2.250

# إضاءات في الرياضيات

# Mathematics

توجيهي الفرع العلمي - المستوى الثالث

مكتبة الوسام
ALWESAM
tawjihi center & service store
النسخة الأصلية

الوحدة الاولى :

## النهايات و الاتصال

2016 -17

شاملة أسئلة الكتاب

إعداد المعلم :

محمد قريع

٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

مكتبة الوسام
ALWESAM
tawjihi center & service store

# إضاءات في الرياضيات

Mathematics

توجيهي الفرع العلمي - المستوى الثالث

الوحدة الاولى :

## النهايات و الاتصال

شاملة أسئلة الكتاب

إعداد المعلم :

محمد قريع

٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي

www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مراجعة : التحليل الى العوامل :

يستعمل لتبسيط المقادير الجبرية ويستعمل لكثيرات الحدود .

طرق التحليل الى العوامل :

١ اخراج العامل المشترك : ① يستعمل في العبارة الخطية أخذ عامل بسيط لثوابت

② يستعمل في اي عبارة جبرية ليس فيها ثابت (حد طلقة)

أخذ المتغير المشترك صاحب الاس الاقل .

مثال : ① $٢س - ٤ = ٢(س - ٢)$

② $س^{٢} + ٤س = س(س + ٤)$

③ $٢س^{٥} + ٤س^{٣} = ٢س^{٣}(س^{٢} + ٢)$

٢ الفرق بين مربعين : يستعمل اذا كانت المقادير على الصورة

$أ^{٢} - ب^{٢} = (أ - ب)(أ + ب)$

أمثلة : ① $س^{٢} - ٩ = (س - ٣)(س + ٣)$

② $س^{٢} - ٥ = (س - \sqrt{٥})(س + \sqrt{٥})$

③ $س^{٣} - ٤س = س(س^{٢} - ٤)$ اخراج عامل ثم فرق بين مربعين

$= س(س - ٢)(س + ٢)$

٣ مجموع مربعين : غير قابل للتحليل وهو أبسط صورة $أ^{٢} + ب^{٢}$ .

٤ ثلاثي الحدود على الصورة : $س^{٢} + ب س + ج$ (معامل $س^{٢} = ١$)

- نبحث عن عددين حاصل ضربهما ($ج$) ومجموعهما ($ب$)

$+ \times + = +$ و $(س + \quad)(س + \quad) = (س + \quad)$

$- \times + = -$ و $(س - \quad)(س + \quad) = (س - \quad)$

$+ \times - = -$ و $(س + \quad)(س - \quad) = (س - \quad)$

$- \times - = +$ و $(س - \quad)(س - \quad) = (س + \quad)$

← العدد الاكبر يكون أولاً . (في القوس الاول)

مثال : ① $س^{٢} - ٣س + ٢ = (س - ٢)(س - ١)$

② $س^{٢} + ٥س + ٦ = (س + ٣)(س + ٢)$

③ $س^{٢} - س - ٦ = (س - ٣)(س + ٢)$

④ $س^{٢} + س - ٦ = (س + ٣)(س - ٢)$

تم تحميل هذا الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

٥ كيف الحدود على الصورة : $أ س^{٢} + ب س + جـ$ ، معامل $س^{٢} = ١$

نتعامل معه كالتالي

① نضرب $أ \times جـ = د$

② نبحث عن عددين حاصل ضربهما $د$ ومجموعهما $ب$

مثال : $٢ س^{٢} + س - ٣$

$٢ \times -٣ = -٦$ لاحظ أن $-٣ + ٢ = -١$

$-٢ \times ١ = -٢$ ⇐ العددان هما $-٢ ، ٣$

$= (٢ س^{٢} + ٣)(س - ١)$

أو كالتالي $٢ س^{٢} + س - ٣$ وهي الأفضل والأسرع

| | | |
|---|---|---|
| الحد الأول | الوسط | الحد الأخير |
| $٢ س^{٢}$ | $+ ٣ س - ٢ س = س$ | $-٣$ |

الحد الأول × الحد الأخير : $٢ س^{٢} \times -٣$

ضرب تبادلي : $٢ س \times -١ = -٢ س$ ، $س \times ٣ = ٣ س$

$(٢ س + ٣)(س - ١)$

مثال : $٣ س^{٢} - ٦ س + ٣$

| | | |
|---|---|---|
| $٣ س^{٢}$ | $- ٣ س - ٣ س = -٦ س$ | $٣$ |

$٣ س^{٢} \times ٣ = ٩ س^{٢}$

ضرب تبادلي : $٣ س \times ١ = ٣ س$ ، $٣ \times -١ = -٣$

$= (٣ س + ٣)(س + ١)$

مثال : $٦ س^{٢} + س - ١$

| | | |
|---|---|---|
| $٣ س$ | $- ٢ س + ٣ س = س$ | $-١$ |

$٦ س^{٢} \times -١ = -٦ س^{٢}$

ضرب تبادلي : $٣ س \times -١ = -٣ س$ ، $٢ س \times ١ = ٢ س$

$= (٢ س + ١)(٣ س - ١)$

لاحظ أن $٦ س$ ناتج الضرب التبادلي ولذلك جزءنا العدد $٦ ، ٢ ، ٣$ لم نفي بالغرض

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الرياضيات
المعلم محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

٦ الفرق بين مكعبين : $أ^٣ - ب^٣ = (أ-ب)(أ^٢+أب+ب^٢)$

مثال : ① $س^٣ - ٢٧ = (س-٣)(س^٢+٣س+٩)$

② $٤س^٣ - ٣٢ = ٤(س^٣ - ٨)$

$= ٤(س-٢)(س^٢+٢س+٤)$

٧ مجموع مكعبين : $أ^٣ + ب^٣ = (أ+ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$

امثلة : ① $٢٧ص^٣ + ١٢٥ = (٣ص+٥)(٩ص^٢ - ١٥ص + ٢٥)$

② $س^٣ + \frac{١}{٨} = (س+\frac{١}{٢})(س^٢ - \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤})$

٨ العبارة التكعيبية الكاملة : $أس^٣ + بس^٢ + جس + د$ حيث $أ \neq ٠$

طريقة التحليل : هي خلال عوامل الحد المطلقة نعوض احدها لتكون ناتج التعويض صفراً فيكون $(س - \text{هذا العدد})$ عامل من عوامل العبارة التكعيبية ثم نجد باقي العوامل عن طريق القسمة التركيبية .

مثال : $س^٣ + ٢س^٢ - س - ٢$ العدد (١) من عوامل الحد المطلق

$(١)^٣ + ٢(١)^٢ - ١ - ٢ = صفر \Leftarrow (س-١)$ عامل من العوامل

$= (س-١)(س^٢ + ٣س + ٢)$

$= (س-١)(س+١)(س+٢)$

| | $س^٣$ | $س^٢$ | $س$ | |
|---|---|---|---|---|
| | ١ | ٢ | -١ | -٢ |
| ١ | | ١ | ٣ | ٢ |
| | ١ | ٣ | ٢ | ٠ |

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

* ملاحظة : هذا الاسلوب نستعمله مع المقادير ذات الدرجة الاعلى من التكعيبي ارضياً .

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مراجعة :

* انواع الاقترانات ومجالاتها ودراسة اشاراتها :

١) كثيرات الحدود : بصورة لعامة لها $ق(س) = أ_ن س^ن + أ_{ن-١} س^{ن-١} + ... + أ_١ س + أ_٠$

حيث $أ_٠ ، أ_١ ... أ_ن \in ح$ ، $ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ...$

- مجال كثيرات الحدود هو مجموعة الاعداد الحقيقية :

اشهرها :

أ) الاقتران الخطي : $ق(س) = أ س + ب$ ، $أ ، ب \in ح$

شكله : عند تمثيله بيانياً ينتج خط مستقيم كما يلي :

١) متزايد ( ↗ ) اذا كان معامل $س$ > صفر

٢) متناقص ( ↘ ) اذا كان معامل $س$ < صفر

٣) ثابت ( ——— ) وهو خط مستقيم موازي لمحور السينات

ويمر بمحور الصادات عند النقطة $(٠ ، ب)$ ويكون ثابتاً عندما $أ$ = صفر

- اما انه يكون له مقطع سيني واحد (يمر بمحور السينات مرة واحدة) اذا كان متزايداً أو متناقصاً أو ليس له مقاطع اذا كان موازياً لمحور السينات أو انه يكون عدد مقاطعه مالانهاية وهي حالة واحدة عندما $ق(س)$ = صفر . عندها ينطبق الخط المستقيم تماماً على محور السينات .

* كيفية دراسة اشارة له : ساوي الاقتران بالصفر ونجد جذر الاقتران وتضعه على خط الاعداد ثم نعوض اعداد على يمين الجذر وشماله لتحديد الاشارة .

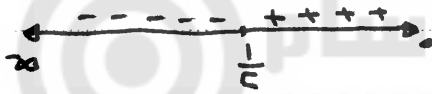
ملاحظة : $أ > ٠$ ما على يمين الجذر موجب وعلى يسارة سالب

$أ < ٠$ ما على يمين الجذر سالب وعلى يسارة موجب

مثال : اوجد اشارة الاقتران $ق(س) = ٢س - ١$

الحل $٢س - ١ =$ صفر $\Leftarrow$ $٢س = ١$

$\Leftarrow$ $س = \frac{١}{٢}$




يكون $ق(س) \leq$ صفر عندما $س \in [\frac{١}{٢} ، \infty)$ أي $س \geq \frac{١}{٢}$

$ق(س) <$ صفر عندما $س \in (-\infty ، \frac{١}{٢})$ أي $س < \frac{١}{٢}$

ملاحظة : جذر لمعادلة المرافقة للاقتران هو نفسه صفر للاقتران اي انه للاقتران يقطع محور السينات في النقطة $(\frac{١}{٢} ، صفر)$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

ب) الاقتران التربيعي : $ق(س) = أ س^2 + ب س + جـ$ ، $أ \neq صفر$

شكله : عند تمثيله بيانياً ينتج قطع مكافئ (يشبه حدوة الفرس)

اما انه يكون مفتوحاً للأعلى عندما $أ > صفر$ ( $\cup$ ) أو مفتوحاً للاسفل عندما $أ < صفر$ ( $\cap$ ).

كيفية تمثيله بيانياً : * نحدد احداثيات الرأس كما يلي

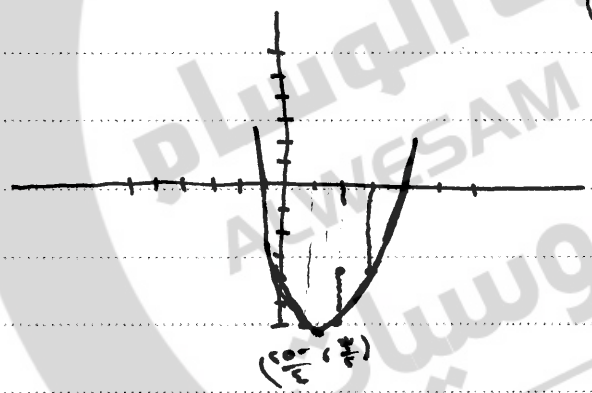
الاحداثي السيني $س = \frac{-ب}{2أ}$ ، الاحداثي الصادي $ق(س) = ق(\frac{-ب}{2أ})$

* نضع جدولاً من ثلاث أو ثلاث إلى أو سطها الرأس مع وضع تيم لس مساوي لعدد س الرأس عند البسيط ولسار - ثم التعويض وتقسيم النقاط المستوى ثم التوصيل بين النقاط بخط ناعم .

مثال : مثل بيانياً $ق(س) = س^2 - 3س - 4$ . $أ = 1$ $ب = -3$ $جـ = -4$

الحل $س = \frac{-ب}{2أ} = \frac{-(-3)}{2 \times 1} = \frac{3}{2}$ ، $ص = ق(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2}) - 4 = -\frac{25}{4}$

| س | ٣ | ٢ | $\frac{3}{2}$ | ١ | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص | -٤ | -٦ | $-\frac{25}{4}$ | -٦ | -٤ |




ملاحظة : الاقتران التربيعي قطعانه # محور السينات على الاكثر اي انه جذور المعادلة المرافقة لاتتجاوز الجذرين حسب التالي .

* الاقتران التربيعي قطعانه اذا كان مميز العبارة التربيعية المرافقة موجباً .

قطع واحد اذا كان مميز العبارة التربيعية المرافقة صفراً .

لا يوجد قطع اذا كان مميز العبارة التربيعية سالباً .

المميز $= ب^2 - 4أجـ$

+ في المثال السابق كان للاقتران صفرانه (قطعانه) مع محور السينات لأنه

المميز $= (-3)^2 - 4 \times 1 \times -4 = 9 + 16 = 25 > صفر$ .

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

* لايجاد اصفار الدالة التربيعية نجد جذور المعادلة المرافقة للدالة بالصفر وحل المعادلة الناتجة :

مثال : جد اصفار الدالة $هـ(س) = س^٢ + ٢س + ١$

الحل : $س^٢ + ٢س + ١ = صفر$

$(س + ١)(س + ١) = صفر$

$\Leftarrow$ اما $س + ١ = صفر \Leftarrow س = -١$

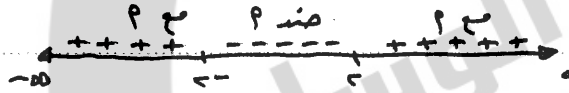
أو $س + ١ = صفر \Leftarrow س = -١$

اصفار الدالة $= \{-١\}$

مهم : لدراسة اشارة الدالة التربيعية نعين اصفارها على خط الاعداد ثم نعوض ارقاماً على يسار الاصفار ويمينها لمعرفة اشارة الناتج .

ملاحظة : اذا كانت الدالة التربيعية (جذراها) تتبع القاعدة ( مع م ، ضد م ، مع م ) .

مثال : ادرس اشارة الدالة $هـ(س) = س^٢ - ٤$




الحل : $س^٢ - ٤ = صفر$

$(س - ٢)(س + ٢) = صفر$

$\Leftarrow س = ٢ ، -٢$

$\therefore هـ(س) \geq صفر$ عندما $س \in (-\infty ، -٢] \cup [٢ ، \infty)$

$هـ(س) < صفر$ عندما $س \in (-٢ ، ٢)$

* مدى الدالة التربيعية مرتبط بالاحداثي الصادي للرأس وبإشارة معامل $س^٢$ ( م )

- $م > صفر \Leftarrow$ المدى $ص \geq هـ(\frac{-ب}{٢م})$ (الاحداثي الصادي للرأس)

- $م < صفر \Leftarrow$ المدى $ص \leq هـ(\frac{-ب}{٢م})$

* اذا كانت $م > صفر$ يكون للتقطع المكاني تيمة صغرى عند $س = \frac{-ب}{٢م}$ (الاحداثي السيني)

اما اذا كانت $م < صفر$ يكون للتقطع المكاني تيمة عظمى عند $س = \frac{-ب}{٢م}$ .

مثال : في المثال $هـ(س) = س^٢ - ٤$

* للدالة تيمة صغرى عند $س = \frac{-صفر}{١ \times ٢} = صفر$

وتيمتها $ص = هـ(\frac{-ب}{٢م}) = هـ(٠) = -٤$

أي أن $ص \geq -٤$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

ج) الاقتران التكعيبي : $ق(س) = أ س^3 + ب س^2 + جـ س + د$ ، $أ \neq 0$

شكله : عند تمثيله بيانياً ينتج شكل يشبه حرف ($ح$) بالانجليزي كالتالي

* $\smile$ : عندما $أ > 0$

* $\frown$ : عندما $أ < 0$

- يمكن ان يكون للاقتران التكعيبي ثلاثة اصفار او اكثر (ثلاث قطع او اكثر للبيانات)
- نجد اصفاره من خلال حل المعادلة التكعيبية المرافقة له .

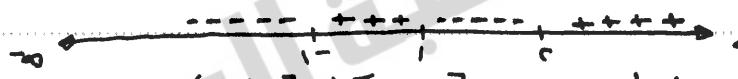
* ندرس اشارته مثل ما درسنا سابقاً :

مثال : ادرس اشارة الاقتران : $ق(س) = س^3 - 2س^2 - س + 2$

بالتحليل $ق(س) = (س-1)(س-2)(س+1)$

$(س-1)(س-2)(س+1) = 0$

$س = 1 ، 2 ، -1$




$ق(س) \geq 0$ عندما $س \in [-1, 1] \cup [2, \infty)$

$ق(س) < 0$ عندما $س \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$

د) الاقتران النسبي : حاصل قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر .

شرطه : $ح$ ما عدا اصفار مقام لأنه اصفار المقام تجعل قيمة الاقتران غير معرفة

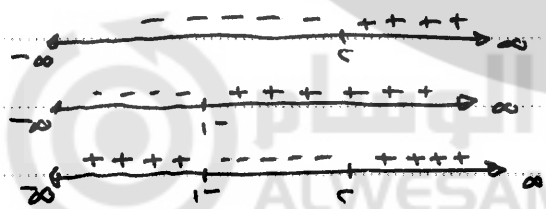
مثال $ق(س) = \frac{س-2}{س+1}$ : مجال $ح - \{-1\}$ لأن $س+1 = 0 \Leftarrow س = -1$

* ندرس اشارته كالتالي

البسط $س - 2 = 0 \Leftarrow س = 2$

المقام $س + 1 = 0 \Leftarrow س = -1$

$ق(س) = \frac{س-2}{س+1}$




$ق(س) \geq 0$ عندما $س \in (-\infty, -1) \cup [2, \infty)$

$ق(س) < 0$ عندما $س \in (-1, 2)$

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الرياضيات
المعلم : محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

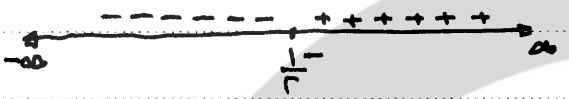
٣ المقترانات داخل الجذور ( الجذرية ) : $ق(س) = \sqrt[ن]{هـ(س)}$

* مجالها ① نفس مجال $هـ(س)$ اذا كان $ن$ عدد فردي .

② $هـ(س) \geq$ صفر اذا كان $ن$ عدد زوجي .

دراسة اشارتها تتم بدراسة اشارة ما داخلها (ما داخل الجذر) :-

مثال : ادرس اشارة المقتران $ق(س) = \sqrt{٢س + ١}$




$٢س + ١ = ٠$

$٢س = -١$

$س = -\frac{١}{٢}$

بما ان الجذر تربيعي ( زوجي ) فان $ق$ معرف ، الفترة $[-\frac{١}{٢} ، ∞)$ ، $ق(س) \geq$ صفر

$ق$ غير معرف ، الفترة $(-∞ ، -\frac{١}{٢})$

غير معرف اي ان كل عدد ضمن الفترة $(-∞ ، -\frac{١}{٢})$ لا نستطيع معرفة قيمة لناتج $ق$ المقترانه

مثال : ادرس اشارة المقتران $ق(س) = \sqrt[٣]{س^٢ - ١}$

$س^٢ - ١ =$ صفر

$س^٢ = ١ \Leftarrow س = ١$

$ق(س) \geq$ صفر ، الفترة $[١ ، ∞)$ لان $ن$ زوجي

$ق(س)$ لا صفر ، الفترة $(-∞ ، ١)$

٤ المقترانات المثلثية : جا ، جتا ، ظا ، قا ، قتا ، ظتا :-

مجالها : ① جا س ، جتا س مجالها $ح$ .

② ظا س ، ظتا س ، قا س ، قتا س تحول كسر وتستثنى اصفار المقام من $ح$ .

مثال $ق(س) = ظا س = \frac{جا س}{جتا س}$

جتا س $= ٠ \Leftarrow س = ٩٠ ، ٢٧٠ ، ... = \frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢} ، \frac{٥\pi}{٢} ، ...$

$= \frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$ حيث $ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ...$

٥ اقتران القيمة المطلقة : $ق(س) = |هـ(س)|$

مجاله هو مجال ما بداخله $هـ(س)$ وهذا $\in ح$

مهم : اذا كانت $|س| = ٢$ فان $س = ٢$ أو $س = -٢$

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : اذا كانت $|٣س - ٧| = ٥$ فجد قيمة س

الحل : إما $٣س - ٧ = ٥$

$٣س = ١٢ \Leftarrow س = ٤$

أو $٣س - ٧ = -٥$

$٣س = ٢ \Leftarrow س = \frac{٢}{٣}$

* إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة : تعني كتابته بدون رمز القيمة المطلقة كإقتران متشعب.

الخطوات ① نحل المعادلة الناتجة من مساواة ما بداخله بالصفر ونرسم الإشارة

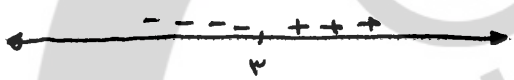
② نكتب الإقتران كما هو في المناطق الموجبة ونضرب سالب في السالب

مثال : اوجد تعريف الإقتران $ق(س) = |٢س - ٦|$

$٢س - ٦ =$ صفر

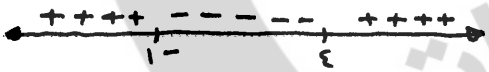
$٢س = ٦$

$س = ٣$




$\Leftarrow ق(س) = \begin{cases} ٢س - ٦ & ، س \geq ٣ \\ -(٢س - ٦) & ، س < ٣ \end{cases}$ ويمثل العدد ٣ نقطة تشعب

مثال : اوجد تعريف الإقتران $ق(س) = |س^٢ - ٣س - ٤|$




$س^٢ - ٣س - ٤ = ٠$

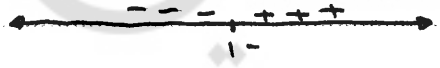
$(س - ٤)(س + ١) = ٠$

إما $س - ٤ = ٠ \Leftarrow س = ٤$

أو $س + ١ = ٠ \Leftarrow س = -١$

$\Leftarrow ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٣س - ٤ & ، س \geq -١ \text{ ، } س > ٤ \\ -(س^٢ - ٣س - ٤) & ، -١ < س < ٤ \end{cases}$

مثال اوجد تعريف الإقتران $ق(س) = |س + ١| + ٢س$




$س + ١ = ٠ \Leftarrow س = -١$

$ق(س) = \begin{cases} س + ١ + ٢س & ، س \geq -١ \\ -(س + ١) + ٢س & ، س < -١ \end{cases}$

$\Leftarrow ق(س) = \begin{cases} ٣س + ١ & ، س \geq -١ \\ -١ & ، س < -١ \end{cases}$

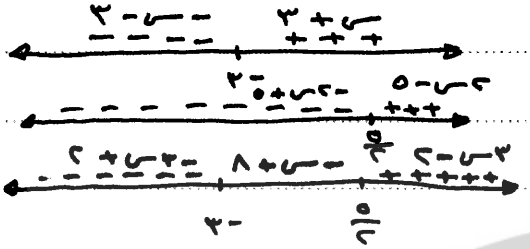
مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم : محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : اعد تعريف الاقتران $هـ(س) = |س+٣| + |٢س-١٥|$

$س+٣=٠ \Leftarrow س=-٣$

$٢س-٥=٠ \Leftarrow س=\frac{٥}{٢}$




$|س+٣| + |٢س-١٥|$

$$هـ(س) = \begin{cases} -٢س+٢ & ، س \leq \frac{٥}{٢} \\ -س+٨ & ، -٣ \leq س < \frac{٥}{٢} \\ ٢س-٢ & ، س < -٣ \end{cases}$$

1. اقتران اكبر عدد صحيح : $هـ(س) = [س]$

يُقرأ اكبر عدد صحيح اقل أو يساوي $س$.

* $[أ] = أ$ ← اذا كان أ عدد صحيح .

$[أ] = أ$

* مثال : $[٣٫١] = ٣$

$[-٤٫١] = -٥$

* $[أ+ب] = [أ] + ب$ ، إذا كان $ب \in ص$

مثال : $[س+٤] = [س] + ٤$

* اذا كان $[أ] = ب$ فإن $ب \leq أ < ب+١$

* اذا كانت $أ \notin ص$ فإن

$[أ^+] = [أ^-] = [أ]$

مثال $[٣٫٤] = [٣٫٥] = [٣٫٣] = ٣$

هنا $أ = ٣٫٤$ ، $أ^+ = ٣٫٥$ ، $أ^- = ٣٫٣$

* كيف لنجد تعريفه :

① نساوي ما بداخله بالصفر ونجد جذر البناء

② نجد طول المدرجة $ل = \frac{١}{\text{معامل } س}$

③ نضيف الجذر على خط الاعداد ثم نضيف اعداد على يمينه ويساره بمسافة طول المدرجة .

④ اذا كان معامل $س$ موجباً نضع الارقام ١٫٢٫٣٫٠٫١٫٠٫٠٫٠ على يمين الجذر والاعداد -١٫-٢٫٠٫٠٫٠ على يسار الجذر (الارقام هي نتيجة الاقتران ضمنه للفترة) والعكس اذا كان معامل $س$ سالباً .

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : اوجد تعريف الاقتران $هـ(س) = [\![ ٣س - ٢ ]\!]$

$٣س - ٢ = ٠$

$س = \frac{٢}{٣}$ (العدد)

$ل = \frac{١}{٣}$ (طول المدرج)

$$هـ(س) = \begin{cases} -١ & ، \frac{١}{٣} \le س < \frac{٢}{٣} \\ ٠ & ، \frac{٢}{٣} \le س < ١ \\ ١ & ، ١ \le س < \frac{٤}{٣} \\ \vdots & \end{cases}$$

مثال : اوجد تعريف الاقتران $هـ(س) = [\![ \frac{١}{٢}س - ٣ ]\!] + ٢س$

$\frac{١}{٢}س - ٣ = ٠ \Leftarrow س = \frac{٣}{\frac{١}{٢}} = ٦$

$ل = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ٢$

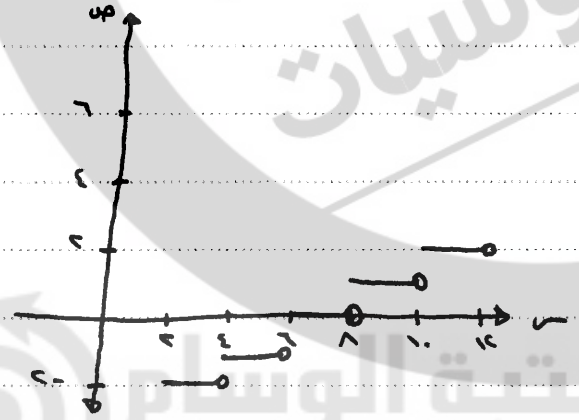
$$هـ(س) = \begin{cases} -١ + ٢س & ، ٤ \le س < ٦ \\ ٠ + ٢س & ، ٦ \le س < ٨ \\ ١ + ٢س & ، ٨ \le س < ١٠ \end{cases} = \begin{cases} ٢س - ١ & ، ٤ \le س < ٦ \\ ٢س & ، ٦ \le س < ٨ \\ ٢س + ١ & ، ٨ \le س < ١٠ \end{cases}$$

ملاحظة : رسم اقتران اكبر عدد صحيح يشبه المدرج ولذلك سمي بالاقتران المدرجي .

لاحظ رسم الاقتران السابق

$هـ(س) = [\![ \frac{١}{٢}س - ٣ ]\!]$ بدون $٢س$

$$هـ(س) = \begin{cases} -١ & ، ٤ \le س < ٦ \\ ٠ & ، ٦ \le س < ٨ \\ ١ & ، ٨ \le س < ١٠ \end{cases}$$




مهم ① اذا كانه بعامل $س > صفر \Leftarrow$ نضع المساواة عا بداية المدرج .

② " " $س < صفر \Leftarrow$ " " نهاية المدرج .

③ اذا اعطانا السؤال فترة كمجال للاقتران نلتزم بالفترة المعطاة .

④ مما سبقه نرى انه مجال اقتران اكبر عدد صحيح هو $(ع)$ ومداه $(ص)$ اعداد صحيحة .

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الرياضيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : مثل الاقتران بيانياً حيث $ق(س) = [-\frac{1}{2}س]$ ضمن الفترة $[-٢، ٩]$

$-\frac{1}{2}س = ٠ \Leftarrow س = ٠$ الجذر

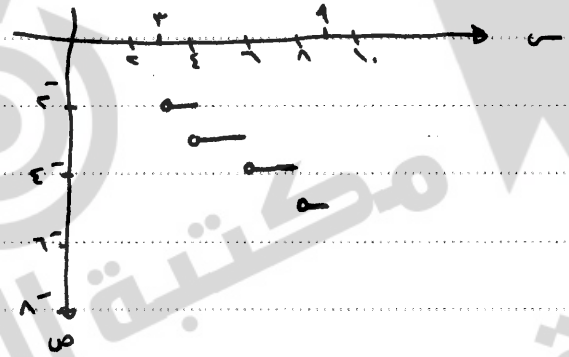
$ل = \frac{١}{|-\frac{1}{2}|} = ٢$ طول الدرجة

$ق(س) = \begin{cases} -٢ & ، -٢ \leq س < ٠ \\ -٣ & ، ٠ \leq س < ٢ \\ -٤ & ، ٢ \leq س < ٤ \\ -٥ & ، ٤ \leq س \leq ٩ \end{cases}$

لاحظ مساواة عند ٣ لأنها ضمن الفترة $[٤، ٩]$

لاحظ لا يوجد مساواة في البداية مثل ٠

نهاية الفترة .

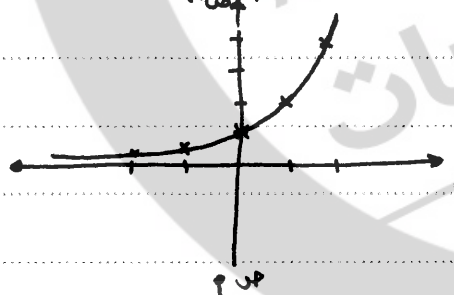


٧) الاقتران الأسي : صورته $ق(س) = أ^{ب س}$ ، $أ > ٠ ، أ \neq ١$

أشهرهم : الاقتران الأسي الطبيعي $ق(س) = هـ^{س}$ حيث $هـ \approx ٢،٧١٨$ العدد النيبري

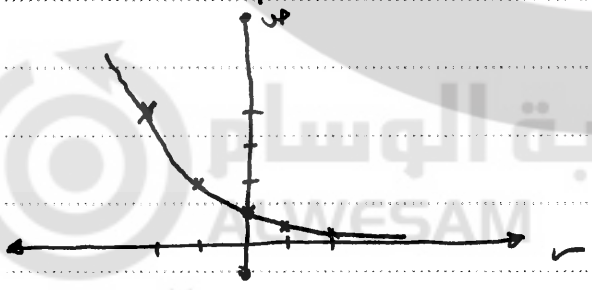
* مجاله : مجموعة الأعداد الحقيقية والمدى هو $(ع^+)$ الأعداد الحقيقية الموجبة .

مثال : مثل بيانياً الاقتران $ق(س) = ٢^{س}$



| س | ٢ | ١ | ٠ | -١ | -٢ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص | ٤ | ٢ | ١ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

مثال : مثل بيانياً الاقتران $ق(س) = ٢^{-س}$



| س | ٢ | ١ | ٠ | -١ | -٢ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | ١ | ٢ | ٤ |

من خلال التمثيل يتبين لنا خصائص بيانية للاقتران الأسي :

① دائماً يقطع محور الصادات في النقطة $(٠، ١)$ .

② لا يقطع محور السينات بيانياً ( محاه $ع^+$ )

③ مجاله الأعداد الحقيقية ومداه قيم $ص$ موجبة دائماً

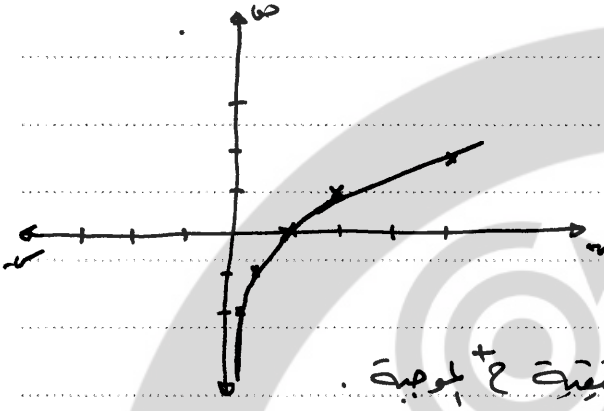
مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الرياضيات
الوسام | محمد قريع
تم تحميل هذا الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

④ الدالتان $أ^{س}$ ، $ب^{س}$ متماثلتان ومحور التماثل $س = صفر$ .

⑧ الدالة اللوغاريتمية : $د(س) = لو_{ب} س$ ، $ب > صفر$ ، $ب \neq ١$

* مثل الدالة $د(س) = لو_{٢} س$ ⟸ $٢^{ص} = س$ نحوله للصورة الأسية




| س | ٤ | ٢ | ١ | $\frac{١}{٢}$ | $\frac{١}{٤}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص | ٢ | ١ | ٠ | -١ | -٢ |

$لو_{ب} س$ : يعين س ما داخل اللوغاريتم ، ب إلى ما .

من خلال الرسم نستنتج الخصائص التالية :-

① مجال الدالة اللوغاريتمية هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح$^{+}$ الموجبة .

② المدى هو (ح)

③ يقطع محور السينات في النقطة (١ ، صفر)

④ لا يقطع محور الصادات أبداً .

⑤ متزايدة في حالة إذا كانت $س > ١$ ومتناقصة إذا كانت $س < ١$

⑥ الدالتان $لو_{ب} س$ ، $لو_{\frac{١}{ب}} س$ متماثلتان ومحور التماثل هو $ص = صفر$

مكتبة الوسام ALWESAM
قسم الدوسيات
المعلم : محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

* الدرس الأول : نهاية الاقتران عند نقطة :

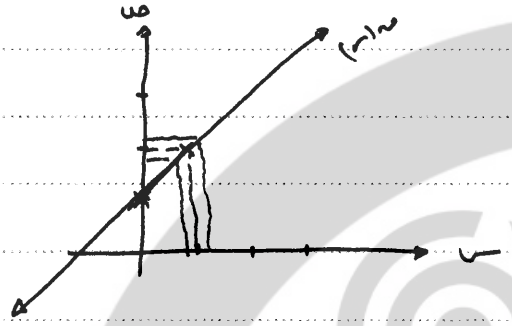
- مفهوم النهاية : دراسة سلوك اقتران ما عندما تقترب قيم (تتغير فيه) س من عدد معين

مثال : ادرس سلوك الاقتران ق(س) = س + ١ عندما تقترب قيم س من العدد (١) ؟

الحل : نكون جدول لقيم س ، ص

| س | ٠,٨ | ٠,٩ | ① | ١,١ | ١,٢ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص | ١,٨ | ١,٩ | ② | ٢,١ | ٢,٢ |

(-١ ، +١)




من الجدول ومن الرسم نلاحظ أنه كلما اقتربت قيم س من العدد ① من جهة اليسار تقترب قيم ق(س) من العدد ② لذلك نقول أن نهاية ق(س) = ٢ وكذلك كلما اقتربت قيم س من العدد ① من جهة اليمين تقترب قيم ق(س) من العدد ② وهنا نكتب أن نهاية ق(س) = ٢

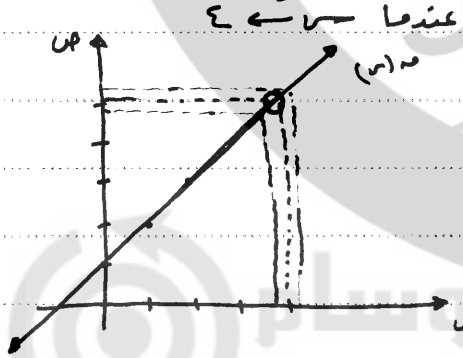
ملاحظة : اذا كانت نهاية ق(س) = نهاية ق(س) = ل تماماً فإن نهاية ق(س) = ل (موجودة)

اما اذا كانت نهاية ق(س) ≠ نهاية ق(س) فإن نهاية ق(س) غير موجودة .

مثال : ارسم منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^٢ - ٣س - ٤}{س - ٤}$ عندما س تؤول ٤

ثم جد نهاية ق(س) ؟

الحل : ق(س) = $\frac{(س - ٤)(س + ١)}{(س - ٤)}$ = س + ١




الجدول مرسوم في مثال الدرس (اعلاه صفحة)

من الرسم : نهاية ق(س) = نهاية ق(س) = ٥

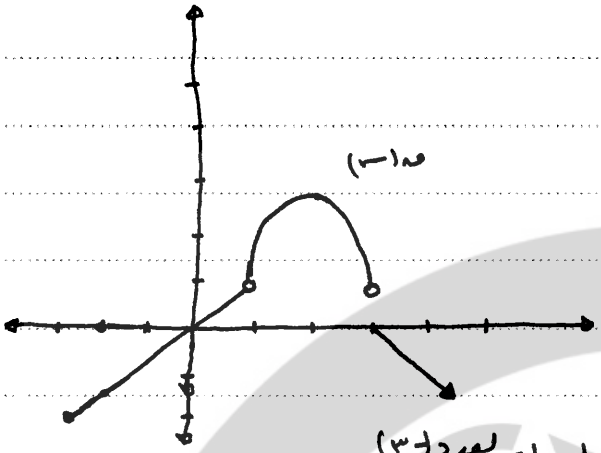
⇐ نهاية ق(س) = ٥ (موجودة)

ملاحظة : لاحظ أن الاقتران غير معرف عند س = ٤ (صفر للمقام) . ومع ذلك كانت نهاية الاقتران عند س ← ٤ موجودة .

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : اعتماداً على الشكل المجاور جد النهايات التالية :




① $\lim_{س \to -1^+} ه(س)$ ② $\lim_{س \to 1} ه(س)$

③ $\lim_{س \to -3^-} ه(س)$ ④ $\lim_{س \to 3} ه(س)$

الحل : ① $\lim_{س \to -1^+} ه(س) = 1$

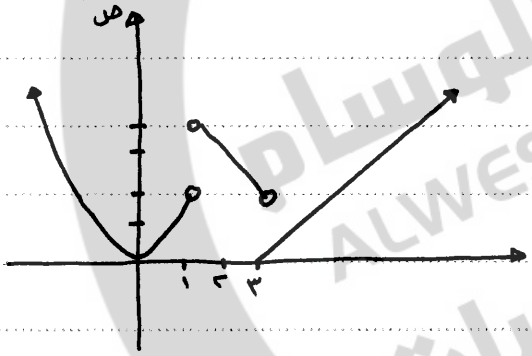
② $\lim_{س \to 1} ه(س) = 1$ لأنه $\lim_{س \to 1^-} ه(س) = 1$

هنا لاحظ أن ه غير معرف عند $س = 1$

③ $\lim_{س \to -3^-} ه(س)$ غير موجودة لأنه لا يرسم عمودياً بعد (-٣)

مهم ولذلك حتى يكون للاقتران نهاية عند نقطة يجب أن يكون الاقتران معرفاً عما يمين وعما يسار تلك النقطة وليس شرطاً أن يكون معرفاً عند النقطة تماماً .

مثال : من الرسم المجاور حدد النقاط التي ليس للاقتران نهاية عندها ؟

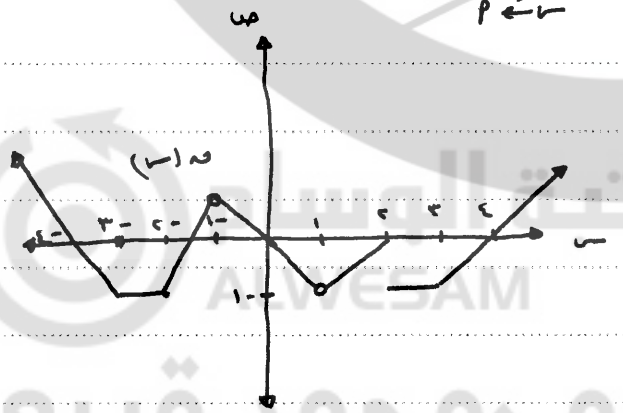



الاجابة : النقاط هي $\{3, 1\}$

مهم : في كل قفزة للاقتران (ارفع القلم عند الرسم) تكون النهاية غير موجودة عند س .

مهم : عند اطراف الاقتران تكون النهاية غير موجودة لأنه احد طرفيه يكون غير معرف .

مثال : من الرسم المجاور حدد قيم P التي عندها $\lim_{س \to P} ه(س) = -1$




الاجابة :

$P = \{-3, -2, 1, 3\}$

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم : محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

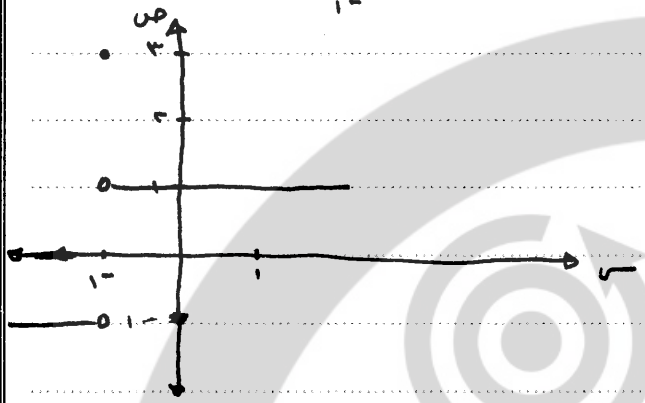
**مثال** : ارسم لدتقرابه $ه(س) = \begin{cases} \frac{|س+1|}{س+1} & ، س \neq -1 \\ 3 & ، س = -1 \end{cases}$ ثم جد $\lim_{س \to -1} ه(س)$

**الحل** : $|س+1|$ ← قيمة مطلقة نفيد تعريفه

$س+1 = 0 \Leftarrow س = -1$

| $س+1$ | $-(س+1)$ |
|---|---|
| + | − |

$\Leftarrow ه(س) = \begin{cases} \frac{س+1}{س+1} = 1 & ، س > -1 \\ \frac{-(س+1)}{س+1} = -1 & ، س < -1 \\ 3 & ، س = -1 \end{cases}$




$\Leftarrow \lim_{س \to -1^+} ه(س) = 1$

$\lim_{س \to -1^-} ه(س) = -1$

$\Leftarrow \lim_{س \to -1} ه(س)$ غير موجودة .

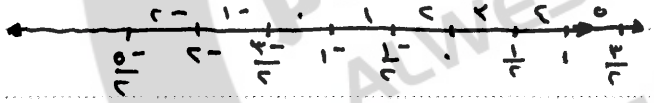
**مثال** : اذا كانه $ق(س) = [2س + 3]$ فارسم لدتقرابه $ه(س)$ ثم جد لدنهايات التالية :

① $\lim_{س \to -\frac{3}{2}} ه(س)$ ② $\lim_{س \to \frac{1}{2}} ه(س)$ ③ $\lim_{س \to \frac{1}{2}} ه(س)$ ④ $\lim_{س \to \frac{1}{2}} ه(س)$

**الحل** : $2س + 3 = 0 \Leftarrow س = -\frac{3}{2}$ الجذر

$ل = \frac{1}{\text{امعامل } س} = \frac{1}{2}$

$ه(س) = \begin{cases} -1 & ، -2 \geq س > -\frac{3}{2} \\ 0 & ، -\frac{3}{2} \geq س > -1 \\ 1 & ، -1 \geq س > -\frac{1}{2} \\ 2 & ، -\frac{1}{2} \geq س > 0 \\ 3 & ، 0 \geq س > \frac{1}{2} \\ 4 & ، \frac{1}{2} \geq س > 1 \\ \vdots & \end{cases}$




① $\lim_{س \to -\frac{3}{2}^+} ه(س) = -1$

$\lim_{س \to -\frac{3}{2}^-} ه(س) = 0$

$\Leftarrow \lim_{س \to -\frac{3}{2}} ه(س)$ غير موجودة .

② $\lim_{س \to \frac{1}{2}^+} ه(س) = 2$ ، $\lim_{س \to \frac{1}{2}^-} ه(س) = 1$

$\Leftarrow \lim_{س \to \frac{1}{2}} ه(س)$ غير موجودة .

③ $\lim_{س \to \frac{1}{2}^+} ه(س) = 4$ ، $\lim_{س \to \frac{1}{2}^-} ه(س) = 3$

$\Leftarrow \lim_{س \to \frac{1}{2}} ه(س)$ غير موجودة

④ $\lim_{س \to \frac{1}{2}^+} ه(س) = 2$ ، $\lim_{س \to \frac{1}{2}^-} ه(س) = 2$

$\Leftarrow \lim_{س \to \frac{1}{2}} ه(س) = 2$

**ملاحظة** : اذا كانه ناتج لتعويض (٠) في اقترابه لبعدد صحيح عدد صحيح فارنه لنهاية غير موجودة

اما اذا كانه ناتج لتعويض كسراً (غير صحيح) فارنه لنهاية موجودة وتساوي ناتج لتعويض .

ملاحظة مهمة جداً للاستدلال اذ لا بد من اعادة التعريف للحل .

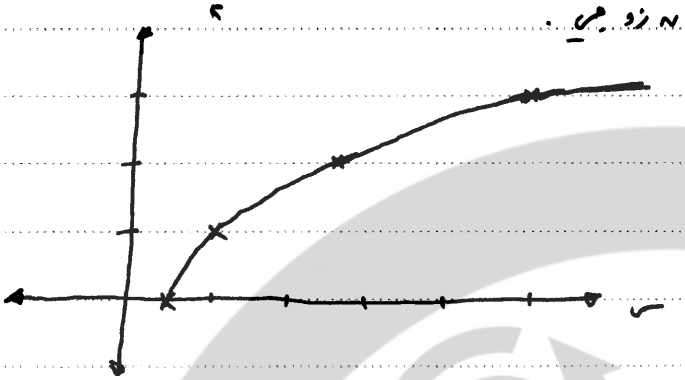
مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم : محمد قريع
www.alwesam.info
موقع مكتبة الوسام التعليمي

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

**مثال** : ارسم لإقتران $هـ(س) = \sqrt{٢س - ١}$ ثم اوجد $\lim_{س \to \frac{١}{٢}^+} هـ(س)$ ؟

**الحل** : ندرس إشارة : $٢س - ١ \geq ٠ \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow$ هـ معرف بالفترة $[\frac{١}{٢} ، \infty)$ لذا نأخذ يمين .



| س | $\frac{١}{٢}$ | ١ | ٥,٢ |
|---|---|---|---|
| ص | ٠ | ١ | ٢ |

$\Leftarrow \lim_{س \to \frac{١}{٢}^-} هـ(س)$ غير موجودة لأنه لإقتران غير معرف يسار $\frac{١}{٢}$

$\lim_{س \to \frac{١}{٢}^+} هـ(س) =$ صفر

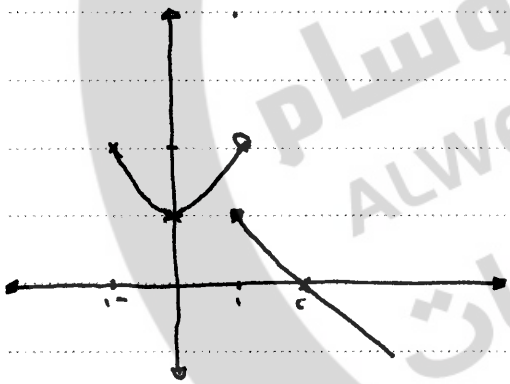
$\Leftarrow \lim_{س \to \frac{١}{٢}}$ هـ(س) غير موجودة .

**مثال** : $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، س < ١ \\ ٢ - س & ، س \geq ١ \end{cases}$ ارسم هـ(س) ثم جد $\lim_{س \to ١} هـ(س)$ ، $\lim_{س \to ٠} هـ(س)$

**الحل** : نرسم $س^٢ + ١$ : $س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{٠}{٢} =$ صفر

$ص = (٠)^٢ + ١ = ١$

احداثيات رأس القطع (٠ ، ١)



| س | ١ | ٠ | ١- |
|---|---|---|---|
| ص | ٢ | ١ | ٢ |

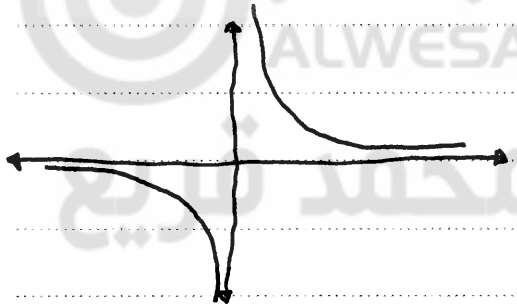
نرسم $٢ - س$

| س | ١ | ٢ |
|---|---|---|
| ص | ١ | ٠ |

من الرسم : $\lim_{س \to ١^+} هـ(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ١^-} هـ(س) = ٢$

$\Leftarrow \lim_{س \to ١}$ هـ(س) غير موجودة

بينما $\lim_{س \to ٠} هـ(س) = ١$



**مثال** : من الرسم جد $\lim_{س \to ٠} هـ(س)$

الحل : $\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = \infty$

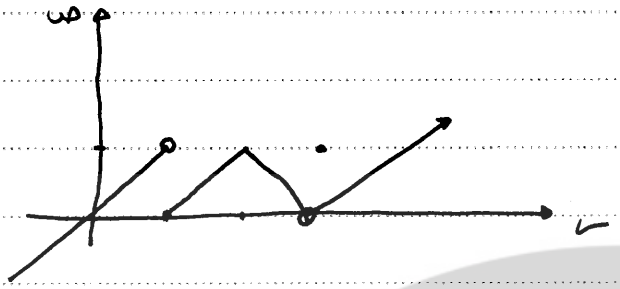
$\lim_{س \to ٠^-} هـ(س) = -\infty$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٠} هـ(س) =$ غير موجودة .

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الرياضيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

حلول التمارين والمسائل ص ٢٠ + ٢١ :-

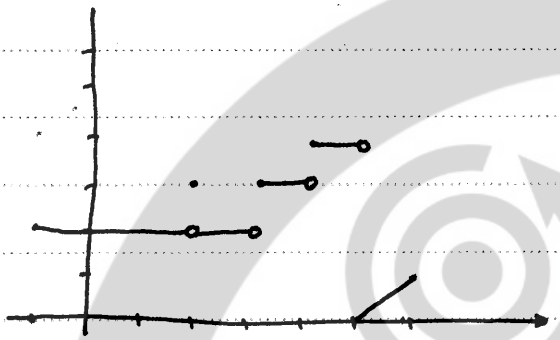


س ١) أ) $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) غير موجود (قفزة)

ب) $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س) = ١

ج) $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = صفر

د) $\lim_{س \to ٠}$ هـ(س) = صفر

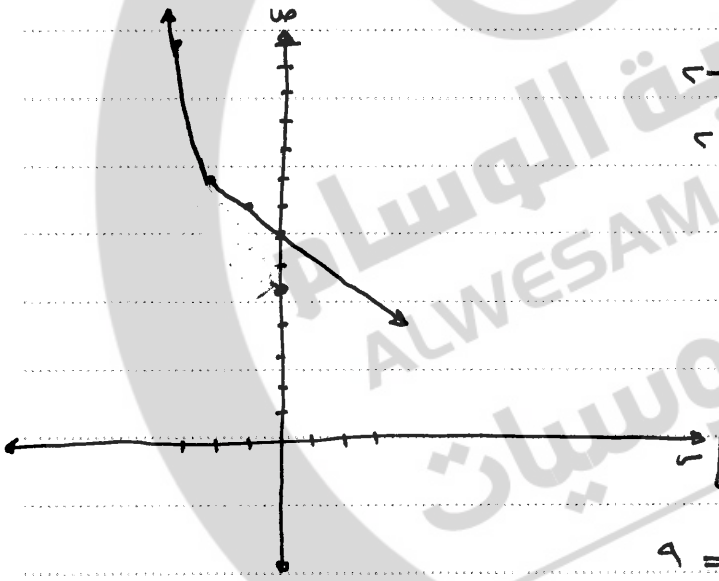


س ٢) أ) قيم م التي تجعل $\lim_{س \to م}$ هـ(س) غير موجودة

م = {-١، ٣، ٤، ٥، ٦}

ب) م $\Leftarrow$ $\lim_{س \to م}$ هـ(س) = ٣

م = {٣، ٤} الفترة المفتوحة .



س ٣) أ) ع(س) = $\begin{cases} ٧ - س & ، س \leq -٢ \\ س^٢ + ٥ & ، س > -٢ \end{cases}$

$س \to -٢$

$٧ - س \Leftarrow$

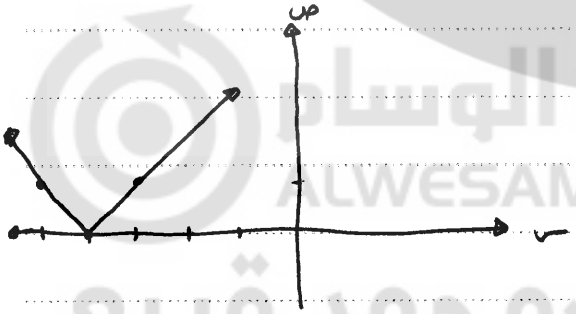
| س | -٢ | -١ | ٠ |
|---|---|---|---|
| ص | ٩ | ٨ | ٧ |

$س^٢ + ٥ \Leftarrow$

| س | X | X | ٠ | -١ | -٢ | -٣ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ص | | | ٥ | ٦ | ٩ | ١٤ |

$\lim_{س \to -٢^-}$ $٧ - س$ = ٩ $\lim_{س \to -٢^+}$ $س^٢ + ٥$ = ٩

$\Leftarrow \lim_{س \to -٢}$ هـ(س) = ٩



س ٣) ب) ت(س) = |س + ٤| $س \to -٤$

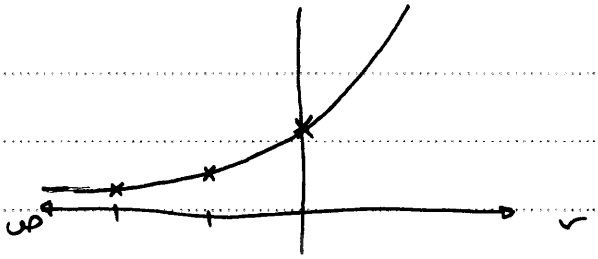
ت(س) = $\begin{cases} س + ٤ & ، س \geq -٤ \\ -س - ٤ & ، س < -٤ \end{cases}$

| س | -٣ | -٤ | -٥ |
|---|---|---|---|
| ص | ١ | ٠ | ١ |

$\Leftarrow \lim_{س \to -٤}$ هـ(س) = صفر .

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

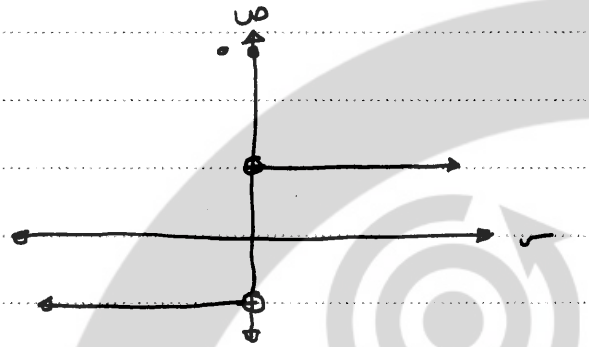
مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info



٤) أ) $هـ(س) = ٢^{س}$ ، $س \to -١$

| س | ٠ | -١ | -٢ |
|---|---|---|---|
| ص | ١ | $\frac{١}{٢}$ | $\frac{١}{٤}$ |

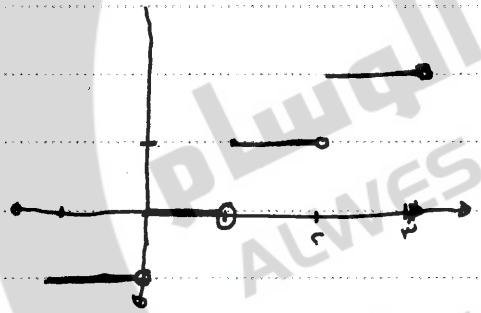
$\therefore$ نهـا $هـ(س) = \frac{١}{٢}$ $\quad س \to -١$



ب) $ف(س) = \begin{cases} \frac{|س|}{س} & ، س \neq ٠ \\ ٥ & ، س = ٠ \end{cases}$ $\quad س \to ٠$

$\Leftarrow ف(س) = \begin{cases} ١ & ، س > ٠ \\ -١ & ، س < ٠ \\ ٥ & ، س = ٠ \end{cases}$

$\therefore$ نهـا $ف(س)$ = غير موجودة
$س \to ٠$



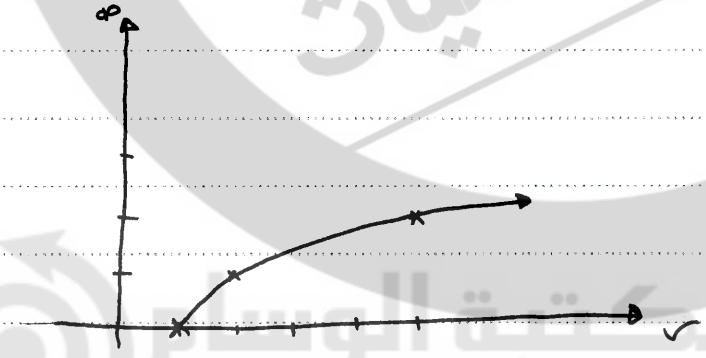
جـ) $د(س) = [س]$ ، $س \in [٠, ٤]$ $\quad س \to ١$

$د(س) = \begin{cases} ٠ & ، ٠ \leq س < ١ \\ ١ & ، ١ \leq س < ٢ \\ ٢ & ، ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$

$\therefore$ نهـا $هـ(س)$ = غير موجودة
$س \to ١$

٥) $هـ(س) = \sqrt{س - ١}$

| س | ١ | ٢ | ٥ |
|---|---|---|---|
| ص | ٠ | ١ | ٢ |



أ) نهـا $هـ(س) = ١$
$س \to ٢^{+}$

ب) نهـا $هـ(س) = ١$
$س \to ٢^{-}$

جـ) نهـا $هـ(س) = ١$
$س \to ٢$

د) نهـا $هـ(س)$ = غير موجودة
$س \to ١$

لأنه نهـا $هـ(س)$ غير موجودة
$س \to ١$
$هـ(س)$ غير معرف عند $س = ١$ .

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم: محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

الدرس الثاني : نظريات النهايات :-

١ * $\lim_{س \to أ} ب = ب$ ، أ ، ب ∈ ح

* $\lim_{س \to أ} س^{ن} = أ^{ن}$ ، أ ∈ ح ، ن ∈ ط

٢ اذا كانت $\lim_{س \to أ} هـ(س) = ل$ ، $\lim_{س \to أ} و(س) = ك$ فان :

* $\lim_{س \to أ} (هـ(س) \pm و(س)) = \lim_{س \to أ} هـ(س) \pm \lim_{س \to أ} و(س) = ل + ك$

* $\lim_{س \to أ} م\ هـ(س) = م \lim_{س \to أ} هـ(س) = م\ ل$

* $\lim_{س \to أ} (هـ(س) \times و(س)) = \lim_{س \to أ} هـ(س) \times \lim_{س \to أ} و(س) = ل \times ك$

* $\lim_{س \to أ} \frac{هـ(س)}{و(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} هـ(س)}{\lim_{س \to أ} و(س)} = \frac{ل}{ك}$ ، ك ≠ صفر

* $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{هـ(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} هـ(س)} = \sqrt[ن]{ل}$ ، ل > صفر عندما يكون ن زوجي .

* $\lim_{س \to أ} (هـ(س))^{ن} = (\lim_{س \to أ} هـ(س))^{ن} = ل^{ن}$ ، ن ∈ ط

**مهم جداً** اذا كانت $هـ(س)$ كثير حدود فان $\lim_{س \to أ} هـ(س) = هـ(أ)$

**مهم جداً** نستعمل النظريات عندما يكون هناك نهايات لمقدارات غير معلومة القواعد .

**مثال** : اذا كانت $\lim_{س \to ١} ٣\ هـ(س) - س^{٢} + ١ = ٥$ فجد $\lim_{س \to ١} ٢(هـ(س))^{٢}$

**الحل** : نوزع $٣ \lim_{س \to ١} هـ(س) + \lim_{س \to ١} -س^{٢} + ١ = ٥$

$٣ \lim_{س \to ١} هـ(س) + (-١)^{٢} + ١ = ٥$

$٣ \lim_{س \to ١} هـ(س) = ٥ \Leftarrow \lim_{س \to ١} هـ(س) = \frac{٥}{٣}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ١} ٢(هـ(س))^{٢} = ٢ (\lim_{س \to ١} هـ(س))^{٢} = ٢ (\frac{٥}{٣})^{٢}$

$= \frac{٥٠}{٩}$

لاحظ $\lim_{س \to ١} -س^{٢} + ١$ عوضنا مباشرة لأنه كثير حدود .

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

**مثال** : اذا كانه $ه(س) = \begin{cases} ٣س+٢ & ، س \leq ١ \\ س^٢ & ، س > ١ \end{cases}$ فأوجد

① $\lim_{س \to ١} ه(س)$ ② $\lim_{س \to ٢} ه(س)$ ③ $\lim_{س \to ٤} ه(س-٢)$

**الحل** : ① العدد (١) نقطة تعيين لذلك

$\lim_{س \to ١^+} ٣س+٢ = ٥$

$\lim_{س \to ١^-} س^٢ = (١)^٢ = ١$ $\Rightarrow \lim_{س \to ١} ه(س)$ غير موجودة

② $\lim_{س \to ٢} ٣س+٢ = ٣ \times ٢ + ٢ = ٨$

③ داخل ه هو $(س-٢) \Rightarrow$ نفرض $ع = س-٢ \Rightarrow$

$س \to ٤ \Leftarrow ع \to ٢$

$\lim_{س \to ٤} ه(س-٢) = \lim_{ع \to ٢} ه(ع)$

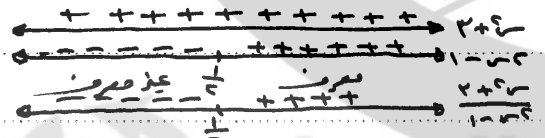
$= \lim_{ع \to ٢} ٤ع+٢ = ٤ \times ٢ + ٢ = ٨$

**مثال** : اذا كانه $ه(س) = \frac{س^٢+٣}{س^٢-١}$ جد ① $\lim_{س \to ١} ه(س)$ ② $\lim_{س \to ١} ه(س)$

**الحل** : ① $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢+٣}{س^٢-١} = \frac{\lim_{س \to ١} س^٢+٣}{\lim_{س \to ١} س^٢-١} = \frac{(١)^٢+٣}{(١)^٢-١} = \frac{٤}{١} = ٤$

وهنا نستطيع التعويض المباشر مباشرة دون تحويل لتحقيقه نظرية الصفحة

$\Leftarrow \lim_{س \to ١^+} \frac{س^٢+٣}{س^٢-١} = \frac{(١)^٢+٣}{(١)^٢-١} = ٤$




② $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢+٣}{س^٢-١} = \lim_{س \to ١} \frac{س^٢+٣}{س^٢-١} = \frac{(١)^٢+٣}{(١)^٢-١} = \frac{٤}{٠} = ٢$

لأنه هو معرف عما يمينه (١) ويسارها

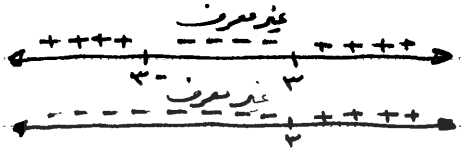
**ملاحظة مهمة** : نعمل عادة لجوء لنظرية نعوض مباشرة الا اذا كانه ناتج التعويض $\frac{عدد}{٠}$ ، $\frac{٠}{٠}$ عندها سنلجأ لعدة طرق للتخلص من هذه الحالة .

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : جد ① $\lim_{س \to ٣^+} \frac{\sqrt{س^٢ - ٩}}{\sqrt{س - ٣}}$ ، ② $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^٢ - ٩}}{\sqrt{س - ٣}}$

الحل : نجد مجال الدالة : $س^٢ - ٩ \geq ٠ \Leftarrow س = \pm ٣$




$س - ٣ \geq ٠ \Leftarrow س \geq ٣$

① بما أنه لإقتراب معرف ما يمينه العدد ٣ فإنه

$$\lim_{س \to ٣^+} \frac{\sqrt{س^٢ - ٩}}{\sqrt{س - ٣}} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{\sqrt{س^٢ - ٩}}{\sqrt{س - ٣}}$$

$$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{\sqrt{(س - ٣)(س + ٣)}}{\sqrt{(س - ٣)}}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \sqrt{س + ٣}$$

$$= \sqrt{٣ + ٣} = \sqrt{٦}$$

هنا حللنا للتخلص من وضعية الصفر وتجوز دمج الجذرية في حالة النهاية إذا كانت الإقتراب معرفاً عند العدد .

② البسط والمقام غير معرفان ما يسار العدد ٣ لذلك لا يجوز دمج الجذرية وعليه فإن $\lim_{س \to ٣^-} \frac{\sqrt{س^٢ - ٩}}{\sqrt{س - ٣}}$ غير موجودة

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^٢ - ٩}}{\sqrt{س - ٣}}$ غير موجودة .

مثال : إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{هـ(س) - ٤}{هـ(س) + س} = ٧$ وكانت $\lim_{س \to ١} \frac{هـ(س)}{س^٢} = ٣$ فجد

① $\lim_{س \to ١} هـ(س)$ ، ② $\lim_{س \to ١} \frac{هـ(س)}{س^٢ - ٨}$

الحل : $\lim_{س \to ١} \frac{هـ(س)}{س^٢} = ٣ \Leftarrow \frac{\lim_{س \to ١} هـ(س)}{(١)^٢} = ٣ \Leftarrow \lim_{س \to ١} هـ(س) = ٣$

بالتعويض $\frac{\lim_{س \to ١} هـ(س) - ٤}{\lim_{س \to ١} هـ(س) + ١} = ٧ \Leftarrow \frac{\lim_{س \to ١} هـ(س) - ٤}{٤} = ٧$

$\Leftarrow \lim_{س \to ١} هـ(س) - ٤ = ٢٨$

$\Leftarrow \lim_{س \to ١} هـ(س) = ٢٨ + ٤$

$\lim_{س \to ١} هـ(س) = ٣٢$ ---- ① المطلوب

الفرع $\lim_{س \to ١} \frac{هـ(س)}{س^٢ - ٨} = \frac{\lim_{س \to ١} هـ(س)}{(١)^٢ - ٨} = \frac{٣٢}{٨} = ٤$ ---- ② المطلوب

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

**ملاحظة** : في اقتراب العتبة المطلقة والبعد صحيح نعيد التعريف ثم نبحث عن النهاية .

**مثال** : اذا كان $هـ(س) = |س^2 - 1|$ فجد

① $\lim_{س \to 2^+} هـ(س)$ ② $\lim_{س \to 2^-} هـ(س)$

**الحل** : نعيد التعريف $س^2 - 1 = 0 \Leftarrow س = 2$

$$هـ(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & ، س \geq 2 \\ -(س^2 - 1) & ، س < 2 \end{cases}$$

① العدد 2 نقطة تشعب

$\lim_{س \to 2^+} -(س^2 - 1) = -(2^2 - 1) = -3$

$\lim_{س \to 2^-} (س^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3$

$\Leftarrow \lim_{س \to 2} هـ(س)$ غير موجودة .

② العدد -2 ليست نقطة تشعب

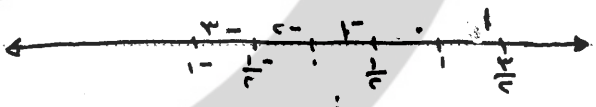
$\lim_{س \to -2} س^2 - 1 = (-2)^2 - 1 = 3$

**مثال** : اذا كان $هـ(س) = [س - 1]$ ، $د(س) = [-2س - 1]$ فجد ما يلي

① $\lim_{س \to \frac{1}{2}} هـ(س)$ ② $\lim_{س \to \frac{1}{2}} د(س)$ ③ $\lim_{س \to \frac{1}{2}} هـ(س) + د(س)$

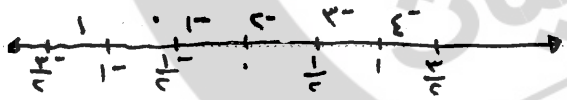
**الحل** نعيد التعريف لـ $هـ$ ، $د$ ، $هـ + د$

$س - 1 = 0 \Leftarrow س = 1$ ، $ك = \frac{1}{2}$




$$هـ(س) = \begin{cases} -1 & ، 0 \leq س < \frac{1}{2} \\ 0 & ، \frac{1}{2} \leq س < 1 \end{cases}$$

$-2س - 1 = 0 \Leftarrow س = -\frac{1}{2}$ ، $ك = \frac{1}{2}$




$$د(س) = \begin{cases} -2 & ، 0 \leq س < \frac{1}{2} \\ -3 & ، \frac{1}{2} \leq س < 1 \end{cases}$$

$$(هـ + د)(س) = \begin{cases} -3 & ، 0 \leq س < \frac{1}{2} \\ -3 & ، \frac{1}{2} \leq س < 1 \end{cases}$$

① $\lim_{س \to \frac{1}{2}} هـ(س)$ غير موجودة لأن $\lim_{س \to \frac{1}{2}^+} هـ(س) \neq \lim_{س \to \frac{1}{2}^-} هـ(س)$ ، $0 \neq -1$

② $\lim_{س \to \frac{1}{2}} د(س)$ غير موجودة لأن $\lim_{س \to \frac{1}{2}^+} د(س) \neq \lim_{س \to \frac{1}{2}^-} د(س)$ ، $-3 \neq -2$

③ $\lim_{س \to \frac{1}{2}} (هـ + د)(س) = -3$ لأن $\lim_{س \to \frac{1}{2}^+} (هـ + د)(س) = \lim_{س \to \frac{1}{2}^-} (هـ + د)(س) = -3$

**ملاحظة** : في المثال السابق النهاية غير موجودة اما حاصل جمعهما فنهايته موجودة عندما $س \to \frac{1}{2}$

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

* حلول إضافية لمسائل ص٢٩ :

٢) $\lim_{س \to -١} هـ(س) = \frac{١}{٢}$ ، $\lim_{س \to -١} د(س) = -٢$

ب) $\lim_{س \to -١} \left( هـ(س) - \frac{١}{د(س)} \right) = \lim_{س \to -١} هـ(س) - \frac{١}{\lim_{س \to -١} د(س)}$

$= \frac{١}{٢} - \frac{١}{-٢}$

$= ١$

ج) $\lim_{س \to -١} \sqrt[٣]{هـ(س) - \frac{١}{٢}} = \sqrt[٣]{\lim_{س \to -١} هـ(س) - \frac{١}{٢}}$

$= \sqrt[٣]{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}}$

$= \sqrt[٣]{صفر} = صفر$

تذكر : استعملنا النظريات لوجود اقترانات كما هو ، دون برهنة قواعد .

٣) $\lim_{س \to ٣} س^٢ - ٢أ س + ٥ = -٤$ ، جد قيمة أ

$-٤ = ٥ + ٣أ × ٢ - (٣)^٢$

$-٤ = ٥ + ٦أ - ٩ \Leftarrow -٤ = ٦أ - ١٤$

$\Leftarrow -٦أ = -٤ - ١٤$

$-٦أ = -١٨$

$أ = ٣$

٤) جد $\lim_{س \to -٣} \left( \frac{س^٣ - ٢}{س - ١} + س^٢ + ١ \right)$ لاحظ المقام ≠ صفر ⇐ تعويض مباشر

$= \frac{(-٣)^٣ - ٢}{-٣ - ١} + (-٣)^٢ + ١$

$= \frac{-٢٩}{-٤} + ٩ + ١ = \frac{٢٩}{٤} + \frac{٤ \times ١٠}{٤ \times ١}$

$= \frac{٦٩}{٤} = ١٧\frac{١}{٤}$

٥) $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ١٥ & ، س < ٣ \\ ٧ & ، س = ٣ \\ ٥ & ، س > ٣ \end{cases}$

أ) $\lim_{س \to -٣} د(س) = \lim_{س \to -٣} ٥ = ٥$

ب) $\lim_{س \to ٣} د(س)$ غير موجودة لأنه $\lim_{س \to ٣^+} س^٢ - ١٥ = (٣)^٢ - ١٥ = ٣ \neq \lim_{س \to ٣^-} د(س)$

ج) $\lim_{س \to ٠} د(س) = \lim_{س \to ٠} ٥ = ٥$

د) $\lim_{س \to ٤} د(س) = \lim_{س \to ٤} س^٢ - ١٥ = (٤)^٢ - ١٥$

$= ١٧$

مكتبة الوسام ALWESAM
قسم الرياضيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

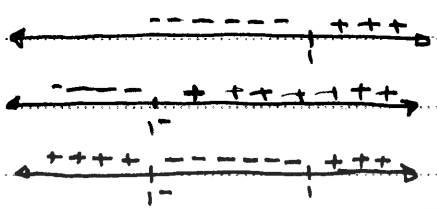
مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

س٥ أ) $ه(س) = \frac{س-١}{س+١}$ ، $س \to ١$

الحل

$س - ١ = ٠ \Leftarrow س = ١$

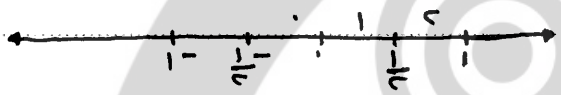
$س + ١ = ٠ \Leftarrow س = -١$




بينما $\lim_{س \to ١} \frac{س-١}{س+١}$ غير موجودة لأنه في غير معرف لما يساوي العدد (١) .

ب) $ه(س) = [١ + ٢س]$ ، $س \to \frac{١}{٢}$ ، $س \to \frac{١}{٣}$

الحل : نعيد تعريف الاقتران حول العدد $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$




$١ + ٢س = ٠ \Leftarrow س = -\frac{١}{٢}$

$ل = \frac{١}{٢}$

$$ه(س) = \begin{cases} ١ ، ٠ \leq س < \frac{١}{٢} \\ ٢ ، \frac{١}{٢} \leq س < ١ \end{cases}$$

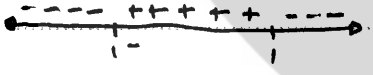
بينما $\lim_{س \to \frac{١}{٢}^+} ه(س) = ٢$ ، بينما $\lim_{س \to \frac{١}{٢}^-} ه(س) = ١$ $\Leftarrow$ بينما $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} ه(س)$ غير موجودة

بينما $\lim_{س \to \frac{١}{٣}} ه(س) =$ بينما $١ = ١$ العدد ٣ ليس نقطة تشعب .

ج) $م(س) = |١ - س^٢|$ ، $س \to -١$

الحل نعيد تعريف الاقتران $١ - س^٢ =$ صفر $\Leftarrow س^٢ = ١$

$\Leftarrow س = \pm ١$




$$م(س) = \begin{cases} ١ - س^٢ ، -١ \leq س \leq ١ \\ -(١ - س^٢) ، س < -١ ، س > ١ \end{cases}$$

بينما $\lim_{س \to -١^+} ١ - س^٢ = ١ - (-١)^٢ = ١ - ١ =$ صفر

بينما $\lim_{س \to -١^-} -(١ - س^٢) = -($صفر$) =$ صفر

$\Leftarrow$ بينما $\lim_{س \to -١} م(س) =$ صفر

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم : محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

الدرس الثالث : نهاية اقترانات كسرية :

مهم جداً: لإيجاد نهاية لاقتران ما تكون النتائج منه بالتعويض المباشر كلها مقبولة الا الحالة ÷ ، عندها نلجأ الى طريقة اخرى غير التعويض المباشر

مثل :-

1) بالتحليل الى العوامل : يستعمل عندما يكون هناك عامل مشترك بين البسط والمقام وتستخدم باختصار البسط والمقام حالة ÷ .

مثال : جد النهايات التالية :

① $\lim_{س\to ٢} \frac{س^٢-٤}{س-٢}$ = $\lim_{س\to ٢} \frac{(س-٢)(س+٢)}{(س-٢)}$ ، لاحظ انه ناتج التعويض ÷

$= \lim_{س\to ٢} س+٢ = ٤$

② $\lim_{س\to ٣} \frac{س^٢-٦س}{س^٣-٣س^٢}$ = $\lim_{س\to ٣} \frac{س(س-٣)}{س^٢(س-٣)}$ ، بالتعويض ÷

$= \lim_{س\to ٣} \frac{س}{س^٢} = \frac{٣}{(٣)^٢} = \frac{١}{٩}$

③ $\lim_{س\to ١} \frac{س^٢+٣س-٤}{س^٣-١}$ = $\lim_{س\to ١} \frac{(س-١)(س+٤)}{(س-١)(س^٢+س+١)}$ بالتعويض ÷

$= \lim_{س\to ١} \frac{س+٤}{س^٢+س+١} = \frac{١+٤}{١+١+١} = \frac{٥}{٣}$

④ $\lim_{س\to -١} \frac{(٢س^٢+س-١)^٢}{س^٢-١}$ = $\lim_{س\to -١} \frac{((٢س-١)(س+١))^٢}{(س-١)(س+١)}$ بالتعويض ÷

$= \lim_{س\to -١} \frac{(٢س-١)^٢(س+١)^٢}{(س-١)(س+١)}$

$= \lim_{س\to -١} \frac{(٢س-١)^٢(س+١)}{س-١}$

$= \frac{(-٣)^٢(٠)}{-٢} = \frac{٩ \times ٠}{-٢} = ٠$ صفر .

⑤ $\lim_{س\to ١} \frac{(س+٣)^٢-١٦}{س^٢-١}$ = $\lim_{س\to ١} \frac{(س+٣-٤)((س+٣)+٤)}{(س-١)(س+١)}$ ، بالتعويض ÷

$= \lim_{س\to ١} \frac{(س-١)(س+٧)}{(س-١)(س+١)}$

$= \lim_{س\to ١} \frac{س+٧}{س+١} = \frac{٨}{٢} = ٤$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

تدريب (٢) ص٣٢ : جد $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٣س - ٢}{س^٣ - ٨}$

مهم جداً } العدد (٢) عند تعويضه في البسط يكون الناتج صفر ⇐ (س - ٢) عامل من عوامل البسط

وكذلك بقية العوامل بالقسمة التركيبية والتحليل

| | $س^٣$ | $س^٢$ | $س$ | |
|---|---|---|---|---|
| ٢ | ١ | ٠ | -٣ | -٢ |
| | ١ | ٢ | ١ | ٠ |

$\Leftarrow س^٣ - ٣س - ٢ = (س - ٢)(س^٢ + ٢س + ١)$

| | $س^٢$ | $س$ | |
|---|---|---|---|
| -١ | ١ | ٢ | ١ |
| | ١ | ١ | ٠ |

$\Leftarrow س^٣ - ٨ = (س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)$

$$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ١)}{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢س + ١}{س^٢ + ٢س + ٤} = \frac{(٢)^٢ + ٢(٢) + ١}{(٢)^٢ + ٢(٢) + ٤}$$

$$= \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$$

مثال جد $\lim_{س \to ١} \frac{س^٤ - ٣س^٣ + س^٢ + ٣س - ٢}{س^٢ - ٢س + ١}$

لاحظ بعد ١ صفر للبسط

| | $س^٤$ | $س^٣$ | $س^٢$ | $س$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ١ | -٣ | ١ | ٣ | -٢ |
| | ١ | -٢ | -١ | ٢ | ٠ |

| | $س^٣$ | $س^٢$ | $س$ | |
|---|---|---|---|---|
| ١ | ١ | -٢ | -١ | ٢ |
| | ١ | -١ | -٢ | ٠ |

$$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^٣ - ٢س^٢ - س + ٢)}{(س - ١)(س - ١)}$$

لاحظ بقاء المرافقة ÷

$$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^٢ - س - ٢)}{(س - ١)}$$

$$= \lim_{س \to ١} س^٢ - س - ٢ = (١)^٢ - ١ - ٢$$

$$= -٢$$

توحيد المقامات : يستخدم اذا احتوى البسط او المقام على كسور جبرية عندها نوحد المقامات على الطريقة $\frac{ص}{ب} + \frac{ج}{د} = \frac{ص \times د + ج \times ب}{ب \times د}$

امثلة : ① جد $\lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}{س - ٣}$ =

الحل $= \lim_{س \to ٣} \frac{\frac{٣ - س}{٣س}}{س - ٣}$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(٣ - س)}{٣س(س - ٣)}$$

* لاحظ ضرب المقامين معاً. لأنه يكسر الجزئية في البسط

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{-١}{٣س} = \frac{-١}{٣ \times ٣} = -\frac{١}{٩}$$

② جد $\lim_{س \to ٠} \left(\frac{١}{س + ٤} - \frac{١}{٤ - س}\right) \frac{١}{س}$

الحل $= \lim_{س \to ٠} \frac{(٤ - س) - (٤ + س)}{(٤ + س)(٤ - س)} = \lim_{س \to ٠} \frac{-٢س}{س(٤ + س)(٤ - س)}$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{-٢}{(٤ + س)(٤ - س)} = \frac{-٢}{١٦} = -\frac{١}{٨}$$

لاحظ في ② انه $\frac{\frac{١}{س + ٤} - \frac{١}{٤ - س}}{س} = \left(\frac{١}{س + ٤} - \frac{١}{٤ - س}\right) \frac{١}{س}$ والتعويض هنا ÷

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم: محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

**ملاحظة مهمة** اذا كان داخل النهاية حاصل ضرب أو جمع اقترانيه وعند التعويض في احدهما او كلاهما ينتج $\left(\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}\right)$ عندها ايضاً نجري العمليات لبسط للتخلص منه هذه الصعوبة ايه رايكم !!!

**مثال :** جد $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{١}{س-٢} - \frac{١}{س^٢-٤}\right)$

**الحل** $= \lim_{س \to ٢} \left(\frac{س+٢-١}{س^٢-٤}\right)$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س+١}{(س-٢)(س+٢)}$

$= \frac{٣}{٤ \times ٤} = \frac{٣}{١٦}$

**مثال :** جد $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{س}{س+٢} - \frac{س}{٥}\right)\left(\frac{٢}{س^٢-٩}\right)$

**الحل :** $= \lim_{س \to ٣} \left(\frac{٥س - س^٢ - ٢س}{٥(س+٢)}\right)\left(\frac{٢}{(س-٣)(س+٣)}\right)$

$= \lim_{س \to ٣} \left(\frac{-س^٢+٣س}{٥(س+٢)}\right)\left(\frac{٢}{(س-٣)(س+٣)}\right)$

$= \lim_{س \to ٣} \left(\frac{-س(س-٣)}{٥(س+٢)}\right)\left(\frac{٢}{(س-٣)(س+٣)}\right)$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{-٢س}{٥(س+٢)(س+٣)}$

$= \frac{-٦}{٦ \times ٢٥} = \frac{-١}{٢٥}$

**مثال :** جد $\lim_{س \to ٢} \frac{-٨}{س^٣-٤} + \frac{س}{س-٢}$

**الحل :** $\lim_{س \to ٢} \frac{-٨(س-٢) + س(س^٢-٤)}{(س^٢-٤)(س-٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{-٨(س-٢) + س(س-٢)(س+٢)}{(س-٢)(س+٢)(س-٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(-٨ + س^٢+٢س)}{(س-٢)(س+٢)(س-٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س+٤)(س-٢)}{(س+٢)(س-٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س+٤}{س+٢} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : جد $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\frac{٣}{س+١} - \frac{٣}{٤}}$ * لاحظ انه بصورة مجزية في المقام وهنا نرفع المقام بضرب البسط والمقام بالمرافق البسط

الحل $= \lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\frac{١٢ - ٣س - ٣}{٤(س+١)}}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣) \times ٤(س+١)}{٩ - س^٢} = \lim_{س \to ٣} \frac{٤(س+١)}{-(س-٣)(٣+س)}$

$= \frac{٤(٣+١)}{٣+٣} = \frac{١٦}{٦} = ٥\frac{١}{٣}$

③ الضرب بالمرافقه : تستعمل عندما يحتوي البسط أو المقام على مقدار يحتوي جذر تربيعي او تكعيبي ، والمرافقه نوعان ① تربيعي ② تكعيبي .

امثلة : ① جد $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣س}{٣ - \sqrt{س+٣}}$

الحل : $= \lim_{س \to ٣} \frac{س(س-٣)}{٣ - \sqrt{س+٣}} \times \frac{٣ + \sqrt{س+٣}}{٣ + \sqrt{س+٣}}$ ضربنا بالمرافقه التربيعي

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س(س-٣)(٣ + \sqrt{س+٣})}{٩ - (س+٣)}$ نضرب الاول بالاول - الثاني بالثاني ضي المقام اما البسط كما هو .

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س(س-٣)(٣ + \sqrt{س+٣})}{٦ - س}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س(س-٣)(٣ + \sqrt{س+٣})}{-(س-٣)} = \lim_{س \to ٣} \frac{س(٣ + \sqrt{س+٣})}{-١}$

$= \frac{٣(٣ + \sqrt{٩})}{-١} = \frac{١٨}{-٢} = -٩$

② جد $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - \sqrt{٣س-٢}}{س - ٢}$

الحل : $= \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - \sqrt{٣س-٢}}{س-٢} \times \frac{\sqrt{س+٢} + \sqrt{٣س-٢}}{\sqrt{س+٢} + \sqrt{٣س-٢}}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س+٢) - (٣س-٢)}{(س-٢)(\sqrt{س+٢} + \sqrt{٣س-٢})}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{-٢س + ٤}{(س-٢)(\sqrt{س+٢} + \sqrt{٣س-٢})}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{-(س-٢)}{(س-٢)(\sqrt{س+٢} + \sqrt{٣س-٢})}$ نختصر

تم تحميل هذا الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

تتبع ⇐ $\lim_{س \to ٢} \frac{-ص(س-ص)}{(س-ص)(\sqrt{س+ص+٢} + \sqrt{س-ص+٣})}$

$= \lim_{س \to ص} \frac{-ص}{\sqrt{س-ص+٣} + \sqrt{س+ص+٢}} = \frac{-ص}{\sqrt{٤} + \sqrt{٤}} = \frac{-ص}{٤} = \frac{-١}{٢}$

وزارة ٢٠١١ : جد $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left( \frac{١}{\sqrt{س+١}} - ١ \right)$

الحل : $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left( \frac{١ - \sqrt{س+١}}{\sqrt{س+١}} \right) = \lim_{س \to ٠} \frac{١ - \sqrt{س+١}}{س\sqrt{س+١}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١ - \sqrt{س+١}}{س\sqrt{س+١}} \times \frac{١ + \sqrt{س+١}}{١ + \sqrt{س+١}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١ - (س+١)}{س\sqrt{س+١}(١ + \sqrt{س+١})} = \lim_{س \to ٠} \frac{-س}{س\sqrt{س+١}(١ + \sqrt{س+١})}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-١}{\sqrt{س+١}(١ + \sqrt{س+١})} = \frac{-١}{١(١+١)} = \frac{-١}{٢}$

ملاحظة : لاحظ أنه يمكن كتابة المقدار $\frac{١}{س}$ في السؤال السابق توحيد مقامات أولاً ثم الضرب بالمرافق

مثال : جد $\lim_{س \to ٢} \left( \frac{١}{س-٢} + \frac{١}{س^٢-٤} \right) \left( \sqrt{س+٢} - ٢ \right)$

الحل : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢-٢س+١}{س-٢} \times (\sqrt{س+٢} - ٢) \times \frac{\sqrt{س+٢} + ٢}{\sqrt{س+٢} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-١)^٢ [(س+٢) - ٤]}{(س-٢)(\sqrt{س+٢} + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-١)^٢ (س-٢)}{(س-٢)(\sqrt{س+٢} + ٢)} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س-١)^٢}{\sqrt{س+٢} + ٢}$

$= \frac{(٢-١)^٢}{\sqrt{٢+٢} + ٢} = \frac{١}{٢+٢} = \frac{١}{٤}$

مثال : جد $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{٣س+٢} - ٢}{س^٢ - ٢س}$ هنا نضرب بالمرافقة التكعيبي .

$أ^٣ \pm ب^٣ = (أ \pm ب)(أ^٢ \mp أب + ب^٢)$

الحل : $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{٣س+٢} - ٢}{س(س-٢)} \times \frac{(\sqrt[٣]{٣س+٢})^٢ + ٢\sqrt[٣]{٣س+٢} + ٤}{(\sqrt[٣]{٣س+٢})^٢ + ٢\sqrt[٣]{٣س+٢} + ٤}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(\sqrt[٣]{٣س+٢})^٣ - (٢)^٢}{س(س-٢)((\sqrt[٣]{٣س+٢})^٢ + ٢\sqrt[٣]{٣س+٢} + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٣س+٢-٨}{س(س-٢)((\sqrt[٣]{٣س+٢})^٢ + ٢\sqrt[٣]{٣س+٢} + ٤)}$ تتبع ⇐

تم تحميل هذا الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

تتبع ← $= \lim_{س \to ٢} \frac{٣(س-٢)}{س(س-٢)(\sqrt{٣س+٢}+٤)}$ ×ب المقوس

$= \frac{٣}{٢(\sqrt{٨}+٤)} = \frac{٣}{٢(٢\sqrt{٢}+٤)} = \frac{٣}{٤(٢+\sqrt{٢})} = \frac{٣}{٤}$

مثال : جد $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٣س+١}-٢}{\sqrt{٥س+٣}-٢}$ لاحظ ابسط محتوى هذر تربيعي وبتمام تكعيبي لذلك نضرب بمرافقه كل منهما .

الحل : $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٣س+١}-٢}{\sqrt{٥س+٣}-٢} \times \frac{\sqrt{٣س+١}+٢}{\sqrt{٣س+١}+٢} \times \frac{(\sqrt[٣]{٥س+٣})^٢+٢\sqrt[٣]{٥س+٣}+٤}{(\sqrt[٣]{٥س+٣})^٢+٢\sqrt[٣]{٥س+٣}+٤}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{((٣س+١)-٤)((\sqrt[٣]{٥س+٣})^٢+٢\sqrt[٣]{٥س+٣}+٤)}{((\sqrt[٣]{٥س+٣})^٣-(٣)^٣)(\sqrt{٣س+١}+٢)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٣(س-١)((\sqrt[٣]{٥س+٣})^٢+٢\sqrt[٣]{٥س+٣}+٤)}{(٥س+٣-٨)(\sqrt{٣س+١}+٢)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٣(س-١)((\sqrt[٣]{٥س+٣})^٢+٢\sqrt[٣]{٥س+٣}+٤)}{٥(س-١)(\sqrt{٣س+١}+٢)}$

$= \frac{٣((\sqrt[٣]{٨})^٢+٢\sqrt[٣]{٨}+٤)}{٥(\sqrt{٤}+٢)} = \frac{٣(٤+٤+٤)}{٤×٥} = \frac{٣٦}{٢٠} = \frac{٩}{٥}$

٤ التجزئة : نستعمل هذه الطريقة اذا امكنه تجزئة البسط الى اكثر من نهاية مع المحافظ على قيمة المقوض $(\frac{صفر}{صفر})$ لكل منها بحيث يكون الهدف تسهيل ايجاد مقدار النهاية .

مثال : جد $\lim_{س \to ٢} \frac{٣(س-٢)^٢+٣س^٢-١٢}{س-٢}$ لاحظ ابسط حرأ في المقسوم

الحل $= \lim_{س \to ٢} \frac{٣(س-٢)}{(س-٢)} + \lim_{س \to ٢} \frac{٣س^٢-١٢}{(س-٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} ٣(س-٢) + \lim_{س \to ٢} \frac{٣(س-٢)(س+٢)}{(س-٢)}$

$= صفر + ٣(٢+٢)$

$= صفر + ١٢ = ١٢$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

٥ الاضافة والطرح : نستعمل هذه الطريقة عندما يحتوي البسط أو المقام على جذور مختلفة الرتبة وتتلخص بالتعويض في احد الجذور ثم طرح واضافة الناتج في البسط ثم اجراء عملية التجزئة او القسمة .

مثال : $\lim_{س\to ٣} \frac{\sqrt[٣]{س+٥} + \sqrt{س+٦} - ٥}{س-٣}$ لاحظ وجود جذور مختلفة الرتبة في البسط لذلك نعوض في احدها $\sqrt[٣]{٣+٥} = \sqrt{٨} = ٢$

لاحظ عدم امكانية التعويض مباشرة ← $= \lim_{س\to ٣} \frac{\sqrt[٣]{س+٥} - ٢ + ٢ + \sqrt{س+٦} - ٥}{س-٣}$ وتضييف الناتج الى البسط ثم تضييف .

$= \lim_{س\to ٣} \frac{\sqrt[٣]{س+٥} - ٢}{س-٣} \times \frac{(\sqrt[٣]{س+٥})^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+٥} + ٤}{(\sqrt[٣]{س+٥})^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+٥} + ٤} + \lim_{س\to ٣} \frac{\sqrt{س+٦} - ٣}{س-٣} \times \frac{\sqrt{س+٦} + ٣}{\sqrt{س+٦} + ٣}$

$= \lim_{س\to ٣} \frac{(\sqrt[٣]{س+٥})^٣ - (٢)^٣}{(س-٣)(\sqrt[٣]{(س+٥)^٢} + ٢\sqrt[٣]{س+٥} + ٤)} + \lim_{س\to ٣} \frac{(س+٦) - ٩}{(س-٣)(\sqrt{س+٦} + ٣)}$

$= \lim_{س\to ٣} \frac{(س+٥) - ٨}{(س-٣)(\sqrt[٣]{(س+٥)^٢} + ٢\sqrt[٣]{س+٥} + ٤)} + \lim_{س\to ٣} \frac{س-٣}{(س-٣)(\sqrt{س+٦} + ٣)}$

بالتعويض $= \frac{١}{\sqrt[٣]{٨^٢} + ٢\sqrt[٣]{٨} + ٤} + \frac{١}{\sqrt{٩} + ٣} = \frac{١}{١٢} + \frac{١}{٦} = \frac{٣}{١٢} = \frac{١}{٤}$

مهم جداً جداً عند ايجاد حل اي مقدار يحتوي على جذر رتبته زوجية يجب التأكد انه الجذر صفر عما يحيط بها ويسارها والا فانه يعتبر غير موجود .

مثال : جد $\lim_{س\to ٣} \frac{\sqrt{س-٣} - ٣ - س}{\sqrt{س-٣}}$

الحل : لاحظ اسفل المقام $\sqrt{س-٣}$ غير معرف على يسار ٣

ولذلك فانه $\lim_{س\to ٣} \frac{\sqrt{س-٣} - ٣ - س}{\sqrt{س-٣}}$ غير موجود .

مثال جد $\lim_{س\to ٣^+} \frac{\sqrt{س-٣} - ٣ - س}{\sqrt{س-٣}}$ البسط والمقام معرفان حول ٣

الحل $= \lim_{س\to ٣^+} \frac{س-٣}{\sqrt{س-٣}} - \lim_{س\to ٣^+} \frac{\sqrt{س-٣}}{\sqrt{س-٣}}$

$= \lim_{س\to ٣^+} \frac{(\sqrt{س-٣})^٢}{\sqrt{س-٣}} - \lim_{س\to ٣^+} ١$

$= صفر - ١ = \boxed{-١}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

ملاحظة مهمة : اذا احتوى البسط أو المقام على حاصل ضرب مقدارين نفرج ونضيف المقدار الناتج ليتم تضعيف أحدهما مضروباً بالآخر .

مثال جد $\lim_{س \to ٣} \frac{(س+١)^{٢} \sqrt{٣س} - ٤٨}{٣ - س}$ ناتج ليتم تضعيف ب

هنا نضع في احدهما $(٣+١)^{٢} = ١٦$ ونضرب بالناتج في الآخر $\Leftarrow ١٦\sqrt{٣س}$

ونضيف ونطرح المقدار الناتج في البسط

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س+١)^{٢}\sqrt{٣س} - ١٦\sqrt{٣س}}{٣ - س} + \lim_{س \to ٣} \frac{١٦\sqrt{٣س} - ٤٨}{٣ - س}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٣س}\,((س+١)^{٢} - ١٦)}{٣ - س} + \lim_{س \to ٣} \frac{١٦\sqrt{٣س} - ٤٨}{٣ - س} \times \frac{١٦\sqrt{٣س} + ٤٨}{١٦\sqrt{٣س} + ٤٨}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٣س}\,(س^{٢} + ٢س - ١٥)}{٣ - س} + \lim_{س \to ٣} \frac{٢٥٦ \times ٣ - ٢٣٠٤}{(٣ - س)(١٦\sqrt{٣س} + ٤٨)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٣س}\,(س+٥)(س-٣)}{٣ - س} + \lim_{س \to ٣} \frac{٧٦٨(س-٣)}{(س-٣)(١٦\sqrt{٣س} + ٤٨)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \sqrt{٣س}\,(س+٥) + \lim_{س \to ٣} \frac{٧٦٨}{١٦\sqrt{٣س} + ٤٨}$$

$$= \sqrt{٩}\,(٨) + \frac{٧٦٨}{١٦\sqrt{٩} + ٤٨}$$

$$= ٦٤ + \frac{٧٦٨}{٩٦}$$

$$= ٦٤ + ٨ = ٧٢$$

حل آخر : نضع في $\sqrt{٣س} = \sqrt{٣ \times ٣} = ٣$ ونضرب بالآخر $٣(س+١)^{٢}$ ونضيف ونطرح .

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س+١)^{٢}\sqrt{٣س} - ٣(س+١)^{٢}}{٣ - س} + \lim_{س \to ٣} \frac{٣(س+١)^{٢} - ٤٨}{٣ - س}$$

$$= \lim_{س \to ٣} (س+١)^{٢}\,(\sqrt{٣س} - ٣) \times \frac{\sqrt{٣س} + ٣}{\sqrt{٣س} + ٣} + \lim_{س \to ٣} \frac{٣(س^{٢} + ٢س - ١٥)}{٣ - س}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س+١)^{٢}(٣س - ٩)}{(٣ - س)(\sqrt{٣س} + ٣)} + \lim_{س \to ٣} \frac{٣(س-٣)(س+٥)}{(٣ - س)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{٣(س+١)^{٢}}{\sqrt{٣س} + ٣} + \lim_{س \to ٣} ٣(س+٥)$$

$$= \frac{٤٨}{٦} + ٢٤$$

$$= ٨ + ٢٤ = ٣٢$$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

**ملاحظة** قد تحتوي النهاية على بسط ومقام ليس لهما علاقة ببعضهما واحدهما يحتوي جذوراً عندها نستطيع ضرب كلا من البسط والمقام بـ $(\sqrt{س} - م)$ ثم اجراء ما يلزم.

**مثال** : جد $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - \sqrt{س+٤} - ٢٢}{س^٢ - ٣س - ١٥}$ علماً بأن المقامين $\div$

**الحل** :

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{\frac{س^٢ - \sqrt{س+٤} - ٢٢}{س - ٥}}{\frac{س^٢ - ٣س - ١٥}{س - ٥}} = \lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٢ + ٣ - \sqrt{س+٤}}{(س-٥)(س+٣)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥ + ٣ - \sqrt{س+٤}}{(س-٥)(س+٣)}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(س+٥)}{(س-٥)(س+٣)} + \lim_{س \to ٥} \frac{٣ - \sqrt{س+٤}}{(س-٥)(س+٣)} \times \frac{٣ + \sqrt{س+٤}}{٣ + \sqrt{س+٤}}$$

$$= \frac{١٠}{٨} + \lim_{س \to ٥} \frac{٩ - (س+٤)}{(س-٥)(س+٣)(٣ + \sqrt{س+٤})}$$

$$= \frac{١٠}{٨} + \lim_{س \to ٥} \frac{-١}{(س+٥)(٣ + \sqrt{س+٤})}$$

$$\text{بالتعويض} = \frac{١٠}{٨} + \frac{-١}{(٨)(٦)} = \frac{١٠}{٨} - \frac{١}{٤٨} = \frac{٦٠}{٤٨} - \frac{١}{٤٨} = \frac{٥٩}{٤٨}$$

٦) الاستبدال (الفرض) : يعمل اذا طلب هناك جذور دليلها (رتبتها) أكثر من التكعيبي.

**مثال** : جد $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٥]{س+٢٢} - ٢}{س - ٢}$

$س \to ٢$ ، $ص \to ٢$

**الحل** : نفرض $ص = \sqrt[٥]{س+٢٢} \Leftarrow ص^٥ = س + ٢٢ \Leftarrow س = ص^٥ - ٢٢$

$$= \lim_{ص \to ٢} \frac{ص - ٢}{\frac{ص^٥ - ٢٢}{٥} - ٢} \times \frac{٥}{٥} = \lim_{ص \to ٢} \frac{٥(ص-٢)}{ص^٥ - ٢٢ - ١٠}$$

$$= \lim_{ص \to ٢} \frac{٥(ص-٢)}{ص^٥ - ٣٢} = \lim_{ص \to ٢} \frac{٥(ص-٢)}{(ص-٢)(ص^٤ + ٢ص^٣ + ٤ص^٢ + ٨ص + ١٦)}$$

$$= \frac{٥}{١٦ + ١٦ + ١٦ + ١٦ + ١٦} = \frac{١}{١٦}$$

العدد ٢ عند تعويضه بالمقام ينتج صفر $\Leftarrow$ $(س-٢)$ عامل من عوامل $ص^٥ - ٣٢$

| | $س^٥$ | $س^٤$ | $س^٣$ | $س^٢$ | $س$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-٣٢$ | ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ٢ | | ٢ | ٤ | ٨ | ١٦ |
| | ١ | ٢ | ٤ | ٨ | ١٦ |

٧)

**ملاحظة** : يجوز استعمال القاعدة (للحفظ)

$$(أ^ن - ب^ن) = (أ - ب)(أ^{ن-١} + أ^{ن-٢}ب + أ^{ن-٣}ب^٢ + \dots + أب^{ن-٢} + ب^{ن-١})$$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

ملاحظة : نستعمل لاستبدال في لاسس ارضياً (لاقترانات لاسية)

مثال جد $\lim_{س \to 0} \frac{(٥^{س})^{٣} - ٥^{٣}}{١ - ٥^{س}}$

الحل : نفرض $٥^{س} = ص \Leftarrow$ س ← ٠ ، ص ← ١

$$= \lim_{ص \to ١} \frac{(ص)^{٣} - ص}{١ - ص} = \lim_{ص \to ١} \frac{ص^{٣} - ص}{١ - ص}$$

$$= \lim_{ص \to ١} \frac{ص(ص^{٢} - ١)}{١ - ص} = \lim_{ص \to ١} -ص(ص + ١) = -١ - ١$$

كيفية ايجاد المجاهيل اذا كانت النهاية موجودة :-

ملاحظة هامة جداً : اذا كانت $\lim_{س \to م} \frac{ه(س)}{ه(س)}$ موجودة وكانت نهاية المقام صفراً فان بسط النهاية يساوي صفراً ايضاً صفر .

اما اذا كانت $\lim_{س \to م} \frac{ه(س)}{ه(س)}$ غير موجودة فان $\lim_{س \to م} \frac{ه(س)}{ه(س)} =$ صفر .

وزارة ٢٠١١ اذا كانت $\lim_{س \to -١} \frac{أ س^{٢} - ٥ س - ٥}{س + ١} = -٧$ فجد قيمة الثابتين أ ، ب ؟

الحل : بما ان النهاية موجودة فان $\lim_{س \to -١}$ أ $س^{٢} - ٥ س - ٥ =$ صفر

$$\Leftarrow أ + ب - ٥ = صفر \Leftarrow ب = ٥ - أ$$

وبما ان النهاية موجودة فان (س + ١) عامل من عوامل البسط

| | س | $س^{٢}$ | |
|---|---|---|---|
| ٠ | $-(أ - ٥)$ | أ | |
| ٥ | $-أ$ | | ✓ |
| | ٥ | أ | |

$$\Leftarrow \lim_{س \to -١} \frac{أ س^{٢} - (٥ - أ) س - ٥}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{(س + ١)(أ س - ٥)}{س + ١} = -٧$$

$$\Leftarrow -أ - ٥ = -٧ \Leftarrow أ = -٥ + ٧ = ٢$$

$$\Leftarrow ب = ٥ - ٢ = ٣$$

مثال : اذا كانت $\lim_{س \to ٤} \frac{أ س^{٢} - ٤}{\sqrt{أ س + ٢} - ٢} =$ فجد قيمة أ

الحل : المقدار مرفوع لعدد ٤ لذلك ما بداخله موجب

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{(\sqrt{أ س + ٢} + ٢)(\sqrt{أ س + ٢} - ٢)}{(أ س - ٢)} = ٣$$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$= \lim_{س \to ٤} ٩ س + ٢ = ٣$

$٣ = ٢ + ٩ ٢$

$\frac{٢}{٢} ٩ = \frac{١}{٢} \Leftarrow ٩ = \frac{١}{٢}$

مثال : اذا كانت $\lim_{س \to ٢} \left( \frac{٩}{س - ٢} + \frac{ب}{س^٢ - ٤} \right) = ٢$ فأوجد قيمتي ٩ ، ب ؟

الحل $\lim_{س \to ٢} \frac{٩(س + ٢) + ب}{(س - ٢)(س + ٢)} = ٢$

وبما انه $\lim_{س \to ٢} (س - ٢)(س + ٢) = ٠$ (نهاية قطاعا صفر) فان

$\lim_{س \to ٢} ٩(س + ٢) + ب = صفر \Leftarrow ٤٩ + ب = ٠ \Leftarrow ب = -٤٩$

بالتعويض $\Leftarrow \lim_{س \to ٢} \frac{٩(س + ٢) - ٤٩}{(س - ٢)(س + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٩(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)} = ٢$

$\Leftarrow \frac{٩}{٤} = ٢ \Leftarrow ٩ = ٨$

$ب = -٤ \times ٨ = -٣٢$

مثال : اذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + ٩ س^٢ - ٢٠}{س - ٢}$ موجودة فجد قيمة ٩ .

الحل بما ان $\lim_{س \to ٢} س - ٢ = صفر$ فان $\lim_{س \to ٢} س^٣ + ٩ س^٢ - ٢٠ = صفر$

$\Leftarrow (٢)^٣ + ٩(٢)^٢ - ٢٠ = صفر$

$٨ + ٤٩ - ٢٠ = صفر$

$\frac{١٢}{٤} = \frac{٤٩}{٤}$

$٩ = ٣$

مثال : اذا كانت $\lim_{س \to ٩} \frac{س - ٢}{\sqrt{س + ٦} - س}$ غير موجودة فجد قيمة ٩ ؟

غير موجودة $\Leftarrow \frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

الحل لكي تكون غير موجودة $\Leftarrow \lim_{س \to ٩} \frac{س^٢ + س - ٦}{\sqrt{س} - ٢} = صفر$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٩} \frac{(س - ٢)(س + ٣)}{(\sqrt{س} - ٢)} = صفر$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٩} س + ٣ = صفر$

$٩ + ٣ = صفر \Leftarrow ٩ = -٣$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

حلول إثرائية ورسائل ص ٣٧ + ٣٨

١) أ) $\lim_{س \to ٨} \frac{(س+١)^{٢} - ٨١}{٨ - س}$ = $\lim_{س \to ٨} \frac{(س+١-٩)(س+١+٩)}{٨ - س}$ تحليل

$= \lim_{س \to ٨} \frac{(س-٨)(س+١٠)}{(٨-س)}$

$= \lim_{س \to ٨} -(س+١٠) = -١٨$

ب) $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٨س^{٣} - ١}{\frac{١}{٢} - س}$ = $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٨(س^{٣} - \frac{١}{٨})}{\frac{١}{٢} - س}$ ← تحليل $\frac{\text{بشرصدود}}{\text{مقامصدود}}$

$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٨(س - \frac{١}{٢})(س^{٢} + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤})}{(\frac{١}{٢} - س)}$

$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} ٨(س^{٢} + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤})$

$= ٨((\frac{١}{٢})^{٢} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤})$

$= ٨(\frac{٣}{٤}) = ٦$

ج) $\lim_{س \to ٧} \frac{٤ - \sqrt{س+٩}}{٧ - س^{٢}}$ × $\frac{٤ + \sqrt{س+٩}}{٤ + \sqrt{س+٩}}$ ضرب بالمرافق التربيعي

$= \lim_{س \to ٧} \frac{١٦ - (س+٩)}{(٧-س^{٢})(٤ + \sqrt{س+٩})}$ = $\lim_{س \to ٧} \frac{(٧ - س)}{(٧-س^{٢})(٤ + \sqrt{س+٩})}$

$= \lim_{س \to ٧} \frac{١}{(٧+س^{٢})(٤ + \sqrt{س+٩})}$ = $\frac{١}{٤ + \sqrt{٧+٩}}$

$= \frac{١}{٤+٤} = \frac{١}{٨}$

د) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س+٥} - ٣}{س - ٢}$ × $\frac{(\sqrt[٣]{س+٥})^{٢} + ٣\sqrt[٣]{س+٥} + ٩}{(\sqrt[٣]{س+٥})^{٢} + ٣\sqrt[٣]{س+٥} + ٩}$ ضرب بالمرافق التكعيبي

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س+٥) - ٢٧}{(س-٢)((\sqrt[٣]{س+٥})^{٢} + ٣\sqrt[٣]{س+٥} + ٩)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢٢}{(س-٢)((\sqrt[٣]{س+٥})^{٢} + ٣\sqrt[٣]{س+٥} + ٩)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{١}{((\sqrt[٣]{س+٥})^{٢} + ٣\sqrt[٣]{س+٥} + ٩)}$

$= \frac{١}{٢^{٢} + ٣ \times ٣ + ٩}$

$= \frac{١}{٢٧}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

هـ) $\lim_{س \to 0} \frac{1}{س} \left( \frac{1}{٥+س} - \frac{1}{٥-س} \right)$ توحيد مقامات

$= \lim_{س \to 0} \frac{1}{س} \cdot \frac{(٥-س) - (٥+س)}{(٥+س)(٥-س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-٢س}{س(٥+س)(٥-س)} = \lim_{س \to 0} \frac{-٢}{(٥+س)(٥-س)}$

$= \frac{-٢}{٢٥}$

و) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ + ٣س - ٤}{س^٢ - ١}$ = البسط ١ جذر للبسط ⇐ $(س-١)$ عامل

| | $س^٣$ | $س^٢$ | $س^١$ | $س^٠$ |
|---|---|---|---|---|
| ١ | ١ | ٠ | ٣ | -٤ |
| ١ | | ١ | ١ | ٤ |
| | ١ | ١ | ٤ | ٠ |

$\Leftarrow \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^٢ + س + ٤)}{(س-١)(س+١)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + س + ٤}{س + ١} = \frac{٦}{٢} = ٣$

ز) $\lim_{س \to -٣} \frac{\sqrt{س+٥} + ٢}{س^٣ + ٧س^٢ + ٤} \times \frac{(\sqrt{س+٥})^٣ - ٢\sqrt{س+٥} + ٤}{(\sqrt{س+٥})^٣ - ٢\sqrt{س+٥} + ٤}$ ضرب بالمرافق المكعب

$= \lim_{س \to -٣} \frac{(\sqrt{س+٥})^٣ + (٢)^٣}{(س+٣)(س^٢ - ٣س + ٩)((\sqrt{س+٥})^٣ - ٢\sqrt{س+٥} + ٤)}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{س+٣}{(س+٣)(س^٢ - ٣س + ٩)((\sqrt{س+٥})^٣ - ٢\sqrt{س+٥} + ٤)}$

$= \frac{١}{(٩+٩+٩)(٤+٤+٤)}$

$= \frac{١}{٢٧ \times ١٢} = \frac{١}{٣٢٤}$

ح) $ل(س) = \begin{cases} \frac{٣س^٣ - ٥س + ٢}{٢س^٣ - ٣س + ١} & ، س > ١ \\ ب & ، س \leq ١ \end{cases}$ النهاية موجودة ، أجد قيمة ب

الحل : النهاية موجودة ⇐ $\lim_{س \to ١^+} \frac{٣س^٣ - ٥س + ٢}{٢س^٣ - ٣س + ١} = \lim_{س \to ١^-}$ ب

$= \lim_{س \to ١^+} \frac{(٣س-١)(س-١)}{(٢س-١)(س-١)} = ب$

$ب = \frac{٣ \times ١ - ١}{٢ \times ١ - ١}$

$ب = \frac{٢}{١}$

$ب = ١$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

س٣ أ) $\lim_{س \to ٢} \frac{|س-٣|-١}{س-٢}$ بتعيد تعريف المقدار $= \begin{cases} \frac{-(س-٣)-١}{س-٢} & ، س \leq ٣ \\ \frac{س-٣-١}{س-٢} & ، س > ٣ \end{cases}$

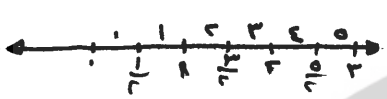
$= \lim_{س \to ٢} \frac{-س+٣-١}{س-٢} = \lim_{س \to ٢} -١ = \boxed{-١}$

ب) $\lim_{س \to ٢^+} \frac{س - [س]}{٤س^٢ - ٥س}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢^+} \frac{(س-٥)}{(س+٥)(س)+(س-٥)}$

$= \frac{١}{٥ + ٢ \times \frac{٥}{٢}} = \frac{١}{١٠}$

بتعيد بتعريف $س = ٠$



$ل = \frac{١}{٢}$

$\begin{cases} \frac{س-٤}{٤س^٢-٥س} & ، ٢ \leq س < \frac{٥}{٢} \\ \frac{س-٥}{٤س^٢-٥س} & ، \frac{٥}{٢} \leq س < ٣ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٢^+} \frac{س-٤}{(س-٥)(س+٥)} = \frac{١}{صفر}$ ⇐ غير موجودة

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢^+} \frac{س - [س]}{٤س^٢ - ٥س}$ غير موجودة .

ج) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}}{٢ - س} = \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{(س-٢)^٢}}{٢-س} = \lim_{س \to ٢} \frac{|س-٢|}{س-٢}$

بتعيد التكرين

$س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$

$\begin{cases} \frac{س-٢}{٢-س} = -١ & ، س \leq ٢ \\ \frac{٢-س}{٢-س} = ١ & ، س > ٢ \end{cases}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} \frac{|س-٢|}{٢-س}$ غير موجودة .

$\lim_{س \to ٢^+} \frac{|س-٢|}{٢-س} = \lim_{س \to ٢^+} -١ = -١$

$\lim_{س \to ٢^-} \frac{٢-س}{٢-س} = \lim_{س \to ٢^-} ١ = ١$

د) $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{س-٧}}{\sqrt{س^٢-٤٩}}$

البسط ⟵ عيرصرف ٢ لـ ٧

المقام ⟵ عيرصرف ٢ لـ ٧

بما ان كل من البسط والمقام غير معرفين ٢ لـ ٧

فان $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{س-٧}}{\sqrt{س^٢-٤٩}}$ غير موجودة .

هـ) $\lim_{ص \to ١} \frac{ص - ٤\sqrt{ص} + ٣}{ص^٢ - ١} = \lim_{ص \to ١} \frac{(\sqrt{ص}-٣)(\sqrt{ص}-١)}{(ص-١)(ص+١)}$ ملاحظة $\sqrt{ص}$ معرف قرب ١

$= \lim_{ص \to ١} \frac{(\sqrt{ص}-٣)(\sqrt{ص}-١)}{(\sqrt{ص}-١)(\sqrt{ص}+١)(ص+١)} = \frac{-٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

س٣ ب) حل آخر : $\lim_{ص\to 1} \frac{ص - ٤\sqrt{ص} + ٣}{ص^٢ - ١} = \lim_{ص\to 1} \frac{(ص+٣) - ٤\sqrt{ص}}{ص^٢ - ١}$ ضرب بالمرافقه

$= \lim_{ص\to 1} \frac{(ص+٣) - ٤\sqrt{ص}}{(ص-١)(ص+١)} \times \frac{(ص+٣) + ٤\sqrt{ص}}{(ص+٣) + ٤\sqrt{ص}}$

$= \lim_{ص\to 1} \frac{(ص+٣)^٢ - ١٦ص}{(ص-١)(ص+١)((ص+٣)+٤\sqrt{ص})}$

$= \lim_{ص\to 1} \frac{ص^٢ + ٦ص + ٩ - ١٦ص}{(ص-١)(ص+١)(ص+٣+٤\sqrt{ص})}$

$= \lim_{ص\to 1} \frac{ص^٢ - ١٠ص + ٩}{(ص-١)(ص+١)(ص+٣+٤\sqrt{ص})} = \lim_{ص\to 1} \frac{(ص-١)(ص-٩)}{(ص-١)(ص+١)(ص+٣+٤\sqrt{ص})}$

$= \frac{١ - ٩}{(١+١)(١+٣+٤)} = \frac{-٨}{١٦} = -\frac{١}{٢}$

حل آخر: $\lim_{ص\to 1} \frac{ص - ١}{ص^٢ - ١} + \lim_{ص\to 1} \frac{١ - ٤\sqrt{ص} + ٣}{ص^٢ - ١}$

اضفنا $\frac{١}{١}$ وطرحنا $\frac{١}{١}$ لكل $\sim$ ناتج تعويض ١ في $\sqrt{ص} = ١$

$= \lim_{ص\to 1} \frac{١}{ص+١} + \lim_{ص\to 1} \frac{٤ - ٤\sqrt{ص}}{(ص-١)(ص+١)}$

$= \lim_{ص\to 1} \frac{١}{ص+١} + \lim_{ص\to 1} \frac{٤(١ - \sqrt{ص})}{(١-ص)(\sqrt{ص}+١)(ص+١)}$

$= \frac{١}{٢} + \frac{-٤}{٤}$

$= \frac{١}{٢} - ١ = -\frac{١}{٢}$

س٤ $\lim_{س\to ٨} \frac{س^{\frac{٢}{٣}} - ١٦}{٨ - س}$ عوضنا في المقدار فاضرب بالآخر $\Leftarrow$ نضيف ونطرح $٢س$ أو $٨س^{\frac{١}{٣}}$

$= \lim_{س\to ٨} \frac{س^{\frac{٢}{٣}} - ٢س^{\frac{١}{٣}} + ٢س^{\frac{١}{٣}} - ١٦}{٨ - س}$

$= \lim_{س\to ٨} \frac{س^{\frac{١}{٣}}(س^{\frac{١}{٣}} - ٢)}{٨ - س} + \lim_{س\to ٨} \frac{٢(س - ٨)}{٨ - س}$

$= \lim_{س\to ٨} \frac{س^{\frac{١}{٣}}(س^{\frac{١}{٣}} - ٢)}{(س^{\frac{١}{٣}} - ٢)(س^{\frac{٢}{٣}} + ٢س^{\frac{١}{٣}} + ٤)} + \lim_{س\to ٨} ٢$

هنا حللنا ولتسهيل ارجاع الضرب بالمرافقه التكعيبي.

وبشرط التحليل انه الجذر معرف عند $٨$.

$= \frac{٨}{٤ + ٤ + ٤} + ٢$

$= \frac{٨}{١٢} + ٢$

$= \frac{٤}{٣} + ٢$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

٤) حل آخر : $\lim_{س \to ٨} \frac{س^{\frac{٣}{٢}} - ١٦}{س - ٨} = \lim_{س \to ٨} \frac{س^{\frac{٣}{٢}} - ١٦}{س^{\frac{١}{٢}} - ٨}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{(س^{\frac{١}{٢}})^{٤} - (٢)^{٤}}{س - ٨} = \lim_{س \to ٨} \frac{(س^{\frac{١}{٢}} - ٢)((س^{\frac{١}{٢}})^{٢} + ٢^{٢})}{(س^{\frac{١}{٢}} - ٢)((س^{\frac{١}{٢}})^{٢} + ٢س^{\frac{١}{٢}} + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{(س^{\frac{١}{٢}} - ٢)(س^{\frac{١}{٢}} + ٢)(س + ٤)}{(س^{\frac{١}{٢}} - ٢)(س + ٢س^{\frac{١}{٢}} + ٤)}$

$= \frac{(٢+٢)(٤+٤)}{٤+٤+٤} = \frac{٣٢}{١٢} = \frac{٨}{٣} = ٢\frac{٢}{٣}$

٥) نعين $\lim_{س \to ٠}$ ، نعينه بالتعريف $س = ٠$ $ل = \frac{١}{٢}$

تعيم $ق$ التي تجعل $\lim_{س \to ق} [\![٢س]\!] = ٣$

$\lim_{س \to ق} [\![٢س]\!] = ٣ = \lim_{س \to ق} ٣$

$\Leftarrow ق \geq ٣ > ٢$

$هـ(س) = \begin{cases} ١ & ، س = ٠ \\ ٢ & ، ١ \geq س > \frac{٢}{٣} \\ ٣ & ، \frac{٢}{٣} \geq س > ٢ \\ ٤ & ، ٢ \geq س > \frac{١٥}{٤} \end{cases}$

٦) $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٤}{س + ٢} & ، س < ك \\ ٣س & ، س \geq ك \end{cases}$

تعيم ك التي تجعل النهاية موجودة

النهاية موجودة $\Leftarrow \lim_{س \to ك^{+}} \frac{س^{٢} - ٤}{س + ٢} = \lim_{س \to ك^{-}} ٣س$

$\Leftarrow \lim_{س \to ك^{+}} س - ٢ = \lim_{س \to ك^{-}} ٣س$

$\Leftarrow ك - ٢ = ٣ك$

$\Leftarrow ٢ك = -٢ \Leftarrow ك = -١$

٧) $\lim_{س \to ٣} \frac{س}{٩ - س^{٢}} + \frac{٣س}{س^{٣} - ٩س} = \lim_{س \to ٣} \frac{س}{٩ - س^{٢}} + \frac{٣}{س(س^{٢} - ٩)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{-س^{٢} + ٣س}{س(س^{٢} - ٩)} = \lim_{س \to ٣} \frac{-ب(س)(س - ٣)}{ب(س)(س - ٣)(س + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{-١}{س + ٣}$

$= \frac{-١}{٦}$

مكتبة الوسام
قسم الدوسيه
ALWESAM
المعلم : محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٤٩)^{س} - ٧^{س}}{١ - ٧^{س}}$ نفرض $ص = ٧^{س}$

عندما $س \to ٠$ ، $ص \to ١$

$= \lim_{ص \to ١} \frac{ص^{٢} - ص}{١ - ص} = \lim_{ص \to ١} \frac{ص(ص-١)}{١-ص}$

$= \lim_{ص \to ١} - ص$

$= -١$

حل آخر $\lim_{س \to ٠} \frac{(٤٩)^{س} - ٧^{س}}{١ - ٧^{س}} = \lim_{س \to ٠} \frac{(٧^{س})^{٢} - ٧^{س}}{١ - ٧^{س}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٧^{س}(٧^{س} - ١)}{١ - ٧^{س}}$

$= \lim_{س \to ٠} - ٧^{س}$

$= -٧^{٠} = -١$

٩) $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٣} - ٩س + ٣}{س - ١} & ، س > ١ \\ ب س - ٥ & ، س \leq ١ \end{cases}$ قيم ب التي تجعل النهاية موجودة.

النهاية موجودة $\Leftarrow \lim_{س \to ١^{+}} \frac{س^{٣} - ٩س + ٣}{س - ١}$ = موجودة.

وعبارة النهاية $\lim_{س \to ١^{+}} س^{٣} - ٩س + ٣ = \lim_{س \to ١^{-}} ب س - ٥ = صفر$

$\Leftarrow ١ - ٩ + ٣ = ب - ٥$

$\Leftarrow ب = ٤$

$\Leftarrow \lim_{س \to ١^{+}} \frac{س^{٣} - ٤س + ٣}{س - ١} = \lim_{س \to ١^{+}} \frac{(س-١)(س^{٢}+س-٣)}{(س-١)}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ١^{+}} س^{٢} + س - ٣ = \boxed{-١}$

وعبارة النهاية موجودة $\Leftarrow \lim_{س \to ١^{-}} ب س - ٥ = -١$

$ب - ٥ = -١$

$\Leftarrow ب = ٤$

| $س^{٢}$ | $س^{١}$ | $س^{٠}$ | |
|---|---|---|---|
| ١ | صفر | -٤ | ٣ |
| | ١ | ١ | -٢ |
| ١ | ١ | -٢ | ٠ |

① العدد ١ هنا للتسلط

١٠) $\lim_{س \to ٢} \frac{أ س^{٢} - ب س - ٦}{س - ٢} = ٥$ حيث أ ، ب

عبارة النهاية موجودة وأيضا $\lim_{س \to ٢} س - ٢ = صفر \Leftarrow \lim_{س \to ٢} أ س^{٢} - ب س - ٦ = صفر$

$\Leftarrow ٤أ - ٢ب - ٦ = صفر \Leftarrow ب = ٢أ - ٣$ ---①

أيضاً $\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(أ س + ٢أ - ب)}{س - ٢} = ٤أ - ب = ٥$

$\Leftarrow ب = ٤أ - ٥$ ---②

| $س^{٢}$ | $س^{١}$ | |
|---|---|---|
| أ | -ب | -٦ |
| ٢أ | -ب | ٤أ-٢ب |
| أ | ٢أ-ب | ٠ |

② بالتعويض في ①

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$$\text{مـ}① ، ③ \quad 2أ - 4 = 3 - 2أ$$

$$أ = 1 \Leftarrow 2أ = 2 \Leftarrow أ = \boxed{1}$$

$$\Leftarrow ب = 2 \times 1 - 3 = \boxed{-1}$$

١١ بما أن $\lim_{س \to -2} \frac{\text{مـ}(س) + 5}{س + 2} = 9$ ، مـ كثير حدود

بما أن النهاية موجودة $\Leftarrow$ بما أن $\lim_{س \to -2}$ (س + 2) = صفر $\Leftarrow$ بما أن $\lim_{س \to -2}$ مـ(س) + 5 = صفر

$$\Leftarrow \text{مـ}(-2) + 5 = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \text{مـ}(-2) = -5$$

$$\Leftarrow ① \text{ بما أن } \lim_{س \to -2} \text{مـ}(س) + 2س = \text{مـ}(-2) + 2 \times -2$$

$$= -5 - 4 = -9$$

$$③ \text{ بما أن } \lim_{س \to -2} \text{مـ}'(س) + 2س = \text{مـ}'(-2) + 2 \times -2$$

$$= 5 - 4 = 1$$

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

الدرس الرابع : بقية الاقترانات المثلثية :

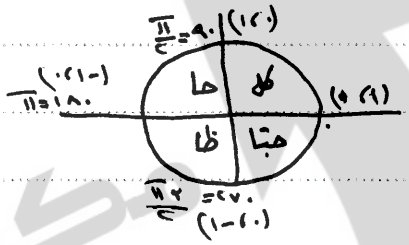
* الاقتران المثلثي هو كل اقتران يحتوي اي من النسب المثلثية الستة جا س ، جتا س ، ظا س وعكوساتها .

تذكر :

| الزاوية | ٠° = ٠ | ٣٠° = π/٦ | ٤٥° = π/٤ | ٦٠° = π/٣ | ٩٠° = π/٢ | ١٨٠° = π | ٢٧٠° = ٣π/٢ | ٣٦٠° = ٢π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| جا س | ٠ | ١/٢ | √٢/٢ | √٣/٢ | ١ | ٠ | -١ | ٠ |
| جتا س | ١ | √٣/٢ | √٢/٢ | ١/٢ | صفر | -١ | ٠ | ١ |
| ظا س | ٠ | √٣/٣ | ١ | √٣ | غير معرف | ٠ | غير معرف | ٠ |

* يمثل هذا الجدول بجدول الزوايا الاساسية (حفظا) .

* تذكر : اشارات النسب المثلثية في الارباع الاربعة




* تذكر : التحويل من النظام الستيني الى الدائري : اضرب في π/١٨٠

مثال ٣٠° = ٣٠ × π/١٨٠ = π/٦

* التحويل من الدائري الى الستيني : اضرب في ١٨٠/π

مثال π/٤ = π/٤ × ١٨٠/π = ٤٥°

* الزوايا الكبيرة ٩٠° يتم التعامل معها بايجاد الزاوية الاساسية .

٩٠ < س < ١٨٠ ⇐ الزاوية الاساسية = ١٨٠ - س

١٨٠ < س < ٢٧٠ ⇐ الزاوية الاساسية = س - ١٨٠

٢٧٠ < س < ٣٦٠ ⇐ الزاوية الاساسية = ٣٦٠ - س

ثم مراعاة الاشارات في الارباع .

س > ٣٦٠ نقسم على ٣٦٠ ثم نجد الزاوية الاساسية من الباقي

مثال س = ٥١٠° ⇐ ١٥٠ ⇐ ٥١٠/٣٦٠ ⇐ الزاوية الاساسية = ١٨٠ - ١٥٠ = ٣٠°

القاعدة الرئيسية : اذا كان هـ اقترانا دائريا ضابطه هـ(س) = هـ(ع) حيث هـ(١) معرفة .

جا ع = جا ١ ، ع ∈ ح

جتا ع = جتا ١ ، ع ∈ ح

ظا ع = ظا ١ ، ع ∈ ح - {π/٢ + ن π : ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...}

ملاحظة : اذا كان ناتج التعويض ب تتم العمليات في الدرس السابع اضافة الى المتطابقات المثلثية

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

* المتطابقات المثلثية :

[١] $حا^2 م + حتا^2 م = 1 \Leftarrow حا^2 م = 1 - حتا^2 م \Leftarrow حتا^2 م = 1 - حا^2 م$ مهمة جداً

[٢] ضعف لزاوية $حا 2س = 2 حاس حتاس$ مهمة جداً

$حتا 2س = حتا^2 س - حا^2 س$ مهمة جداً

$= 1 - 2 حا^2 س$ مهمة جداً

$= 2 حتا^2 س - 1$ مهمة جداً

[٣] $حا م \pm حاب = 2 حتا(\frac{م \pm ب}{2}) حا(\frac{م \mp ب}{2})$ مهمة جداً بالترتيب

$حتام - حتاب = -2 حا(\frac{م+ب}{2}) حا(\frac{م-ب}{2})$ مهمة جداً

$حتام + حتاب = 2 حتا(\frac{م+ب}{2}) حتا(\frac{م-ب}{2})$

[٤] $حا(م \pm ب) = حام حتاب \pm حتام حاب$

$حتا(م \pm ب) = حتام حتاب \mp حام حاب$

$ظا(م \pm ب) = \frac{ظام \pm ظاب}{1 \mp ظام ظاب}$

[٥] $ظا^2 م + 1 = تا^2 م$ ، $ظتا^2 م + 1 = تتا^2 م$

[٦] $حا^2 س = \frac{1}{2}(1 - حتا 2س)$ ، $حتا^2 س = \frac{1}{2}(1 + حتا 2س)$

[٧] $حا(-س) = -حاس$ ، $حتا(-س) = حتاس$ ، $ظا(-س) = -ظاس$ مهم جداً مهم جداً

[٨] $حاس = حتا(\frac{\pi}{2} - س)$ ، $حتاس = حا(\frac{\pi}{2} - س)$ ، $ظاس = ظتا(\frac{\pi}{2} - س)$

[٩] $حاس = حا(\pi - س)$ ، $حاس = -حا(\pi + س)$ ، $حاس = -حا(2\pi - س)$ مهم جداً

$حا(\frac{\pi}{2} - س) = حا(\frac{\pi}{2} + س)$

[١٠] $حتاس = -حتا(\pi - س)$ ، $حتاس = -حتا(\pi + س)$ ، $حتاس = حتا(2\pi - س)$ مهم جداً

$ظاس = -ظا(\pi - س)$ ، $ظاس = ظا(\pi + س)$ ، $ظاس = -ظا(2\pi - س)$

عزيزي الطالب : هذه أهم المتطابقات المثلثية التي تحتاجها لحل الأسئلة في الرياضيات . وهناك متطابقات أخرى مثل

* $حا\frac{س}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - حتاس}{2}}$
* $حتا\frac{س}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + حتاس}{2}}$
* $ظا\frac{س}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - حتاس}{1 + حتاس}}$

من نتيجة [٦] بصورة أخرى .

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

نظرية أساسية : $\lim_{س \to 0} \frac{جا س}{س} = ١$ س بالقياس الدائري .

نتيجة : $\lim_{س \to 0} \frac{ظا س}{س} = ١$ لإثبات $\lim_{س \to 0} \frac{جا س}{س} \times \frac{١}{جتا س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س}{س} \times \frac{١}{جتا س}$

$= ١ \times ١ = ١$

نتيجة * $\lim_{س \to 0} \frac{جا أ س}{ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، $\lim_{س \to 0} \frac{أ س}{جا ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، ب ≠ صفر

* $\lim_{س \to 0} \frac{ظا أ س}{ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، $\lim_{س \to 0} \frac{أ س}{ظا ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، ب ≠ صفر .

مثال : جد ① $\lim_{س \to 0} \frac{٧ س}{جا ٢ س}$ ② $\lim_{س \to 0} \frac{ظا ٣ س}{٤ س}$

الحل ① $\lim_{س \to 0} \frac{٧ س}{جا ٢ س} = \frac{٧}{٢}$

② $\lim_{س \to 0} \frac{ظا ٣ س}{٤ س} = \frac{٣}{٤}$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{جا^٢ ٢ س}{٣ س^٢} = \lim_{س \to 0} \frac{جا ٢ س}{٣ س} \times \frac{جا ٢ س}{س}$

$= \frac{٢}{٣} \times ٢ = \frac{٤}{٣}$

④ $\lim_{س \to 0} \frac{٣ س ظتا ٢ س}{} = \lim_{س \to 0} \frac{٣ س}{ظا ٢ س}$

$= \frac{٣}{٢}$

⑤ $\lim_{س \to ٢} \frac{جا (س - ٢)}{س - ٢}$ افرض ص = س - ٢

$= \lim_{ص \to 0} \frac{جا ص}{ص} = ١$ س ← ٢ ، ص ← ٠ .

ملاحظة : مثل السؤال ⑤ قد يأتي ١ صورة اثبت انه .

⑥ $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٥ س}{ظا ٣ س} = \lim_{س \to 0} \frac{جا ٥ س}{\frac{ظا ٣ س}{س}}$ هنا نقسم البسط والمقام على س

$= \frac{٥}{٣}$

ملاحظة : اذا احتوى البسط والمقام ١ نسبة مثلثية نقسم البسط والمقام ١ س أو ع حسب المطلوب .

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

⑦ $\lim_{س \to 0} \frac{جا^2 3س}{ظا^2 3س} = \lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا^2 3س}{س^2}}{\frac{ظا^2 3س}{س^2}}$ هنا نقسم على $س^2$

$= \frac{3 \times 3}{3 \times 3} = \frac{9}{9}$

⑧ $\lim_{س \to 0} \frac{جا 3س}{2س^2 - 4س} = \lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا 3س}{س}}{\frac{2س^2 - 4س}{س}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا 3س}{س} \div \lim_{س \to 0} 2س - 4$

$= 3 \div (0 - 4)$

$= \frac{3}{-4}$

⑨ $\lim_{س \to 0} \frac{2 - جا^2 3س}{3 + س^2 ظا^2 س} = \lim_{س \to 0} \frac{\frac{2}{س^2} - \frac{جا^2 3س}{س^2}}{\frac{3}{س^2} + \frac{س^2 ظا^2 س}{س^2}}$

$= \frac{\lim_{س \to 0} 2 - \lim_{س \to 0} \frac{جا^2 3س}{س^2}}{\lim_{س \to 0} 3 + \lim_{س \to 0} ظا^2 س}$

$= \frac{2 - (3)^2}{3 + (0)^2} = \frac{2 - 9}{1} = \boxed{-7}$

⑩ $\lim_{س \to 0} \frac{جا 5س}{ظا^2 3س}$ لاحظ هنا حظ ولا حظ بين نقسم على $س^2$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا 5س}{س}}{\frac{ظا^2 3س}{س^2}} = \frac{5}{(3)^2} = \frac{5}{9}$

* لاحظ أن كل الأمثلة السابقة استخدمنا عملية قسمة البسط والمقام على أحد القواعد الأساسية.

⑪ $\lim_{س \to 0} \frac{ظتا 3س}{س + 1} = \frac{ظتا 0}{1} = 1$ تعويض مباشر.

⑫ $\lim_{س \to 0} \frac{2س}{ظتا 3س} = \frac{2 \times 0}{ظتا 0} = 0$ الحذر: لا يوجد قاعدة لاقتران جيب التمام

⑬ $\lim_{س \to 0} \frac{ظتا 5س \, جا 3س}{س^2} = \lim_{س \to 0} ظتا 5س \times \lim_{س \to 0} \frac{جا 3س}{س^2}$

$= ظتا 0 \times \frac{3}{2}$

$= 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

⑭ $\lim_{س \to 0} \frac{2س + جا 5س}{ظا 7س} = \lim_{س \to 0} \frac{\frac{2س}{س} + \frac{جا 5س}{س}}{\frac{ظا 7س}{س}} = \frac{2 + 5}{7} = 1$

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الرياضيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

(١٤) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}(\text{جا}٢س)}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}(\text{جا}٢س)}{\frac{\text{جا}٢س}{\text{جا}٢س} \times س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}(\text{جا}٢س)}{\text{جا}٢س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٢س}{س}$

افرض ص = جا٢س ، س ← ٠ ⇐ ص ← ٠

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{ظا}ص}{ص} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٢س}{س} = ١ \times ٢ = ٢$

(١٧) $\lim_{س \to ٣} \frac{\text{ظا}(س-٣)}{س^٢-٩}$ هنا نقسم $س^٢ - ٩ = (س-٣)(س+٣)$ وفي مثل هذا النوع من الأسئلة يجب تواجد علاقة تحليل ما بينه ما داخل الزاوية وبين المقدار.

$= \lim_{س \to ٣} \frac{\text{ظا}(س-٣)}{س-٣} \times \frac{س-٣}{س^٢-٩}$

$= ١ \times \lim_{س \to ٣} \frac{١}{س+٣}$

$= ١ \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٦}$

ملاحظة : نذكر دائماً أن $\lim_{ه(س) \to ٠} \frac{\text{جا}(ه(س))}{ه(س)} = ١$

سؤال : إذا كان $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٩س}{ب س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٣س}{ب س} = ٣$ فجد قيمة كل من ٩ ، ب ؟

مثال : جد $\lim_{س \to ٥} \frac{\text{جا}(س-٥)}{س^٢ - ٣س - ١٠}$

الحل : $= \lim_{س \to ٥} \frac{\text{جا}(س-٥)}{(س-٥)(س+٤)}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{\text{جا}(س-٥)}{س-٥} \times \frac{١}{س+٤}$

$= ١ \times \frac{١}{٩} = \frac{١}{٩}$

حل آخر : $\lim_{س \to ٥} \frac{\frac{\text{جا}(س-٥)}{س-٥}}{(س^٢ - ٣س - ١٠)}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{\text{جا}(س-٥)}{س-٥} \times \frac{س-٥}{(س-٥)(س+٤)}$

$= ١ \times \frac{١}{٩} = \frac{١}{٩}$

مثال جد $\lim_{س \to -٤} (س^٢ + ٨س + ١٥) \text{قتا}(س+٤)$

الحل $= \lim_{س \to -٤} ٢(س+٤) \times \frac{١}{\text{جا}(س+٤)}$

$= ٢ \lim_{س \to -٤} \frac{س+٤}{\text{جا}(س+٤)}$

$= ٢ \times ١ = ٢$

مثال جد $\lim_{س \to ١} \frac{س^٤ - س - \text{جا}(س-١)}{س-١}$

الحل : $= \lim_{س \to ١} \frac{س(س-١)}{س-١} - \frac{\text{جا}(س-١)}{س-١}$

$= \lim_{س \to ١} س - \frac{\text{جا}(س-١)}{س-١} \times \frac{س-١}{س-١}$

افرض ص = س - ١ ⇐ س ← ١ ⇐ ص ← ٠

$= \lim_{س \to ١} س - \lim_{ص \to ٠} \frac{\text{جا}ص}{ص} \times \lim_{س \to ١} \frac{س-١}{(س-١)(س+١)}$

$= ١ - ١ \times \frac{١}{٢}$

$= ١ - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

* استخدام المطابقات :

مثال : اوجد $\lim_{س \to 0} \frac{٣س}{ظا٦س - ظا٣س}$ لاحظ استخدام جا أ - جا ب

الحل $= \lim_{س \to 0} \frac{٣س}{٢جتا(\frac{٦س+٣س}{٢})جا(\frac{٦س-٣س}{٢})}$ ⇐ $= ٢جا(\frac{أ+ب}{٢})جا(\frac{أ-ب}{٢})$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٣س}{٢جتا٤.٥س \; جا ١.٥س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٣}{جا١.٥س} \times \frac{١}{٢جتا٤.٥س}$

$= \frac{٢}{١ \times ٢} \times \frac{٢}{٣}$

$= \frac{٢}{٣}$

مثال $\lim_{س \to 0} \frac{جتا٥س - جتا٣س}{س^٢ ظا٤س}$ بدون قسم ٢ ، $س^٢$

الحل $= \lim_{س \to 0} \frac{جتا٥س - جتا٣س}{س^٢ ظا٤س}$ $جتاهـ - جتاو = -٢جا\frac{هـ+و}{٢}جا\frac{هـ-و}{٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-٢جا٤س \; جا س}{س^٢ ظا٤س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-٢جا٤س \; جا س}{س^٢ \frac{جا٤س}{جتا٤س}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-٢جا س}{س} = \boxed{-٢}$

سؤال جد $\lim_{س \to ٩} \frac{ظا٢س - ظا٢٩}{س - ٩}$

مثال : جد $\lim_{س \to 0} \frac{١ - ٢جتا^٢٣س + جتا٦س}{س^٢}$

الحل : لاحظ ان $١ - ٢جتا^٢٣س = -جتا٤س$ لأن $جتا٢س = ٢جتا^٢س - ١$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-جتا٤س + جتا٦س}{س^٢}$ ⇐ $جتا٤س = ٢جتا^٢٢س - ١$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جتا٦س - جتا٤س}{س^٢}$ $= \lim_{س \to 0} \frac{-٢جا(\frac{٦س+٤س}{٢})جا(\frac{٦س-٤س}{٢})}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} -٢ \frac{جا٥س}{س} \times \frac{جا س}{س}$

$= -٢ \times \frac{٥}{١} \times ١$

$= -١٠$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال حد $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا } ٣س - \text{جتا } ٩}{\text{حا } ٣س - \text{حا } ٩}$

الحل : $= \lim_{س \to ٩} \frac{-٢ \text{ حا } \frac{٣س + ٩}{٢} \text{ جا } \frac{٣س - ٩}{٢}}{٢ \text{ جتا } \frac{٣س + ٩}{٢} \text{ حا } \frac{٣س - ٩}{٢}}$

$= \lim_{س \to ٩} - \frac{\text{حا}(\frac{٣س + ٩}{٢})}{\text{جتا}(\frac{٣س + ٩}{٢})}$

$= \lim_{س \to ٩} - \text{ظا}(\frac{٣س + ٩}{٢})$

$= - \text{ظا}(\frac{٩ + ٩}{٢})$

$= - \text{ظا } ٩$

مثال : حد $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا } ٤س}{س^٢}$ ملاحظة: عند وجود $١ - \text{جتا } ٩س$ نضرب بـ $\frac{١ + \text{جتا } ٩س}{١ + \text{جتا } ٩س}$

الحل : $= \lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا } ٤س}{س^٢} \times \frac{١ + \text{جتا } ٤س}{١ + \text{جتا } ٤س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}^٢ ٤س}{س^٢ (١ + \text{جتا } ٤س)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{حا}^٢ ٤س}{س^٢ (١ + ١)} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{حا}^٢ ٤س}{٢ س^٢}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{حا } ٤س}{س} \times \frac{\text{حا } ٤س}{س}$

$= \frac{٤}{٢} \times ٤ = ٨$

مثال حد $\lim_{س \to ٠} \frac{س \text{ حا } س}{١ - \text{جتا } س} \times \frac{١ + \text{جتا } س}{١ + \text{جتا } س}$ نضرب بالمرافق

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س \text{ حا } س (١ + \text{جتا } س)}{١ - \text{جتا}^٢ س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س \text{ حا } س}{\text{حا}^٢ س} (٢)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢ س \text{ حا } س}{١ - \text{جتا}^٢ س} \times \frac{١ + \text{جتا } س}{١ + \text{جتا } س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢ س \text{ حا } س \times ٢}{\text{حا}^٢ س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤ س \text{ حا } س}{\text{حا}^٢ س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٤ س}{\text{حا } س} = ٤$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

وزارة ١٤ ش ٢٠١٠ : جد $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{ظا \pi س}$

الحل نفرض $ص = س - ٢ \Leftarrow س = ص + ٢$

$س \to ٢ \Leftarrow ص \to ٠$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{ص}{ظا \pi (ص + ٢)} = \lim_{ص \to ٠} \frac{ص}{ظا \pi ص + ٢ \pi}$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{ص}{ظا \pi ص}$

$= \frac{١}{\pi}$

وزارة ١٧ ش ٢٠١٠ : جد $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{ظتا س}{\pi - ٢س}$ $\quad ظتا س = حا (\frac{\pi}{٢} - س)$

الحل $= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{حا (\frac{\pi}{٢} - س)}{\pi - ٢س}$

نفرض $ص = \frac{\pi}{٢} - س \Leftarrow س = -ص + \frac{\pi}{٢} = \frac{\pi}{٢} - ص$

$س \to \frac{\pi}{٢} ، ص \to ٠$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{حا ص}{٢ (ص)}$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{حا ص}{ص} \times \frac{١}{٢} = ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

وزارة ١١ ش ٢٠١٠ : جد $\lim_{س \to ٠} ٣س (ظتا ٢س + قتا ٣س)$

الحل $= \lim_{س \to ٠} ٣س (\frac{١}{ظا ٢س} + \frac{١}{حا ٣س})$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣س}{ظا ٢س} + \lim_{س \to ٠} \frac{٣س}{حا ٣س}$

$= \frac{٣}{٢} + ١ = \frac{٥}{٢}$

وزارة ١١ ص ٢٠١٠ : جد $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{ظتا س - حا س}{\frac{\pi}{٢} - س}$

الحل $= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{ظتا س - ظتا (\frac{\pi}{٢} - س)}{\frac{\pi}{٢} - س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{-٢ جا (س + \frac{\pi}{٢} - س) جا (س - (\frac{\pi}{٢} - س))}{\frac{\pi}{٢} - س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{-٢ حا (\frac{\pi}{٢}) حا (س - \frac{\pi}{٢})}{\frac{\pi}{٢} - س}$

$= -٢ \times \frac{١}{٢} \times ١ = -٢$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

ورقة ١٠ ص ٢ : جد $\lim_{س \to 0} \frac{ظا س - جا س}{س^3}$

الحل : $= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا س}{جتا س} - جا س}{س^3} = \lim_{س \to 0} \frac{جا س - جا س جتا س}{س^3 جتا س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س (1 - جتا س)}{س^3 جتا س} \times \frac{1 + جتا س}{1 + جتا س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س (1 - جتا^2 س)}{س^3 جتا س (1 + جتا س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^3 س}{س^3 جتا س (1 + جتا س)} = \lim_{س \to 0} \frac{جا^3 س}{س^3} \times \frac{1}{جتا س + جتا^2 س}$

$= (1)^3 \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

ورقة ١٠ ص ٣ : جد $\lim_{س \to 0} \frac{ظا(2س) - 1}{س^2}$

الحل : $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{1}{جتا^2 س} - 1}{س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا^2 س}{جتا^2 س \, س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا^2 س}{س^2 جتا^2 س} = \lim_{س \to 0} \frac{1 - (جتا^2 س - جا^2 س)}{س^2 جتا^2 س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{(1 - جتا^2 س) + جا^2 س}{س^2 جتا^2 س} = \lim_{س \to 0} \frac{2 جا^2 س}{س^2} \times \frac{1}{جتا^2 س}$

$= 2 \times (1)^2 \times \frac{1}{1}$

$= 2$

سؤال : جد ① $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} (\pi - 2س) ظا س$

② $\lim_{س \to 1} \frac{جا(\frac{\pi}{2} س)}{س + 1}$

مكتبة الوسام ALWESAM
قسم الدوسيه
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم: محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

تدريب ١ ص٤٢ : ① $\lim_{س \to 0} \frac{٩س}{جا٢س} = \frac{٩}{٢}$

② $\lim_{س \to 0} \frac{ظا٢س}{٧س} = \frac{٢}{٧}$

تدريب ٢ ص٤٢ ورد في وزاري ٢٠١٠ محلول سابقاً

تدريب ٣ ص٤٤ : $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا س - جتا س}{س - \frac{\pi}{٤}}$ $\quad جا س = جتا(\frac{\pi}{٤} - س)$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جتا(\frac{\pi}{٤} - س) - جتا س}{س - \frac{\pi}{٤}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{-٢ جا(\frac{\pi}{٤} - س + س) جا(\frac{\pi}{٤} - س - س)}{س - \frac{\pi}{٤}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{-٢ جا(\frac{\pi}{٤}) جا(\frac{\pi}{٤} - س)}{س - \frac{\pi}{٤}} = -٢ \times \frac{١}{٢} \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا(\frac{\pi}{٤} - س)}{س - \frac{\pi}{٤}}$

امر ضا $ص = \frac{\pi}{٤} - س \Leftarrow س = -ص + \frac{\pi}{٤}$ $\quad س \to \frac{\pi}{٤} \Leftarrow ص \to ٠$

$\Leftarrow \lim_{ص \to ٠} \frac{جا ص}{-ص} = -١ \times ١ = -١$

وزاري ٢٠١٦ ص٥ : $\lim_{س \to ٠} \frac{٢س - ها س}{١ - جتا ٢س}$ استعمل $جتا ٢س = ١ - ٢ها^٢ س$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢س - ها س}{١ - ١ + ٢ها^٢ س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢س - ها س}{٢ها^٢ س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢س - ها س}{س ها س}$ $\quad$ لما س $\to ٠ \Leftarrow$ اها س ا $= \begin{cases} ها س & س > ٠ \\ -ها س & س < ٠ \end{cases}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٠^+} \frac{٢س - ها س}{س ها س} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{٢س}{س ها س} - \lim_{س \to ٠^+} \frac{ها س}{س ها س}$

$= \frac{١}{ها ١} = \frac{٢}{ها ١} - \frac{١}{ها ١}$

ايضاً $\lim_{س \to ٠^-} \frac{٢س - ها س}{-س ها س} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{٢س}{-س ها س} - \lim_{س \to ٠^-} \frac{ها س}{-س ها س}$

$= \frac{-٢}{ها ١} + \frac{١}{ها ١} = \frac{١}{ها ١}$

وبما ان النهايتين غير متساويتين $\Leftarrow \lim_{س \to ٠} \frac{٢س - ها س}{١ - جتا ٢س}$ غير موجودة .

مكتبة الوسام ALWESAM
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

تمارين ومسائل ص ٤٦

١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}س}{س} = \frac{\text{جا}\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \times \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi^2}$ تعويض مباشر

٢) $\lim_{س \to 0} (\text{جا}س + \text{ظا}٤س) = \lim_{س \to 0} \frac{1}{\frac{\text{جا}س}{س}} + \text{ظا}س$ تعويض مباشر

$= \frac{1}{1} + 0 = 1$

٣) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٥س}{٨س} = \frac{5}{8}$

٤) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 ٣س}{س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٣س}{س} \times \frac{\text{جا}٣س}{س}$

$= ٣ \times ٣ = ٩$

٥) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 ٤س^2}{٤س^2}$ افرض $ص = ٢س^2$ ، $س \to 0 \Leftarrow ص \to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{ظا}ص}{٢ص} = \frac{1}{2}$

٦) $\lim_{س \to -٥} \frac{\text{جا}(س+٥)}{٢٥ - س^2}$ ، افرض $ص = س + ٥$ ، $س \to -٥ \Leftarrow ص \to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا}ص}{(٥-س)(٥+س)} = \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا}ص}{ص} \times \lim_{ص \to 0} \frac{1}{٥-س}$

$= 1 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

٧) $\lim_{س \to 0} \frac{س - \text{جا}٣س + \text{ظا}٥س}{٢س - \text{ظا}^2 س}$ بالقسمة على $س$

$= \frac{1 - ٣ + ٥}{2 - 1 \times 0} = \frac{3}{2}$

٨) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}٢س}{٢س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{1 - (1 - ٢\text{جا}^2 س)}{٢س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٢\text{جا}^2 س}{٢س^2}$

$= (1)^2 = 1$

٩) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}س}{\frac{\pi}{2} - س} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{\frac{\pi}{2} - س}$ افرض $ص \to \frac{\pi}{2} - س$

$س \to \frac{\pi}{2} \Leftarrow ص \to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا}ص}{ص} = 1$

١٠) $\lim_{س \to ٣\pi} \frac{\text{جا}س}{\frac{\pi}{3} - س}$ افرض $ص = س - ٣\pi \Leftarrow س = ص + ٣\pi$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا}(ص + ٣\pi)}{\frac{\pi}{3} - ص}$ $س \to ٣\pi \Leftarrow ص \to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{-\text{جا}ص}{\frac{1}{3} ص} = -1 \times \frac{3}{1} = -٣$

تذكر: $\text{جا}(ص + ٣\pi) = \text{جا}(ص + \pi) = -\text{جا}ص$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

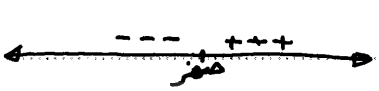
١١) $\lim_{س\to 0} \frac{ا-\text{جتا}س}{س} = \lim_{س\to 0} \frac{ا-(ا-٢\text{هأ}^{٢}\frac{س}{٢})}{س}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{٢\text{هأ}^{٢}\frac{س}{٢}}{س} = \lim_{س\to 0} \frac{\text{جا}^{٢}\frac{س}{٢}}{س}$

$\Leftarrow \lim_{س\to 0^{+}} \frac{\text{جا}^{٢}\frac{س}{٢}}{س} = \frac{١}{٢} \times \text{جا}٠ = ٠$

$\Leftarrow \lim_{س\to 0^{-}} \frac{\text{جا}^{٢}\frac{س}{٢}}{س} = \frac{١}{٢} \times \text{جا}٠ = ٠$

$\Leftarrow \lim_{س\to 0} \frac{\text{جا}^{٢}\frac{س}{٢}}{س}$ غير موجودة




١٢) $\lim_{س\to ٨} \frac{\text{هأ}(س^{٢}-٦٤)}{س-٨}$

افرض $ص = س^{٢}-٦٤ \Leftarrow س = \sqrt{ص+٦٤}$

$س \to ٨ \Leftarrow ص \to ٠$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{\text{هأ}ص}{س-٨} \times \frac{س+٨}{س+٨}$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{\text{هأ}ص}{س^{٢}-٦٤} \times (س+٨)$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{\text{هأ}ص}{ص} \times (س+٨)$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{\text{هأ}ص}{ص} \times \sqrt{ص+٦٤}+٨$

$= ١ \times ١٦ = ١٦$

١٣) $\lim_{س\to 0} \frac{١+\text{هأ}٤س-\text{جتا}^{٢}س}{س} = \lim_{س\to 0} \frac{\text{هأ}٤س}{س} + \lim_{س\to 0} \frac{١-\text{جتا}^{٢}س}{س}$

$ص = ٢س \Leftarrow س = \frac{١}{٢}ص$

استخدم $١-\text{جتا}^{٢}س = \text{هأ}^{٢}س$

$س \to ٠ \Leftarrow ص \to ٠$

$= \lim_{س\to 0} \frac{\text{هأ}٤س}{س} + \lim_{ص\to 0} \frac{١-\text{جتا}^{٢}ص}{\frac{١}{٢}ص}$

$= ٤ + \lim_{ص\to 0} \frac{\text{هأ}^{٢}ص}{\frac{١}{٢}ص}$

$= ٤ + \lim_{ص\to 0} \frac{\text{هأ}ص}{\frac{١}{٢}ص} \times \text{هأ}ص$

$= ٤ + ١ \times ٢ \times ٠ = ٤$

١٤) $\lim_{س\to ٩} \frac{\text{هأ}س-\text{هأ}٩}{س-٩} = \lim_{س\to ٩} \frac{٢\text{جتا}(\frac{س+٩}{٢})\text{هأ}(\frac{س-٩}{٢})}{س-٩}$

$ص = س-٩$

$س \to ٩ \quad ص \to ٠$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{٢\text{جتا}(\frac{ص+٢٩}{٢})\text{هأ}(\frac{ص}{٢})}{ص}$

$= \lim_{ص\to 0} ٢\text{جتا}(\frac{ص+٢٩}{٢}) \times \lim_{ص\to 0} \frac{\text{هأ}\frac{١}{٢}ص}{ص}$

$= ٢\text{جتا}٩ \times \frac{١}{٢} = \text{جتا}٩$ .

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

١٥) $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٢س}{٦س} = \lim_{س \to 0} \frac{ظا ٥س}{ب س - س}$ = ؟ حيث ٢ ، ب ؟

$\frac{٢}{٦} = ؟ \Leftarrow ٢ = ١٢$

$\lim_{س \to 0} \frac{ظا ٥س}{(ب-١)س} = \frac{٥}{ب-١} = ؟$

$ب - ١ = \frac{٥}{٢} \Leftarrow$

$ب = \frac{٥}{٢} + ١ = \frac{٧}{٢} \Leftarrow$

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

الدرس الرابع : الاتصال عند نقطة .

رسمياً : اذا امكن رسم منحنى $هـ(س)$ دون رفع رأس القلم (لا يوجد دوائر مفتوحة أو قفزات) فإن الاقتران يكون متصلاً .

تعريف : يكون $هـ$ متصلاً عند $س = أ$ عندما

① $هـ$ معرف عند $س = أ$ ② $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) موجودة عندما $س \to أ$ ③ $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = هـ(أ)

ملاحظة : اذا تحققت الشرط الثالث فالشرطان الاول والثاني متحققان بالضرورة .

مثال : اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٢س - ١ & ، س \leq ١ \\ س^٢ & ، س > ١ \end{cases}$ فابحث في اتصال $هـ$ عند $س = ١$

الحل : $هـ$ معرف عند $س = ١ \Leftarrow هـ(١) = ٢ \times ١ - ١ = ١$

$\lim_{س \to ١^+}$ $٢س - ١ = ٢ \times ١ - ١ = ١$

$\lim_{س \to ١^-}$ $س^٢ = (١)^٢ = ١$ $\Leftarrow \lim_{س \to ١}$ هـ(س) = ١ موجودة .

بما ان $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = هـ(١) = ١ فإن $هـ$ متصل عند $س = ١$

مثال : اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ٢س & ، س = ٢ \end{cases}$ ابحث في اتصال $هـ$ عند $س = ٢$

الحل $هـ(٢) = ٢ \times ٢ = ٤$ $\Leftarrow هـ$ معرف عند $س = ٢$

$\lim_{س \to ٢}$ $\frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢}$ $س + ٢ = ٢ + ٢ = ٤$ موجودة

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢}$ هـ(س) = هـ(٢) = ٤ $\Leftarrow هـ$ متصل عند $س = ٢$

مثال اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} \frac{|٢س - ٨|}{٤ - س} & ، س \neq ٤ \\ ٢ & ، س = ٤ \end{cases}$ ابحث في اتصال $هـ$ عند $س = ٤$

الحل : نجد تعريف $هـ$ بدون رمز القيمة المطلقة

$٢س - ٨ = ٠ \Leftarrow س = ٤$

$هـ(س) = \begin{cases} \frac{٢س - ٨}{٤ - س} & ، س > ٤ \\ \frac{-(٢س - ٨)}{٤ - س} & ، س < ٤ \\ ٢ & ، س = ٤ \end{cases}$

* $هـ$ معرف عند $س = ٤ \Leftarrow هـ(٤) = ٢$

* $\lim_{س \to ٤^+}$ $\frac{٢س - ٨}{٤ - س} = \lim_{س \to ٤^+}$ $\frac{٢(س - ٤)}{-(س - ٤)} = -٢$

$\lim_{س \to ٤^-}$ $\frac{-٢(س - ٤)}{٤ - س} = \lim_{س \to ٤^-}$ $-٢ + ٢ = ٢$ $\Leftarrow \lim_{س \to ٤}$ هـ(س) موجودة

$\Leftarrow هـ$ غير متصل عند $س = ٤$

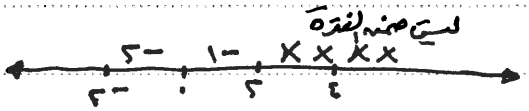
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : $ه(س) = \begin{cases} [\frac{س}{٢} - ١] & ، -١ \leq س < ٢ \\ \frac{١}{|س-٣|} (\frac{١}{٢} - \frac{١}{س}) & ، ٢ < س \leq ٥ \end{cases}$

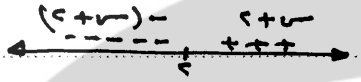
ابحث في اتصال ه عند $س = ٢$

الحل : $[\frac{س}{٢} - ١] = ٠ \Leftarrow \frac{س}{٢} - ١ = ٠ \Leftarrow س = ٢$




أيضاً $ل = |\frac{١}{٢}| = ٢$

$|س-٢| = ٢ \Leftarrow س = ٢$




$$\Leftarrow ه(س) = \begin{cases} -٢ & ، -١ \leq س < ٠ \\ -١ & ، ٠ \leq س < ٢ \\ ٠ & ، س = ٢ \\ (\frac{١}{٢} - \frac{١}{س}) \frac{١}{س-٢} & ، ٢ < س \leq ٥ \end{cases}$$

* $ه$ معرفة عند $س = ٢ \Leftarrow ه(٢) = ٠$

* $\lim_{س \to ٢^+} (\frac{١}{٢} - \frac{١}{س}) \frac{١}{س-٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{(٢-س)}{(٢)(٢)(س-٢)} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{-١}{٤س} = -\frac{١}{٨}$

$\lim_{س \to ٢^-} -١ = -١$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢}$ ه(س) غير موجودة

$\Leftarrow$ ه غير متصل عند $س = ٢$ .

مثال : ابحث في اتصال ه عند $س =$ صفر للاقتران $ه(س) = \begin{cases} \frac{جا ٢س}{س} & ، س \neq ٠ \\ ٢ & ، س = ٠ \end{cases}$

الحل : * $ه(٠) = ٢ \Leftarrow ه$ معرف عند $س = ٠$

* $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢س}{س} = ٢$ موجودة .

* $\lim_{س \to ٠}$ ه(س) = ه(٠) = ٢

ه متصل عند $س =$ صفر

مثال : $ه(س) = \begin{cases} \frac{جا ٦س}{س} & ، س \neq ٠ \\ ١ & ، س = ٠ \end{cases}$ ابحث في اتصال ه عند $س =$ صفر

الحل : $ه(س) = \begin{cases} \frac{جا ٦س}{س} & ، س \neq ٠ \\ ١ & ، س = ٠ \end{cases}$

$$ه(س) = \begin{cases} \frac{جا ٦س}{س} & ، س > ٠ \\ \frac{جا -٦س}{-س} & ، س < ٠ \\ ١ & ، س = ٠ \end{cases}$$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$\Leftarrow$ * $هـ(١) = ١ \Leftarrow$ هـ معرف عند $س = ١$

* $\lim_{س \to ١^+} \frac{هـ(س)}{س} = ١$

$\lim_{س \to ١^-} \frac{هـ(س)}{س} = -١$ $\Leftarrow$ $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) غير موجودة .

$\Leftarrow$ هـ غير متصل عند $س = ١$

مثال $هـ(س) = س [س + ١]$ عند $س = ١$

الحل : $[س + ١] \Leftarrow س = -١$

$ل = ١$

$هـ(س) = \begin{cases} س \times ١ & ، ٠ \leq س < ١ \\ س \times ٢ & ، ١ \leq س < ٢ \end{cases}$

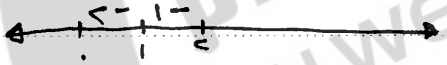
$هـ(١) = ١ \times ٢ = ٢ \Leftarrow$ هـ معرف عند $س = ١$

$\lim_{س \to ١^+}$ $س \times ٢ = ١ \times ٢ = ٢$

$\lim_{س \to ١^-}$ $س = ١$ $\Leftarrow$ $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) غير موجودة .

$\Leftarrow$ هـ غير متصل عند $س = ١$

مثال $هـ(س) = س^٢ [س - ٢]$ عند $س = ١$ ، $س = \frac{١}{٢}$




$[س - ٢] \Leftarrow س = ٢$

$ل = ١$

$هـ(س) = \begin{cases} س^٢ \times -٢ & ، ٠ \leq س < ١ \\ س^٢ \times -١ & ، ١ \leq س < ٢ \end{cases}$

* $هـ(١) = (١)^٢ \times -١ = -١$

* $\lim_{س \to ١^+}$ $-١ س^٢ = -١$ ، $\lim_{س \to ١^-}$ $-٢ س^٢ = -٢$

$\Leftarrow$ $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) غير موجودة

$\Leftarrow$ هـ غير متصل عند $س = ١$

بينما $هـ(\frac{١}{٢}) = -٢ (\frac{١}{٢})^٢ = -\frac{١}{٢}$ معرف

$\lim_{س \to \frac{١}{٢}}$ $-٢ س^٢ = -٢ (\frac{١}{٢})^٢ = -\frac{١}{٢}$ موجودة

$\lim_{س \to \frac{١}{٢}}$ هـ(س) = هـ$(\frac{١}{٢}) = -\frac{١}{٢}$

$\Leftarrow$ هـ متصل عند $س = \frac{١}{٢}$

ملاحظة : يكون اقتران أكبر عدد صحيح غير متصل عند نقاط التحول (ناتج تعويضها في اقتران صحيح) ومتصلاً عند النقاط التي ناتج تعويضها ليس صحيحاً .

مكتبة الوسام
قسم الدوسيات
ALWESAM
المعلم محمد قريع
تم تحميل هذا الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مثال : $هـ(س) = \begin{cases} \sqrt{س-٢} + ٤ & ، س > ٢ \\ \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} & ، س < ٢ \\ ٤ & ، س = ٢ \end{cases}$

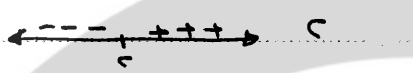
الحل

* $هـ(٢) = ٤ \Leftarrow$ هـ معرف عند ٤

* $\lim_{س \to ٢^+} \sqrt{س-٢} + ٤ = ٤$

ملاحظة : لو لم نوجد الساوا لا يكون له الاستدلال عن معرف عند ٤ وبالتالي لا متصل

لأن $\sqrt{س-٢}$ معرف إذا كان $س \geq ٢$




$$\lim_{س \to ٢^-} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{(س-٢)(س+٢)}{(س-٢)} = ٤$$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٤$

* $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢) = ٤$

$\Leftarrow$ هـ متصل عند $س = ٢$

مثال : إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} [س] + ٢ب & ، س \geq ٤ \\ ب س & ، س < ٤ \end{cases}$

حدد قيمة ب التي تجعل هـ متصلاً عند $س = ٤$

الحل : هـ متصل عند $س = ٤ \Leftarrow$

$\lim_{س \to ٤^+} [س] + ٢ب = \lim_{س \to ٤^-} ب س$

$\Leftarrow (\lim_{س \to ٤} [س]) + ٢ب = ٤ ب$

$٤ + ٢ب = ٤ ب$

$\Leftarrow ٢ب = ٤ ب \Leftarrow ب = ٢$

تدريب ٢ ضع : $هـ(س) = \begin{cases} ب س^٣ - ب س + ١ & ، س \leq ١ \\ ٥ & ، س = ١ \\ س^٢ - (ب+١) س + ٢ & ، س > ١ \end{cases}$ حيث ب، ب أعداد تجعل هـ متصلاً عند $س = ١$

الحل هـ متصل عند $س = ١ \Leftarrow \lim_{س \to ١^+} س^٢ - (ب+١) س + ٢ = هـ(١)$

$١ - (ب+١) + ٢ = ٥ \Leftarrow ب + ب = -٢ \quad ---①$

أيضاً $\lim_{س \to ١^-} ب س^٣ - ب س + ١ = هـ(١) = ٥$

$ب - ب + ١ = ٥ \Leftarrow ب - ب = ٤ \quad ---②$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$\Leftarrow$ بحل المعادلتين ① ، ② بالحذف

$$\begin{aligned} أ + ب &= -٢ \\ + \quad أ - ب &= ٤ \end{aligned}$$

$$٢أ = ٢ \Leftarrow \frac{٢}{٢} = أ \Leftarrow \boxed{أ = ١}$$

بالتعويض $أ + ب = -٢ \Leftarrow ١ + ب = -٢ \Leftarrow \boxed{ب = -٣}$

نظرية ① : إذا كانت $هـ$ دالة كثيرة حدود ، فإن $هـ$ متصلة لجميع قيم $ح$ الحقيقية .

② $هـ(س) = \sqrt{د(س)}$ يكون متصلاً عند $أ$ إذا كانت $د(س) \geq$ صفر ، $د$ متصلاً عند $أ$ .

③ إذا كانت $هـ$ دالة نسبية معرفة عند $س = أ$ فإن $هـ$ متصلة عند $س = أ$ (الدالة النسبية متصلة لجميع قيم $ح$ ما عدا أصفار مقامها) .

نظرية : إذا كانت $هـ$ ، $د$ دالتين متصلتين عند $س = أ$ فإن

① $هـ + د$ ، $هـ - د$ متصلتين عند $س = أ$

② $هـ \times د$ متصلة عند $س = أ$

③ $\frac{هـ}{د}$ متصلة عند $س = أ$ ، بشرط $د(أ) \neq$ صفر

ملاحظة : عكس النظرية ليس دائماً صحيحاً بمعنى إذا كانت $(هـ + د)$ متصلاً عند $س = أ$ فليس شرطاً أن يكون $هـ$ ، $د$ متصلان عند $س = أ$ .

مثال : $هـ(س) = \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ ، $د(س) = \sqrt{٢س - ١}$ ابحث في اتصال $هـ \times د$ عند $س = ٢$

الحل $هـ$ نسبية $\Leftarrow$ معرفة عند $س = ٢ \Leftarrow هـ$ متصلة عند $س = ٢$

$٢س - ١ >$ صفر في فترة $(١ ، ٣) \Leftarrow ٢س - ١$ متصلة عند $س = ٢$

$\Leftarrow د(س)$ متصلة عند $س = ٢$

$\Leftarrow (هـ \times د)$ متصلة عند $س = ٢$ لأنه حاصل ضرب متصلتين .

تدريب ٣ ص ٨٠ : $هـ(س) = (س - ٢)^٣$ ، $د(س) = [س + ١]$ ابحث في اتصال $هـ \times د$ عند $س = ٢$

الحل : $هـ$ متصلة عند $س = ٢$ لأنه كثير حدود $هـ(س) = س^٣ - ٦س^٢ + ١٢س - ٨$ بفك المقدار

$[س + ١] \Leftarrow س = -١$ ، $ل = ١$ ، $١ ، ٢ ، ٣$

$$= \begin{cases} ٢ & ، \text{إذا } س < ٢ \\ ٣ & ، \text{إذا } ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$$

$\lim_{س \to ٢^+}$ $= ٣$ ، $\lim_{س \to ٢^-}$ $= ٢$

$\Leftarrow$ بما أن $[س + ١]$ غير موجودة $\Leftarrow [س + ١]$ غير متصلة عند $س = ٢$

نفكر $هـ \times د = \begin{cases} ٢(س - ٢)^٣ & ، ١ \leq س < ٢ \\ ٣(س - ٢)^٣ & ، ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٢^+}$ $٣(س - ٢)^٣ = ٠$ ، $\lim_{س \to ٢^-}$ $٢(س - ٢)^٣ = ٠$ ، $هـ \times د(٢) = ٠$

$\Leftarrow (هـ \times د)$ متصلة عند $س = ٢$

www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

وزارة ٢٠١٦ ش : اذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{٩س^٢ - ١}{١ - ٦س + ٩س^٢} & ، -٣ < س < \frac{١}{٣} \\ ج & ، س = \frac{١}{٣} \\ -٦س - [س] & ، \frac{١}{٣} < س < \frac{٤}{٣} \end{cases}$

ابحث في اتصال $ق$ عند $س = \frac{١}{٣}$

الحل : * $ق$ معرفة عند $س = \frac{١}{٣} \Leftarrow ق(\frac{١}{٣}) = ج$

قيمة $[\frac{١}{٣}] = ٠$ لأن $٠ \le س < ١$ ، $[س] = ٠$

* $\lim_{س \to \frac{١}{٣}^+} -٦س - [س] = -٦ \times \frac{١}{٣} - ٠ = -٢$

$= ج$

$$\lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} \frac{٩س^٢ - ١}{١ - ٦س + ٩س^٢} = \lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} \frac{(٣س - ١)(٣س + ١)}{(٣س - ١)^٢}$$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} \frac{(٣س - ١)(٣س + ١)}{|٣س - ١|}$$

$٣س - ١ = -(٣س - ١)$ عندما $س < \frac{١}{٣}$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} \frac{(٣س - ١)(٣س + ١)}{-(٣س - ١)}$$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} -(٣س + ١) = -(٣ \times \frac{١}{٣} + ١) = -٢$$

$\Leftarrow \lim_{س \to \frac{١}{٣}} ق(س) = -٢$ موجودة

* بما أن $\lim_{س \to \frac{١}{٣}} ق(س) = ق(\frac{١}{٣}) = -٢$

فإن $ق$ متصل عند $س = \frac{١}{٣}$

وزارة ٢٠١٢ ش : $ق(س) = \begin{cases} ٣س^٢ & ، س \le ١ \\ ٢ + ٢س & ، س > ١ \end{cases}$ ، $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س < ١ \\ ١ & ، س \ge ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال $(ق + هـ)(س)$ عند $س = ١$

الحل : $(ق + هـ)(س) = \begin{cases} ٣س^٢ + ٢ & ، س \le ١ \\ ٢ + ٢س + س^٢ & ، س > ١ \end{cases}$

$س^٢ + ٢س = ٠$ عندما $س = ٠$ ، $س = -٢$

* $(ق + هـ)(١) = ٣(١)^٢ + ٢ = ٥$

* $\lim_{س \to ١^+} ٣س^٢ + ٢س = ٣(١)^٢ + ٢(١) = ٥$

$\lim_{س \to ١^-} ٢ + ٢س + س^٢ = ٢ + ٢(١) + (١)^٢ = ٥$ $\Leftarrow \lim_{س \to ١} (ق + هـ)(س) = ٥$

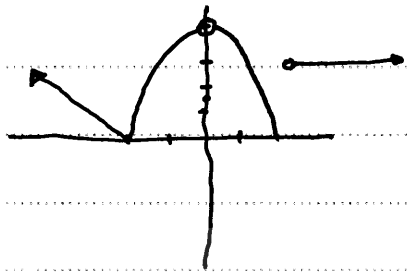
* $\lim_{س \to ١} (ق + هـ)(س) = (ق + هـ)(١) = ٥ \Leftarrow (ق + هـ)$ متصل عند $س = ١$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

تمارين ومسائل ص٦٣+٦٤

١) س = {٠ ، ٢}



٢) د(س) = { ١-٤س ، س ≥ -٢ ، س = ٠ ، س = -٢
{ ٣س٢ - ٥ ، س > -٢

* د(-٢) = ١-٤×-٢ = ٩ ⇐ د معرف عند س = -٢

* نهـ(-٢)+ ٣س٢ - ٥ = ٣(-٢)٢ - ٥ = ٧

نهـ(-٢)- ١-٤س = ١-٤×-٢ = ٩ ⇐ نهـ د(س) يد موجودة

⇐ د(س) يد متصل عند س = -٢

عند س = ٠ * د(٠) = ٣(٠)٢ - ٥ = -٥ ⇐ د معرف عند س = ٠

نهـ(٠)+ ٣س٢ - ٥ = ٣(٠)٢ - ٥ = -٥

* ∴ نهـ(٠) د(س) = د(٠) ⇐ د(س) متصل عند س = ٠

٣) هـ(س) = { |ظاس| ، س < ٠ ابحث في اتصال هـ عند س = ٠
{ ١-٢ جتاس ، س ≥ ٠

الحل : * هـ(٠) = ١-٢ جتا٠ = ١-٢ = -١ ⇐ هـ معرف عند س = ٠

* |ظاس| ⇐ ظاس = ٠ ⇐ س = ٠ ، ±π ، ±٢π ، ...

ظاس | - | + | + | + | - | - | - |
س | ٠ | | | | | | |

⇐ نهـ(٠)- -ظاس = -١

نهـ(٠)+ ١-٢جتاس = ١-٢ = -١ ⇐ نهـ(٠) هـ(س) = -١ موجودة

* نهـ(٠) هـ(س) = هـ(٠) = -١ ⇐ هـ متصل عند س = ٠

٤) ك(س) = { |س-٢| ، س < ٢ ابحث في اتصال ك عند س = ٠ ، س = ٢
{ ١س٢ - س٣١ ، س ≥ ٢

|س-٢| ⇐ س = ٢

| س-٢ | - | + | + | + |
س | ٢ | | | |

١س٢ - س٣١ ⇐ ٢س = س٣ ⇐ ٠ = س٣ - ٢س = س(س٢ - ٢)

| س٢-٢ | + | + | + | - | - | - | + | + | + | + |
س | -√٢ | | | ٠ | | | √٢ | | | |

⇐ س = ٠ ، √٢

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدروسيات
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$\Leftarrow$ $هـ(س) = \begin{cases} \sqrt{س-٢} & ، س > ٢ \\ ٢س - س^{٢} & ، ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} - ٣س & ، س < ٠ \end{cases}$

$س = ٠$ * $هـ(٠) = ٢(٠) - (٠)^{٢} = صفر$

* $\lim_{س \to ٠^{-}} س^{٢} - ٢س = (٠)^{٢} - ٢(٠) = ٠$

$\lim_{س \to ٠^{+}} ٢س - س^{٢} = ٢(٠) - (٠)^{٢} = ٠$ $\Leftarrow$ $\lim_{س \to ٠} هـ(س)$ موجودة $= صفر$

* $\lim_{س \to ٠} هـ(س) = هـ(٠) = صفر$ $\Leftarrow$ $هـ$ متصل عند $س = صفر$

$س = ٢$ * $هـ(٢) = ٢(٢) - (٢)^{٢} = صفر$

* $\lim_{س \to ٢^{+}} \sqrt{س-٢} = ٠ = صفر$

$\lim_{س \to ٢^{-}} ٢س - س^{٢} = ٢(٢) - (٢)^{٢} = صفر$ $\Leftarrow$ $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = صفر$ موجودة

* $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢) = صفر$ $\Leftarrow$ $هـ$ متصل عند $س = ٢$

س٥ $هـ(س) = [\frac{١}{٢}س]$ اجب في اتصال $هـ$ عند $س = ١ ، س = ٣$

الحل $\frac{١}{٢}س = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$ل = |\frac{١}{٢}| = ٢$

$هـ(س) = \begin{cases} ٠ & ، ٠ \leq س < ٢ \\ ١ & ، ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$

$س = ١ \Leftarrow$ * $هـ(١) = ٠$ * $\lim_{س \to ١^{+}} هـ(س) = صفر$ (لاحظ ان العدد ١ ليس نقطة تشعب)

* $\lim_{س \to ١^{-}} هـ(س) = هـ(١) = صفر$ $\Leftarrow$ $هـ$ متصل عند $س = (١)$

$س = ٣ \Leftarrow$ * $هـ(٣) = ١$ * $\lim_{س \to ٣^{-}} ١ = ١$ * $\lim_{س \to ٣^{+}} هـ(س) = هـ(٣) = ١$

$\Leftarrow$ $هـ$ متصل عند $س = ٣$

س٦ $ك(س) = \begin{cases} \frac{هـا س^{٢}}{س} & ، س \neq صفر \\ ١ & ، س = صفر \end{cases}$ مطلوب في الثلاثة الدروس.

س٧ $د(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} & ، س > ١ \\ ل & ، س = ١ \\ ٢ أ س & ، س < ١ \end{cases}$ وكانه $د(س)$ متصلاً عند $س = ١$ فجد قيم كل من أ، ب

$\Leftarrow$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$\Leftarrow$ د متصل عند $س = ١ \Leftarrow$ $\lim_{س \to ١^+} \frac{جتا س - جتا ١}{س - ١}$ $= د(١) = ب$

$\Leftarrow \lim_{س \to ١^+} \frac{جتا س جتا ١ + جا س جا ١ - جتا ١}{س - ١} = ب$

$= \lim_{س \to ١^+} \frac{جتا ١ (جتا س - ١)}{س - ١} + \lim_{س \to ١^+} \frac{جا ١ جا س}{س - ١} = ب$

$= ١ + \lim_{س \to ١^+} \frac{جا س - جا ١}{س - ١} \times \frac{جا س + جا ١}{جا س + جا ١} = ب$

$= ١ + \lim_{س \to ١^+} \frac{جتا ٢س - ١}{(س - ١)(جا س + جا ١)} = ب$

$١ + \frac{١}{٢} = ب \Leftarrow ب = \frac{٣}{٢}$

ايضاً $\lim_{س \to -١^+}$ $٢ أ + ب س = د(١) = ب$

$٢ أ = ب$

$\Leftarrow ٢ أ = \frac{٣}{٢} \Leftarrow أ = \frac{٣}{٤}$

ب) $م(س) = \begin{cases} \frac{\frac{١}{٨} س^٣ + ١}{س + ٢} & ، س > -٢ \\ \frac{٣}{٢} & ، س = -٢ \end{cases}$ ، $هـ(س) = \frac{جتا \frac{\pi}{٢} س}{س}$

اجد بـ ايضاح $م + هـ$ عند $س = -٢$

$م(س) \Leftarrow * م(-٢) = \frac{٣}{٢}$ حيث $\lim_{س \to -٢^+} \frac{\frac{١}{٨} س^٣ + ١}{س + ٢} = \lim_{س \to -٢^+} \frac{\frac{١}{٨}(س^٣ + ٨)}{س + ٢}$

$= \lim_{س \to -٢^+} \frac{(س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٤)(\frac{١}{٨})}{س + ٢}$

$= \lim_{س \to -٢^+} (\frac{١}{٨})(س^٢ - ٢س + ٤) = \frac{١}{٨}(٤ + ٤ + ٤) = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

$\lim_{س \to -٢^-}$ $\frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$ $\Leftarrow \lim_{س \to -٢^+}$ $م(س)$ موجودة $= \frac{٣}{٢}$

$* \lim_{س \to -٢}$ $م(س) = م(-٢) = \frac{٣}{٢} \Leftarrow م(س)$ متصل عند $س = -٢$

$هـ(س) \Leftarrow * هـ(-٢) = \frac{جتا -\frac{\pi}{٢}}{-٢} =$ صفر

$* \lim_{س \to -٢}$ $\frac{جتا \frac{\pi}{٢} س}{س} = \frac{جتا -\frac{\pi}{٢}}{-٢} =$ صفر

$* \lim_{س \to -٢}$ $هـ(س) = هـ(-٢) =$ صفر $\Leftarrow هـ(س)$ متصل عند $س = -٢$

$\Leftarrow (م + هـ)(س)$ متصل عند $س = -٢$ لأنه حاصل جمع متصلين.

ج) $د(س) = \frac{س^٢ - ٥}{س - ٣}$ ، $هـ(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٥}$ غير متصلين عند $س = ٣$

بينما $(د + هـ)(س) = \frac{س^٢ - ٥ + س^٢ - ٥}{س - ٣} = \frac{٢س - ٣}{س - ٣} = ١$ متصل عند $س = ٣$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

الدرس السادس : الاتصال على فترة :

تعريف : يكون $ه(س)$ متصلاً في الفترة $[أ ، ب]$ إذا كان :

① متصلاً في الفترة $(أ ، ب)$ ② متصلاً عند $س = أ$ من اليمين ③ متصلاً عند $س = ب$ من اليسار

$\Leftarrow$ متصل في $(أ ، ب)$ ، $\lim_{س \to أ^+} ه(س) = ه(أ)$ ، $\lim_{س \to ب^-} ه(س) = ه(ب)$ .

تذكر : ① كثير الحدود متصل في جميع الأعداد الحقيقية

② الدالة النسبية متصلة في مجالها فقط .

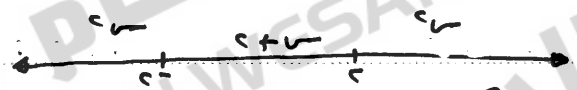
③ إذا كان $ه$ متصل في $ح$ فإن $ه$ لا يحقق مبرهنة القيمة الوسطية في $ح$

④ الجذور الزوجية تكون متصلة عندما يكون ما بداخل الجذر متصل وموجب (معرف).

⑤ $هـ$ ، $\ln$ ، وجذور الزوجية متصلة إذا كان ما بداخلها متصل .

مثال تدريب أ ص ٦٥ $ه(س) = \begin{cases} س + ٢ & ، |س| \geq ٢ \\ س^٢ & ، |س| < ٢ \end{cases}$ ابحث في اتصال $ه(س)$ في مجاله .

$ه(س) = \begin{cases} س + ٢ & ، س \geq ٢ \text{ أو } س \leq -٢ \quad (|س| \geq ٢ \Leftarrow -٢ \leq س \leq ٢) \\ س^٢ & ، -٢ < س < ٢ \quad (|س| < ٢ \Leftarrow س < ٢ ، س > -٢) \end{cases}$




$\Leftarrow$ $س + ٢$ متصل في $(-\infty ، -٢)$ لأنه كثير حدود

$س^٢$ متصل في $(-٢ ، ٢)$ لأنه كثير حدود

$س + ٢$ متصل في $[-٢ ، ٢]$ لأنه كثير حدود

$س = -٢ \Leftarrow ه(-٢) =$ معرف

$\lim_{س \to -٢^+} س + ٢ =$ معدوم

$\lim_{س \to -٢^-} س^٢ = ٤$

$\Leftarrow$ $\lim_{س \to -٢}$ ه(س) غير موجودة $\Leftarrow$ $ه$ غير متصل عند $س = -٢$

$س = ٢ \Leftarrow ه(٢) = ٤$ معرف

$\lim_{س \to ٢^-} س + ٢ = ٤$

$\lim_{س \to ٢^+} س^٢ = ٤$

$\Leftarrow$ $\lim_{س \to ٢}$ ه(س) $= ٤$ موجودة

$\lim_{س \to ٢}$ ه(س) $=$ ه(٢) $= ٤ \Leftarrow$ $ه$ متصل عند $س = ٢$

$\Leftarrow$ $ه(س)$ متصل في $ح - \{-٢\}$

ملاحظة : تذكر أننا اختبرنا الاتصال في الفترات المتوحدة في نقاط التحول (تغير الإشارة) .

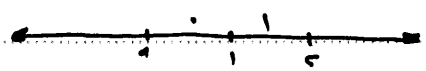
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

وزارة ٢٠١١ ص: اذا كان ل(س) = $\frac{س^٢-١}{س+٢}$ ، هـ(س) = [س] فاحسب في اتصال ل ∘ هـ(س)

حيث ه(س) = ل(س) × هـ(س) في الفترة [٠ ، ٢]

الحل: هـ(س) = [س] ⇐ س = ٠ ، ل = ١



هـ(س) = { ٠ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ١ ، ١ ≤ س < ٢ ؛ ٢ ، س = ٢ }

ه(س) = { ٠ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ $\frac{س^٢-١}{س+٢}$ ، ١ ≤ س < ٢ ؛ $\frac{٢(س^٢-١)}{س+٢}$ ، س = ٢ }

ه متصل في الفترة [٠ ، ١) لأنه ثابت (كثير حدود)

ه متصل في الفترة (١ ، ٢) لأنه ناتج قسمة كثيرين وليس لمقامه أصفار ضمنه الفترة (١ ، ٢)

عند س = ١ ⇐ ه(١) = صفر معرف

بينما $\lim_{س \to ١^+}$ $\frac{س^٢-١}{س+٢}$ = $\frac{صفر}{٣}$ = صفر

بينما $\lim_{س \to ١^-}$ ٠ = صفر ⇐ بينما $\lim_{س \to ١}$ ه(س) = صفر = موجودة ≠ ه(١)

⇐ ه غير متصل عند س = ١

عند س = ٢ ⇐ ه(٢) = ٢

بينما $\lim_{س \to ٢^-}$ $\frac{٢(س^٢-١)}{س+٢}$ = $\frac{٢(٣)}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$

⇐ ه غير متصل عند س = ٢ ⇐ بينما ≠ ٠

⇐ ه متصل في الفترة [٠ ، ٢)

وزارة ٢٠١١ ش: احسب في اتصال الاقتران ه(س) = $\sqrt{س + [س]}$ في الفترة [١ ، ٢]

الحل: [س] ⇐ س = ٠ ، ل = ١

⇐ ه(س) = { $\sqrt{س+١}$ ، ١ ≤ س < ٢ ؛ $\sqrt{س+٢}$ ، س = ٢ }

مجال $\sqrt{س+١}$ ⇐ س + ١ = ٠ ⇐ س = -١ ⇐ $\sqrt{س+١}$ معرف في الفترة (١ ، ٢)

⇐ س + ١ متصل في الفترة (١ ، ٢) لأنه كثير حدود ⇐ لأي عدد م بينما $\lim_{س \to م}$ $\sqrt{س+١}$ = ه(م) = $\sqrt{م+١}$

⇐ ه متصل في الفترة (١ ، ٢)

ه(٢) = $\sqrt{٢+٢}$ = ٢

بينما $\lim_{س \to ٢^-}$ $\sqrt{س+١}$ = $\sqrt{٣}$ ⇐ بينما ≠ ه(٢)

⇐ ه غير متصل عند س = ٢

⇐ ه متصل في الفترة (١ ، ٢) وغير متصل في الفترة [١ ، ٢]

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم: محمد قريع
جميع الحقوق محفوظة لمكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

وزارة ٢٠١٥ ش ١ : ادرس اتصال الاقتران $هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^2-1}{س+1} & ، -2 \le س < -1 \\ س[س] + 1 & ، -1 \le س < 1 \end{cases}$ في الفترة $[-2, 1)$

الحل : عند تعريف $[س]$ نجد $س = 0$ ، $ل = 1$

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^2-1}{س+1} & ، -2 \le س < -1 \\ -س + 1 & ، -1 \le س < 0 \\ 1 & ، 0 \le س < 1 \end{cases}$$

* $هـ$ متصل في الفترة $[-2, -1)$ لأنه اقتران نسبي والعدد $-1$ ليس ضمن الفترة $[-2, -1)$
* $هـ$ متصل في الفترة $(-1, 0)$ لأنه كثير حدود
* $هـ$ متصل في الفترة $(0, 1)$ لأنه ثابت (كثير حدود)
* عند $س = -1$ نجد $هـ(-1) = 2$ معرف

$$\lim_{س \to -1^+} س + 1 = 2 \quad ، \quad \lim_{س \to -1^-} \frac{س^2-1}{س+1} = \lim_{س \to -1^-} س - 1 = -2$$

$\Leftarrow \lim_{س \to -1}$ هـ(س) غير موجودة

$\Leftarrow هـ$ غير متصل عند $س = -1$

* عند $س =$ صفر $\Leftarrow هـ(0) = 1$ معرف

$$\lim_{س \to 0^+} 1 = 1 \quad ، \quad \lim_{س \to 0^-} س + 1 = 1$$

$\Leftarrow \lim_{س \to 0}$ هـ(س) $= 1 = هـ(0)$

$\Leftarrow هـ$ متصل عند $س =$ صفر

$\Leftarrow هـ$ متصل في الفترة $[-2, 1) - \{-1\}$ أو $هـ$ متصل في الفترة $[-2, -1) \cup (-1, 1)$

وزارة ٢٠١٤ ش : اذا كان

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام
ALWESAM
قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

تمارين ومسائل ص ٧١ :-

٤) $د(س) = \begin{cases} \frac{1}{س} + ٥ & ، س \leq ١ \\ ٢س^{٢} + ٤ & ، س > ١ \end{cases}$ ابحث في اتصال د(س) على ح .

الحل : ① عند س = ١ ، (نعلم بالشعب) ⇐ د(١) = $\frac{1}{١}$ + ٥ = ٦ معرف

* بما أن $\lim_{س \to ١^{+}}$ ، $\lim_{س \to ١^{-}}$ $\frac{1}{س} + ٥ = ٦$ ، $٢س^{٢} + ٤ = ٢(١)^{٢} + ٤ = ٦$

⇐ $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٦ موجودة .

* بما أن $\lim_{س \to ١}$ د(س) = د(١) = ٦ ⇐ د(س) متصل عند س = ١

② د(س) متصل في الفترة $(-\infty ، ١)$ لأنه كثير حدود .

③ د(س) متصل في الفترة $(١ ، \infty)$ لأنه نسبي ليعدد (صفر) ليس عضو الفترة $\notin (١ ، \infty)$

⇐ د(س) متصل في ح .

٥) ف(س) = $س^{٢} + ٧س + ١$ ابحث في اتصال ف في الفترة $[-٥ ، ٠]$

الحل : ف(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٧ & ، س \leq -٣,٥ \\ -(٧س + ٧) & ، س > -٣,٥ \end{cases}$ ⇐ $٢س + ٧ = ٠$ ⇐ $س = \frac{-٧}{٢} = -٣,٥$

$\xleftarrow[-٣,٥]{} \underset{٢س+٧}{-} \quad \underset{-(٧س+٧)}{+} \xrightarrow{}$

① ف معرف في الفترة $[-٥ ، -٣,٥)$ لأنه كثير حدود

② ف معرف في الفترة $(-٣,٥ ، ٠]$ لأنه كثير حدود

③ عند س = -٣,٥ ⇐ $\lim_{س \to -٣,٥^{+}}$ $س^{٢} + ٧ = (-٣,٥)^{٢} + ٧ =$ صفر

$\lim_{س \to -٣,٥^{-}}$ -(٧س + ٧) = -(-٣,٥) + ٧ = ١٤

⇐ $\lim_{س \to -٣,٥}$ ف(س) غير موجودة

⇐ ف(س) غير متصل عند س = -٣,٥

⇐ ف متصل في الفترة $[-٥ ، ٠] - \{-٣,٥\}$ أو في الفترة $[-٥ ، -٣,٥) \cup (-٣,٥ ، ٠]$

٦) ك(س) = $\sqrt{س^{٢} + ٦س}$ ابحث في اتصال ك في الفترة $[-٣ ، \infty)$

الحل : $س^{٢} + ٦س = ٠$ ⇐ $س = -٣$

$\xleftarrow[-٣]{}$ معرف $\xrightarrow{}$ غير معرف

① لكل $ه \in (-٣ ، \infty)$ $\lim_{س \to ه}$ $\sqrt{س^{٢} + ٦س}$ = $\sqrt{ه^{٢} + ٦ه}$ ⇐ ك متصل في الفترة $(-٣ ، \infty)$

② عند س = -٣ ⇐ $\lim_{س \to -٣^{+}}$ $\sqrt{س^{٢} + ٦س}$ = $\sqrt{٩ - ١٨}$ = $\sqrt{صفر}$ = صفر ، ك(-٣) = صفر

⇐ ك(س) متصل عند س = -٣

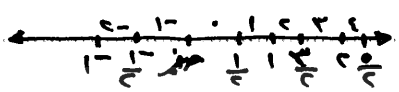
⇐ ك(س) متصل في الفترة $[-٣ ، \infty)$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

س٤ / $هـ(س) = \begin{cases} [س^2] & ، -1 \le س \le 0 \\ 2س - 1 & ، 0 < س \le 2 \end{cases}$ ادرس في اتصال $هـ(س)$ على الفترة $[-1، 2]$

الحل : $[س^2] = 0 \Leftarrow س^2 = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $ل = \frac{1}{2}$




$هـ(س) = \begin{cases} -2 & ، -1 \le س < -\frac{1}{2} \\ -1 & ، -\frac{1}{2} \le س < 0 \\ 0 & ، س = 0 \\ 2س - 1 & ، 0 < س \le 2 \end{cases}$

① $هـ$ متصل على الفترة $[-1، -\frac{1}{2})$ لأنه ثابت (كثير حدود)

② $هـ$ متصل على الفترة $(-\frac{1}{2}، 0)$ لأنه ثابت (كثير حدود)

③ $هـ$ متصل على الفترة $(0، 2]$ لأنه كثير حدود

① عند $س = -\frac{1}{2}$ ⇐ $هـ(-\frac{1}{2}) = -1$ معرف

$\lim_{س \to -\frac{1}{2}^+} هـ(س) = -1$ ، $\lim_{س \to -\frac{1}{2}^-} هـ(س) = -2$ ⇐ $\lim_{س \to -\frac{1}{2}} هـ(س)$ غير موجودة

⇐ $هـ(س)$ غير متصل عند $س = -\frac{1}{2}$ .

② عند $س = 0$ ⇐ $هـ(0) =$ صفر

$\lim_{س \to 0^+} 2س - 1 = -1$ ، $\lim_{س \to 0^-} -1 = -1$ ⇐ $\lim_{س \to 0} هـ(س) = -1$

⇐ $هـ(س)$ غير متصل عند $س = 0$ لأنه $\lim_{س \to 0} هـ(س) \neq هـ(0)$

⇐ $هـ$ متصل على الفترة $[-1، 2] - \{-\frac{1}{2}، 0\}$

س٥ / $د(س) = \begin{cases} \frac{|س|}{س} & ، س \le 1 ، س \neq$ صفر $\\ \frac{1}{2}س + \frac{1}{2} & ، س > 1 \end{cases}$ ادرس في اتصال الاقتران على $ح$

الحل $د(س) = \begin{cases} -1 & ، س <$ صفر $\\ 1 & ، 0 < س < 1 \\ \frac{1}{2}س + \frac{1}{2} & ، س \ge 1 \end{cases}$

* $د(س)$ متصل على الفترة $(-\infty، 0)$ لأنه كثير حدود (ثابت)

* $د(س)$ متصل على الفترة $(0، 1)$ لأنه كثير حدود (ثابت)

* $د(س)$ متصل على الفترة $(1، \infty)$ لأنه كثير حدود

* عند $س = 0$ ⇐ $د(س)$ غير معرف ⇐ $د(س)$ غير متصل عند $س = 0$ .

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

* عند $س = ١ \Leftarrow د(١) = \frac{١}{٢}(١) + \frac{١}{٢} = ١$ معرف

$\lim_{س \to ١^-} ١ = ١$ ، $\lim_{س \to ١^+} \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٢} = ١ \Leftarrow \lim_{س \to ١} د(س) = ١$

$\lim_{س \to ١} د(س) = د(١) = ١ \Leftarrow د(س)$ متصل عند $س = ١$

$\Leftarrow د(س)$ متصل على $ح - \{٠\}$

٦) $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - س - ٣٠}{أ س - ٦ أ} & ، س > ٦ \\ ١ & ، س = ٦ \\ ب س & ، س < ٦ \end{cases}$ متصل عند $س = ٦$ حيث كل من $أ ، ب$

الحل $د$ متصل $\Leftarrow \lim_{س \to ٦^-} ب س = د(٦)$

$٦ ب = ١ \Leftarrow ب = \frac{١}{٦}$

أيضاً $\lim_{س \to ٦^+} \frac{س^٢ - س - ٣٠}{أ(س - ٦)} = د(٦)$

$\lim_{س \to ٦} \frac{(س - ٦)(س + ٥)}{أ(س - ٦)} = ١$

$\frac{٦ + ٥}{أ} = ١ \Leftarrow أ = ١١$

٧) $هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - (٣ - ٢ب)س - ٦ب}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٤س - ١ & ، س = ٣ \end{cases}$ هـ متصل عند $س = ٣$ حيث $ب$

الحل : هـ متصل $\Leftarrow \lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - (٣ - ٢ب)س - ٦ب}{س - ٣} = هـ(٣) = ١١$

| س | $س^٢$ | $س^٣$ | $-(٣-٢ب)س$ | $-٦ب$ |
|---|---|---|---|---|
| ٣ | ٩ | ٢٧ | $-٣(٣-٢ب)$ | $-٦ب$ |
| ٣ | ٩ | ٢٧ | $-٩ + ٦ب$ | $-٦ب$ |
| ٣ | ٩ | ٢٧ | $-٩ + ٦ب$ | $-٦ب$ |
| ٣ | ٩ | ٢٧ | $-٩ + ٦ب$ | $-٦ب$ |

$= ٦ب$

$\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س^٢ + ٦ب)}{(س - ٣)} = ١١$

$٣ + ٦ب = ١١$

$\Leftarrow ٦ب = ٨ \Leftarrow ب = ٤$

٨) $هـ(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ٥}{س^٢ - ٩س + ٣}$ متصل عند $ح$ حيث $م$

الحل : هـ متصل $\Leftarrow س^٢ - ٩س + ٣ \neq$ صفر $\Leftarrow س^٢ - ٩س + ٣$ غير قابل للتحليل

$\Leftarrow$ مميز العبارة $<$ صفر $\Leftarrow ب^٢ - ٤أجـ < ٠$

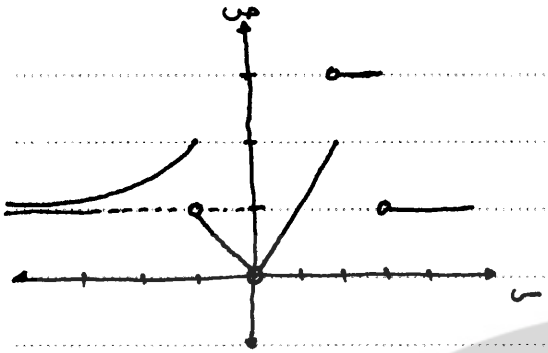
$(-٩)^٢ - ٤ \times ١ \times ٣ < ٠ \Leftarrow ٩^٢ - ١٢ < ٠$

عندما $٩^٢ - ١٢ = ٠ \Leftarrow ٩^٢ = ١٢ \Leftarrow ٩ = \pm\sqrt{١٢} = \pm ٢\sqrt{٣}$

$م \in (-\sqrt{١٢} ، \sqrt{١٢})$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info




أسئلة الوحدة ص ٧٣ :

س ١ أ) $\lim_{س \to ٠} هـ(س) =$ صفر

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٥} هـ(س)$ ، $\lim_{س \to -٥} هـ(س)$ غير موجودة .

ب) مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \to أ} هـ(س) = ٣$

$أ = \{٠ ، ٢ ، ٣\}$

ج) مجموعة قيم ب حيث $\lim_{س \to ب} هـ(س)$ غير موجودة

$ب = \{-١ ، ٥\}$

د) مجموعة قيم جـ حيث هـ غير متصل عند $س = جـ$

$جـ = \{-١ ، ٠ ، ٢ ، ٣\}$

س ٢ أ) $\lim_{س \to ٤} \frac{٤٨ - ٣س^٢}{٦٤ - س^٣} = \lim_{س \to ٤} \frac{٣(٤ - س)(٤ + س)}{(٤ - س)(س^٢ + ٤س + ١٦)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{-٣(٤ + س)}{س^٢ + ٤س + ١٦} = \frac{-٣(٨)}{١٦ + ١٦ + ١٦} = \frac{-٢٤}{٤٨} = -\frac{١}{٢}$

ب) $\lim_{س \to ١} \frac{١}{س - ١} \left(\frac{١}{\sqrt{س}} - ١\right) = \lim_{س \to ١} \frac{١}{س - ١} \left(\frac{١ - \sqrt{س}}{\sqrt{س}}\right) \times \frac{١ + \sqrt{س}}{١ + \sqrt{س}}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{١}{س - ١} \times \frac{١ - س}{١ + \sqrt{س}} \times \frac{١}{\sqrt{س}}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{-١}{(١ + \sqrt{س})(\sqrt{س})}$

$= \frac{-١}{(٢)(١)} = -\frac{١}{٢}$

ج) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ \sqrt{س} - ١}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{س^٢ \sqrt{س} - \sqrt{س}}{س - ١} + \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)} + \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} \times \frac{\sqrt{س} + ١}{\sqrt{س} + ١}$

$= \lim_{س \to ١} \sqrt{س}(س + ١) + \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)}{(س - ١)(\sqrt{س} + ١)}$

$= ٢ + \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢}$

د) $\lim_{س \to -\frac{١}{٢}} \frac{\sqrt{٢س^٢ + ٤س + ١}}{٢س^٢ + س + ١} = \lim_{س \to -\frac{١}{٢}} \frac{\sqrt{(٢س + ١)(س + ١)}}{(٢س + ١)(س + ١)} = \lim_{س \to -\frac{١}{٢}} \frac{\sqrt{٢س + ١}}{٢س + ١}$

$(٢س + ١)$ : $- - - \; 0 \; + +$ على $\mathbb{R}$ ، $-\frac{١}{٢}$

$\Leftarrow \lim_{س \to -\frac{١}{٢}} \frac{-(٢س + ١)}{٢س + ١} = \lim_{س \to -\frac{١}{٢}} -١ = -١$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

$\lim_{س \to -\frac{1}{2}} \frac{1+٢س}{1+س٢} = \lim_{س \to -\frac{1}{2}} ١ = ١$

$\Leftarrow \lim_{س \to -\frac{1}{2}} \frac{|١+٢س|}{١+س٢}$ عند $س = -\frac{1}{2}$ موجودة .

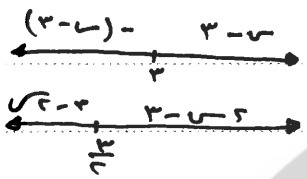
ه) $\lim_{س \to ٠} \frac{|س-١٣| - |٢س-١٣|}{س}$

الحل : $\lim_{س \to ٠} \frac{|س-١٣| - |٢س-١٣|}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-(س-٣) - (٣-٢س)}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-س+٣-٣+٢س}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{س}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} ١ = ١$




$\Leftarrow |س-٣|$

$\Leftarrow |٢س-٣|$

و) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظتا س - ظتا ٥س}{س جا ٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{-٢جا(\frac{س+٥س}{٢})جا(\frac{س-٥س}{٢})}{س جا ٢س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-٢جا٣س جا(-٢س)}{س جا ٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢جا٣س جا٢س}{س جا٢س}$ لأن جا(-ح) = -جاح

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢جا٣س}{س} = ٢ \times ٣ = ٦$

ز) $\lim_{س \to ١} \frac{س-١}{جا(س^٣-١)} \times \frac{س^٢+س+١}{س^٢+س+١} = \lim_{س \to ١} \frac{س^٣-١}{جا(س^٣-١)(س^٢+س+١)}$

افرض ص $= س^٣ - ١$ ، $س \to ١ \Leftarrow$ ص $\to ٠$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{ص}{جا ص} \times \lim_{س \to ١} \frac{١}{س^٢+س+١}$

$= ١ \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$

ح) $\lim_{س \to ٠} \frac{١-ظا س}{ظا س} = \lim_{س \to ٠} \frac{١-ظا^٢س}{ظا س - ١} = \lim_{س \to ٠} \frac{١-ظا^٢س}{(ظا س-١)(ظا س+١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-١}{ظا س+١} = \frac{-١}{١+١} = -\frac{١}{٢}$

ط) $\lim_{س \to ١٤} \frac{\sqrt[٣]{س+١} - ٥}{س - ١٤} \times \frac{(\sqrt[٣]{س+١})^٢ + ٥\sqrt[٣]{س+١} + ٢٥}{(\sqrt[٣]{س+١})^٢ + ٥\sqrt[٣]{س+١} + ٢٥}$

$= \lim_{س \to ١٤} \frac{(س+١) - ١٢٥}{(س-١٤)((\sqrt[٣]{س+١})^٢ + ٥\sqrt[٣]{س+١} + ٢٥)}$

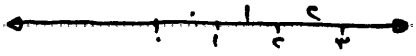
$= \lim_{س \to ١٤} \frac{س-١٤}{(س-١٤)((\sqrt[٣]{س+١})^٢ + ٥\sqrt[٣]{س+١} + ٢٥)}$

$= \lim_{س \to ١٤} \frac{١}{(\sqrt[٣]{س+١})^٢ + ٥\sqrt[٣]{س+١} + ٢٥} = \frac{١}{٧٥}$

مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

ي) $\lim_{س\to ٣} \frac{س - [س]}{س^٢ - ٤س + ٤}$ ، $[س] = ١ \Leftarrow ١ \le س < ٢$




$\Leftarrow \lim_{س\to ٣} \frac{س - ٢}{س^٢ - ٤س + ٤}$

$= \lim_{س\to ٣} \frac{س - ٢}{(س - ٢)(س - ٢)} = \lim_{س\to ٣} \frac{١}{س - ٢} = \frac{١}{٤}$

٣) $\lim_{س\to ١} \frac{ق(س) - ٦}{س - ١} = ٨$ مطلوب $\lim_{س\to ١} \frac{ق(س) - ٦}{س^٢ + ٢س - ٣}$

$= \lim_{س\to ١} \frac{ق(س) - ٦}{(س + ٣)(س - ١)}$

$= \lim_{س\to ١} \frac{ق(س) - ٦}{س - ١} \times \lim_{س\to ١} \frac{١}{س + ٣}$

$= ٨ \times \frac{١}{٤} = ٢$

٤) غير مطلوب

٥) غير مطلوب

٦) $د(س) = \begin{cases} \frac{جا^٢(ب س) - س^٢}{س جا^٢ س} & ، -\frac{\pi}{٤} \le س < ٠ \\ ٢ & ، س = ٠ \\ \frac{س^٢ + (١ - ب)س}{ب س} & ، ٠ < س \le ٢ \end{cases}$

متصل عند $س = ٠$ جد قيم $ب$

الحل $\lim_{س\to ٠} \frac{جا^٢(ب س) - س^٢}{س جا^٢ س} = د(٠) = ٢$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{جا ب س}{س} \times \frac{جا ب س}{جا^٢ س} - \lim_{س\to ٠} \frac{س}{جا^٢ س} = ٢$

$= ب \times \lim_{س\to ٠} \frac{\frac{جا ب س}{س}}{\frac{جا^٢ س}{س}} - \frac{١}{٢} = ٢$

$ب \times ١ - \frac{ب}{٢} = ٢$

$\Leftarrow \frac{ب^٢ - ١}{٢} = ٢ \Leftarrow ب^٢ - ١ = ٤$

$ب^٢ = ٥ \Leftarrow ب = \pm\sqrt{٥}$

$\lim_{س\to ٠} \frac{س^٢ + (١ - ب)س}{ب س} = ٢$

$\lim_{س\to ٠} \frac{س(س + ١ - ب)}{ب س} = ٢ \Leftarrow \lim_{س\to ٠} \frac{س + ١ - ب}{ب} = ٢$

$\frac{١ - ب}{ب} = ٢ \Leftarrow$

$١ - ب = ٢ب \Leftarrow$

$١ = ٣ب \Leftarrow$

$ب = \frac{١}{٣} \Leftarrow$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

٧) $ل(س) = \begin{cases} \frac{س^٢-٣س-١٥}{س^٢-٥س} + \frac{٨}{٥} & ، س > ٥ \\ \sqrt{٥-س} & ، س \leq ٥ \end{cases}$ ابحث في اتصال ل على ح

الحل : * ل متصل على الفترة $(-\infty, ٥)$ لأنه جذر زوجي وما داخله متصل وموجب على الفترة

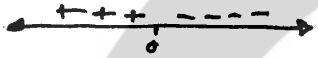
* $\frac{س^٢-٣س-١٥}{س^٢-٥س} + \frac{٨}{٥}$ متصل على الفترة $(٥, \infty)$ لأنه نسبي واصفارمقامه $\notin (٥, \infty)$

* $س = ٥ \Leftarrow$ بما $\lim_{س \to ٥^+} \frac{س^٢-٣س-١٥}{(س-٥)س} + \frac{٨}{٥}$

$= \lim_{س \to ٥^+} \frac{(س-٥)(س+٣)}{(س-٥)س} + \frac{٨}{٥}$

$= \frac{٨}{٥} + \frac{٨}{٥} - = \frac{\text{صفر}}{٥} = \text{صفر}$

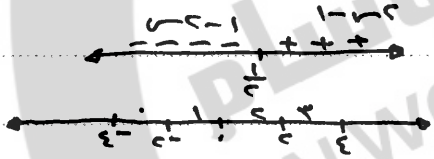
بما $\lim_{س \to ٥^-} \sqrt{٥-س} = \sqrt{٥-٥} = \text{صفر}$




$\Leftarrow$ ل متصل عند $س = ٥$

$\Leftarrow$ ل متصل على ح

٨) $ع(س) = \begin{cases} ٤س^٢-١١ & ، -١ \leq س \leq ١ \\ [\frac{١}{٢}س+٢] & ، ١ < س \leq ٣ \end{cases}$ ابحث في اتصال ع على $[-١, ٣]$




$٤س^٢-١١ \Leftarrow ٢س-١ \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

$[\frac{١}{٢}س+٢] \Leftarrow س = -٤$ ، ل $= ٢$

$ع(س) = \begin{cases} ١-٢س & ، -١ \leq س < \frac{١}{٢} \\ ٢س-١ & ، \frac{١}{٢} \leq س \leq ١ \\ ٢ & ، ١ < س < ٢ \\ ٣ & ، ٢ \leq س \leq ٣ \end{cases}$

* ع متصل على الفترة $[-١, \frac{١}{٢})$ لأنه كثير حدود وكذلك على الفترة $(\frac{١}{٢}, ١)$

* ع متصل على الفترة $(١, ٢)$ وكذلك $(٢, ٣]$ لأنه كثير حدود

* عند $س = \frac{١}{٢} \Leftarrow ع(\frac{١}{٢}) = \text{صفر}$ ، بما $\lim_{س \to \frac{١}{٢}^+} ٢س-١ = \text{صفر}$ ، بما $\lim_{س \to \frac{١}{٢}^-} ١-٢س = \text{صفر}$

$\Leftarrow$ بما $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} ع(س) = \text{صفر} = ع(\frac{١}{٢}) \Leftarrow$ ع متصل عند $س = \frac{١}{٢}$

* $س = ١ \Leftarrow ع(١) = ١$ ، بما $\lim_{س \to ١^+} ٢ = ٢$ ، بما $\lim_{س \to ١^-} ٢س-١ = ١$

$\Leftarrow$ بما $\lim_{س \to ١} ع(س)$ غير موجودة $\Leftarrow ع(س)$ غير متصل عند $س = ١$

* $س = ٢ \Leftarrow ع(٢) = ٣$ ، بما $\lim_{س \to ٢^+} ٣ = ٣$ ، بما $\lim_{س \to ٢^-} ٢ = ٢ \Leftarrow$ بما $\lim_{س \to ٢} ع(س)$ غير موجودة

$\Leftarrow ع$ غير متصل عند $س = ٢ \Leftarrow ع(س)$ متصل على الفترة $[-١, ٣] - \{١, ٢\}$

تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info

مكتبة الوسام ALWESAM قسم الدوسيات
المعلم :محمد قريع
تم تحميل الملف من موقع مكتبة الوسام التعليمي
www.alwesam.info