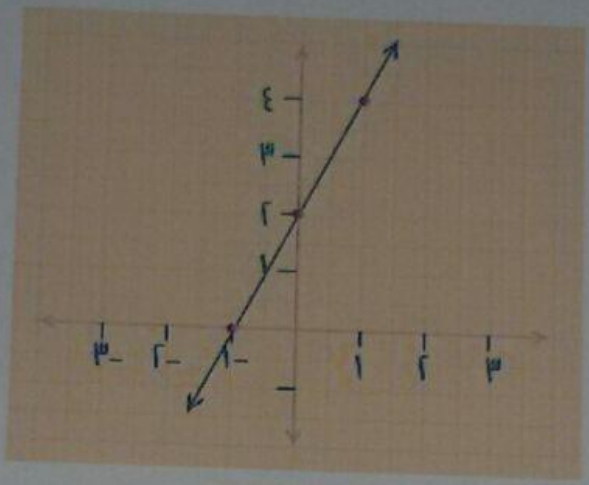
أوراق عمل في

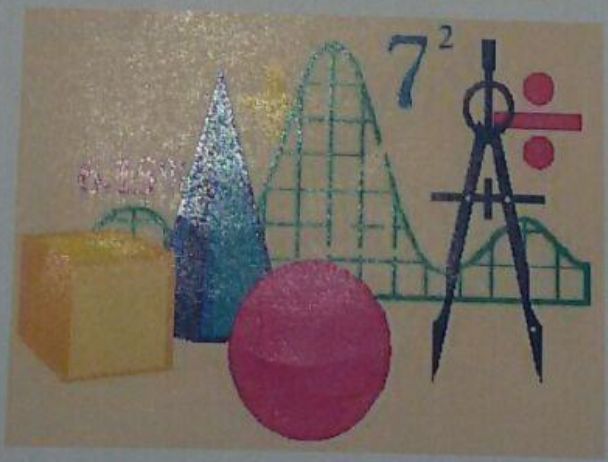
النهايات والاتصال



الأستاذ :

يزن القريوتي

شرح وأمثلة أوراق عمل أسئلة وزارة



الفرع الأدبي

0787244637

اعداد : يزن القريوتي

مراجعة :-

أولاً : أنواع الاقترانات

أ) الاقتران الثابت

ب) الاقتران الخطي

ج) الاقتران التربيعي

د) الاقتران النسبي (الكسري)

هـ) الاقترانات العليا

الأسئلة :

الاقتران الثابت : ق(س) = جـ

[1] ق(س) = ١٣ جد ق(٠) ، ق(-٢) ، ق(٣)

الحل : ق(٠) = ١٣

ق(-٢) = ١٣

ق(٣) = ١٣

[2] اذا كان ق(س) = $\sqrt{١٣}$ فجد ق(-٢)

الحل : ق(-٢) = $\sqrt{١٣}$

[3] إذا كان ق(س) = -٣ فجد ق(-١) ، ق(٥)

الحل : ق(-١) = -٣

ق(٥) = -٣

الاقتران الخطي : ق(س) = أس + جـ

[1] ق(س) = س فجد ق(١) ، ق(٠) ، ق(-١)

الحل : ق(١) = ١

ق(٠) = ٠

ق(-١) = -١

[2] ق(س) = ٣ - ٥ س فجد ق(١) ، ق(-٢)

الحل : ق(١) = ٣ - ٥ × (١) = ٣ - ٥ = -٢

ق(-٢) = ٣ - ٥ × (-٢) = ٣ - (-١٠) = ١٣

[3] ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س - ١ فجد ق(١) ، ق($\frac{١}{٢}$)

الحل : ق(١) = $\frac{١}{٢}$ - ١ = -$\frac{١}{٢}$

ق($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ - ١ = $\frac{١}{٤}$ - ١ = -$\frac{٣}{٤}$

تحليل الاقتران التربيعي : ق(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

س^{٢} - أ^{٢} = (س - أ) (س + أ)

س^{٢} - ٤ = (س - ٢) (س + ٢)

س^{٢} - ٩ = (س - ٣) (س + ٣)

س^{٢} - $\frac{١}{٤}$ = (س - $\frac{١}{٢}$) (س + $\frac{١}{٢}$)

٢ س^{٢} - ٣٢ = ٢ (س^{٢} - ١٦) = ٢(س - ٤) (س + ٤)

تمارين :-

١. س^{٢} - ٨١ =

٢. س^{٢} - ٤٩ =

٣. س^{٢} - ٦٤ =

٤. س^{٢} - ١٠٠ =

٥. ٣ س^{٢} - ١٢ =

٦. ٣ س^{٢} - ٢٧ =

٧. س^{٢} - ١٦ =

٨. س^{٢} - ٢٥ =

٩. س^{٢} - ٣٦ =

١٠. س^{٢} - ١ =

اعداد : يزن القريوتي

الاقتران التربيعي : ق(س) = أس² + بس + جـ

1. ق(س) = ٤س² − ٧ فجد ق(٠) ، ق(−١)

الحل : ق(٠) = ٤ × (٠)² − ٧ = −٧

ق(−١) = ٤ × (−١)² − ٧ = ٤ − ٧ = −٣

2. ق(س) = س² − ٢س + ١ فجد ق(١)

3. ق(س) = س³ − ٥ فجد ق(−٢) ، ق(٠)

الاقتران النسبي : ق(س) = أس / ب

1. إذا كان ق(س) = (٢س² − ٧) / (س + ٥) أوجد كلا من ق(٠) ، ق(١)

الحل : ق(٠) = (٢ × (٠)² − ٧) / (٠ + ٥) = −٧ / ٥

ق(١) = (٢ × (١)² − ٧) / (١ + ٥) = (٢ − ٧) / ٦ = −٥ / ٦

2. ق(س) = (٢س − ٣س² + ١) / (س − ١) فجد ق(٢) ، ق(٠)

3. ق(س) = (٢ − ٣س) / س فجد ق(١) ، ق(٢)

4. ق(س) = (٣س² − ١) / (٣ − س) ، فجد ق(−١) ، ق(٣)

الاقترانات العليا :-

1. ق(س) = س³ − ٥س + ١ فجد ق(١) ، ق(٠)

الحل : ق(١) = (١)³ − ٥ × (١) + ١ = −٤ + ١ = −٣

ق(٠) = (٠)³ − ٥ × (٠) + ١ = ١

2. ق(س) = ٢س − ٥س³ − ٢ فجد ق(−١) ، ق(٠)

3. ق(س) = س³ − ١ فجد ق(−٢) ، ق(٢)

4. ق(س) = س⁷ − ١٦ فجد ق(١)

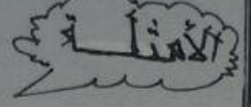
5. ق(س) = س¹⁴ − ١٦ فجد ق(٠) ، ق(١)

العبارة التربيعية :-

إشارة الحد الأوسط	إشارة الحد الثابت	التحليل
+	+	= (+)(+)
−	+	= (−)(−)
+	−	= (+)(−)
−	−	= (+)(−)

* العدد الأكبر في التحليل يأخذ إشارة الحد الأوسط

* مع مراعاة أن : القريبين + البعيدين = الحد الأوسط



بعيدين

قريبين

1. س² + ٧س + ١٠ = (س + ٢)(س + ٥)

2. س² − ٥س + ٦ = (س − س)(س − ٢)

3. س² + ٣س − ١٨ = (س + ٦)(س − ٣)

4. س² − ٤س − ١٨ = (س + ٤)(س − ٨)

5. س² − ٨س² + ١٥ = (س² − ٣)(س² − ٥)

قوانين الأسس :-

1. س^أ × س^ب = س^(أ+ب)

2. (س^أ)^ب = س^(أب)

3. س⁰ = ١ ، س ≠ صفر

4. س^أ / س^ب = س^(أ−ب)

5. س^(أ/ب) = ب√س^أ

6. س^(−أ) = ١ / س^أ

مفهوم النهاية :

في هذه الوحدة سندرس سلوك وخصائص الاقترانات

مفهوم النهاية :-

نهاية الاقتران ق(س) هي عدد حقيقي مثل (ل) تقترب منه قيم ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد (أ)

بالرموز

ق(س) ← ل عندما س ← أ وللاختصار نكتب

$$\lim_{س \to أ} ق(س) = ل$$

ولتوضيح مفهوم النهاية سنتعرف على بعض الرموز

١) س ← أ⁺ تقرأ س تقترب من العدد أ من جهة اليمين

٢) س ← أ⁻ وتقرأ س تقترب من العدد أ من جهة اليسار

تعريف :-

$$\lim_{س \to أ} ق(س) = ل \Leftrightarrow \lim_{س \to أ^+} ق(س) = \lim_{س \to أ^-} ق(س) = ل$$

والأمثلة الآتية توضح مفهوم النهاية

أولاً : مفهوم النهاية بالجدول :-

مثال (١) : إذا كان ق(س) = س + ٤ بإستخدام جدول مناسب جد إن وجدت $\lim_{س \to ١} ق(س)$

الحل :

س	١,١	١,٠١	١,٠٠١	١	٠,٩٩	٠,٩٨	٠,٩٧
ق(س)	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١	٥	٤,٩٩	٤,٩٨	٤,٩٧

من الجدول نجد أن

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ١^-} ق(س) = ٥$

إذن $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٥$

مثال (٢) : ليكن ق(س) = س + ١ ، إستعن بالجدول التالي في إيجاد $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

س	١,٧	١,٨	١,٩	٢	٢,١	٢,٢	٢,٣
ق(س)	٢,٧	٢,٨	٢,٩	٣	٣,١	٣,٢	٣,٣

نلاحظ أنه كلما اقتربت س من العدد ٢ من جهة اليمين فإن ق(س) يقترب من العدد ٣ وبالرموز :

$$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٣$$

$$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = ٣$$

وبالمثل من جهة اليسار .

بما أن $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} ق(س) \Leftarrow \lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة

قاعدة هامة :-

تكون

$$\lim_{س \to أ} ق(س) = \begin{cases} \text{موجودة ، اذا كانت } \lim_{س \to أ^+} ق(س) = \lim_{س \to أ^-} ق(س) \\ \text{غير موجودة ، اذا كانت } \lim_{س \to أ^+} ق(س) \neq \lim_{س \to أ^-} ق(س) \end{cases}$$

مثال (٣) : اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٣ - س & ، س \geq ١ \\ ٣ + س & ، س < ١ \end{cases}$$

جد :

① ق(١)

② $\lim\limits_{س \to ١} ق(س)$ بإستخدام الجدول

• الحل :-

① ق(١) = ٣ - ١ = ٢

②

س	١,٣	١,٢	١,١	١	٠,٩	٠,٨	٠,٧
ق(س)	٤,٤	٤,٢	٤,١	٣	٢,١	٢,٢	٢,٣

$\lim\limits_{س \to ١^+} ق(س) = ٤$

$\lim\limits_{س \to ١^-} ق(س) = ٣$

إذن $\lim\limits_{س \to ١} ق(س)$ = غير موجودة

مثال (٤) اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} -س + ١ & ، س \leq ٣ \\ س + ١ & ، س > ٣ \end{cases}$$

بين بإستخدام جدولاً مناسباً ان $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س)$ غير موجودة

• الحل

س	٣,١	٣,٠٥	٣,٠٠١		٢,٩٩٩	٢,٩٥	٢,٥
ق(س)	٤,١	٤,٠٥	٤,٠٠١		١,٩٩٩	١,٩٥	١,٥

من الجدول نجد أن

$\lim\limits_{س \to ٣^+} ق(س) = ٤$ ، $\lim\limits_{س \to ٣^-} = ٢$

فإن $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س)$ = غ.م

واجب

ليكن $ق(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ ، $س \neq ٢$

كون جدولاً ، ومثل ق(س) بيانياً ، وجد

$\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ؟$

طرق إيجاد النهاية :-

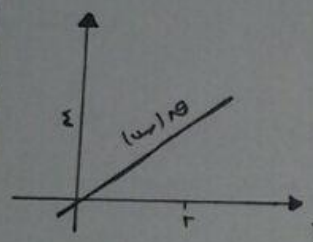
① طريقة الرسم : لا تستخدم الا إذا طلب السؤال ذلك

② الطريقة الحسابية : وهي الطريقة التي تعتمد عليها في إيجاد النهاية وهي (التعويض المباشر)

سوف نبدأ بطريقة الرسم :-

قاعدة : نجد النهاية من اليمين ومن اليسار .

الأسئلة :

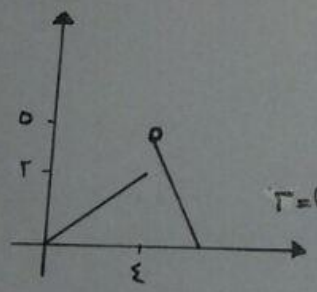


① جد $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س)$

• الحل :-

$\lim\limits_{س \to ٢^+} ق(س) = ٤$ ، $\lim\limits_{س \to ٢^-} ق(س) = ٤$

∴ النهاية = ٤

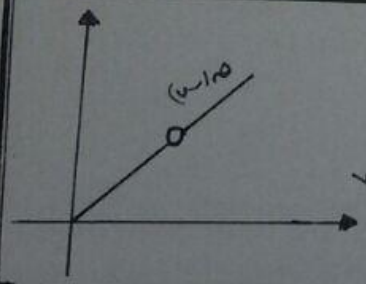


② جد $\lim\limits_{س \to ٤} ق(س)$

• الحل :-

$\lim\limits_{س \to ٤^+} ق(س) = ٥$ ، $\lim\limits_{س \to ٤^-} ق(س) = ٣$

∴ النهاية = غ.م



③ جد $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س)$

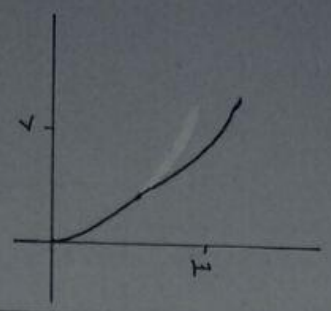
• الحل :

$\lim\limits_{س \to ٣^+} ق(س) = ٧$ ، $\lim\limits_{س \to ٣^-} ق(س) = ٧$

∴ النهاية = ٧

اعداد : يزن القريوتي

④ ق(٣) = ٧

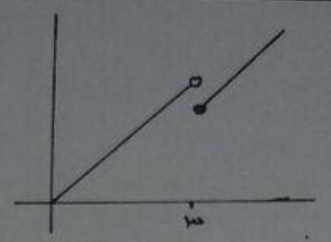


نها ق(س) = ٧
س ← ٣+

نها ق(س) = ٧
س ← ٣-

∴ نها ق(س) = ٣
س ← ٣

⑤ جد نها ق(س)
س ← ٣

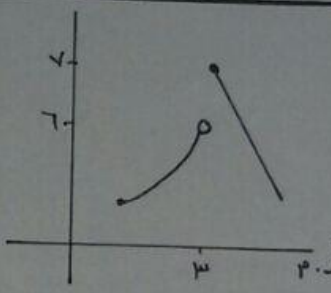


نها ق(س) =
س ← ٣-

نها ق(س) =
س ← ٣+

∴ نها ق(س) = غير موجودة
س ← ٣

⑥ جد نها ق(س)
س ← ٣

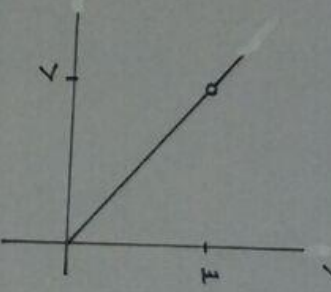


نها ق(س) = ٧
س ← ٣-

نها ق(س) = ٦
س ← ٣+

∴ نهاية = غ.م

⑦ جد نها ق(س)
س ← ٣



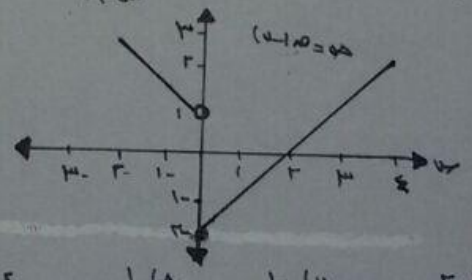
نها ق(س) = ٧
س ← ٣+

نها ق(س) = ٧
س ← ٣-

∴ نها ق(س) = ٧
س ← ٣

وزارة

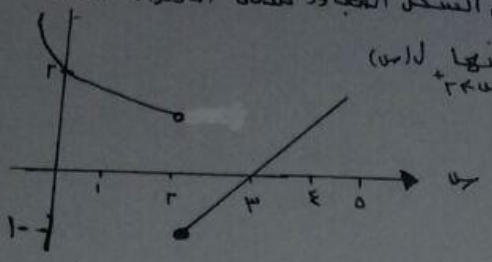
اعتمد على الشكل المجاور ما نها ق(س)
س ← ٠-



أ) ٢- ب) ١- ج) ١ د) غ.م

⑧ يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ل(س)

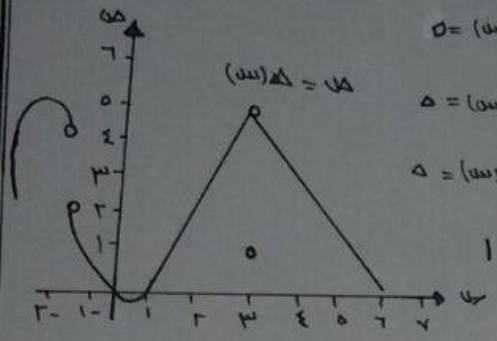
جد نها ل(س)
س ← ٣+



أ) ١ ب) ١- ج) ٢ د) غير موجودة

تمارين ومسائل هامة

إستعمل الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران هـ لإيجاد



① نها هـ(س) = ٥
س ← ٣+

② نها هـ(س) = ٥
س ← ٣-

③ نها هـ(س) = ٥
س ← ٣

④ هـ(٣) = ١

⑤ نها هـ(س) = ٢
س ← ٢-+

⑥ نها هـ(س) = ٤
س ← ٢-

⑦ نها هـ(س) = غير موجودة
س ← ٢-

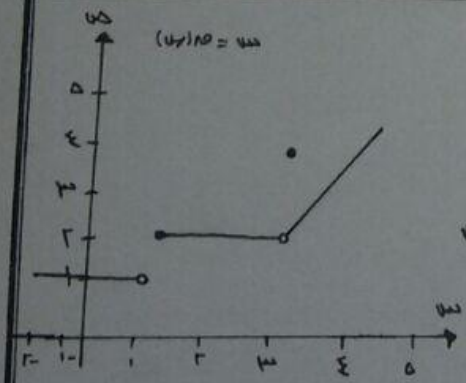
⑧ هـ(٢-) = غ. موجودة

⑨ نها هـ(س) = ٤ أو ٣,٥
س ← ٤

⑩ هـ(٤) = ٤. أو ٣,٥

حسب دقة الرسم

تمارين ومسائل هامة



١) نها ق(س) = ٢
س ← ١+

٢) نها ق(س) = ١
س ← ١-

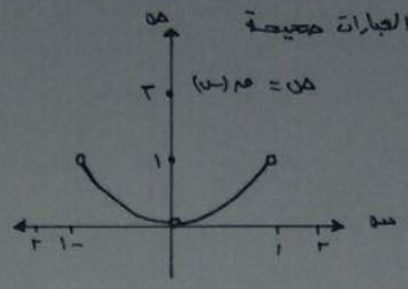
٣) نها ق(س) = غ.م
س ← ١

٤) نها ق(س) = ٢
س ← ٣+

٥) نها ق(س) = ٢
س ← ٣-

٦) نها ق(س) = ١
س ← ٠

اذا كان الشكل يمثل منحنى الاقتران ق(س) فجد أي العبارات صحيحة



أ) نها ق(س) = ١ (س ← -١⁺)

ب) نها ق(س) = ١ (س ← ٠⁻)

ج) نها ق(س) = ٠ (س ← ٠)

د) نها ق(س) = غ.م (س ← ١)

هـ) نها ق(س) = ١ (س ← ٠)

و) نها ق(س) = ١ (س ← ١)

ز) نها ق(س) = ٣ (س ← ٣⁻)

ح) نها ق(س) = ٠ (س ← ١⁺)

الإجابة

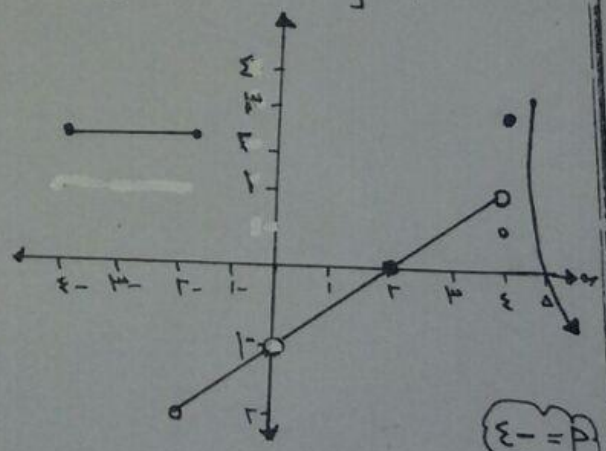
الفروع : أ و هـ و ز و ح صحيحة

مثال شامل

الشكل يمثل ق(س) جد

١) ق(أ) ٢) نها ق(س) (س ← أ⁺) ٣) نها ق(س) (س ← أ⁻) ٤) نها ق(س) (س ← أ)

علماً بأن أ ∈ {-٤، -٣، ٠، ٣، ٤}



أ = -٤

ق(-٤) = ٢

نها ق(س) = ٢ (س ← -٤⁺)

نها ق(س) = -٣.٠ (س ← -٤⁻)

∴ نها ق(س) = -٣.٠ (س ← -٤)

أ = -٣

ق(-٣) = ٢

نها ق(س) = ٢ (س ← -٣⁺)

نها ق(س) = ٢ (س ← -٣⁻)

∴ نها ق(س) = غ.م (س ← -٣)

أ = ٠

ق(٠) = غير معروف

نها ق(س) = -١ (س ← ٠⁺)

نها ق(س) = -١ (س ← ٠⁻)

∴ نها ق(س) = -١ (س ← ٠)

أ = ٣

ق(٣) = صفر

نها ق(س) = صفر (س ← ٣⁺)

نها ق(س) = صفر (س ← ٣⁻)

∴ نها ق(س) = صفر (س ← ٣)

أ = ٤

ق(٤) = ٣

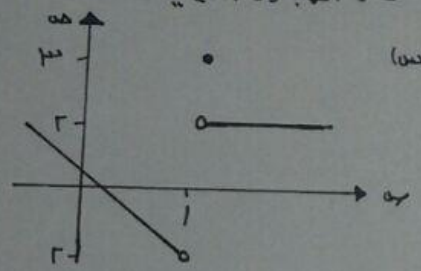
نها ق(س) = غ.م (س ← ٤⁺)

نها ق(س) = ١ (س ← ٤⁻)

∴ نها ق(س) = غ.م (س ← ٤)

وزارة ك:

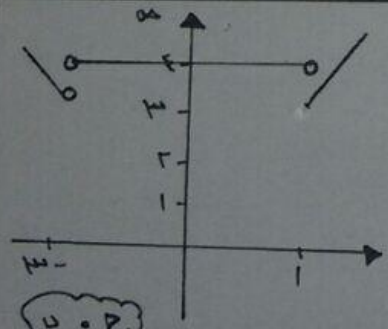
معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل ق(س)



جد نها ق(س) (س ← ١)

أ) ٢ ب) -٢ ج) ٣ د) غ.م

وزارة ٢٠١٦/ش



جد نها ق(س) (س ← -٣⁺)

أ) ٣ ب) ١

ج) ٤ د) غ.م

ج . ب

تمارين

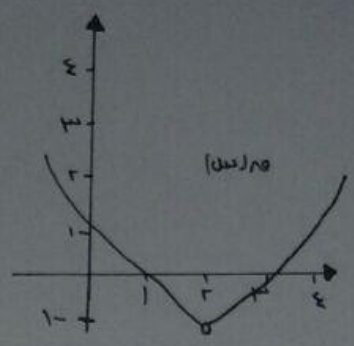
١) معتمداً على الشكل أوجد نها ق(س) س←٢

• الحل

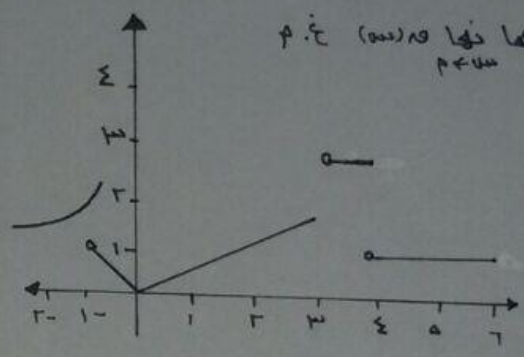
نها ق(س) = س←٢⁻

نها ق(س) = س←٢⁺

∴ نها ق(س) = س←٢



٢) معتمداً على الشكل أوجد قيم أ التي يكون عندها نها ق(س) غ.م س←أ



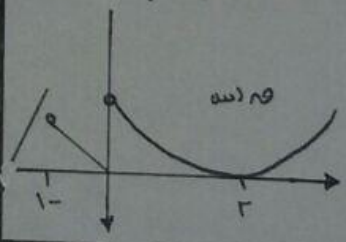
• الحل :

أ = {-١ ، ٣ ، ٤ ، ٦}

٣) جد قيم س التي عندها النهاية غير موجودة

• الحل:

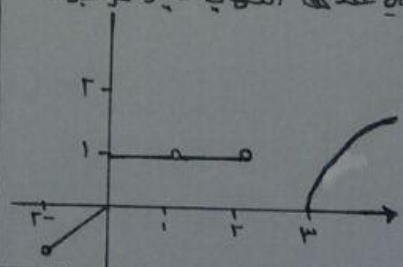
س = {-١ ، ٠}



٤) جد قيم س التي عندها النهاية غير موجودة

• الحل

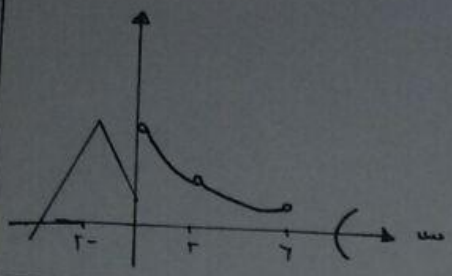
س = {-٢ ، ٠ ، ٢ ، ٣}



٥) أ = {-٢ ، ٠ ، ٢ ، ٦} جد قيم أ التي عندها النهاية غ.م

• الحل

س = {٠ ، ٦}



وزارة ٢٠١٣/ش

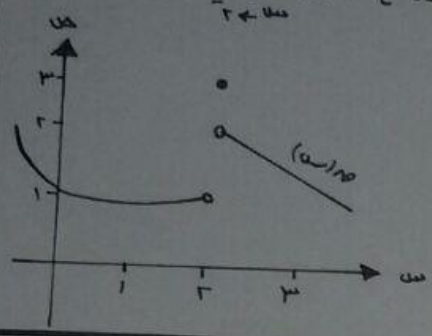
اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على ح ، ما نها ق(س) ؟ س←٢⁻

أ) ٢

ب) ١

ج) ٣

د) غ.م



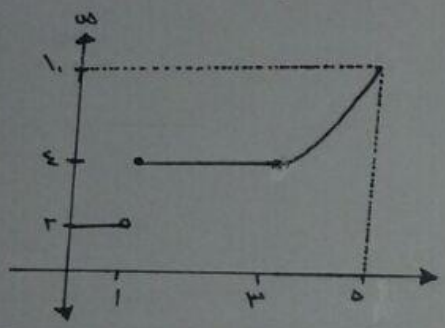
وزارة ٢٠١٤/ش

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س)

جد نها ق(س) س←١⁻

• الحل :

جواب ك: ٣



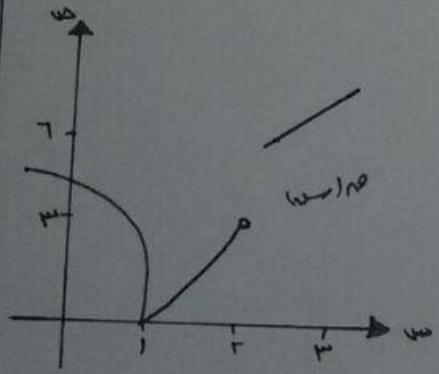
وزارة ٢٠١٤/ش

اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على ح

جد نها ق(س) س←٢⁺

• الحل :

جواب ك: ٦



اعداد : يزن القريوتي

• نظريات في النهايات

سوف نتعرف في هذا الدرس على نظريات تساعدنا على إيجاد النهايات بسرعة وسهولة

نظرية (١) :-

إذا كان أ ، جـ حقيقيين وكان

• ق(س) = جـ فإن $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ ق(س) = جـ

$\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ العدد الثابت = العدد الثابت

الأسئلة :-

١. $\underset{س \leftarrow ٥}{نها}$ ٣ = ٣

٢. $\underset{س \leftarrow ٦}{نها}$ ٥ = ٥

٣. $\underset{س \leftarrow ١٠}{نها}$ ١٠٠ = ١٠٠

٤. $\underset{س \leftarrow ٥}{نها}$ ٩ = ٩

نظرية (٢) :-

إذا كان ق(س) إقتران كثير حدود فإن

$\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ ق(س) = ق(أ)

الأسئلة :

١) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ (س + ٣) = ٢ + ٣ = ٥

٢) $\underset{س \leftarrow ٤}{نها}$ (٢س − ٥) = ٢ × ٤ − ٥ = ٣

٣) $\underset{س \leftarrow ٤}{نها}$ (س^{٢} + س) = (٤)^{٢} + (٤) = ٢٠

٤) $\underset{س \leftarrow -١}{نها}$ (س^{٢} + ٣س − ٥) = (−١)^{٢} + ٣ × (−١) − ٥

= ١ − ٣ − ٥ = −٧

٥) $\underset{س \leftarrow -٢}{نها}$ ٢س^{٣} − ١٥س = ٢ × (−٢)^{٣} − ١٥ × (−٢)

= −١٦ + ٣٠ = ١٤

٦) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ س^{٣} + ٤س^{٢} − ٥س + ٤

= (٢)^{٣} + ٤ × (٢)^{٢} − ٥ × ٢ + ٤ = ٨ + ١٦ − ١٠ + ٤ = ١٨

٧) $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}$ س^{٢} − ٤ = (٣)^{٢} − ٤ = ٩ − ٤ = ٥

٨) $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}}{نها}$ ٤س^{٢} + ١ = ٤ × (½)^{٢} + ١

= ٤ × ¼ + ١ = ١ + ١ = ٢

٩) $\underset{س \leftarrow}{نها}$ ٣س^{٢} + ٢س + ٧ = ٣ × (−١)^{٢} + ٢ × (−١) + ٧

= ٣ − ٢ + ٧ = ٨

١٠) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ س^{٢} + ٥س − ٩ = (٢)^{٢} + ٥ × ٢ − ٩ = ٥

نظرية (٣) :-

إذا كان أ ، ل ، ك ، جـ أعداد حقيقية

وإذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ ق(س) = ل ، $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ هـ(س) = ك

فإن :-

١) $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ ق(س) + هـ(س) = ل + ك

٢) $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ ق(س) − هـ(س) = ل − ك

٣) $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ ق(س) × هـ(س) = ل × ك

٤) $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ جـ ق(س) = جـ × ل

٥) $\left[\underset{س \leftarrow أ}{نها} ق(س)\right]^{ن}$ = ل^{ن}

تذكر

يجب التعويض بالنهاية قبل البدء بالحل

أمثلة :

إذا كان $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = -٤$

جد

١) $\lim_{س \to ٣} ق(س) + هـ(س) = ٥ + (-٤) = ١$

٢) $\lim_{س \to ٣} ق(س) - هـ(س) = ٥ - (-٤) = ٥ + ٤ = ٩$

٣) $\lim_{س \to ٣} ق(س) \times هـ(س) = ٥ \times (-٤) = -٢٠$

٤) $\lim_{س \to ٣} ٢ ق(س) = ٢ \times ٥ = ١٠$

٥) $\left[\lim_{س \to ٣} ق(س)\right]^{ن} = (٥)^{٢} = ٥ \times ٥ = ٢٥$

نهاية الاقترانات :-

نعوض العدد بدلاً من س

بعض الامثلة :-

١) $\lim_{س \to ٢} س - ١ = ٢ - ١ = ١$

٢) $\lim_{س \to ٣} س^{٢} - ١ = (٣)^{٢} - ١ = ٩ - ١ = ٨$

٣) $\lim_{س \to ١} س^{٣} + ٣س = (١)^{٣} + ٣ \times (١) = ١ + ٣ = ٤$

٤) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ٩}{س + ٣} = \frac{(٤)^{٢} - ٩}{٤ + ٣} = \frac{٧}{٧} = ١$

٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٩}{س + ٣} = \frac{(٣)^{٢} - ٩}{٦} = \frac{٠}{٦} = ٠$

٦) $\lim_{س \to ٢} (س^{٣} + ٤س^{٢} - ٥س + ٤)$

• الحل

$\lim_{س \to ٢} (٢)^{٣} + ٤(٢)^{٢} - ٥ \times ٢ + ٤ = ٨ + ١٦ - ١٠ + ٤ = ١٨$

٧) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٣س - ١} + ٧}{س^{٢} - ٥} = \frac{\sqrt{٣ \times ٥ - ١} + ٧}{٢٥ - ٥}$

$= \frac{\sqrt{٩} + ٧}{٢٠} = \frac{٣ + ٧}{٢٠} = \frac{١٠}{٢٠} = \frac{١}{٢}$

٨) $\lim_{س \to -٢} (٣س^{٣} - ١٥س) = ٣ \times (-٢)^{٣} - ١٥ \times (-٢)$

$= ٣ \times -٨ - ١٥ \times -٢$

$= -٢٤ + ٣٠ = ٦$

٩) $\lim_{س \to ٣} (س^{٢} - ٤)^{٣} = ((٣)^{٢} - ٤)^{٣}$

$= (٩ - ٤)^{٣} = (٥)^{٣} = ١٢٥$

١٠) $\lim_{س \to ١} (٣س^{٢} + ٥)(س^{٢} - ٢س + ٣)$

$= (٣ + ٥)((١)^{٢} - ٢ \times ١ + ٣) = ٨ \times ٢ = ١٦$

١١) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{١}{س + ١} + س^{٢} - ١\right) = \frac{١}{٣} + ٤ - ١ = \frac{١}{٣}$

١٢) $\lim_{س \to ٣} (٢س - ٦) = ٢ \times ٣ - ٦ = ٦ - ٦ = صفر$

١٣) $\lim_{س \to ٠} (٣س + ٢)^{٤} = (٣ \times ٠ + ٢)^{٤} = (٢)^{٤} = ١٦$

١٤) $\lim_{س \to -٢} (س^{٣} + ٢س^{٢} - ٩) = (-٢)^{٣} + ٢(-٢)^{٢} - ٩$

$= -٨ + ٨ - ٩ = -٩$

١٥) $\lim_{س \to ٨} (أس + ٥) = ٢١$ جد قيمة أ

• الحل:

$\lim_{س \to ٨} (٨أ + ٥) = ٢١ \Leftarrow ٨أ = ٢١ - ٥$

$\frac{\cancel{٨}أ}{\cancel{٨}} = \frac{١٦}{٨} \Leftarrow أ = ٢$

١٦) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + ٤س + أ}{س + ٣} = ٣$ فجد قيمة أ

• الحل:

$\lim_{س \to ١} \frac{١ + ٤ + أ}{١ + ٣} = ٣ \Leftarrow \frac{٥ + أ}{٤} = ٣$

$٥ + أ = ١٢ \Leftarrow أ = ٧$

واجب

١٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٣س + ١٣} - ٣}{أ + ١} = \frac{١}{٢}$

جد قيمة أ

سؤال شامل :-

اذا كانت $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = -٢$

فأجب عن الاسئلة (١، ٢، ٣، ٤، ٥)

١) $\lim_{س \to ٣} (ق(س) + هـ(س))$

أ) ٣ ب) ٧ ج) ٥ د) ١

٢) $\lim_{س \to ٣} (٢ق(س) - هـ(س))$

أ) ١٣ ب) ٨ ج) ٣ د) ٧

٣) $\lim_{س \to ٣} (٣ق(س) + ٢س)$

أ) ٧ ب) ٢١ ج) ١٧ د) ٦

٤) $\lim_{س \to ٣} (ق(س) \times هـ(س) - س^٢)$

أ) -١٠ ب) -١٩ ج) ١٥ د) -٦

٥) $\lim_{س \to ٣} (٢(ق(س) \div هـ(س)))$

أ) ١٠ ب) ٢,٥ ج) -٥ د) -٢,٥

٦) اذا كانت $\lim_{س \to ٥} ق(س) = ٧$ ، فإن $\lim_{س \to ٥} \sqrt{ق(س) + ٢} =$

أ) ١٧ ب) $\sqrt{١٣}$ ج) ٣ د) ٥

٧) اذا كانت $\lim_{س \to ٢} \sqrt{أس + ٩} = ٥$ فإن أ =

أ) ٨ ب) ١٦ ج) ٢٥ د) -٢

٨) اذا كانت $\lim_{س \to ٦} (٢ق(س) + ٣س) = ٢٠$

فإن $\lim_{س \to ٦} ق(س) =$

أ) ١ ب) ٢ ج) ١٨ د) -١

الإجابات

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
الإجابة	أ	أ	ب	ب	ج	ج	أ	أ

وزارة ٢٠٠٩/ش (٤ علامات)

اذا كانت $\lim_{س \to أ} ق(س) = ٥$ ، فجد

$\lim_{س \to ٣} (٦س ق(س) + ٣)$

* مسائل وتمارين *

إ حسب النهايات التالية

١) $\lim_{س \to ٦} ١٥ = ١٥$

٢) $\lim_{س \to ١} ٥ = ٥$

٣) $\lim_{س \to ٣} س^٢ = (٣)^٢ = ٣ \times ٣ = ٩$

٤) $\lim_{س \to -٤} (٣س^٢ - ٦) = ٣ \times (-٤)^٢ - ٦ = ٣ \times ١٦ - ٦$

$= ٤٨ - ٦ = ٤٢$

٥) $\lim_{س \to ٢} (س^٣ + ٤س^٢ - ٥س + ٤)$

$= (٢)^٣ + ٤ \times (٢)^٢ - ٥ \times ٢ + ٤ = ٨ + ١٦ - ١٠ + ٤$

$= ٨ + ١٦ - ٦ = ١٨$

٦) $\lim_{س \to -٢} (٢س^٣ - ١٥س) = ٢ \times (-٢)^٣ - ١٥ \times (-٢)$

$= ٢ \times -٨ + ٣٠ = -١٦ + ٣٠ = ١٤$

٧) $\lim_{س \to -١} (٣س^٢ + ٢س + ٧) = ٣ \times (-١)^٢ + ٢ \times (-١) + ٧$

$= ٣ \times ١ + (-٢) + ٧ = ١ + ٧ = ٨$

٨) $\lim_{س \to ٣} (س^٢ - ٤)^٣ = ((٣)^٢ - (٤))^٣$

$= (٩ - ٤)^٣ = (٥)^٣ = ١٢٥$

٩) $\lim_{س \to -١} (٣س^٢ + ٥س - ٤) = (٣ \times (-١)^٢ + ٥ \times -١ - ٤)$

$= ٣ \times ١ + (-٥ - ٤) = ٣ - ٩ = -٦$

١٠) $\lim_{س \to ٤} \frac{س + ٤}{٢س - ٦} = \lim_{س \to ٤} \frac{٤ + ٤}{٢ \times ٤ - ٦}$

$= \frac{٨}{٨ - ٦} = \frac{٨}{٢} = ٤$

١١) $\lim_{س \to ١} \frac{٢س - ١}{أ - س} = ١$

واجب

ج: أ = ٢

اعداد : يزن القريوتي

نهاية الجذور الزوجية

خطوات الحل

١) التعويض في النقطة التي تقترب إليها س

وينتج ثلاثة حالات :-

أ. ناتج التعويض موجب ← النهاية موجودة وتساوي العدد الناتج من التعويض

ب. ناتج التعويض سالب ← النهاية غير موجودة

جـ. ناتج التعويض صفر ← نحدد المجال

« خطوات تحديد المجال »

١. نساوي ما داخل الجذر بالصفر

٢. نضع الناتج على خط الأعداد

٣. نحدد الإشارة على خط الأعداد

٤. نأخذ الإشارة من اليمين ومن اليسار.

أمثلة

١) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س+٢} = \sqrt{٢+٢} = \sqrt{٤} = ٢$

٢) $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س+٤} = \sqrt{٤+٥} = \sqrt{٩} = ٣$

٣) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{س+١٨} = \sqrt{-٢+١٨} = \sqrt{١٦} = ٤$

٤) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س+٤} = \sqrt{٣+٤} = \sqrt{٧}$

٥) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س-٥} = \sqrt{٢-٥} = \sqrt{-٣}$ غ.م

٦) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{س-٩} = \sqrt{٤-٩} = \sqrt{-٥}$ غير موجودة

٧) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س-٤} = \sqrt{٣-٤} = \sqrt{-١}$ غير موجودة

٨) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س^٢-٩} = \sqrt{٤-٩} = \sqrt{-٥}$ غ.م

٩) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س-٢} = \sqrt{٢-٢} = \sqrt{٠}$

• الحل :

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = صفر$

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = غ.م$

$\therefore \lim_{س \to ٢} ق(س) = غ.م$

نحدد المجال

س - ٢ = صفر

س = ٢

- - - + + +

٢

١٠) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{س-٤} = \sqrt{٤-٤} = \sqrt{٠}$

• الحل :

$\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = ٠$

$\lim_{س \to ٤^-} ق(س) = غ.م$

$\therefore \lim_{س \to ٤} ق(س) = غ.م$

نحدد المجال

س - ٤ = ٠

س = ٤

- - - + + +

٤

١١) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{٣-س} = \sqrt{٣-٣} = \sqrt{٠}$

• الحل :

$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = غ.م$

$\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = صفر$

$\therefore \lim_{س \to ٣} ق(س) =$ غير موجودة

نحدد المجال

٣ - س = ٠

- س = - ٣

س = ٣

+ + + - - -

٣

نهاية الجذور الفردية

التعويض دائماً وتقبل النتيجة مهما كانت

1) $\lim_{س \to 3} \sqrt[3]{س + 6} = \sqrt[3]{3 + 6} = \sqrt[3]{8} = 2$

2) $\lim_{س \to 1} \sqrt[3]{س + 26} = \sqrt[3]{1 + 26} = \sqrt[3]{27} = 3$

3) $\lim_{س \to -14} \sqrt[3]{س + 6} = \sqrt[3]{-14 + 6} = \sqrt[3]{-8} = -2$

4) $\lim_{س \to -2} \sqrt[3]{س + 2} = \sqrt[3]{-2 + 2} = \sqrt[3]{0} = 0$

5) $\lim_{س \to 3} \sqrt[3]{س^2 - 9} = \sqrt[3]{9 - 9} = \sqrt[3]{0} = 0$

6) $\lim_{س \to -3} \sqrt{4 - س^2} = \sqrt{4 - 3^2} = \sqrt{0}$

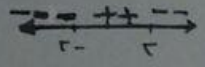
• الحل:

$\lim_{س \to -3} ق(س) = صفر$

نحدد المجال

$4 - س^2 = 0$

$س = 2 ، -2$

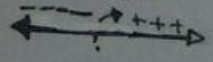


7) $\lim_{س \to 0^+} \sqrt{س} = \sqrt{0}$

$\lim_{س \to 0^+} \sqrt{س} = صفر$

نحدد المجال

$س = 0$



8) $\lim_{س \to \frac{1}{2}^+} \sqrt{2س - 1} = \sqrt{2 \times \frac{1}{2} - 1} = \sqrt{0}$

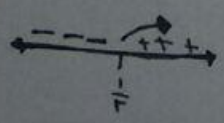
• الحل:

$\lim_{س \to \frac{1}{2}^+} ق(س) = صفر$

نحدد المجال

$2س - 1 = 0$

$س = \frac{1}{2}$



9) $\lim_{س \to 7} \sqrt{7 - س} = \sqrt{7 - 7} = \sqrt{0}$

• الحل:

$\lim_{س \to 7^+} ق(س) = غ.م$

$\lim_{س \to 7^-} ق(س) = 0$

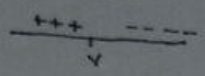
$\therefore \lim_{س \to 7} ق(س) = غ.م$

نحدد المجال

$7 - س = 0$

$-س = -7$

$س = 7$



10) $\lim_{س \to 2} \sqrt{س^2 - 4} = \sqrt{2^2 - 4} = \sqrt{0}$

• الحل:

$\lim_{س \to 2^+} ق(س) = صفر$

$\lim_{س \to 2^-} ق(س) = غ.م$

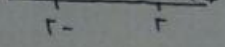
$\therefore \lim_{س \to 2} ق(س) = غ.م$

نحدد المجال

$س^2 - 4 = 0$

$س^2 = 4$

$س = 2 ، -2$



11) $\lim_{س \to 4} \sqrt{س^2 - 16} = \sqrt{4^2 - 16} = \sqrt{0}$

• الحل:

$\lim_{س \to 4^+} ق(س) = 0$

$\lim_{س \to 4^-} ق(س) = غ.م$

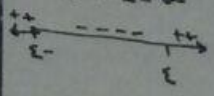
$\therefore \lim_{س \to 4} ق(س) = غ.م$

نحدد المجال

$س^2 - 16 = 0$

$س^2 = 16$

$س = 4 ، -4$



15) $\lim_{س \to 3} \sqrt{9 - س^2} = \sqrt{9 - 3^2} = \sqrt{0}$

• الحل:

$\lim_{س \to 3^+} ق(س) = غ.م$

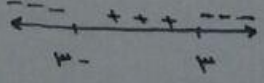
$\lim_{س \to 3^-} ق(س) = صفر$

$\therefore \lim_{س \to 3} ق(س) = غ.م$

نحدد المجال

$9 - س^2 = 0$

$س^2 = 3 ، -3$



نهاية الاقتران المتشعب

هنا: اذا كانت النقطة (عادية) نعوض في القاعدة المقابلة لها.

أما اذا كانت النقطة (تعوط) نجد النهاية من اليمين واليسار.

تمارين

1) ليكن ق(س) = { ٣س^٢ ، ١ ≤ س ≤ ٣ ؛ ٢ − س ، ٣ ≤ س < ٥ }

فجد

أ) نها ق(س) = ٣ × (٢)^٢ = ٣ × ٤ = ١٢ (س ← ٢)

ب) نها ق(س) (س ← ٣) = { نها ق(س) (س ← ٣+) = −١ ؛ نها ق(س) (س ← ٣−) = ٢٧ }

∴ نها ق(س) (س ← ٣) = غ.م

جـ) نها ق(س) (س ← ١+) = ٣ × (١)^٢ = ٣ × ١ = ٣

د) نها ق(س) (س ← ٥−) = ٢ − ٥ = −٣

2) ليكن ق(س) = { س^٢ ، س ≠ ٣ ؛ ٥س ، س = ٣ }

جد نها ق(س) (س ← ٣)

• الحل:

= (٣)^٢ = ٣ × ٣ = ٩

* ماذا لو طلب ق(٣) = ٥ × ٣ = ١٥

3) اذا كان ق(س) = { ٢س^٢ + ٥ ، س < ٣ ؛ ١٧ ، ٣ ≤ س ≤ ٦ ؛ ٣ − س ، س > ٦ }

* فما قيمة كل من النهايات التالية إن وجدت

١. نها ق(س) (س ← ١) = ٣ − (١) = ٢

٢. نها ق(س) (س ← ٣) = { نها ق(س) (س ← ٣+) = ١٧ ؛ نها ق(س) (س ← ٣−) = ٢ × ٩ + ٥ = ١٨ + ٥ = ٢٣ }

∴ نها ق(س) (س ← ٣) = غ.م

٣. نها ق(س) (س ← ٥) = ١٧

٤. نها ق(س) (س ← ٦) = { نها ق(س) (س ← ٦+) = ٣ − ٦ = −٣ ؛ نها ق(س) (س ← ٦−) = ١٧ }

∴ نها ق(س) (س ← ٦) = غ.م

4) ليكن ق(س) = { س^٢ − ١ ، س < ٢ ؛ ٥ / √(س + ٧) ، س ≥ ٢ ؛ ٥ ، س = ٢ }

فجد :-

أ) نها ق(س) (س ← ٢) = { نها ق(س) (س ← ٢+) = ٥ / √(٢ + ٧) = ٥/٣ ؛ نها ق(س) (س ← ٢−) = ٤ − ١ = ٣ }

∴ نها ق(س) (س ← ٢) = غ.م

ب) نها ق(س) (س ← ٩) = ٥ / √(٩ + ٧) = ٥ / √١٦ = ٥/٤

جـ) نها ق(س) (س ← ٢−) = (٢)^٢ − ١ = ٤ − ١ = ٣

أيجاد الثوابت :

١١ ق(س) = { أ س + ٤ ، س ≤ ١ ؛ ٣س + ٥ ، س > ١ }

نها ق(س) موجودة ، جد أ
س←١

• الحل:

نها ق(س) = نها ق(س)
س←١⁺ س←١⁻

أ + ٤ = ٣ + ٥

أ + ٤ = ٧ ← أ = ٣

١٢ ق(س) = { س² + ٥ ، س < ٣ ؛ ٢٠ ، س = ٣ ؛ أ س + ٢ ، س > ٣ }

وكانت نها ق(س) موجودة ، فما قيمة أ
س←٣

الحل

نها ق(س) = نها ق(س)
س←٣⁺ س←٣⁻

أ(٣) + ٢ = (٣)² + ٥

٣أ + ٢ = ١٤ ← ٣أ/٣ = ١٢/٣ ← أ = ٤

١٣ إذا كان ق(س) = { ٥س² − ل ، س < ٢ ؛ ل س + ٢ ، س > ٢ }

وكانت نها ق(س) موجودة فما قيمة الثابت ل
س←٢

• الحل:

نها ق(س) = نها ق(س)
س←٢⁺ س←٢⁻

٢ل + ٤ = ٥ × (٢)² − ل

٢ل + ٤ = ٢٠ − ل

٢ل + ل = ٢٠ − ٤ ← ٣ل/٣ = ١٦/٣ ← ل = ٦

١٤ ق(س) = { أ س² + ١ ، س ≤ ٢ ؛ ٢س + ب ، س > ٢ }

نها ق(س) = ٦ جد ← قيمة (أ+ب)
س←٢

• الحل

نها ق(س) = نها ق(س)
س←٢⁺ س←٢⁻

نها (أ س² + ١) = ٦ ← ٤أ + ١ = ٦ ← أ = ٤
س←٢⁺

نها (٢س + ب) = ٦ ← ٤ + ب = ٦ ← ب = ٢
س←٢⁻

وزارة ٢٠١١/ص

١) اذا كان ق(س) = { س² + ٧ ، س ≤ ٣ ؛ ٥ ، س > ٣ } فإن نها ق(س)
س←٥

أ) ٥ ب) ٣٢ ج) ٣ د) غير موجودة

وزارة ٢٠١١/ص

٢) اذا كان ق(س) = { ٧ ، س < ٠ ؛ ٥ ، س = ٠ ؛ ٣ ، س > ٠ } فإن نها ق(س)
س←٠

أ) ٣ ب) ٥ ج) ٧ د) غير موجودة

وزارة ٢٠١١/ص

٣) اذا كان ق(س) = { س² + ٤ ، س < ٢ ؛ ١ ، س = ٢ ؛ ل س + ٦ ، س > ٢ }

فما قيمة ل التي تجعل نها ق(س) موجودة .
س←٢

وزارة ٢٠١٢/ص

٤) اذا كان ق(س) = { م س² − ٥ ، س < ٥ ؛ ٢٠ ، س = ٥ ؛ ٨س + ٥ ، س > ٥ }

فما قيمة م التي تجعل نها ق(س) موجودة
س←٥

وزارة ٢٠١٣/ص

٥) اذا كان ق(س) = { س³ ، س ≤ ٢ ؛ م س ، س > ٢ }

فما قيمة م التي تجعل نها ق(س) موجودة .
س←٢

السؤال	١	٢	٣	٤	٥
الإجابة	ب	ج	١	٢	٤

طرق إيجاد النهايات

* التعويض المباشر :

أمثلة : جد النهايات التالية :

1) $\lim_{س \to 2} س^2 = 4$

2) $\lim_{س \to 1} \frac{س^2+1}{س+3} = \frac{2}{4}$

3) $\lim_{س \to 5} س^3 = 125$

4) $\lim_{هـ \to 4} هـ^2+1 = 4^2+1$

5) $\lim_{س \to 3} 9 = 9$

6) $\lim_{س \to 2} \frac{0}{س+1} = 0$

7) $\lim_{س \to 1} \frac{س-1}{س+1} = \frac{0}{2} = 0$

8) $\lim_{س \to 1} \frac{س+1}{س-1} = \frac{2}{0}$ غ.م

9) $\lim_{س \to 1} \frac{س^2-1}{س-1} = \frac{0}{0}$

لا تقبل

قاعدة اذا كان ناتج التعويض $\frac{صفر}{صفر}$

• نحلل ← نختصر ← نعوض

طرق التحليل :

1) إخراج عامل مشترك $أس + أص = أ(س+ص)$

2) فرق بين مربعين $س^2 - ص^2 = (س-ص)(س+ص)$

3) العبارة التربيعية $س^2 - 5س + 6 = (س-2)(س-3)$

4) توحيد المقامات في الكسور

5) الضرب بالمرافق « في الجذور »

الأسئلة :

1) $\lim_{س \to 1} \frac{2س-2}{س-1} = \frac{0}{0}$ لا تقبل «نعوض ٢٢»

• الحل

$= \lim_{س \to 1} \frac{2\cancel{(س-1)}}{\cancel{س-1}} = 2$ إخراج عامل مشترك

2) $\lim_{س \to 0} \frac{5س^2-س}{5س} = \frac{0}{0}$ لا تقبل «نعوض»

• الحل :

$= \lim_{س \to 0} \frac{\cancel{س}(5س-1)}{5\cancel{س}} = \frac{-1}{5}$

3) $\lim_{س \to 2} \frac{س^2-4}{س-2} = \frac{0}{0}$ لا تقبل

• الحل

$\lim_{س \to 2} \frac{\cancel{(س-2)}(س+2)}{\cancel{س-2}} = \lim_{س \to 2} س+2 = 4$

4) $\lim_{س \to 5} \frac{5-س}{س^2-25} = \frac{0}{0}$ لا تقبل

• الحل :-

$\lim_{س \to 5} \frac{\overset{-1}{\cancel{5-س}}}{(س+5)\cancel{(س-5)}} = \frac{-1}{10}$

5) $\lim_{س \to 2} \frac{س^2-5س+6}{س-2} = \frac{0}{0}$ لا تقبل

• الحل :

$\lim_{س \to 2} \frac{\cancel{(س-2)}(س-3)}{\cancel{س-2}} = \lim_{س \to 2} (س-3) = -1$

6) $\lim_{س \to 4} \frac{س^2-7س+12}{س-4} = \frac{0}{0}$ لا تقبل

• الحل

$\lim_{س \to 4} \frac{(س-3)\cancel{(س-4)}}{\cancel{(س-4)}} = \lim_{س \to 4} (س-3) = 1$

7) $\lim_{س \to 1} \frac{س^4-1}{س-1} = \frac{0}{0}$ لا تقبل

• الحل

$\lim_{س \to 1} \frac{(س^2-1)(س^2+1)}{س-1} = \frac{\cancel{(س-1)}(س+1)(س^2+1)}{\cancel{س-1}} = 4$

8) $\lim_{س \to 2} \frac{س^2-2س}{2س-4} = \frac{0}{0}$ لا تقبل

• الحل

$\lim_{س \to 2} \frac{س\cancel{(س-2)}}{2\cancel{(س-2)}} = \lim_{س \to 2} \frac{س}{2} = \frac{2}{2} = 1$

9) $\lim_{س \to 4} \frac{س^2-16}{س-4}$ ، $س \neq 4$

• الحل :

$= \lim_{س \to 4} \frac{\cancel{(س-4)}(س+4)}{\cancel{(س-4)}} = \lim_{س \to 4} س+4 = 8$

١٠) $\underset{س \to ١}{نها} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} = \frac{صفر}{صفر}$ لا تقبل

• الحل :

$\underset{س \to ١}{نها} \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)} = \underset{س \to ١}{نها} س + ١ = ٢$

١١) $\underset{س \to ٢}{نها} \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + ٣س - ١٠} = \frac{صفر}{صفر}$ لا تقبل

• الحل

$\underset{س \to ٢}{نها} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س + ٥)(س - ٢)} = \underset{س \to ٢}{نها} \frac{س + ٢}{س + ٥} = \frac{٤}{٧}$

١٢) $\underset{س \to ٢}{نها} \frac{٢س^٢ - ٣س - ٢}{س - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$

• الحل :

$\underset{س \to ٢}{نها} \frac{(٢س + ١)(س - ٢)}{(س - ٢)} = \underset{س \to ٢}{نها} ٢س + ١ = ٢ \times ٢ + ١ = ٥$

١٣) $\underset{س \to -٤}{نها} \frac{س^٢ + ٣س - ٤}{س + ٤} = \frac{صفر}{صفر}$

• الحل :

$\underset{س \to -٤}{نها} \frac{(س - ١)(س + ٤)}{(س + ٤)} = \underset{س \to -٤}{نها} س - ١ = -٥$

١٤) $\underset{س \to ٤}{نها} \frac{٣س - ١٢}{س^٢ - ١٦} = \frac{صفر}{صفر}$

• الحل

$\underset{س \to ٤}{نها} \frac{٣(س - ٤)}{(س - ٤)(س + ٤)} = \underset{س \to ٤}{نها} \frac{٣}{س + ٤} = \frac{٣}{٤ + ٤} = \frac{٣}{٨}$

١٥) $\underset{س \to ٣}{نها} \frac{٢س^٢ - ٦س}{س - ٣} = \frac{صفر}{صفر}$ لا تقبل

• الحل

$\underset{س \to ٣}{نها} \frac{٢س(س - ٣)}{(س - ٣)} = \underset{س \to ٣}{نها} ٢س = ٢ \times ٣ = ٦$

إخراج عامل مشترك

١٦) $\underset{س \to ٢}{نها} \frac{س^٣ - ٤س}{س^٢ - س - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ لا تقبل

• الحل :

$\underset{س \to ٢}{نها} \frac{س(س^٢ - ٤)}{(س - ١)(س + ٢)}$ في البسط اخراج عامل مشترك

$\underset{س \to ٢}{نها} \frac{س(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ١)(س + ٢)}$ في المقام تحليل عبارة تربيعية

$= \underset{س \to ٢}{نها} \frac{س(س - ٢)}{(س - ١)} = \frac{٢ \times (٢ - ٢)}{(٢ - ١)} = \frac{٢ \times ٠}{١} = \frac{٠}{١} = ٠$

أي $\frac{صفر}{عدد} = صفر$

١٧) $\underset{س \to -٣}{نها} \frac{س^٢ + ٣س}{س + ٣} = \frac{٠}{٠}$ لا تقبل

• الحل :

$\underset{س \to -٣}{نها} \frac{س(س + ٣)}{(س + ٣)} = \underset{س \to -٣}{نها} س = -٣$

١٨) $\underset{س \to ٦}{نها} \frac{س^٢ - ٥س - ٦}{٢س - ١٢}$

• الحل :

$\underset{س \to ٦}{نها} \frac{(س - ٦)(س + ١)}{٢(س - ٦)} = \underset{س \to ٦}{نها} \frac{س + ١}{٢} = \frac{٧}{٢}$

١٩) $\underset{س \to ٠}{نها} \frac{س^٤ + ٣س^٢}{س^٣ - ٤س^٢} = \frac{٠}{٠}$ لا تقبل

• الحل :

$\underset{س \to ٠}{نها} \frac{س^٢(س^٢ + ٣)}{س^٢(س - ٤)} = \underset{س \to ٠}{نها} \frac{(س^٢ + ٣)}{(س - ٤)} = \frac{-٣}{٤}$

٢٠) $\underset{س \to ٤}{نها} \frac{س^٢ - ١٦}{٢س^٢ - ٨س} = \frac{صفر}{صفر}$ لا تقبل

• الحل

$\underset{س \to ٤}{نها} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{٢س(س - ٤)} = \underset{س \to ٤}{نها} \frac{س + ٤}{٢س} = \frac{٨}{٨} = ١$

٣١) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+3)^2 - 9}{\text{س}} = \frac{0}{0}$ لا تقبل

• الحل :

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+3-3)(\text{س}+3+3)}{\text{س}}$

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{س}}(\text{س}+6)}{\cancel{\text{س}}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} (\text{س}+6) = 6$

٣٢) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-2)^2 - 1}{\text{س}-1} = \frac{0}{0}$ لا تقبل

• الحل

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-2-1)(\text{س}-2+1)}{\text{س}-1}$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-3)\cancel{(\text{س}-1)}}{\cancel{\text{س}-1}} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} (\text{س}-1) = -2$

• طريقة أخرى للحل

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-2)^2 - 1}{\text{س}-1}$

$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^2 - 4\text{س} + 4) - 1}{\text{س}-1}$

$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 - 4\text{س} + 3}{\text{س}-1} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-3)\cancel{(\text{س}-1)}}{\cancel{\text{س}-1}}$

$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} (\text{س}-3) = -2$

٣٣) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^2+1)^2 - 1}{\text{س}^2 - 1} = \frac{0}{0}$

• الحل

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^2+1+2)(\text{س}^2+1-2)}{(\text{س}^2+1)(\text{س}^2-1)}$

$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^2+3)\cancel{(\text{س}^2-1)}}{(\text{س}^2+1)\cancel{(\text{س}^2-1)}} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2+3}{\text{س}^2+1} = \frac{4}{2} = 2$

٣٤) قيمة $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-3)^2 - 9}{\text{س}}$ تساوي

أ) -3 ب) صفر ج) -6 د) 9

• الحل :

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-3-3)(\text{س}-3+3)}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-6)\times\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}}$

$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} (\text{س}-6) = 0 - 6 = -6$

• الجواب ج

٣٥) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^2+1) - 81}{1 - \text{س}} = \frac{0}{0}$ لا تقبل

• الحل :

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^2+1-9)(\text{س}^2+1+9)}{1-\text{س}} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-8)(\text{س}+10)}{\cancel{1-\text{س}}}$

$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} -(\text{س}+10) = -18$

٣٦) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2+\text{س}-6}{2-\text{س}}$ تساوي

أ) -5 ب) 1 ج) 5 د) -1

• الحل:

$\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-2)(\text{س}+3)}{(2-\text{س})} = \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} -(\text{س}+3) = -5$

• الجواب : أ

٣٧) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{3\text{س}^2}{\text{س}^2-\text{س}-2}$ تساوي

أ) 4 ب) -1 ج) $-\frac{1}{2}$ د) 2

• الحل : تعويض مباشر

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{3\times(1)^2}{(1)^2-(1)-2} = \frac{3}{1-1-2} = \frac{3}{-3} = -1$

• الجواب : ب

٣٨) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{(3\text{س}+1)^2 - 25}{\text{س}-2}$ تساوي

أ) 20 ب) -4 ج) 14 د) صفر

• الحل :

$\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{(3\text{س}+1-5)(3\text{س}+1+5)}{\text{س}-2}$

$= \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{(3\text{س}-4)(3\text{س}+6)}{\text{س}-2}$

$= \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{3\cancel{(\text{س}-2)}(3\text{س}+6)}{\cancel{\text{س}-2}} = \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} 3(3\text{س}+6)$

$= 3(3\times 2+6) = 3\times 10 = 30$

٣٩) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-1)^4 - 16}{\text{س}-3} = 32$

٣٠) $\lim_{س \to ٥} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٥}}{س - ٥} = \frac{٠}{٠}$ لا تقبل

• الحل: توحيد

$\lim_{س \to ٥} \frac{\frac{٥ - س}{٥س}}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{٥ - س}{س - ٥} \times \lim_{س \to ٥} \frac{١}{٥س}$

$= \lim_{س \to ٥} -١ \times \lim_{س \to ٥} \frac{١}{٥س} = \frac{-١}{٢٥}$

٣١) $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{٣+س} - \frac{١}{٣}}{س} = \frac{٠}{٠}$ لا تقبل

• الحل:

$\lim_{س \to ٠} \frac{٣ - (٣+س)}{س \times ٣(س+٣)} \times \lim_{س \to ٠}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣ - ٣ - س}{س \times ٣(س+٣)} = \lim_{س \to ٠} \frac{-\cancel{س}}{\cancel{س} \times ٣س + ٩}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-١}{٣س + ٩} = \frac{-١}{٩}$

٣٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س+٣} - \frac{١}{٤}}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$ لا تقبل

• الحل

$\lim_{س \to ١} \frac{\frac{٤ - (س+٣)}{٤(س+٣)}}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{٤ - (س+٣)}{(س-١) \times ٤(س+٣)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٤ - س - ٣}{(س-١) \times ٤(س+٣)} = \frac{\cancel{١ - س}^{-١}}{\cancel{(س-١)} \times ٤(س+٣)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{-١}{٤(س+٣)} = \frac{-١}{١٦}$

٣٣) $\lim_{س \to -٣} \frac{\frac{١}{س+٣} + ١}{س + ٣} = \frac{٠}{٠}$ لا تقبل

• الحل:

$\lim_{س \to -٣} \frac{\frac{١ + س + ٣}{س + ٣}}{س + ٣} = \lim_{س \to -٣} \frac{\cancel{س + ٣}}{\cancel{(س+٣)}(س+٣)}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{١}{س + ٣} = \frac{١}{-٣ + ٣} = \frac{١}{-١} = -١$

٣٤) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{٣}{س+٣}}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$ لا تقبل

• الحل:

$\lim_{س \to ١} \frac{\frac{(س+٣) - ٣(س+١)}{(س+١)(س+٣)}}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{(س+٣) - ٣س - ٣}{(س+١)(س+٣)(س-١)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\overset{(-١)}{\cancel{-س + ١}}}{(س+١)(س+٣)(\cancel{س-١})} = \lim_{س \to ١} \frac{-١}{(س+١)(س+٣)}$

$= \frac{-١}{٢ \times ٤} = \frac{-١}{٨}$

٣٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{٣}{س-٣} + \frac{٤}{س+٦}}{س} = \frac{٠}{٠}$ لا تقبل

• الحل:

$\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{٣(س+٦) + ٤(س-٣)}{(س-٣)(س+٦)}}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٣س + \cancel{١٨} + ٤س \cancel{- ١٢}}{(س-٣)(س+٦)س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\cancel{٦س}}{(س-٣)(س+٦)\cancel{س}} = \lim_{س \to ٠} \frac{٦}{(س-٣)(س+٦)} \Leftarrow$

$\frac{٦}{-١٨} = \frac{-١}{٣}$

٣٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{٢} - \frac{١}{س}}{س - ٢} = \frac{٠}{٠}$

• الحل:

$\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{س - ٢}{٢س}}{س - ٢} = \frac{(\cancel{س - ٢})}{(٢س)(\cancel{س - ٢})} = \lim_{س \to ٢} \frac{١}{٢س} = \frac{١}{٤}$

٣٧) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{س}{س-٣} - \frac{س+٢}{س-١}}{س - ٤} = \frac{٠}{٠}$ لا تقبل

• الحل:

$\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{س(س-١) - (س+٢)(س-٣)}{(س-٣)(س-١)}}{(س-٤)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س(س-١) - (س^٢ - ٦)}{(س-٣)(س-١)(س-٤)}$

$\lim_{س \to ٤} \frac{\cancel{س^٢} - س - \cancel{س^٢} + ٦}{(س-٣)(س-١)(س-٤)} = \lim_{س \to ٤} \frac{\overset{-١}{\cancel{-س + ٤}}}{(س-٣)(س-١)\cancel{(س-٤)}}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{-١}{(س-٣)(س-١)} = \frac{-١}{(٤-٣)(٤-١)} = \frac{-١}{٦}$

الضرب بالمرافق

مرافق $(\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ص}})$ هو $(\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}})$

وحاصل ضربهما هو س - ص

الأسئلة:

1) $\lim_{\text{س}\to 5} \frac{\sqrt{\text{س}-1} - 2}{\text{س} - 5} = \frac{\sqrt{5-1} - 2}{5-5} = \frac{2-2}{5-5} = \div$

• الحل:

$\lim_{\text{س}\to 5} \frac{\sqrt{\text{س}-1} - 2}{\text{س} - 5} \times \frac{\sqrt{\text{س}-1} + 2}{\sqrt{\text{س}-1} + 2}$

$= \lim_{\text{س}\to 5} \frac{(\text{س}-1-4)}{\text{س} - 5} \times \frac{1}{\sqrt{\text{س}-1} + 2}$

$= \lim_{\text{س}\to 5} \frac{\cancel{\text{س}-5}}{\cancel{\text{س}-5}} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

2) $\lim_{\text{س}\to 3} \frac{3 - \sqrt{\text{س}+1}}{\text{س} - 3} = \div$

• الحل

$\lim_{\text{س}\to 3} \frac{3 - \sqrt{\text{س}+1}}{\text{س} - 3} \times \frac{3 + \sqrt{\text{س}+1}}{3 + \sqrt{\text{س}+1}}$

$\lim_{\text{س}\to 3} \frac{4 - (\text{س}+1)}{\text{س} - 3} \times \frac{1}{4}$

$\lim_{\text{س}\to 3} \frac{4 - \text{س} - 1}{\text{س} - 3} \times \frac{1}{4} = \lim_{\text{س}\to 3} \frac{(-\cancel{\text{س}-3})}{\cancel{\text{س}-3}} \times \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}$

3) $\lim_{\text{س}\to 9} \frac{\text{س} - 9}{\sqrt{\text{س}} - 3} = \div$ لا تقبل

• الحل:

$\lim_{\text{س}\to 9} \frac{\text{س} - 9}{\sqrt{\text{س}} - 3} \times \frac{\sqrt{\text{س}} + 3}{\sqrt{\text{س}} + 3} = \lim_{\text{س}\to 9} \frac{\text{س} - 9}{\text{س} - 9} \times \sqrt{\text{س}} + 3$

$\lim_{\text{س}\to 9} \frac{\cancel{\text{س}-9}}{\cancel{\text{س}-9}} \times 6 = 6$

4) $\lim_{\text{س}\to 4} \frac{\sqrt{\text{س}} - 2}{\text{س} - 4} = \div$ لا تقبل

• الحل:

$\lim_{\text{س}\to 4} \frac{\sqrt{\text{س}} - 2}{\text{س} - 4} \times \frac{\sqrt{\text{س}} + 2}{\sqrt{\text{س}} + 2} = \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\cancel{\text{س}-4}}{\cancel{\text{س}-4}} \times \frac{1}{\sqrt{\text{س}} + 2}$

$= \frac{1}{4}$

5) $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}^2}{\sqrt{\text{س}^2+4} - 2} = \div$ لا تقبل

• الحل

$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}^2}{\sqrt{\text{س}^2+4} - 2} \times \frac{\sqrt{\text{س}^2+4} + 2}{\sqrt{\text{س}^2+4} + 2}$

$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\cancel{\text{س}^2}}{\cancel{\text{س}^2+4-4}} \times \frac{\sqrt{\text{س}^2+4} + 2}{1} = \lim_{\text{س}\to 0} \sqrt{\text{س}^2+4} + 2 = 4$

6) $\lim_{\text{س}\to 7} \frac{\sqrt{\text{س}+2} - 3}{\text{س} - 7} = \div$ لا تقبل

• الحل:

$\lim_{\text{س}\to 7} \frac{\sqrt{\text{س}+2} - 3}{\text{س} - 7} \times \frac{\sqrt{\text{س}+2} + 3}{\sqrt{\text{س}+2} + 3}$

$= \lim_{\text{س}\to 7} \frac{\text{س}+2-9}{\text{س} - 7} \times \frac{1}{\sqrt{\text{س}+2} + 3}$

$= \lim_{\text{س}\to 7} \frac{\cancel{\text{س}-7}}{\cancel{\text{س}-7}} \times \frac{1}{\sqrt{\text{س}+2} + 3} = \lim_{\text{س}\to 7} \frac{1}{\sqrt{\text{س}+2} + 3} = \frac{1}{6}$

7) $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\sqrt{\text{س}+4} - 2}{\text{س}} = \div$ لا تقبل

الحل:

$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\sqrt{\text{س}+4} - 2}{\text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{س}+4} + 2}{\sqrt{\text{س}+4} + 2}$

$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}+4-4}{\text{س}} \times \frac{1}{\sqrt{\text{س}+4} + 2}$

$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}} \times \frac{1}{\sqrt{\text{س}+4} + 2} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{1}{\sqrt{\text{س}+4} + 2} = \frac{1}{4}$

8) $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\sqrt{\text{س}+1} - 1}{\text{س}} = \div$ لا تقبل.

الحل:

$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\sqrt{\text{س}+1} - 1}{\text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{س}+1} + 1}{\sqrt{\text{س}+1} + 1} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}+1-1}{\text{س}} \times \frac{1}{\sqrt{\text{س}+1} + 1}$

$= \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}} \times \frac{1}{\sqrt{\text{س}+1} + 1} = \frac{1}{2}$

٩) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+٩} - ٣}{س^٢ + ٢س} = \frac{٠}{٠}$ لا تقبل

• الحل

$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+٩} - ٣}{س^٢ + ٢س} \times \frac{\sqrt{س+٩} + ٣}{\sqrt{س+٩} + ٣}$

$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س + \cancel{٩} - \cancel{٩}}{س^٢ + ٢س} \times \frac{١}{\sqrt{س+٩} + ٣}$

$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\cancel{س}}{\cancel{س}(س+٢)} \times \frac{١}{\sqrt{س+٩} + ٣} = \frac{١}{٩}$

١٠) $\lim\limits_{س \to -٣} \frac{\sqrt{٦-س} - ٣}{س + ٣} = \frac{٠}{٠}$

• الحل

$\lim\limits_{س \to -٣} \frac{\sqrt{٦-س} - ٣}{س+٣} \times \frac{\sqrt{٦-س} + ٣}{\sqrt{٦-س} + ٣}$

$= \lim\limits_{س \to -٣} \frac{٦ - س - ٩}{س + ٣} \times \frac{١}{\sqrt{٦-س} + ٣}$

$= \lim\limits_{س \to -٣} \frac{-٣ - س}{س + ٣} \times \frac{١}{\sqrt{٦-س} + ٣}$

$= \lim\limits_{س \to -٣} \frac{-\cancel{(٣+س)}}{\cancel{س+٣}} \times \frac{١}{\sqrt{٦-س} + ٣}$

$= -١ \times \frac{١}{٦} = -\frac{١}{٦}$.

١١) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤-س} - \sqrt{س}}{٢ - س} = \frac{٠}{٠}$

• الحل :

$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤-س} - \sqrt{س}}{٢ - س} \times \frac{\sqrt{٤-س} + \sqrt{س}}{\sqrt{٤-س} + \sqrt{س}}$

$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{٤ - س - س}{٢ - س} \times \frac{١}{\sqrt{٤-س} + \sqrt{س}}$

$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{٤ - ٢س}{٢ - س} \times \frac{١}{\sqrt{٢} + \sqrt{٢}}$

$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{٢\cancel{(٢-س)}}{\cancel{(٢-س)}} \times \frac{١}{٢\sqrt{٢}} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

واجب

١. $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س}} =$

٢. $\lim\limits_{س \to ٢} \left(\frac{١}{س - ٢} - \frac{٤}{س^٢ - ٤} \right) = \frac{١}{٤}$

تمرين عامة :

١. $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(٢س - ٥)^٢}{٣س - ٩}$

٢. اذا كانت $\lim\limits_{س \to ٨} (م س + ٥) = ٢١$ جد قيمة م

٣. اذا كانت $\lim\limits_{س \to ٣} (٦ - م س) = ١٢$ جد قيمة م

٤. إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٦$ فإن قيمة $\lim\limits_{س \to ٢} \left(\frac{١}{٢} ق(س) - س^٢ \right)$

٥. $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{٦ - ٣س}$

٦. اذا كانت $\lim\limits_{س \to -١} س\, ق(س) = ٦$ فان $\lim\limits_{س \to -١} \left((ق(س))^٢ + ٣س - ١ \right)$

٧. اذا كانت $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٣$ ، $\lim\limits_{س \to ٢} هـ(س) = ٥$

فإن :

١. $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{٢ق(س) + ١}{هـ(س)}$

٢. $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٣هـ(س) + ١}}{ق(س) + هـ(س)}$

٨. اذا كانت $ق(س) = س^٣$ فجد

$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢}$

أسئلة سنوات سابقة

القسم الاول:

ضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة :-

١) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{٣س^٢ - ٦س}{س - ٢}$ تساوي (٢٠٠٨/ شتوية)

أ) صفر ب) ٣ ج) ٦ د) غير موجودة

(٢٠٠٨/ صيفية)

٢) اذا كان ل عدداً ثابتاً وكانت $\lim\limits_{س \to ٢} (س + ل) = ٦$ ؛ فما قيمة الثابت ل

أ) ٨ ب) ٦ ج) ٤ د) ٣

(٢٠٠٨/ صيفية)

٣) $\lim\limits_{س \to -١} (س^٣ - ٢)^٢$ تساوي

أ) -٦ ب) -٣ ج) ١ د) ٩

(٢٠٠٩/ صيفية)

٤) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ١}{س - ١}$ تساوي

أ) ٣,٥ ب) ٤ ج) ٥ د) ١٠

٥) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٣}{١ - س}$ تساوي

أ) ٣ ب) ٦ ج) -٣ د) -٦

٦) إذا علمت أن $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٤$ ؛ فإن $\lim\limits_{س \to ٢} (س\, ق(س) - ٣)$ تساوي

أ) ١ ب) ٢ ج) ٥ د) ١٣

(٢٠١١/ شتوية)

٧) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٣}{س - ١}$ تساوي

أ) ٢ ب) ٣ ج) -٢ د) ٤

٨) إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٥} ق(س) = ٣$ ؛ $\lim\limits_{س \to ٥} ل(س) = -١$ فإن $\lim\limits_{س \to ٥} (ق(س) + ل(س))$ تساوي (٢٠١١/ شتوية)

أ) ٢ ب) ٤ ج) -٢ د) -٤

(٢٠١١/ صيفية)

٩) اذا كانت $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) = ٤$ ؛ $\lim\limits_{س \to ٣} س\, ق(س) =$

أ) ٧ ب) ٩ ج) ١٢ د) ١٦

(٢٠١٢/ شتوية)

١٠) اذا كان $ق(س) = \sqrt{٢ - س}$ فإن $\lim\limits_{س \to -٢} ق(س) =$

أ) صفر ب) ٢ ج) ٤ د) غ.م

(٢٠١٣/ شتوية)

١١) اذا كانت $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) = ٢$ ؛ $\lim\limits_{س \to ٣} هـ(س) = ١$ فإن $\lim\limits_{س \to ٣} (س\, ق(س) + هـ^٢(س))$ تساوي

أ) ٧ ب) ١٠ ج) ٥ د) ٣

(٢٠١٣/ صيفية)

١٢) اذا كانت $\lim\limits_{س \to ٥} ق(س) = ٤$ ؛ $\lim\limits_{س \to ٥} هـ(س) = -٣$ فما قيمة $\lim\limits_{س \to ٥} (ق(س) - هـ(س))$ تساوي

أ) ٧ ب) ١ ج) ٥ د) -٥

(٢٠١٤/ صيفية)

١٣) $\lim\limits_{س \to ١٦} \sqrt{س}$ تساوي

أ) ٨ ب) -٤ ج) ٤ د) غ.م

(٢٠١٤/ شتوية)

١٤) $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٥$ ؛ فإن $\lim\limits_{س \to ٢} (٦س\, ق(س) + ٣)$

القسم الثاني :-

١) جد $\lim\limits_{س \to ٨} \frac{س - ٨}{\sqrt{س + ١} - ٣}$

٢) جد $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س}$ (٥ علامات) ٢٠٠٨/صيفي

٣) جد $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٣}$ (٣ علامات) ٢٠٠٩/شتوي

٤) اذا كانت $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٥$ ، فإن

$\lim\limits_{س \to ٢} (٦س * ق(س) + ٣)$ (٤ علامات) ٢٠٠٩/شتوي

٥) جد $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣}$ (٥ علامات) ٢٠٠٩/صيفي

٦) جد $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س^٢ - ٢س}$

٧) $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢}$ (٥ علامات) ٢٠١٠/شتوي

٨) جد $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٣ + ٥س^٢ + ٦س}{س^٣ - ٤}$ (٥ علامات) ٢٠١١/شتوي

٩) $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥}{٣س^٢ - ١٥س}$ (٨ علامات) ٢٠١٢/شتوي

١٠) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣}$ (٥ علامات) ٢٠٠٩/صيفي

١١) $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥}{٣س^٢ - ١٥س}$ (٨ علامات) ٢٠١٣/شتوي

١٢) $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٣س + ١} - ٤}{س^٢ - ٢٥}$ (٦ علامات) ٢٠١٣/شتوي

إجابة الأسئلة :

القسم الأول :

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
رمز الاجابة	جـ	جـ	د	جـ	أ	جـ	جـ	أ	جـ

السؤال	١٠	١١	١٢	١٣
رمز الاجابة	ب	أ	أ	جـ

القسم الثاني :-

١) $\lim\limits_{س \to ٨} \frac{س - ٨}{\sqrt{س + ١} - ٣} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ٣}{\sqrt{س + ١} + ٣}$

$= ٦ \times \lim\limits_{س \to ٨} \frac{س - ٨}{س + ١ - ٩} = ٦ \times \lim\limits_{س \to ٨} \frac{س - ٨}{س - ٨} = ٦$

٢) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ١}{\sqrt{س + ١} + ١}$

$= \frac{١}{٢} \times \lim\limits_{س \to ٠} \frac{س + ١ - ١}{س} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{س}{س} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

٣) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٣} = \frac{(س - ٢)(س - ٣)}{(س - ٣)} = -١$

٤) $\lim\limits_{س \to ٢} (٦ \times ٢ * ق(٢) + ٣) = ١٢ \times ٥ + ٣ = ٦٣$

٥) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ٢}{\sqrt{س + ١} + ٢}$

$\frac{١}{٤} \times \lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س + ١ - ٤)}{(س - ٣)} = \lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)}{(س - ٣)} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$

٦) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س - ١)}{(س - ٢)\, س} = \frac{١}{٢}$

٧ $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢} \times \frac{\sqrt{س} + ٢}{\sqrt{س} + ٢}$

$٤ \times \lim\limits_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{س - ٤} = ٤$

٨ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س(س^٢ + ٥س + ٦)}{(س - ٢)(س + ٣)}$

$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{س\cancel{(س + ٢)}(س + ٣)}{(س - ٢)\cancel{(س + ٢)}} = \frac{١}{٢}$

٩ $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{\cancel{(س - ٥)}(س + ٥)}{٣س\cancel{(س - ٥)}} = \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣}$

١٠ $\frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ٢}{\sqrt{س + ١} + ٢}$

$= \lim\limits_{س \to ٣} \frac{س + ١ - ٤}{س - ٣} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$

١١ نفس سؤال رقم (٩)

١٢ $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٣س + ١} - ٤}{س^٢ - ٢٥} = \frac{٠}{٠}$ لا تقبل

نحلل ← نختصر ← نعوض

• الحل:

$\lim\limits_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٣س + ١} - ٤}{س^٢ - ٢٥} \times \frac{\sqrt{٣س + ١} + ٤}{\sqrt{٣س + ١} + ٤}$

$= \lim\limits_{س \to ٥} \frac{٣س + ١ - ١٦}{س^٢ - ٢٥} \times \frac{١}{٨}$

$= \lim\limits_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{(س - ٥)(س + ٥)} \times \frac{١}{٨}$

$= \lim\limits_{س \to ٥} \frac{٣\cancel{(س - ٥)}}{\cancel{(س - ٥)}(س + ٥)} \times \frac{١}{٨} = \frac{٣}{٨٠}$

تمارين إضافية

* اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^٢ + ٥ & ، س \geq ٢ \\ ٣س - ١ & ، س < ٢ \end{cases}$ فأجب عن الأسئلة (١، ٢، ٣):

١. $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) =$ أ) ٨ ب) ١١ ج) صفر د) غ.م

٢. $\lim\limits_{س \to ٠} ق(س) =$ أ) ٠ ب) ٥ ج) -١ د) غ.م

٣. $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) =$ أ) ١١ ب) ٥ ج) ٠ د) غ.م

* اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ٤ & ، س \neq ٣ \\ ١٥ & ، س = ٣ \end{cases}$ فأجب عن الأسئلة (٤، ٥، ٦):

٤. $\lim\limits_{س \to ٣^+} ق(س) =$ أ) ١٥ ب) ١٠ ج) ٦ د) غ.م

٥. $\lim\limits_{س \to ٣^-} ق(س) =$ أ) ١٥ ب) ١٠ ج) -٣ د) غ.م

٦. $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) =$ أ) ١١ ب) ١٠ ج) ٠ د) غ.م

* إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ٤ & ، س \geq ٣ \\ ٦س + ١٦ & ، س < ٣ \end{cases}$ فأجب عن الأسئلة (٧، ٨، ٩، ١٠، ١١):

٧. $\lim\limits_{س \to ٥^-} ق(س) =$ أ) -١٤ ب) ١٤ ج) ٢ د) غ.م

٨. $\lim\limits_{س \to -١} ق(س) =$ أ) ٢ ب) -٦ ج) ١٠ د) غ.م

٩. $\lim\limits_{س \to ٣^+} ق(س) =$ أ) -١٨ ب) -١٠ ج) -٢ د) غ.م

١٠. $\lim\limits_{س \to ٣^-} ق(س) =$ أ) -١٠ ب) -٦ ج) -٢ د) غ.م

١١. $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) =$ أ) ١٠ ب) صفر ج) -٢ د) غ.م

الإجابات

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
رمز الإجابة	ب	ج	د	ب	ب	ب	أ	أ	ج	ج	ج

* اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{٣س - ١} & ، س \geq ٤ \\ ٣س - ٢ & ، س < ٤ \end{cases}$

فإن $\lim\limits_{س \to ٥} ق(س)$

أ) ١٣ ب) ٣ ج) ٩ د) غ.م

الاتصال

تعريف : يكون الاقتران ق متصلاً عند النقطة س = أ ، اذا تحققت الشروط التالية

١. ق معرف عند أ أي أن ق(أ) عدد حقيقي

٢. نها ق(س) موجودة
س ← أ

٣. نها ق(س) = ق(أ)
س ← أ

* ملاحظة :-

إذا لم يتحقق شرط أو أكثر من هذه الشروط فإن ق غير متصل عند أ.

ونسمي أ عندئذٍ نقطة عدم إتصال

الأسئلة :

١) إذا كان ق(س) = ٣س^{٢} + ٢س − ١

فهل ق متصل عند س = ٣

• الحل :

نبحث الاتصال عند س = ٣ (كثير حدود)

ق(س) = ٣س^{٢} + ٢س − ١

ق(٣) = ٣ × (٣)^{٢} + ٢ × ٣ − ١ = ٢٧ + ٦ − ١ = ٣٢

نها ق(س) = ٣ × (٣)^{٢} + ٦ − ١ = ٣٢
س ← ٣

∴ ق(س) متصل عند س = ٣

قاعدة ق(س) متصل عند س = أ بشرط نها ق(س) = ق(أ)
س ← أ

قاعدة كثير الحدود متصل دائماً

٢) إذا كان ل(س) = { س + ٥ ، س < −١ ؛ ٩ − ٢س ، −١ ≤ س < ٣ ؛ س^{٢} − ٦س ، س ≥ ٣ }

إبحث الاتصال عند س = −١

• الحل :

ل(−١) = ٩ − ٢ × (−١) = ٩ + ٢ = ١١

نها ل(س) = ٩ − ٢ × (−١) = ٩ + ٢ = ١١
س ← −١$^{+}$

نها ل(س) = −١ + ٥ = ٤
س ← −١$^{-}$

∴ النهاية غير موجودة

∴ ل(س) غير متصل عند س = −١

٣) إذا كان ق(س) = { (س^{٢} − ٩) / (س − ٣) ، س ≠ ٣ ؛ ٥ ، س = ٣ }

إبحث الاتصال عند س = ٣

• الحل

ق(٣) = ٥

نها ق(س) = نها (س^{٢} − ٩) / (س − ٣) = ٠/٠ لا تقبل
س ← ٣ (حذف س − ٣)

= نها (س − ٣)(س + ٣) / (س − ٣) = نها س + ٣ = ٦
س ← ٣ س ← ٣

بما أن نها ق(س) ≠ ق(٣)
س ← ٣

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٣

واجب

٤) ق(س) = { س^{٢} ، س < ١ ؛ ٣س + ١ ، س ≥ ١ }

إبحث في إتصال ق(س) عند س = ١

الاتصال على فترة

١. القواعد متصلة على الفترات المفتوحة

٢. الكسر ← أصفار المقام.

ب. الجذر الزوجي ← نحدد المجال

٣. الاطراف ← البداية من اليمين / النهاية من اليسار

الأسئلة :

١) اذا كان ق(س) = { ٩ − ٣س ، −١ ≤ س < ٣ ؛ ٨ ، س = ٣ }

إبحث في اتصال ق في الفترة [−١ ، ٣]

• الحل :

• القواعد

٩ − ٣س متصل −١ < س < ٣ لأنه كثير حدود

٨ متصل ثابت

* الآن نبحث الاتصال على يمين س = −١

• الأطراف

عند س = −١

نها ق(س) = ٩ − ٣(−١) = ١١
س ← −١⁺

ق(−١) = ٩ − ٣×(−١) = ١١

∴ ق(س) متصل عند س = −١

عند س = ٣

نها ق(س) = ٩ − ٣×٣
س ← ٣⁻

= ٩ − ٩ = ٠

ق(٣) = ٨

نها ق(س) ≠ ق(٣)
س ← ٣⁻

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٣

∴ ق(س) تتصل على [−١ ، ٣)

٥) إذا كان ق(س) = { س² + ٧ ، س ≤ −٢ ؛ أس + ١ ، س > −٢ }

وكان ق(س) متصل عند س = −٢ ، فما قيمة أ

• الحل : بما أن ق(س) متصل عند س = −٢

نها ق(س) = نها ق(س) = ق(−٢)
س ← −٢⁺ ، س ← −٢⁻

نها ق(س) = −٢أ + ١
س ← −٢⁺

نها ق(س) = ١١
س ← −٢⁻

ق(−٢) = −٢أ + ١

← −٢أ + ١ = ١١ ← أ = ١٠/−٢ = −٥ ← أ = −٥

٦) اذا كان ق(س) = { (س² − ٣س − ١٢) / (س² − ٣س − ٤) ، س ≠ ٤ ؛ م ، س = ٤ }

فما قيمة الثابت م التي تجعل ق(س) متصل عند س = ٤

• الحل : بما أن ق(س) متصل فإن

ق(٤) = م

نها ق(س) = نها (س² − ٣س − ١٢) / (س² − ٣س − ٤) = ٠/٠
س ← ٤ ، س ← ٤

= (س − ٤)(س + ١) / (س − ٤)(س + ١) = نها ٣/(س + ١) = ٣/٥
س ← ٤

∴ ق(٤) = نها ق(س) ← م = ٣/٥
س ← ٤

٧) اذا كان ق(س) = { س² + ٥ ، س < ٣ ؛ ل ، س ≥ ٣ }

فما قيمة الثابت (ل) التي تجعل ق متصل عند س = ٣

٢) اذا كان ق(س) = { ٤ ، س = ٢ ؛ ٣س² − ٨ ، ٢ < س ≤ ٤ }

فابحث في إتصال ق(س) في الفترة [٢، ٤]

• الحل :

. القواعد

٤ ، متصل عند س = ٢ لانه ثابت

٣س² − ٨ ، متصل ٢ < س < ٤ لانه كثير حدود

. الاطراف

عند س = ٢

ق(٢) = ٤

نها ق(س) = ٣ × (٢)² − ٨ = ٤

س ← ٢⁺

∴ متصل عند س = ٢

عند س = ٤

ق(٤) = ٣ × (٤)² − ٨

= ٤٨ − ٨ = ٤٠

نها ق(س) = ٤٠

س ← ٤⁻

∴ متصل عند س = ٤

∴ ق(س) متصل على [٢، ٤]

٣) ق(س) = { س² − ٣س + ٢ ، س ≤ −١ ؛ س + ١ ، س > −١ }

فابحث في إتصال ق لجميع قيم س الحقيقية

• الحل :

. القواعد

١. س² − ٣س + ٢ متصل س ≤ −١ كثير حدود

٢. س + ١ متصل س > −١ كثير حدود

• الحول :

عند س = −١ ⇐ ق(−١) = (−١)² − ٣ × (−١) + ٢

= ١ + ٤ + ٢ = ٦

نها ق(س) = −١ + ١ = ٠

س ← −١⁺

نها ق(س) = ٦

س ← ١⁺

∴ بما أن نها ق(س) ≠ ق(−١)

س ← −١

∴ ق(س) غير متصل عند س = −١

∴ ق متصل عند جميع قيم س ما عدا عند س = −١

٤) اذا كان ق(س) = { ٣ ، س = ٣ ؛ (٣س + ١)/(س − ١) ، ٣ < س < ٥ ؛ ٤ ، س = ٥ }

فابحث الاتصال ق على الفترة [٣، ٥]

• الحل :

• القواعد :

١. ٣ متصل ، س = ٣ ثابت

٢. (٣س + ١)/(س − ١) ، متصل لكل س ما عدا س = ١

٣. ٤ متصل ، س = ٥ ثابت

الأطراف :

عند س = ٣

ق(٣) = ٣

نها ق(س) = (٣س + ١)/(س − ١) = ١٠/٢ = ٥

س ← ٣⁺

ق(٣) = غير متصل عند س = ٣

عند س = ٥

ق(٥) = ٤

نها ق(س) = (٣س + ١)/(س − ١) = (٣ × ٥ + ١)/(٥ − ١)

س ← ٥⁻

= ١٦/٤ = ٤

∴ نها ق(س) = ق(٥)

س ← ٥⁻

∴ متصل عند س = ٥

نظرية

اذا كان كل من الاقترانين ق ، هـ متصلاً عند س = أ ، فإن

١) ق + هـ متصل عند س = أ

٢) ق − هـ متصل عند س = أ

٣) ق × هـ متصل عند س = أ

٤) $\frac{ق}{هـ}$ متصل عند س = أ ، هـ(أ) ≠ صفر

سؤال : ما نقاط عدم الاتصال للاقترانات

[١] $ق(س) = \frac{س - ٩}{س^٢ - ٣س}$

• الحل:

$س^٢ - ٣س = ٠ \leftarrow س(س - ٣) = ٠$

س = ٠ ، س = ٣

[٢] $ق(س) = \frac{س^٢ - ٩}{س + ٥}$

• الحل

س + ٥ = ٠ ، س = −٥

[٣] $ق(س) = \frac{س}{س^٢ - ٣س - ٢٨}$

• الحل

(س − ٧)(س + ٤) = ٠

س − ٧ = ٠ ، س + ٤ = ٠ ← س = ٧ ، س = −٤

[٤] $ق(س) = \frac{١ - ٢س}{س^٢ - ١}$

• الحل:

س = ±١

[٥] $ق(س) = \frac{١ - ٢س}{س^٢ + ٩}$

• الحل:

متصل على كل ح

لجميع قيم س الحقيقية.

سؤال (١) : $ق(س) = س^٢ س - ١$

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٤س + ١ ، & س < ٢ \\ س^٢ + ٥ ، & س \geq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال ق(س) × هـ(س) عند س = ٢

• الحل:

ق(س) متصل عند س = ٢ لانه كثير حدود

هـ(س) متصل عند س = ٢ لان

$ق(٢) = (٢)^٢ + ٥ = ٤ + ٥ = ٩$

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^+} (س^٢ + ٥) = ٤ + ٥ = ٩$

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} (٤س + ١) = ٤ \times ٢ + ١ = ٨ + ١ = ٩$

∴ $ق(٢) = \lim_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim_{س \to ٢^-} ق(س)$ ∴ متصل

∴ حسب النظرية متصل × متصل = متصل

سؤال (٢) : اذا كان $ق(س) = ٥ + ٣س$

$هـ(س) = \begin{cases} ٤ - س^٢ ، & س \leq ١ \\ ٢س + ١ ، & س > ١ \end{cases}$

وإذا كان $ل(س) = هـ(س) + \frac{١}{٢} ق(س)$

ابحث الاتصال في ل عند س = ١

اعداد : يزن القريوتي

ورقة عمل (وزارة)

١) اذا كان الاقتران $ق(س) = \frac{س^٢ - ٩}{س + ٥}$ ، فإن مجموعة نقاط عدم الاتصال للاقتران هي :

أ) {-٣، ٣} ب) {٥} ج) {-٥} د) {-٥، ٣}

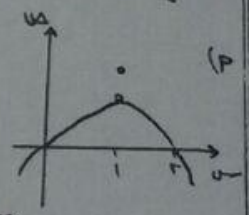
٢) أي الاقترانات الآتية هو إقتران متصل عند س = ٢

أ) $ق(س) = \begin{cases} س - ٥ ، & س \geq ٢ \\ س + ١ ، & س < ٢ \end{cases}$ ب) $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} ، & س \neq ٢ \\ ٦ ، & س = ٢ \end{cases}$

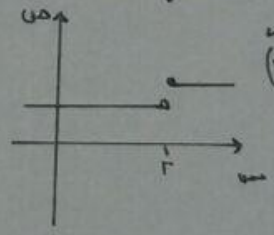
ج) $ل(س) = \begin{cases} \sqrt{س - ٢} ، & س > ٢ \\ \frac{١}{س} ، & س \leq ٢ \end{cases}$ د) $ق(س) = \begin{cases} س^٢ ، & س \leq ٢ \\ س + ١ ، & س > ٢ \end{cases}$

٣) أي الاقترانات التالية تمثل إقتران متصلاً عندما س = ٣

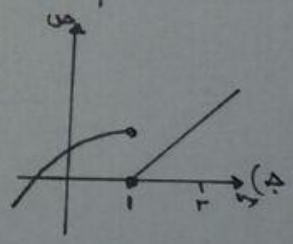
أ)

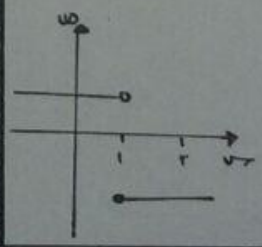


ب)



ج)





٤) قيم س التي تجعل عندها نقط عدم الاتصال للاقتران $ق(س) = \frac{س - ٣}{(س - ١)(س + ٣)}$ هي

أ) ٣ ب) -٣، ١، ٣

ج) -١، ٣ د) -٣، ١

٥) قيم س التي عندها نقط عدم الاتصال للاقتران $ق(س) = \frac{س}{(س + ١)(س - ٣)}$ هي

أ) -١، ٣ ب) ٠، -١، ٣ ج) ١، -٣ د) ٠

٦) اذا كان $ق(س) = \frac{س - ١}{س - ٣}$ ، فإن مجموعة نقط عدم الاتصال

أ) {١، ٣} ب) {٣} ج) {-١، -٣} د) {-٣}

٧) اذا كانت $ق(س) = \frac{س - ٧}{س^٣ - ٣س + ١}$ فإن قيمة س التي تجعل ق غير متصل

أ) ٧ ب) -٧ ج) ١ د) -١

٨) اذا كان ق(س) = ل(س) + د(س) حيث الاقتران $ل(س) = ٣س + ٥$ ، $د(س) = \begin{cases} س^٣ - ٥ ، & س \leq ٣ \\ س + ١ ، & س > ٣ \end{cases}$

إبحث في اتصال الاقتران ق(س) عندما س = ٣

الحل :

ل(س) متصل عند س = ٣ لأنه كثير حدود

د(س) متصل عند س = ٣ لأن

$\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = \lim_{س \to ٣^+} ق(س) = ق(٣)$ «متصل أكثر»

∴ حسب النظرية ق(س) متصل عند س = ٣ لأن

متصل + متصل = متصل .

٩) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^٢ + ١ ، & س < -٢ \\ س + أ ، & س \geq -٢ \end{cases}$

وكان ق متصلاً فجد قيمة أ

ج : أ = ١٥

١٠) اذا كان الاقتران $ق(س) = \begin{cases} أس + ١ & ، س \neq ٢ \\ ٧ & ، س = ٢ \end{cases}$

فجد قيمة الثابت أ التي تجعل الاقتران (ق) متصلاً عند س = ٢

• الحل:

بما أن ق متصل عند س = ٢ ⇐ $ق(٢) = \lim_{س \to ٢} ق(س)$

$٧ = \lim_{س \to ٢} (أس + ١)$

$٧ = ٢أ + ١$ ⇐ $٢أ = ٦$ ⇐ $أ = ٣$

١١) اذا كان $ق(س) = س^٢$ ، $هـ(س) = \begin{cases} س + ٥ & ، س < ٢ \\ ٣س^٢ - ٥ & ، س > ٢ \end{cases}$

وكان $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$ فابحث الاتصال

ل(س) عندما س = ٢

• الحل:

القواعد: $س^٢$ متصل عند س = ٢ لانه كثير حدود

هـ(س) متصل لانه $هـ(٢) = \lim_{س \to ٢} هـ(س)$

حسب النظرية : ل(س) متصل لان

متصل × متصل = متصل

١٢) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٣ - ٤ & ، س \leq ٢ \\ أس + ٣ & ، س > ٢ \end{cases}$

وكان ق متصلاً عندما س = ٢ ، فما قيمة أ

• الحل:

الجواب : $أ = \frac{١}{٢}$

١٣) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، س \leq ٢ \\ ٥ & ، س > ٢ \end{cases}$

$ل(س) = س$ وكان $هـ(س) = ق(س) + هـ(س)$

فابحث اذا كان هـ(س) متصل عند س = ٢

وزارة ٢٠١١ / ش

جد $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{١}{٢س}}{س - ١}$

ج : $\frac{١}{٤}$

١٥) $ق(س) = \begin{cases} ٩ - س^٣ & ، ١ \leq س < ٢ \\ ٤ - س & ، ٢ \leq س \leq ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال ق(س) على الفترة [١ ، ٣]

١٦) اذا كان $ق(س) = س^٢$ ، $هـ(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، س \leq ٢ \\ س^٣ - س & ، س > ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) × هـ(س) عند س = ٢

١٧) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٣ - س س + ٢ & ، س \leq -١ \\ س + ٧ & ، س > -١ \end{cases}$

فابحث في إتصال الاقتران ق بجميع قيم س الحقيقية.

• الحل:

القواعد $س^٣ - س س + ٢$ متصل لانه كثير حدود على مجاله

$س + ٧$ متصل لانه كثير حدود على مجاله

• التحول: س = -١

$ق(-١) = (-١)^٣ - س \times (-١) + ٢ = ٦$

$\lim_{س \to -١} ق(س)$ ← ⊕ = ٦ ، ⊖ = ٦

∴ ق(س) متصل عند س = -١

∴ ق(س) متصل على جميع قيم س الحقيقية.