - ١٦ = س – ٦٨ ← س = ٥٢

٢١) تقدم ٢٠٠٠ طالب لامتحان عام وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسطه الحسابي ٥٤ وانحراف معياري ٨، جد عدد الطلبة الناجحين إذا كانت علامة النجاح ٥٠ ؟

ملاحظة: يمكنك الاستعانة بالجدول:

ز	٠	٠,٥	١,٠	١,٥
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢

الحل: العدد الكلي = ٢٠٠٠

$$ل(ز \geq \frac{٥٠ - ٥٤}{٨}) = ل(ز \geq -٠,٥)$$

$$= ل(ز \geq ٠,٥) \leftarrow = ٠,٦٩١٥$$

العدد المطلوب = العدد الكلي × الاحتمال

$$\text{العدد المطلوب} = ٢٠٠٠ \times \frac{٦٩١٥}{١٠٠٠٠} = ١٣٨٣$$

٢٢)إذا كان رواتب (١٠٠٠٠) معلم ومعلمة تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٢٠٠) دينار شهرياً، وانحراف معياري (١٠) دنانير، فما عدد المعلمين والمعلمات الذين تنحصر رواتبهم بين (١٨٠) دينار و(٢١٠) دنانير ؟

ز	٠,٥	١	١,٥	٢
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢

الحل: ل(١٨٠ ≤ س ≤ ٢١٠)

$$\frac{١٨٠ - ٢٠٠}{١٠} = \frac{-٢٠}{١٠} = -٢$$

$$\frac{٢١٠ - ٢٠٠}{١٠} = \frac{١٠}{١٠} = ١$$

ل(- ٢ ≤ ز ≤ ١)

= ل(ز ≤ ١) – ل(ز ≤ - ٢)

= ل(ز ≤ ١) – [١ – ل(ز ≤ ٢)]

= ٠,٨٤١٣ – [١ – ٠,٩٧٧٢]

= ٠,٨٤١٣ – ٠,٠٢٢٨

= ٠,٨١٨٥ × ١٠٠٠٠ = ٨١٨٥

٢٣) يبين الجدول الآتي عدد سنوات الخبرة (س) والأجر اليومي (ص) بالدينار لخمسة عمال في إحدى الشركات في مدينة السلط الصناعية؟

(س)	٥	٦	٧	٨	٩
(ص)	٦	٧	٨	٩	١٠

احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س، ص وحدد نوع الارتباط؟

الحل:

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٥+٦+٧+٨+٩}{٥}$$

$$= \frac{٣٥}{٥} = ٧$$

$$\bar{ص} = \frac{\sum ص}{ن} = \frac{٦+٧+٨+٩+١٠}{٥}$$

$$= \frac{٤٠}{٥} = ٨$$

س	س-سَ	(س-سَ)^{٢}	ص	ص- صَ	(ص- صَ)^{٢}	(س-سَ)(ص-صَ)
٥	-٢	٤	٦	-٢	٤	٤
٦	-١	١	٧	-١	١	١
٧	٠	٠	٨	٠	٠	٠
٨	١	١	٩	١	١	١
٩	٢	٤	١٠	٢	٤	٤
		١٠			١٠	١٠

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^{٢} \times \sum (ص - \bar{ص})^{٢}}}$$

$$= \frac{١٠}{\sqrt{١٠ \times ١٠}} = \frac{١٠}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{١٠}{١٠} = ١$$

وبما أن ر = ١ اذن الارتباط طردي تام

العافية.. أن يمر يومك بلا ذنب.

محمد العبداللات

ماجستير رياضيات

٢٤)إذا كان $\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ٢٧$

$\sum (س - \bar{س})^{٢} = ٩$

$\sum (ص - \bar{ص})^{٢} = ٤٠٠$. $\sum س = ٦٠$

$\sum ص = ٨٠$ ، ن = ١٠

أوجد ١) معامل ارتباط بيرسون

٢) معادلة خط الانحدار الخطي البسيط

الحل:

١) $ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^{٢} \times \sum (ص - \bar{ص})^{٢}}}$

$ر = \frac{٢٧}{\sqrt{٩ \times ٤٠٠}} = \frac{٢٧}{٣ \times ٢٠} = \frac{٩}{٢٠}$

٢) $\hat{ص} = أ\ س + ب$

$أ = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^{٢}} = \frac{٢٧}{٩} = ٣$

$ب = \bar{ص} - أ\ \bar{س}$

$ب = ٨ - ٣ \times ٦$

$ب = ٨ - ١٨ = -١٠$

$\hat{ص} = ٣\ س - ١٠$

٢٥)إذا كان س، ص يمثلان عدد ساعات الدراسة ومعدلات الثانوية العامة على الترتيب، وجمعت البيانات الآتية لخمس طالبات :

$\bar{س} = ٥$، $\bar{ص} = ٨٢$،

$\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ١٢٠$ ،

$\sum (س - \bar{س})^{٢} = ٢٠$

١) جد معادلة الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س ؟

٢) قدر معدل طالب درس ٦ ساعات يومياً؟
٣) درست طالبة ٨ ساعات يومياً، وحصلت على معدل ٩٦، احسب الخطأ في التنبؤ للمعدل الذي حصلت عليه.

الحل: ١) $\hat{ص} = أ\ س + ب$

$$أ = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2} = \frac{١٢٠}{٢٠} = ٦$$

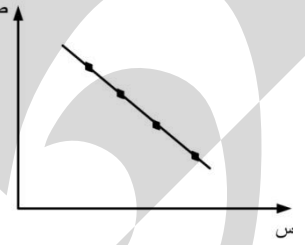
$ب = \bar{ص} - أ\ \bar{س} = ٨٢ - ٦ \times ٥ = ٥٢$

$\hat{ص} = ٦\ س + ٥٢$

٢) $\hat{ص} = ٦ \times ٦ + ٥٢ = ٨٨$

٣) الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية – المتنبأ بها
$= ٩٦ - (٦ \times ٨ + ٥٢)$
$= ٩٦ - ١٠٠ = -٤$

٢٦) إذا كان الشكل المجاور يمثل العلاقة الخطية بين س و ص أوجد مقدار ونوع الارتباط ؟



الحل: - ١ عكسي تام

٢٧)إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص هو (- ٤، ٠) فإن قيمة معامل الارتباط بين س*، ص* حيث:
س* = ١ – ٢ س ، ص* = - (١ – ص)
الحل: ٠,٤

٢٨)إذا علمت أن معادلة خط الانحدار تُعطى بالعلاقة $\hat{ص} = ١٠ + ٠,٢$ س ، إذا كانت س عدد ساعات العمل، ص عدد الأخطاء أوجد:
١) استخرج أ، ب ؟
٢) قدر عدد الأخطاء التي يرتكبها عامل في ١٠ ساعات ؟

٣) أحسب الخطأ في التنبؤ لعامل بعد ٢٠ ساعة عمل إذا ارتكب ١٦ خطأ ؟

٢٩) يبين الجدول الآتي عدد عقود البيع الشهرية (ص) التي ابرمتها خمسة من مندوبي مبيعات شركة أدوية ومدة خبرة كل واحد منهم بالسنوات (س)

س	٤	٨	٥	٧	٦
ص	٥	٦	٧	١٠	٢

جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س

الحل: $\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$

$\bar{ص} = \frac{\sum ص}{ن} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$

س	س-سَ	(س-سَ)^2	ص	ص-صَ	(س-سَ) (ص-صَ)
٤	-٢	٤	٥	-٣	٦
٨	٢	٤	٦	-٢	-٤
٥	-١	١	٧	-١	١
٧	١	١	١٠	٢	٢
٦	٠	٠	١٢	٤	٠
		١٠			٥

$$أ = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$$

$ب = \bar{ص} - أ\ \bar{س}$

$= ٨ - \frac{١}{٢} \times ٦ \leftarrow = ٨ - ٣ \leftarrow = ٥$

معادلة الانحدار : $\hat{ص} = أ\ س + ب$

$$\hat{ص} = \frac{١}{٢}\ س + ٥$$

خاتمة : ربي حقق لطلابي حلم يعانق خيالهم

مساندكم : الأستاذ محمد خالد العبداللات