الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

المعدلات المرتبطة بالزمن

* اشتقة العلاقة التالية بالنسبة للزمن
ص ع = س^٢ + ٢ص^٣

تصبح: ٥ دع/دن = ٢س دس/دن + ٦ص^٢ دص/دن

---

١ سلم طوله ١٠ سم يستند طرفه العلوي على حائط رأسي وطرفه السفلي على الارض. اذا انزلق السلم بحيث سرعة طرفه السفلي ٣ م/د مبتعداً عن الحائط وفي لحظة ما كان الطرف السفلي على بعد ٨ م من الحائط:
١ معدل نزول الطرف العلوي للسلم.
٢ معدل التغير في مساحة المثلث بين السلم والارض
٣ معدل تغير الزاوية المحصورة بين السلم والارض

---

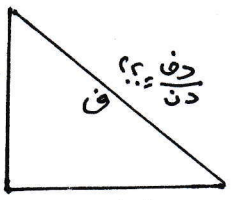
٢ انطلقت سفينتان في نفس الوقت فسارت الاولى باتجاه الشرق بسرعة ٦٠ كم/س وسارت الثانية باتجاه الشمال بسرعة ٨٠ كم/س احسب معدل تغير المسافة بينهما بعد ساعتين.

ف = √(س^٢ + ص^٢)

دف/دن = (٢س دس/دن + ٢ص دص/دن) / (٢√(س^٢ + ص^٢))

دف/دن = (٢×١٢٠×٦٠ + ٢×١٦٠×٨٠) / (٢√(١٢٠^٢ + ١٦٠^٢))

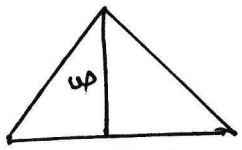
= ١٠٠ كم/س



بعد ساعتين س = ٢×٦٠ = ١٢٠
ص = ٢×٨٠ = ١٦٠

---

٣ صفيحة مثلثة الشكل ارتفاعها = ١/٢ طول القاعدة تتمدد فتزداد مساحتها بمعدل ٠.٩ سم^٢/ث احسب معدل التغير في طول قاعدة الصفيحة عندما طولها ٩ سم.



ص = ١/٢ س

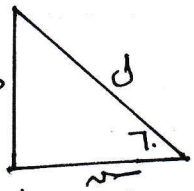
م = ١/٢ × القاعدة × الارتفاع
= ١/٢ × س × ص
= ١/٢ س × ١/٢ س
م = ١/٤ س^٢

دم/دن = ١/٢ س دس/دن

٠.٩ = ١/٢ × ٩ دس/دن ← دس/دن = ٠.٩/٤.٥ = ٠.٢ سم/ث

---

٤ يرتكز سلم طوله ل متر على حائط اذا انزلق الطرف السفلي بمعدل ١/٥ م/ث احسب معدل هبوط الطرف المرتكز على الحائط عندما يكون السلم مائل عن الارض بزاوية ٦٠°



ل^٢ = س^٢ + ص^٢

ص = √(ل^٢ − س^٢)

دص/دن = −٢س دس/دن / (٢√(ل^٢ − س^٢))

دص/دن = −٢ × ١/٢ × ١/٥ / (٢√(ل^٢ − ١/٤ ل^٢)) = −١/٥√٣

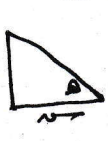
دس/دن = ١/٥

جتا ٦٠ = س/ل

١/٢ = س/ل ← س = ١/٢ ل

---

٥ في المثلث المجاور اذا كان معدل تزايد س هو ١ سم/ث ومعدل تناقص ص هو ٠.٥ سم/ث احسب سرعة تغير الزاوية هـ عندما يكون س = ص = ٢



ظا هـ = ص/س

قا^٢ هـ دهـ/دن = (س دص/دن − ص دس/دن) / س^٢

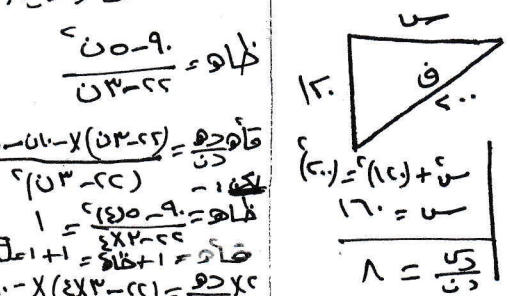
قا^٢ π/٤ دهـ/دن = (−٠.٥ × ٢ − ١ × ٢) / ٤

= −٣/١٦

دص/دن = −٠.٥
دس/دن = ١
س = ص = ٢
هـ = π/٤

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٦ يمسك خالد بيده خيط طائرة ورقية ارتفاعها ١٢٠ متر وتتحرك افقي بسرعة ٨ م/ث. كم سرعة التي يطلق بها خالد الخيط عندما تبعد الطائرة عنه ٢٠٠ متر



$ف^2 = (١٢٠)^2 + س^2$

$ف = \sqrt{(١٢٠)^2 + س^2}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٠ + ٢س \frac{دس}{دن}}{٢\sqrt{(١٢٠)^2 + س^2}}$

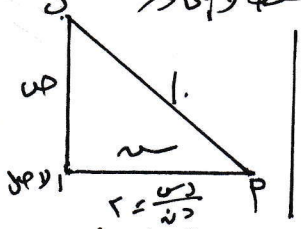
$\frac{٣٢}{٥} = \frac{٢ \times ٨ \times ١٦٠}{٢ \times \sqrt{(١٢٠)^2 + (١٦٠)^2}}$

$\frac{دس}{دن} = ٨$

٧ سلك طوله ١٠ امتر يتحرك بحيث طرفاه P, ب على المحاور. اذا كانت P يتحرك مبتعداً عن الاصل بسرعة ٢ م/ث. احسب مايلي

أ) سرعة الطرف ب عندما س = ٨

ب) معدل تغير المسافة بين السلك والمحاور



الحل أ) $ص = \sqrt{(١٠)^2 - س^2}$

$\frac{دص}{دن} = \frac{٠ - ٢س \frac{دس}{دن}}{٢\sqrt{(١٠)^2 - س^2}}$

$= \frac{-٢ \times ٨ \times ٢}{٢ \times \sqrt{١٠٠ - ٦٤}}$

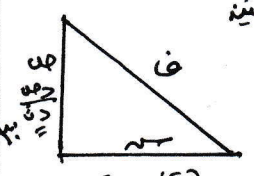
$\frac{دص}{دن} = \frac{-٣٢}{١٢} = -\frac{٨}{٣}$

ب) $م = \frac{١}{٢} \times س \times ص$

$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢} س \frac{دص}{دن} + ص \frac{١}{٢} \frac{دس}{دن}$

$= \frac{١}{٢} \times ٨ \times -\frac{٨}{٣} + ٦ \times \frac{١}{٢} \times ٢ = \frac{١٤}{٣}$

٨ مدينتان البعد بينهم ١٠٠ ميل بحري. سار الاولى شمالاً بسرعة ٣٠ ميل/ساعة والاخرى للغرب بسرعة ٢٠ ميل/ساعة احسب معدل البعد بينهم بعد ساعتين



$ف^2 = س^2 + ص^2$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن}}{٢\sqrt{س^2 + ص^2}}$

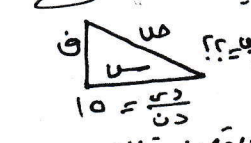
$= \frac{٢ \times -٤ \times -٢٠ + ٢ \times ٦٠ \times ٣٠}{٢ \times \sqrt{(-٤)^2 + (٦٠)^2}}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{١٢٠٠}{١٢\sqrt{٣٧}}$

بعد ساعتين $\Leftarrow س = -٤٠$

$ص = ٢ \times ٣٠ = ٦٠$

٩ تحرك كرتان بحيث على شارع مستقيم بسرعة ١٥ م/ث و ٢٠ م/ث قدفق حسب العلاقة $ف = ٤٠ن - ٥ن^2$ احسب معدل تغير المسافة بينهما عندما تصل الكرتين لاقصى ارتفاع.



الحل $ص = \sqrt{س^2 + ف^2}$

$\frac{دص}{دن} = \frac{٢س \frac{دس}{دن} + ٢ف \frac{دف}{دن}}{٢\sqrt{س^2 + ف^2}}$

عندما $ف = ٠ \Leftarrow ٤٠ - ١٠ن = ٠$

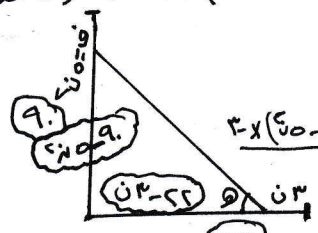
$ن = ٤$

عندما $ن = ٤ \Leftarrow س = ١٥ \times ٤ = ٦٠$

$ف = ٤٠ \times ٤ - ٥(٤)^2 = ٨٠$

$\frac{دص}{دن} = \frac{٢ \times ٦٠ \times ١٥ + ٢ \times ٨٠ \times ٢٠}{٢ \times ١٠٠} = ٩$

١٠ سقط جسم من برج ارتفاعه ٩٠ متر. بحيث كانت المسافة ف = ٥ن^2 وفي نفس اللحظة تحرك رجل يبعد ٢٢ متر عن قاعدة البرج نحوه بسرعة ٣ م/ث احسب معدل تغير زاوية ارتفاع الجسم بالنسبة للرجل عندما ن = ٣ ثواني



$ظاهـ = \frac{٩٠ - ٥ن^2}{٢٢ - ٣ن}$

$\frac{دظاهـ}{دن} = \frac{(٢٢ - ٣ن)(-١٠ن) - (٩٠ - ٥ن^2)(-٣)}{(٢٢ - ٣ن)^2}$

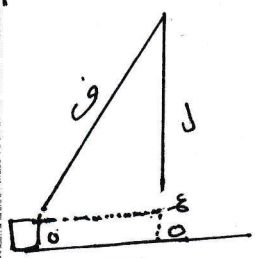
عندما ن = ٣ $\Leftarrow ظاهـ = \frac{٩٠ - ٤٥}{٢٢ - ٩} = ١$

$هـ = ١ + ظاهـ = ١ + ١ = ٢$

$\frac{دهـ}{دن} \times ٢ = \frac{(٢٢ - ٣ \times ٣)(-١٠ \times ٣) - (٩٠ - ٥ \times ٩)(-٣) \times ٢}{(٢٢ - ٣ \times ٣)^2}$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{-٣٧}{٢٠}$

١١ حبل طوله ٤٥ م يمر حول بكرة ترتفع ٢٥ م مربوط طرفه بثقل والطرف الاخر مربوط في سيارة عالية ارتفاع ٥ م اذا كانت تسير بسرعة ٦ م/ث احسب معدل ارتفاع الثقل في اللحظة التي تبعد فيها السيارة مسافة ١٥ م من اسفل البكرة.



$\frac{دف}{دن} = ؟؟$

$ف^2 = س^2 + (ع + ل)^2$

$ف + ل = ٤٥$

$ع + ل = ٢٠$ بالطرح

$ف - ع = ٢٥$

$ف = ٢٥ + ع$

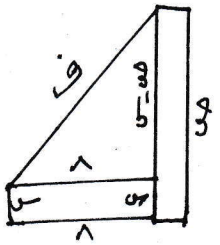
$(٢٥ + ع)^2 = س^2 + (٢٠)^2$

$٢(٢٥ + ع)(\frac{دع}{دن}) = ٢س \frac{دس}{دن}$ ..... ①

$(٢٥ + ع)^2 = (١٥)^2 + (٢٠)^2 \Leftarrow ٢٥ + ع = ٢٥$

بالتعويض في ① $\Leftarrow ٢ \times ٢٥ \times \frac{دع}{دن} = ٢ \times ١٥ \times ٦ \Leftarrow \frac{دع}{دن} = \frac{١٨}{٥}$

١٢ جسمان واقفان في الطابق الارضي من مبنى على مسافة بينهما ٨ م بدأ الجسم الاول يرتفع بسرعة ٢ م/ث وبعد ثانيتين بدأ الجسم الثاني يرتفع عمودياً بسرعة ١ م/ث احسب معدل تغير المسافة بين الجسمين بعد مرور ثانيتين من تحرك الجسم الثاني.



الحل: —

$\frac{دص}{دن} = ١$

$\frac{دس}{دن} = ٢$

$ف^2 = (٨)^2 + (ص - س)^2$

$ف = \sqrt{(٨)^2 + (ص - س)^2}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢(ص - س)(\frac{دص}{دن} - \frac{دس}{دن})}{٢\sqrt{٦٤ + (ص - س)^2}}$

$= \frac{٢ \times (٨ - ٢)(١ - ٢)}{٢\sqrt{٦٤ + (٨ - ٢)^2}} = \frac{-٦ \times ٢}{٢ \times ١٠} = -٠.٦$

$س = ٢ \times ١ = ٢$

$ص = ٤ \times ٢ = ٨$

١٣ من نقطة تبعد مسافة ٥٠ م انطلقت بالون للأعلى بسرعة ٤ م/ث وكانت الرياح تأخذ البالون افقياً مبتعداً عنه رجل بسرعة ٦ م/ث احسب معدل التغير في زاوية ارتفاع البالون بالنسبة للرجل بعد مرور ٥ ثواني من الحركة.

وابيلا

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١٤ قرص دائري يتمدد بالحرارة بحيث تزداد مساحته بمعدل ١٢π سم²/د احسب معدل التغير في المحيط عندما يكون نصف القطر هو ٣٧ سم.

ل = ٢π نق

$\frac{دل}{دن} = ٢\pi \frac{دنق}{دن}$

$= ٢\pi \times \frac{٣}{٢}$

$= ٣\pi$ سم/د

نعم

$\frac{دم}{دن} = ١٢\pi$ سم²/د

م = π نق²

$\frac{دم}{دن} = ٢\pi نق \times \frac{دنق}{دن}$

$١٢\pi = ٢\pi \times ٧ \times \frac{دنق}{دن}$

$\frac{دنق}{دن} = \frac{٣}{٢}$

١٥ مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طوله بمعدل ٠,٠١ سم/د اذا كان معدل التغير في الحجم هو ١٢ سم³/د احسب مايلي: أ طول المكعب ب معدل التغير في مساحته الكلية للمكعب.

أ) $ح = س^3 \Leftarrow \frac{دح}{دن} = ٣س^2 \frac{دس}{دن}$

$١٢ = ٣ س^2 \times ٠,٠١$

$س^2 = \frac{١٢}{٠,٠٣} = ٤٠٠$ ∴ س = ٢٠ سم

ب) $م = ٦س^2 \Leftarrow \frac{دم}{دن} = ١٢س \frac{دس}{دن}$

$= ١٢ \times ٢٠ \times ٠,٠١ = ٢,٤$ سم²/د

١٦ صندوق قاعدته مربعة الشكل الارتفاع يساوي ثلاثة امثال طول الضلع اذا كان الضلع يزداد بمعدل $\frac{١}{٤}$ احسب معدل التغير في حجمه ومساحة السطح عندما طول الضلع ٨ سم.

الحل: ع = ٣س ، $\frac{دس}{دن} = \frac{١}{٤}$ ، س = ٨

$ح = س \times س \times ع$

$ح = س^2 \times ٣س$

$ح = ٣س^3$

$\frac{دح}{دن} = ٩س^2 \frac{دس}{دن}$

$= ٩ \times (٨)^2 \times \frac{١}{٤}$

$= ١٤٤$

م = ٢ك + ٤ س ع

م = ٢ك + ٤ س × ٣ س

م = ٢ك + ١٢ س²

م = ١٤ س²

$\frac{دم}{دن} = ٢٨ س \frac{دس}{دن}$

$= ٢٨ \times ٨ \times \frac{١}{٤} = ٥٦$

١٧ اسطوانة نصف قطرها $\frac{٥}{٧}$ ارتفاعها يزداد ارتفاعها بمعدل ٠,٠١٢ سم/د احسب معدل التغير في حجمها عندما الارتفاع ١٤ سم.

$\frac{دع}{دن} = ٠,٠١٢$ / نق = $\frac{٥}{٧}$ ع / ع = ١٤

ح = π نق² ع

$ح = \pi (\frac{٥}{٧} ع)^2 ع = \pi \frac{٢٥}{٤٩} ع^3$

$\frac{دح}{دن} = \pi \times \frac{٧٥}{٤٩} \times ع^2 \frac{دع}{دن} = \pi \times \frac{٧٥}{٤٩} \times ١٩٦ \times ٠,٠١٢$

$= ٦٣ \pi$

١٨ يزداد حجم بالون كروي بمعدل ١٠٠٠ سم³/د احسب معدل الزيادة في مساحة السطح عندما يكون نصف القطر ١٠ سم.

الحل: $\frac{دح}{دن} = ١٠٠٠$ ، $\frac{دم}{دن} = ؟؟$

نق = ١٠

م = ٤π نق²

$\frac{دم}{دن} = ٨\pi نق \frac{دنق}{دن}$

$= ٨\pi \times ١٠ \times \frac{١٠٠٠}{٤٠٠\pi}$

$\frac{دم}{دن} = ٢٠$ سم²/د

ح = $\frac{٤}{٣}$ π نق³

$\frac{دح}{دن} = \frac{٤}{٣}\pi \times ٣ نق^2 \times \frac{دنق}{دن}$

$١٠٠٠ = \frac{٤}{٣}\pi \times ٣ \times (١٠)^2 \times \frac{دنق}{دن}$

$\frac{دنق}{دن} = \frac{١٠٠٠}{٤٠٠\pi}$

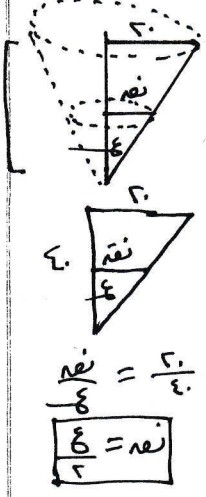
١٩ مخروط دائري راسه للاسفل يخرج منه الماء بمعدل ٢ سم³/ث وكانت حنفية تضخ الماء بمعدل ٦ سم³/ث في لحظة ما كان ارتفاع المخروط ٨ سم احسب مايلي

① معدل التغير في ارتفاع الماء بالمخروط.

② ع = ؟ نصف قطر الماء العلوي للمخروط.

③ ؟ ؟ مساحة سطح الماء علماً بأن ارتفاع المخروط يحوي نصف القطر ٢٠ سم

الحل:



$\frac{دح}{دن} = ٦ - ٢ = ٤$ ، ع = ٨

① ح = $\frac{١}{٣}$ π نق² ع

$= \frac{١}{٣}\pi (\frac{ع}{٢})^2 \times ع$

$ح = \frac{\pi}{١٢} ع^3$

$\frac{دح}{دن} = \frac{\pi}{١٢} \times ٣ع^2 \frac{دع}{دن}$

$٤ = \frac{\pi}{١٢} \times ٣ \times (٨)^2 \times \frac{دع}{دن}$

$٤ = ١٦\pi \times \frac{دع}{دن}$

$\frac{دع}{دن} = \frac{٤}{١٦\pi} = \frac{١}{٤\pi}$

② نصف = $\frac{ع}{٢}$

$\frac{دنق}{دن} = \frac{١}{٢} \frac{دع}{دن} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤\pi} = \frac{١}{٨\pi}$

③ م = π نق ع

$\frac{دم}{دن} = ٢\pi نق \frac{دنق}{دن} \times ع + \pi نق^2 \frac{دع}{دن}$

نصف = $\frac{١}{٢}$ ع = $\frac{١}{٢} \times ٨ = ٤$

$= ٢\pi \times \frac{١}{٢} \times ٤ \times \frac{١}{٨\pi} + \pi \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤\pi}$

$= ١ + \frac{١}{١٦} = ١\frac{١}{١٦}$ سم²/ث

٢٠ يتساقط الرمل بمعدل ١ سم³/د مكون كومة مخروطية ارتفاعها يساوي قطرها، احسب مايلي

① معدل التغير في ارتفاع الكومة عندما ع = ٢ سم

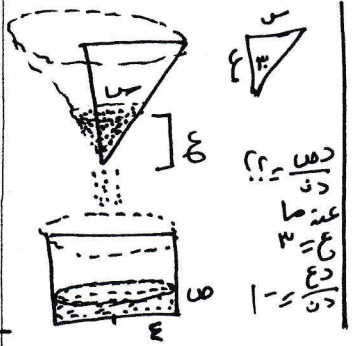
② معدل التغير في الحجم المخروط.

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٢١ خزان محروطي رأسة للاسفل وزاويه رأسه ٦٠° يتسرب منه الماء منه الى حوض على شكل اسطوانة دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤ سم. احسب معدل ارتفاع الماء في الاسطوانة عندما يكون معدل هبوط سطح الماء ١ سم/ث وارتفاع الماء في المخروط ٣ سم.

الحل: نفكر السؤال:

معدل تقصان حجم الماء في المخروط = معدل الزيادة في حجم الماء في الاسطوانة.



حجم المخروط $= \frac{1}{3}\pi$ مساحة القاعدة $\times$ ع

نتخلص من س: $\frac{\text{س}}{\text{ع}} = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$\frac{\text{س}}{\text{ع}} = \frac{3}{5} \Leftarrow \text{س} = \frac{3}{5}\text{ع}$

$\text{ح} = \frac{\pi}{3}(\frac{3}{5}\text{ع})^2 \text{ع} = \frac{\pi}{9}\text{ع}^3$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{\pi}{3}\text{ع}^2 \cdot \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

$= \frac{\pi}{3} \times 9 \times -1 = -3\pi$

عندما ع = ٣، $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -1$

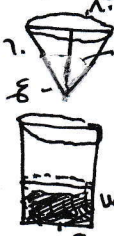
$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ??$

حجم الاسطوانة $= \pi$ نق$^2 \times$ ع $= \pi(4)^2 \text{ص} = 16\pi\text{ص}$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = 16\pi \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

$-3\pi = 16\pi \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -\frac{3}{16}$

٢٢ مخروط نصف قطر قاعدته ٨٠ سم وارتفاعه ١٦٠ سم يتسرب الماء في اسطوانة نصف قطرها ٥٠ سم احسب ارتفاع الماء في المخروط في اللحظة التي يكون فيها معدل هبوط الماء في المخروط مساويا معدل ارتفاع الماء في الاسطوانة.



الحل $\text{ح} = \frac{1}{3}\pi$ نق$^2 \times$ ع

من التشابه: $\frac{\text{نق}}{\text{ع}} = \frac{80}{160} \Rightarrow \text{نق} = \frac{1}{2}\text{ع}$

$\text{ح} = \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}\text{ع})^2 \text{ع}$

$\text{ح} = \frac{\pi}{12}\text{ع}^3$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{\pi}{12} \times 3\text{ع}^2 \cdot \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

الاسطوانة: $\text{ح} = \pi$ نق$^2 \times$ ص

$= \pi(50)^2 \times$ ص

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \pi(50)^2 \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

لكن $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ المخروط $= \frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ الاسطوانة

$\frac{\pi}{4}\text{ع}^2 \cdot \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \pi(50)^2 \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

$\frac{\pi}{4} \times 3\text{ع}^2 \cdot \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \pi(50)^2 \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

$\frac{3}{4}\text{ع}^2 = (50)^2 \Leftarrow \text{ع} = 100$

من المعطيات: $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$

٢٣ مساحة مجوفة طولها ثابت ونصفا قطريها الداخلي والخارجي يتغيران بحيث يبقى الحجم ثابتا اذا كان نصف قطرها الداخلي يزداد بمعدل $\frac{1}{4}$ سم/ث احسب معدل التغير في نصف القطر الخارجي عندما يكون نصف القطر الداخلي ٦ سم والخارجي ٨ سم.

الحل:

ع، ع، ثوابت

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{1}{4}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ??$

س = ٦، ص = ٨

حجم المساوة = ح خارجي − ح داخلي

$\text{ح} = \pi$ ص^2 ع $- \pi$ س^2 ع

$\text{ح} = \pi\text{ع}(\text{ص}^2 - \text{س}^2)$

$\frac{\text{ح}}{\pi\text{ع}} = \text{ص}^2 - \text{س}^2$

$0 = 2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دن}} - 2\text{س}\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

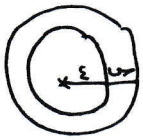
$0 = 2 \times 8 \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}} - 2 \times 6 \times \frac{1}{4}$

$6 = 16\frac{\text{دص}}{\text{دن}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{6}{16}$

٢٤ كرة حديدية قطرها ٨ سم مغطاة بطبقة من الجليد يذوب بمعدل ١ سم^3/د.

أ) ما سرعة نقصان سمك الجليد عندما السمك ٢ سم

ب) ما سرعة نقصان مساحة السطح الخارجي



الحل $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = -10$ ، س = ٢

أ) $\text{ح} =$ ح خارجي − ح داخلي

$\text{ح} = \frac{4}{3}\pi(4+\text{س})^3 - \frac{4}{3}\pi(4)^3$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{4}{3}\pi \times 3(4+\text{س})^2 \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$-10 = 4\pi(4+\text{س})^2 \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \Leftarrow \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{-10}{3 \times 36\pi}$

ب) $\text{م} = 4\pi(4+\text{س})^2$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 8\pi(4+\text{س})\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = 8\pi \times 6 \times \frac{-10}{3 \times 36\pi} = \frac{-10}{3}$

٢٥ مخروط ارتفاعه = نصف القطر احسب طول نصف القطر عندما يكون معدل زيادة نصف القطر $\frac{3}{4}$ ومعدل زيادة الحجم $= 12\pi$.

الحل: ع = نق، $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{3}{4}$ ، $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = 12\pi$

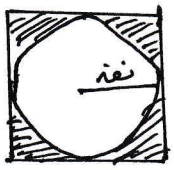
$\text{ح} = \frac{1}{3}\pi$ نق$^2 \times$ ع $= \frac{1}{3}\pi$ نق$^3 \Leftarrow \frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{\pi}{3} \times 3\text{نق}^2 \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$\Leftarrow 12\pi = \pi$ نق$^2 \times \frac{3}{4} \Leftarrow$ نق$^2 = 16 \Leftarrow$ نق $= 4 =$ ع

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٢٦ مربع يتمدد بحيث يزداد طول ضلعه بمعدل ٤ سم/د مرسوم داخله دائرة تتمدد هي. احسب معدل التغير في مساحة بين المربع والدائرة عندما طول ضلع المربع ٢٠ سم.

الحل:



م = م□ − م○

م = س٢ − π نق٢

لكن نق = ½ س

م = س٢ − π × ¼ س٢

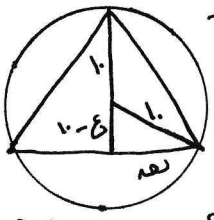
$\frac{dم}{dن} = س \times 2 \frac{dس}{dن} - \frac{π}{4} \times س \times 2 \frac{dس}{dن}$

$= 20 \times 2 \times 4 - \frac{π}{4} \times 2 \times 20 \times 4$

= ١٦٠ − ٤٠ π

٢٧ كرة نصف قطرها ١٠ سم وضع داخلها مخروط بحيث رأسه ومحيطه يلامس الكرة. اذا كان ارتفاع المخروط يزداد بمعدل ½ سم/د احسب معدل تغير حجم المخروط في اللحظة التي يكون فيها ارتفاعه ٨ سم.

(أ)



$ح = \frac{1}{3} π$ نق٢ ع

$ح = \frac{1}{3} π (ع^3 + 20 ع^2)$

$\frac{dح}{dن} = \frac{π}{3} (3ع^2 + 40 ع) \frac{dع}{dن}$

$= \frac{π}{3} (-243)^2 + 40(-9)) \times \frac{1}{3}$

$= \frac{π}{3} (1458) \times \frac{1}{3} = \frac{486π}{3}$

نق٢ = ع٢ + (ع − ١٠)٢

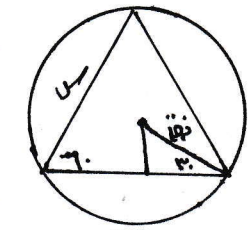
نق٢ = ع٢ − ٢٠ع + ١٠٠

نق٢ = ع٢ − ٢٠ع + ١٠٠

نق٢ = ع٢ − ٢٠ع

٢٨ مثلث متساوي الاضلاع يقع داخل دائرة بحيث تقع رؤوسه على الدائرة تتمدد الدائرة بحيث يزداد نصف قطرها بمعدل ٤ سم/د. احسب معدل التغير في مساحة المثلث عندما يصبح نصف القطر ١٠ سم.

الحل:



مساحة المثلث

م = ½ × س × س × جا ٦٠

$م = \frac{\sqrt{3}}{4} س^2$

$م = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3}$ نق$)^2$

$م = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ نق٢

$\frac{dم}{dن} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 2$ نق $\frac{dنق}{dن}$

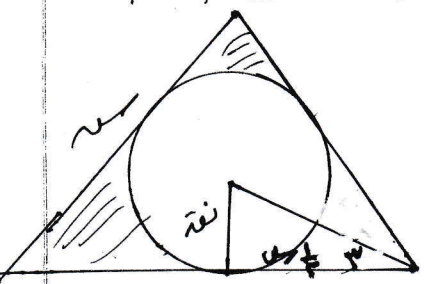
$= \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 2 \times 10 \times 2 = 30\sqrt{3}$

جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\text{نق}}$

حسا = ٣٦ نق

٢٩ تتمدد اضلاع مثلث متساوي الاضلاع بمعدل ٢ سم/د مرسمة داخله دائرة. احسب معدل تمدد المساحة المحصورة بين المثلث والدائرة عندما يكون طول ضلع المثلث ١٢ سم.

الحل:



$\frac{dم}{dن} = \frac{\sqrt{3}}{4} س \times 2 \frac{dس}{dن} - \frac{π}{12} \times 2 س \times 2 \frac{dس}{dن}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 \times 12 \times 2 - \frac{π}{12} \times 2 \times 12 \times 2$

$= 12\sqrt{3} - 4π$

$م = \frac{\sqrt{3}}{4} س^2 - π$ نق٢

$م = \frac{\sqrt{3}}{4} س^2 - π (\frac{1}{\sqrt{3}} س)^2$

$م = \frac{\sqrt{3}}{4} س^2 - \frac{π}{12} س^2$

$\frac{dم}{dن} = \frac{\sqrt{3}}{2} س \frac{dس}{dن} - \frac{π}{6} س \frac{dس}{dن}$

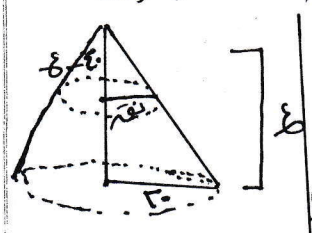
$\frac{dس}{dن} = 2$ / س = ؟

ظا ٣٠ = $\frac{\text{نق}}{\frac{1}{2} س}$

نق = $\frac{1}{\sqrt{3}} س$

٣٠ مخروط دائري قائم قاعدته للاسفل ونصف قطر القاعدة ٢٠ سم وارتفاعه ٤٠ سم ينزل فيه الماء بمعدل ٣٠ سم٣/د. احسب معدل التغير في ارتفاع الماء داخل المخروط عندما يكون ارتفاع الماء ١٦ سم.

الحل:



ح الماء = ح المخروط الاكبر − ح المخروط الاصغر

$ح = \frac{π}{3} (20)^2 \times 40 - \frac{π}{3}$ نق٢ (٤٠ − ع)

$ح = \frac{π}{3} (20)^2 \times 40 - \frac{π}{3} (\frac{1}{2}(40-ع))^2 (40-ع)$

$ح = \frac{π}{3} \times 400 \times 40 - \frac{π}{12} (40-ع)^3$

$\frac{dح}{dن} = صفر - \frac{π}{12} (3)(40-ع)^2 (-1) \frac{dع}{dن}$

$30 = \frac{π}{12} (3)(40-16)^2 \frac{dع}{dن}$

$\frac{dع}{dن} = \frac{10}{9.4π}$

تشابه المثلثات

$\frac{\text{نق}}{40-ع} = \frac{20}{40}$

نق = ½ (٤٠ − ع)

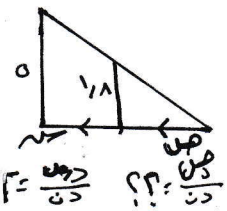
الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٣١ يمشي رجل طوله ١,٨ م على رصيف بمعدل ٢ م/ث صبغ أعمدة مصباح يرتفع ٥ م عن الرصيف.

① احسب معدل التغير في ظل الرجل على الأرض.

② احسب سرعة رأس الظل.

الحل:



① من تشابه المثلثات

$\frac{١,٨}{س} = \frac{٥}{ص+س}$

$١,٨ س + ١,٨ ص = ٥ س$

$٥ ص - ١,٨ ص = ١,٨ س$

$٣,٢ ص = ١,٨ س$

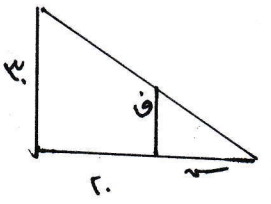
$٣,٢ \frac{دص}{دن} = ١,٨ \frac{دس}{دن}$

$٣,٢ \frac{دص}{دن} = ١,٨ \times ٢ \Leftarrow \frac{دص}{دن} = \frac{٩}{٨}$

② سرعة رأس الظل $= \frac{دس}{دن} + \frac{دص}{دن} = ٢ + \frac{٩}{٨} = \frac{٢٥}{٨}$

٣٢ يقع مصباح في قمة عمود ارتفاعه ٣٠ م. قذف كرة رأسياً لأعلى من نقطة تبعد ٢٠ م عن قاعدة العمود حسب العلاقة $ف = ٣٠ن - ٥ن^٢$ احسب سرعة ظل الكرة على الأرض عندما تكون الكرة على مسافة ١٥ م وهي صاعدة للأعلى.

الحل:



تشابه مثلثات

$\frac{ف}{س} = \frac{٣٠}{س+٢٠}$

$٣٠س = ف س + ٢٠ ف$

$٣٠س - ف س = ٢٠ ف$

$س(٣٠ - ف) = ٢٠ ف$

$س = \frac{٢٠ ف}{٣٠ - ف} \Leftarrow \frac{دس}{دن} = \frac{(٣٠-ف) \times ٢٠ \frac{دف}{دن} - ٢٠ ف \times -١ \frac{دف}{دن}}{(٣٠-ف)^٢}$

لكن $\frac{دف}{دن} = ؟؟$

نجد $ف$ حيث $ن \Leftarrow ف = ٣٠ن - ٥ن^٢ = ١٥$

$٥ن^٢ - ٣٠ن + ١٥ = ٠ \Leftarrow ن^٢ - ٦ن + ٣ = ٠$

$ن = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ١٢}}{٢} = \frac{٦ \pm \sqrt{٢٤}}{٢}$

$ن = ٣ + \sqrt{٦}$ (لا) لأنه الجسم صاعد

$ن = ٣ - \sqrt{٦}$ (نأخذ)

$\frac{دف}{دن} = ٣٠ - ١٠ن$

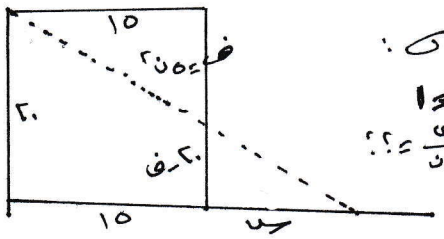
$= ٣٠ - ١٠(٣ - \sqrt{٦}) = ١٠\sqrt{٦}$

$\frac{دس}{دن} = \frac{(٣٠-١٥) \times ٢٠ \times ١٠ - ٢٠ \times ١٥ \times -١ \times ١٠\sqrt{٦}}{(٣٠-١٥)^٢} = \frac{٤٠٠}{١٥} = \frac{٨٠}{٣}$

٣٣ يقع مصباح في برج ارتفاعه ٢٠ م سقطت كرة من السكون بعد ١٥ م ١٠ احسب سرعة ظل الكرة على الأرض بعد ثانيتين من سقوطها. علماً أن المسافة التي يقطعها الجسم الساقط هي $ف = ٥ن^٢$

الحل:

من التشابه:



$\frac{٢٠}{س+١٥} = \frac{٢٠-ف}{س}$

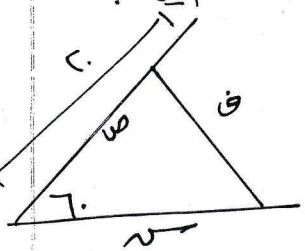
$\frac{٢٠}{س+١٥} = \frac{٢٠-٥ن^٢}{س} \Leftarrow ٢٠س = ٢٠س + ٣٠٠ - ٣٠ن^٢ - ٧٥ن^٢$

$٥ن^٢ س = ٣٠٠ - ٧٥ن^٢ \Leftarrow س = \frac{٣٠٠}{٥ن^٢} - \frac{٧٥ن^٢}{٥ن^٢}$

$س = \frac{٣٠٠}{٥ن^٢} - ١٥ \Leftarrow \frac{دس}{دن} = \frac{-٣٠٠ \times ١٠ن}{(٥ن^٢)^٢} = \frac{-٣٠٠ \times ١٠ \times ٢}{٢٥} = -٢٤٠$

٣٤ طريقان متقاطعان الزاوية بينهما ٦٠° بدأ شخص الحركة على أحد الطريقين بسرعة ٢ م/ث وفي نفس الوقت بدأ شخص ثاني الحركة على الطريق الآخر من نقطة تبعد ٢٠ م باتجاه التقاطع بسرعة ٣ م/ث احسب معدل تغير المسافة بين الشخصين بعد ٤ ثوانٍ من الحركة.

الحل:



$ف^٢ = س^٢ + ص^٢ - ٢ س ص جتا ٦٠$

$ف^٢ = س^٢ + ص^٢ - س ص$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢ س \frac{دس}{دن} + ٢ ص \frac{دص}{دن} - (س \frac{دص}{دن} + ص \frac{دس}{دن})}{٢ف}$

$س = ٢ن$

$ص = ٢٠ - ٣ن$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢ \times ٨ \times ٢ + ٢ \times ٨ \times -٣ - (٨ \times -٣ + ٢ \times ٢)}{٢ \times ٨}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٥٦}{١٦} = ٣,٥$

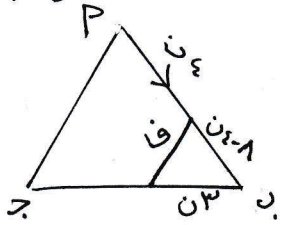
٣٥ مصباح معلق فوق منضدة دائرية أفقية ارتفاعها عن الأرض ٩٠ سم ونصف قطرها ٢٠ سم، تحرك المصباح رأسياً للأسفل نحو المنضدة بسرعة ٦ سم/ث احسب معدل التغير في نصف قطر دائرة ظل المنضدة عندما يكون ارتفاع المصباح عن المنضدة ٦٠ سم.

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٣٥ $\triangle$ أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه
أ ب = أ جـ = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم
تحركت من أ باتجاه ب بسرعة ٤ سم/ث وفي نفس الوقت تحركت نقطة ثانية من ب باتجاه جـ بسرعة ٣ سم/ث . احسب معدل التغير في المسافة بين النقطتين بعد مرور ثانيتين واحدة.

الحل:

جتا ب = $\frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$



ف^{٢} = (٨-٤ن)^{٢} + (٣ن)^{٢} - ٢ (٨-٤ن) (٣ن) جتا ب

ف^{٢} = ٦٤ - ٦٤ن + ١٦ن^{٢} + ٩ن^{٢} - ٢٤ (٣ن) $\frac{٣}{٤}$

ف^{٢} = ٦٤ - ٦٤ن + ١٦ن^{٢} + ٩ن^{٢} - ٣٦ن + ١٨ن^{٢}

ف^{٢} = ٦٤ - ١٠٠ن + ٤٣ن^{٢}

ف = $\sqrt{٦٤ - ١٠٠ن + ٤٣ن^{٢}}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{-١٠٠ + ٨٦ن}{٢ \sqrt{٦٤ - ١٠٠ن + ٤٣ن^{٢}}}$

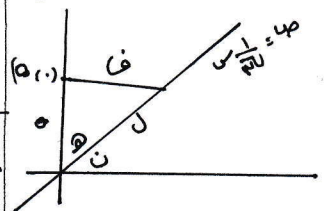
عندما ن = ١ $\Leftarrow \frac{دف}{دن} = \frac{-١٠٠ + ٨٦}{٢ \sqrt{٦٤ - ١٠٠ + ٤٣}} = \frac{-١٤}{٢ \sqrt{٧}}$

٣٦ بدأت نقطة الحركة من الأصل على المستقيم ص = $\frac{١}{٣}$ س حيث ع$_{١}$ الزاوية الأول بسرعة ٤ وحدات/ث احسب معدل التغير في المسافة بين النقطة المتحركة والنقطة الثابتة (٥، ٠) بعد مرور ثانيتين من الحركة.

الحل:

لإيجاد ظا ه = $\frac{ص}{س} = \frac{١}{٣}$

ن = ٣٠ $\Leftarrow$ ه = ٦٠



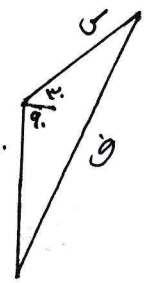
ف^{٢} = ل^{٢} + ٢٥ - ١٠ ل جتا ٦٠

ف^{٢} = ل^{٢} + ٢٥ - ٥ ل

ف = $\sqrt{ل^{٢} + ٢٥ - ٥ل}$ $\Leftarrow \frac{دف}{دن} = \frac{٢ل \frac{دل}{دن} - ٥ \frac{دل}{دن}}{٢ \sqrt{ل^{٢} + ٢٥ - ٥ل}}$

بعد ثانيتين $\Leftarrow$ ل = ٤ × ٢ = ٨ $\Leftarrow \frac{دف}{دن} = \frac{٢ \times ٨ \times ٤ - ٥ \times ٤}{٢ \sqrt{٨^{٢} + ٢٥ - ٥ \times ٨}} = \frac{٢٢}{٧}$

٣٧ بدأ بالون بالصعود للأعلى بسرعة ٢ م/ث وبعد ١٠ ثواني انحرف مساره بزاوية تميل ٣٠° عن الأفقية احسب معدل تغير المسافة بين البالون ونقطة البداية بعد مرور ٥ ثواني عن انحراف



ف^{٢} = س^{٢} + (٢٠)^{٢} - ٢ س × ٢٠ جتا ١٢٠

ف^{٢} = س^{٢} + ٤٠٠ + ٢٠ س

ف = $\sqrt{س^{٢} + ٢٠س + ٤٠٠}$

$\frac{دف}{دن} = ٢س \frac{دس}{دن} + ٢٠ \frac{دس}{دن}$

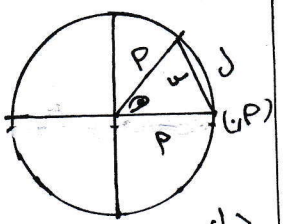
$\frac{دف}{دن} = \frac{٢س \frac{دس}{دن} + ٢٠ \frac{دس}{دن}}{٢ \sqrt{س^{٢} + ٢٠س + ٤٠٠}}$

س بعد ٥ ثواني $\Leftarrow$ ٥ × ٢ = ١٠

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢ \times ١٠ \times ٢ + ٢٠ \times ٢}{٢ \sqrt{١٠^{٢} + ٢٠ \times ١٠ + ٤٠٠}} = \frac{٨٠}{٢ \sqrt{٧٠٠}}$

٣٨ بدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها الأصل من النقطة (P، ٠) بعكس اتجاه عقارب الساعة بحيث يزداد طول القوس الذي ترسمه أثناء حركتها بمعدل ٨ سم/ث احسب معدل (بتعاد النقطة) المتحركة عند (P، ٠) عندما يقابل القوس الذي ترسمه زاوية مركزية $\frac{\pi}{٣}$.

الحل:



س^{٢} = P^{٢} + P^{٢} - ٢ P × P جتا ه

س^{٢} = ٢P^{٢} - ٢P^{٢} جتا ه

س = $\sqrt{٢P^{٢} - ٢P^{٢} جتا ه}$

$\frac{دس}{دن} = \frac{٠ + ٢P^{٢} جا ه \frac{ده}{دن}}{٢ \sqrt{٢P^{٢} - ٢P^{٢} جتا ه}}$

$= \frac{٢P^{٢} \times \frac{٣}{٢} \times \frac{٨}{P}}{٢ \sqrt{٢P^{٢} - ٢P^{٢} \times \frac{١}{٢}}}$

$= \frac{٨P \sqrt{٣}}{٢P \sqrt{٢}} = ٤ \sqrt{٣}$

$\frac{دل}{دن} = ٨ \Leftarrow ه = \frac{\pi}{٣}$

$\frac{دس}{دن} = ؟؟$

لإيجاد $\frac{دل}{دن}$ = ؟؟

ل = P × ه

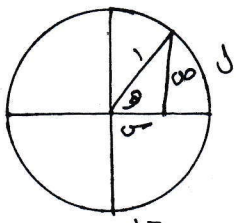
$\frac{دل}{دن} = P \times \frac{ده}{دن}$

$٨ = P \times \frac{ده}{دن}$

$\frac{ده}{دن} = \frac{٨}{P}$

٣٩ تتحرك نقطة على منحنى س^{٢} + ص^{٢} = ١ بعكس عقارب الساعة إذا كانت معدل التغير في الإحداثي الصادي عند (١، ٠) هو ٢ احسب سرعة النقطة.

الحل:-



جتا ه = $\frac{س}{١}$

جتا ه = س

$\frac{دجتا ه}{دن} = \frac{دس}{دن}$

عند (١، ٠)

جتا ه = ١

$١ \times \frac{ده}{دن} = ٢$

$\frac{ده}{دن} = ٢$

$\frac{دل}{دن} = ٢$

$\frac{دل}{دن} = ؟؟$

ل = نق × ه

بما أن نق = ١

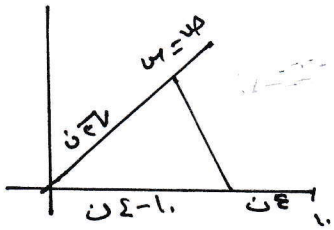
ل = ١ × ه

$\frac{دل}{دن} = \frac{ده}{دن}$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٤٠ اذا كانت P(١٠، ٠) بدأت الحركة من P على محور السينات بسرعة ٤ وحدات في الثانية باتجاه الاصل وفي نفس الوقت تحركت اخرى من الاصل على صادي صاحبة سرعة ٣ في الربع الاول بسرعة ٢ وحدة في الثانية. جد معدل تغير المسافة بين النقطتين بعد مرور ثانيتين.

الحل



زاوية الميل المستقيم = ٤٥°
(لانه خطه ص = س + ١)

$ف^2 = (10-4ن)^2 + (3ن)^2 - 2(10-4ن)(3ن)\cos 45$

$ف^2 = 100 - 80ن + 16ن^2 + 2ن^2 - 60ن + 18ن^2$

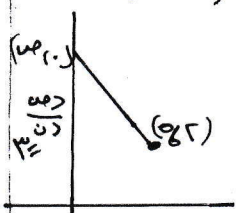
$ف^2 = 100 - 140ن + 36ن^2$

$2ف \frac{دف}{دن} = -140 + 72ن$

$\frac{دف}{دن} = \frac{-140 + 72ن}{2\sqrt{100 - 140ن + 36ن^2}}$

$= \frac{-140 + 72(1)}{2\sqrt{100 - 140 + 36}} = \frac{-68}{2(6)} = -\frac{17}{3}$

٤١ بدأت نقطة الحركة من الاصل في اتجاه المحور الصادات بسرعة ٣ سم/ث احسب معدل تغير البعد بينها وبين النقطة (٢، ٥) بعد مرور ثانيتين من الحركة.



الحل: $ف = \sqrt{(0-2)^2 + (ص-5)^2}$

$ف = \sqrt{4 + ص^2 - 10ص + 25}$

$ف = \sqrt{ص^2 - 10ص + 29}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{2ص - 10}{2\sqrt{ص^2 - 10ص + 29}} \times \frac{دص}{دن}$

$= \frac{2(6) - 10}{2\sqrt{6^2 - 10(6) + 29}} \times 3 = \frac{2}{\sqrt{29}} \times 3$

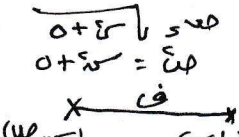
٤٢ تتحرك نقطة على منحنى $ص = س^2 + 5$ بحيث يزداد احداثي السيني بمعدل ١٠ سم/ث. احسب معدل تغير البعد عن النقطة (١، ٥) عندما $س = 2$

الحل $ف = \sqrt{(س-1)^2 + (ص-0)^2}$ ولكن $ص = س^2 + 5$

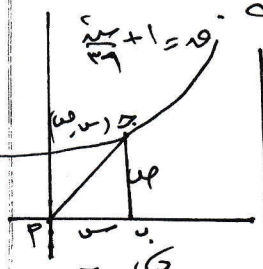
$ف = \sqrt{س^2 - 2س + 1 + س^2 + 5}$

$ف = \sqrt{2س^2 - 2س + 6}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{4س - 2}{2\sqrt{2س^2 - 2س + 6}} \times \frac{دس}{دن} = \frac{4(2) - 2}{2\sqrt{2(4) - 2(2) + 6}} \times 9$



٤٣ $ب ج$ مثلث قائم الزاوية في $ب$ اذا علمت انه هذا المثلث يتغير في المستوى الديكارتي بحيث يبقى الراس $ب$ عند الاصل يتحرك الراس $ج$ مع منحنى $ص = 1 + \frac{س^2}{36}$ والراس $ب$ بدأ حركة من (١، ١) بسرعة ٢ سم/ث احسب معدل تغير مساحة المثلث بعد ٣ ثواني من حركة $ب$.



الحل: $م = \frac{1}{2} س \times ص$

$م = \frac{1}{2} س (1 + \frac{س^2}{36})$

$م = \frac{1}{2} س + \frac{س^3}{72}$

$\frac{دم}{دن} = \frac{1}{2}\frac{دس}{دن} + \frac{3س^2}{72}\frac{دس}{دن}$

$= \frac{1}{2} \times 2 + \frac{3}{72} \times 49 \times 2$

$= 1 + \frac{49}{12} = \frac{61}{12}$

٤٤ تتحرك نقطة على $ص^2 + ص = 117$ احسب احداثيات النقطة في اللحظة التي يكون فيها معدل التغير في الاحداثي السيني ٣ سم/ث ومعدل التغير في الاحداثي الصادي ٢ سم/ث

الحل: $\frac{دس}{دن} = 3$ ، $\frac{دص}{دن} = 2$

$ص^2 + ص = 117$

$2ص \frac{دص}{دن} + \frac{دص}{دن} = 0$ ⟸

$2ص(2) + 2 = 0$ ⟸ $4ص = -2$

$ص = -\frac{1}{2}$ ⟸ $ص = \frac{3}{2}س$

بالتعويض في $ص^2 + ص = 117$

$(\frac{3}{2}س)^2 + \frac{3}{2}س = 117$ ⟸ $\frac{9}{4}س^2 + \frac{3}{2}س = 117$ ⟸ $9س^2 + 6س = 468$

$3س^2 + 2س = 156$ ⟸ $س^2 + \frac{2}{3}س = 52$ ⟸ $س^2 = 36$

$س = 6$ ⟸ $ص = 9$ النقطة $(6، 9)$

$س = -6$ ⟸ $ص = 9$ النقطة $(-6، 9)$

٤٥ تتحرك نقطة على منحنى $ص = س^3 + 5س^2$ اذا علمت ان احداثي السيني يزداد بمعدل ٢ سم/ث احسب ① معدل التغير في الاحداثي الصادي.

② معدل التغير في ميل المماس عندما $س = 2$

① $ص = س^3 + 5س^2$

$\frac{دص}{دن} = (3س^2 + 10س)\frac{دس}{دن} = (3(2)^2 + 10(2)) \times 2 = 64$ سم/ث

② ميل المماس $= م = \frac{دص}{دس} = 3س^2 + 10س$

$\frac{دم}{دن} = (6س + 10)\frac{دس}{دن}$

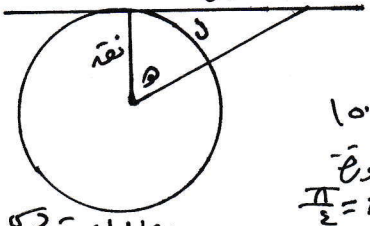
$= (6(2) + 10) \times 2 = 44$

٤٦ تتحرك نقطة على منحنى $ص = س^2$ اوجد موضع النقطة التي يكون عندها $\frac{دص}{دن} = \frac{دس}{دن}$.

(واجب)

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٤٧ طريق للسيارة دائري نصف قطره ٤ كم وفي مركزه كشك خوتي ويوجد جهاز مستقيم يصل الطريق في احدى النقاط وسير السيارة على الطريق بسرعة ١٥٠ كم/ساعة وفي لحظة ما كانت السيارة عند نقطة أ كما في الشكل احسب سرعة دوران الجهاز عندما تكون السيارة قد قطعت $\frac{1}{8}$ دورة.



الحل:-

نصف القطر = ثابت ، $\frac{دل}{دن} = ١٥٠$

في لحظة ما = $\frac{1}{8}$ دورة $= \frac{1}{8} \times ٢\pi = \frac{\pi}{4}$

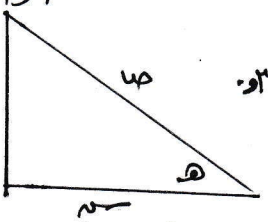
المطلوب $= \frac{دك}{دن} = ؟؟$

$ظاه = \frac{س}{نق}$	$ل = نق \times ه$	قاه $= \frac{\pi}{4}$
$قاه \frac{دﻫ}{دن} = \frac{1}{نق} \frac{دك}{دن}$	$\frac{دل}{دن} = نق \times \frac{دﻫ}{دن}$	قاه $= ١$
$\frac{١٥٠}{نق} \times ١ = \frac{1}{نق} \frac{دس}{دن}$	$١٥٠ = نق \times \frac{دﻫ}{دن}$	
$٣٠٠ = \frac{دس}{دن}$	$\frac{دﻫ}{دن} = \frac{١٥٠}{نق}$	

٤٨ يقف رجل على رصيف حوض السفن ويسحب حبل صندل يقارب بمعدل ٠,٣ م/ث وطرفة الآخر بيد بكرة ترتفع ٠,٩ م عن خط سير القارب احسب سرعة تغير الزاوية المحصورة بين الحبل وخط سير القارب عند اللحظة التي يكون القارب على بعد ٢,١ عنه الرصيف.

الحل:-

$\frac{دﻫ}{دن} = ؟$ ، $\frac{دص}{دن} = -٠,٣$



$جاه = \frac{٠,٩}{ص}$

$جتاه \frac{دﻫ}{دن} = \frac{-٠,٩}{ص^٢} \frac{دص}{دن}$

$\frac{٤}{٥} \frac{دﻫ}{دن} = \frac{-٠,٩}{١,٥} \times -٠,٣$

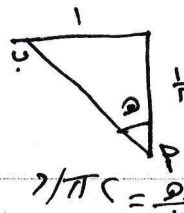
$\frac{دﻫ}{دن} = \frac{٣}{٢٠}$

$ص = \sqrt{(١,٢)^٢ + (٠,٩)^٢} \leftarrow ص = ١,٥$

$جتاه = \frac{١,٢}{١,٥} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$

٤٩ كشاف ضوئي في السجن يدور دورة كاملة كل دقيقة في مقابله سالم مستقيم وأقرب نقطة على السالم إلى الكشاف هي بعد $\frac{1}{2}$ كم احسب سرعة التي يسير بها ضوء الكشاف عندما يكون الضوء على بعد ١ كم عن أقرب نقطة على السالم إلى الكشاف.

الحل:-



$ظاه = \frac{س}{\frac{1}{2}} \leftarrow ظاه = ٢س$

$قاه \frac{دﻫ}{دن} = ٢ \frac{دس}{دن}$

$قاه = ١ + ظاه$

$= ١ + ٤$

$قاه = ٥$

$\frac{دﻫ}{دن} = ٢\pi/٦$

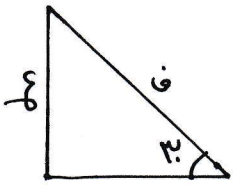
$\frac{دس}{دن} = ؟؟؟$

$\frac{دس}{دن} \times ٢ \times \pi ٥ = ٢ \times \frac{دس}{دن}$

$\frac{دس}{دن} = \pi ٥$

٥٠ تحلق طائرة للأعلى بزاوية قدرها ٣٠° على الأفق احسب معدل تغير ارتفاع الطائرة إذا علمت ان سرعة الطائرة هي ٥٠ كم/ساعة

الحل:- $\frac{دف}{دن} = ٥٠$ ، المطلوب: $\frac{دع}{دن}$



$جا ٣٠ = \frac{ع}{ف} \Rightarrow ف جا ٣٠ = ع$

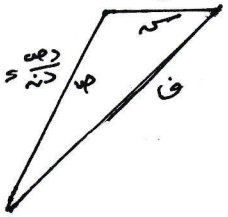
$ف \times \frac{1}{2} = ع$

$\frac{1}{2} \frac{دف}{دن} = \frac{دع}{دن}$

$\frac{1}{2} \times ٥٠٠ = \frac{دع}{دن} \leftarrow \frac{دع}{دن} = ٢٥٠$ كم/س

٥١ طائرة على ارتفاع ثابت وتسير بخط مستقيم بسرعة ٦٠٠ كم/س الحلقة صاروخ بسرعة ١٢٠٠ كم/س في خط بزاوية ١٢٠ على مسار الطائرة ليصيب الطائرة وفي لحظة ما كانت الطائرة على بعد ٣ كم والصاروخ على بعد ٤ كم. احسب معدل تغير المسافة بينهما عند تلك النقطة.

الحل:-



$\frac{دص}{دن} = -٦٠٠$ ، $\frac{دس}{دن} = -١٢٠٠$

$ف^٢ = س^٢ + ص^٢ - ٢س ص جتا ١٢٠$

$ف^٢ = س^٢ + ص^٢ + س ص$

$ف = \sqrt{س^٢ + ص^٢ + س ص}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن} + س \frac{دص}{دن} + ص \frac{دس}{دن}}{٢ \sqrt{س^٢ + ص^٢ + س ص}}$

$= \frac{٢ \times ٣ \times -٦٠٠ + ٢ \times ٤ \times -١٢٠٠ + ٣ \times -١٢٠٠ + ٤ \times -٦٠٠}{٢ \sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢ + ٣ \times ٤}}$

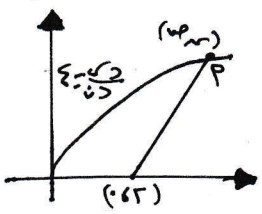
$\frac{دف}{دن} = \frac{-١٦٨٠٠}{٢ \sqrt{٣٧}}$

٥٢ تتحرك النقطة P على منحنى $ص = س^٢$ إذا كان الإحداثي السيني يزداد بمعدل ٤ وحدات في الثانية عندما $س = ٣$ احسب

① معدل تغير المسافة بين P والنقطة (٠,٢)

② معدل تغير زاوية ميل المستقيم الواصل بين P والنقطة (٠,٢)

الحل $ف = \sqrt{(س-٠)^٢ + (ص-٢)^٢}$



$ف = \sqrt{س^٢ - ٤س + ٤ + ص^٢ - ٤ص + ٤}$

$ص = س^٢ \Leftarrow ص^٢ = س^٤$

$ف = \sqrt{س^٤ - ٤س^٢ + ٤س + ٤}$

$ف = \sqrt{س^٤ - ٣س^٢ + ٤س + ٤}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٤س^٣ - ٦س + ٤}{٢ \sqrt{س^٤ - ٣س^٢ + ٤س + ٤}} \times \frac{دس}{دن}$

$= \frac{٤ \times ٣^٣ - ٦ \times ٣ + ٤}{٢ \sqrt{٣^٤ - ٣ \times ٣^٢ + ٤ \times ٣ + ٤}} \times ٤$

$= \frac{٢٠٠}{٢ \sqrt{٧٩}} \times ٤$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٥٣ ب) $م = \frac{\text{ضغط}}{\text{حجم}} = \frac{\text{ثابت}}{\text{ح}^{-2}}$

$\frac{\text{ضغط}}{\text{زمن}} = \frac{\text{ثابت}}{\text{ح}^{-2}} \times \frac{\text{حجم}}{\text{زمن}}$

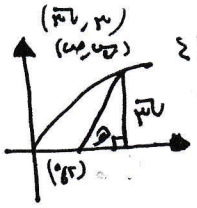
$\frac{\text{ضغط}}{\text{زمن}} = \frac{\text{ثابت}}{(\text{ح}-2)^2} \times \frac{\text{حجم}}{\text{زمن}}$

$\text{ضغط} = \frac{\text{ثابت}}{\text{ح}^2} \Leftarrow \frac{\text{ثابت}}{\text{ح}^2} = \text{ضغط} - 1$ ٤)

$\frac{\text{ضغط}}{\text{زمن}} \times \frac{\text{حجم}}{\text{زمن}} = \frac{\text{ثابت}}{(\text{ح}-3)^2} \times \frac{\text{حجم}}{\text{زمن}}$

$\frac{\text{ضغط}}{\text{زمن}} = \frac{\text{ثابت}}{(\text{ح}-3)^2} \times 4$

$\frac{\text{ضغط}}{\text{زمن}} = \frac{1}{\text{ثابت}^2} \times 4 = \frac{10}{\text{ثابت}^2}$



تدريبات

① طائرة عمودية على ارتفاع ٣٠٠ م فوق طريق مستقيم شاهد طيار سيارة تبعد عنه مسقط الطائرة مسافة ١٥٠ م وتسير مبتعدة عنه مسقط الطائرة بسرعة ٢٥ م/ث اذا بدأت الطائرة بالهبوط بمعدل ٥٠ م/د احسب معدل تغير زاوية الانخفاض بين الطائرة والسيارة بعد مرور دقيقتين

الجواب = $\frac{-3}{16}$

② مثلث قائم الزاوية اذا كان الضلع المجاور للحاد هو سه ويزداد بمعدل ٢ سم/ث والضلع المقابل هو ص ويتناقص بمعدل ١ سم/ث في لحظة ما كانت سه = ص = ١٠ ① سرعة تغير الزاوية هـ عند تلك اللحظة ② معدل تغير مساحة المثلث.

③ يرتفع بالون راسياً للاعلى بمعدل ٤٠ م/د ويرصد البالون من مشاهد على الارض احسب معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للبالون عندما يكون البالون على ارتفاع ٧٠ ثابت ٣ م.

الجواب = $\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{1}{7}$

④ مئذنة ارتفاعها ٢٠ م يتحرك كرة في خط مستقيم مبتعد عنه المأذنة بسرعة ٤ م/ث

① سرعة تغير زاوية انخفاض خط المشاهد في قمة المأذنة عندما تكون الكرة على بعد ١٥ م من المأذنة

② معدل تغير المسافة بين الكرة وقمة المأذنة.

⑤ يسحب قارب بواسطة حبل يمر على بكرة اذا كان مثبت في القارب في نقطة تقع بمقدار ١٠ م على مستوى اسفل البكرة اذا سحب الحبل بمعدل ٥ م/د احسب سرعة اقتراب القارب عندما يكون طول الحبل بين البكرة والقارب ٣٦ م.

الجواب: $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{-60}{13}$

⑥ يحتوي وعاء على ١٠٠ قدم٣ من الغاز بضغط ٥ باوند/انش٢ احسب معدل التغير في الحجم اذا كان الضغط يتناقص بمعدل ٥٠ باوند/انش٢ في الساعة علماً بأنه الحجم × الضغط = ثابت.

الحل: $\text{ح} \times \text{ض} = P$ (ثابت) $\Leftarrow \text{ح} = \frac{P}{\text{ض}}$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{-P}{\text{ض}^2} \times \frac{\text{دض}}{\text{دن}}$

$= \frac{-5000}{(50)^2} \times -50$

$= 10$

$\text{ح} \times \text{ض} = P$

$P = 100 \times 50$

$P = 5000$

⑦ مستطيل طوله ٢٤ سم وعرضه ١٠ سم اذا كان الطول يتناقص بمعدل ٢ سم/ث بينما يتزايد العرض بمعدل ١٫٥ سم/ث أوجد متى يصبح الشكل مربعاً ثم احسب المعدل الذي يتوقف فيه المساحة عن الزيادة وكم تكون المساحة عندها.

الحل: الطول بعد ن ثانية = ٢٤ − ٢ن، العرض بعد ن ثانية = ١٠ + ١٫٥ن

يصبح مربعاً عندما سه = ص

٢٤ − ٢ن = ١٠ + ١٫٥ن ⇐ ن = ٤

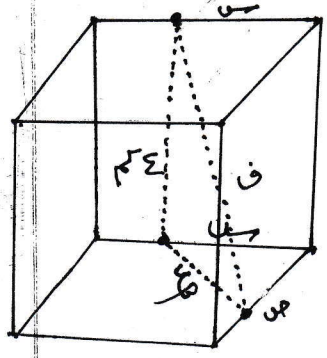
م = (٢٤ − ٢ن)(١٠ + ١٫٥ن)

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = (24-2\text{ن})(1{,}5) + (10+1{,}5\text{ن})(-2)$

صفر = ٣٦ − ٣ن − ٢٠ − ٣ن ⇐ ن = $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

م = $(24-2\times\frac{8}{3})(10+\frac{3}{2}\times\frac{8}{3}) = 61\frac{1}{3}$ سم٢

⑧ في لحظة ما كانت طائرة P تمر مباشرة فوق السياح ب وعلى ارتفاع ٤ كم اذا كانت P تتحرك شرقاً افقياً في خط مستقيم بسرعة ٣٠٠ كم/س والسياح سه جنوباً افقياً بسرعة ٩٠ كم/س احسب معدل تغير المسافة بين الطائرة والسياح بعد ٦ دقائق



الحل:

$\text{ف}^2 = \text{ع}^2 + (4)^2$ | $\text{ع}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2$

$\text{ف} = \sqrt{\text{ع}^2 + 16}$

$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2 + 16}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{2\text{س}\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + 2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دن}}}{2\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2 + 16}}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{2\times 30\times 30 + 2\times 90\times 90}{2\sqrt{900 + 8100 + 16}}$

$= \frac{19620}{2772}$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 30$

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 90$

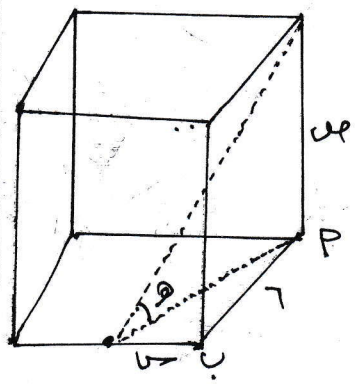
المطلوب $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$

س = 30 × $\frac{6}{60}$ = 3 ساعة = 6 دقيقة

ص = 90 × $\frac{6}{60}$ = 9

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٩ في الشكل المجاور منه م بدأ بالون بالارتفاع بسرعة ٥ م/ث. وفي نفس اللحظة بدأت كرة بالحركة هبوطا على الارض وفي خط مستقيم من النقطة م مسافة ٦ م وبسرعة ٤ م/ث احسب معدل تغير الزاوية θ بعد مرور ثانيتين.



الحل:

$\frac{dهـ}{dن} = ٥$

$\frac{dس}{dن} = ٤$

$ع^٢ = س^٢ + ٣٦$

$٢ع \frac{dع}{dن} = ٢س \frac{dس}{dن}$

بعد ثانية $س = ٤ \times ٢ = ٨$

$ع^٢ = (٨)^٢ + (٦)^٢ \leftarrow ع = ١٠$

$٢ \times ١٠ \frac{dع}{dن} = ٢ \times ٨ \times ٤$

$\frac{dع}{dن} = ٣,٢$

بعد ثانيتين

$ظا θ = \frac{هـ}{ع} = \frac{١٠}{١٠} = ١$

$قا^٢ θ = ١ + ظا^٢ θ = ٢$

$ظا θ = \frac{هـ}{ع}$

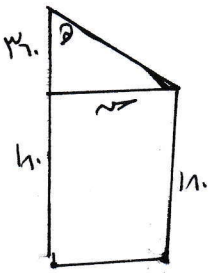
$قا^٢ θ \frac{dθ}{dن} = ع \frac{dهـ}{dن} - هـ \frac{dع}{dن}$ ÷ $ع^٢$

$٢ \times \frac{dθ}{dن} = \frac{١٠ \times ٥ - ١٠ \times ٣,٢}{١٠٠}$

$\frac{dθ}{dن} = \frac{١٨}{٢٠٠} = \frac{٩}{١٠٠}$

١٠ رجل طوله ١٨٠ سم يقف امام مصباح يرتفع عنه سطح الارض ٥٤٠ سم اذا ابتعد الرجل بالاقتراب من المصباح بمعدل ٣٠ سم/ث احسب معدل تغير الزاوية المحصورة بين المصباح والشعاع الواصل بين المصباح ورأس الرجل عندما يكون الرجل على بعد ١٨٠ سم من قاعدة المصباح

الحل:



عندما $س = ١٨٠$

$ظا θ = \frac{س}{٣٦٠}$

$قا^٢ θ \frac{dθ}{dن} = \frac{١}{٣٦٠} \frac{dس}{dن}$

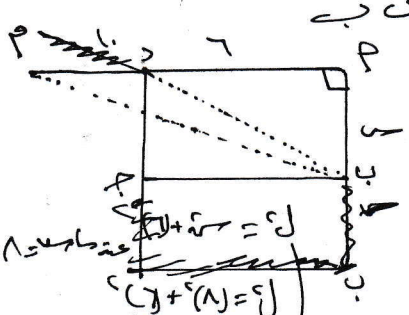
$(\frac{٥}{٤})^٢ \frac{dθ}{dن} = \frac{١}{٣٦٠} \times -٣٠$

$\frac{dθ}{dن} = \frac{-٤}{٣}$

١١ يتحرك مستقيم بحيث يبقى ضعف احداثي السيني لنقطة المماس يزداد بمعدل ٣ وحدات/ث احسب السرعة التي تتحرك بها نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات عندما $س = \frac{١}{٢}$

١٢ $أ ب جـ د$ متوازي مستطيلات فيه $أ ب = ٨$ سم، $ب جـ = ٦$ سم، $جـ د = ١٠$ سم عمودي على مستوى المستطيل $أ ب جـ د$ بدأت نقطة م بالحركة هابطة على $أ ب$ بسرعة ٢ سم/ث احسب معدل تغير زاوية الارتفاع ع بالنسبة لـ م عندما $ل(م ب) = ٨$ سم

الحل:



$ظا ع = \frac{ل}{س} = \frac{١٠}{١٠} = ١$

$قا^٢ ع = ١ + ظا^٢ ع = ٢$

$قا^٢ ع \frac{dع}{dن} = \frac{-١٠}{س^٢} \frac{dس}{dن}$

$٢ \times ٢ \frac{dع}{dن} = \frac{-١٠}{(١٠)^٢} \times -١٢$

$\frac{dع}{dن} = \frac{-١٢}{٥٠}$

$\frac{dع}{dن} = \frac{-٦}{٢٥}$

١٣ رسم مستطيل تحت منحنى $ص = ٤ - س^٢$ بحيث يقع راسان منه على محور السينات ويقع راساه الاخران على المنحنى اذا كان ضلعه الذي على محور السينات يتناقص بمعدل ١ سم/ث ما معدل تغير مساحة المستطيل في اللحظة التي يكون فيها طول ضلعه الموجود على محور السينات يساوي ٢ سم.

الحل: