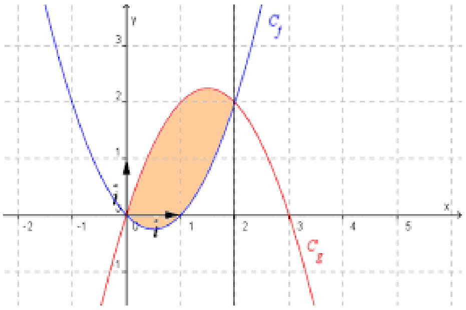
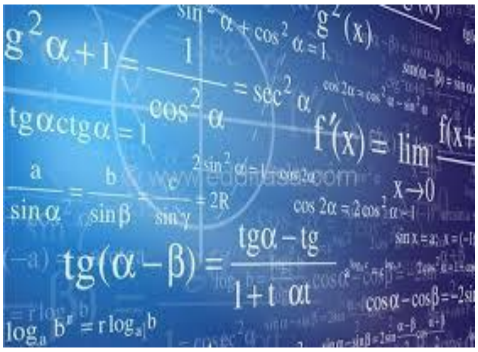
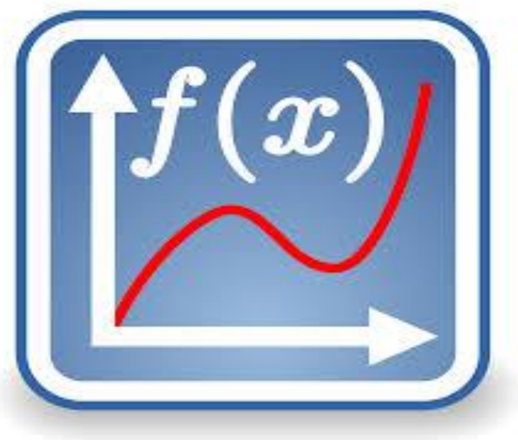
الواضـــح



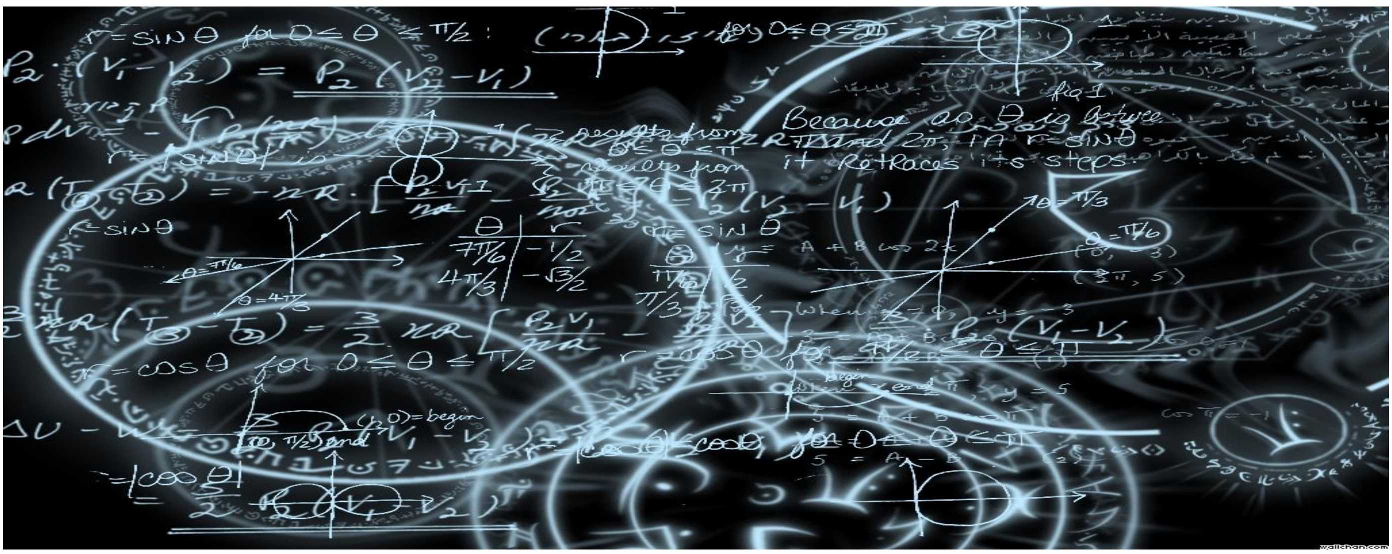


(النهـــايات والاتصال)



إعداد : الأستاذ محمد الصقور

هاتف رقم ٠٧٧٦٨٤٠٢٢٠



النهايات

تعريف النهاية :

النهاية : هي دراسة سلوك الإقتران عند نقطة معينة (توقع صورة العدد) ويرمز للنهاية بالرمز التالي :-

نهـــا$_{س \leftarrow {}^{2}أ^{1}}$ ق(س) بحيث ان الرقمين ١و٢ هما اشارات والاشارة رقم "١" تدل على إتجاه النهاية والإشارة رقم "٢" تدل على اشارة الرقم .

رموز النهايات ومعانيها :

١. نهـــا$_{س \leftarrow أ^{+}}$ ق(س) ويعني هذا الرمز ان المطلوب هو إيجاد النهاية عندما نقترب من (أ) من جهة اليمين .

٢. نهـــا$_{س \leftarrow أ^{-}}$ ق(س) ويعني هذا الرمز أن المطلوب هو ايجاد النهاية عندما نقترب من (أ) من جهة اليسار .

٣. نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ ق(س) ويعني هذه الرمز ان المطلوب هو إيجاد النهاية عندما نقترب من (أ) من جهة اليمين واليسار .

يمكن إيجاد النهايات بطرق كثيرة من ابرزها :

١. الجدول والرسم البياني .

٢. التعويض المباشر .

٣. التحليل .

٤. القسمة التركيبية.

٥. تبسيط الكسور .

٦. الضرب بالمرافق .

٧. الإضافة و الطرح .

٨. المتطابقات المثلثية .

النهاية عند نقطة

كما سبق في التعريف فإن النهاية هي دراسة سلوك الإقتران عند نقطة معينة وسيتم في هذه الدرس شرح كيفية دراسة سلوك الإقتران باستخدام طريقة الجدول والرسم البياني (المستوى الإحداثي) .

أمور يجب مراعاتها في الرسم البياني :

١. ○ الدائرة الفارغة تعني أن الإقتران ليس له صورة في هذا الموقع .

٢. ● الدائرة السوداء تعني أن الإقتران له صورة في هذا الموقع .

إيجاد قيمة النهاية بطريقة الجدول :

لإيجاد قيمة النهاية بطريقة الجدول إتبع الخطوات التالية :

١. قم برسم جدول مكون من (س) وق(س) .

٢. ضع الرقم الذي تود إيجاد النهاية له في منتصف الجدول .

٣. ضع في الجدول أعداد أكبر من القيمة التي تود إيجاد النهاية لها على يمين الرقم بالترتيب .

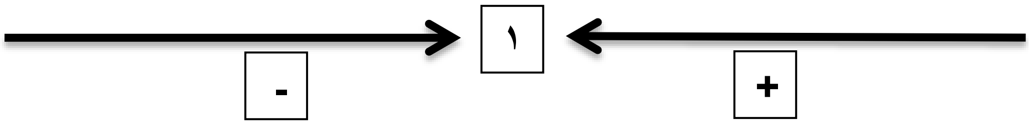
٤. ضع في الجدول أعداد أصغر من القيمة التي تود إيجاد النهاية لها على يسار الجدول وبالترتيب .

٥. عوض القيم مكان س بالإقتران ق(س) وجد قيمتها بإستثناء النقطة التي نقترب منها و إكتبها في الجدول .

٦. الآن ننظر للقيم الناتجة من التعويض لمعرفة الى أي صورة تقترب ق(س) عندها تكون تلك الصورة هي النهاية .

مثال (١) : ليكن ق(س) =١ ادرس سلوك الاقتران عنما تقترب س من العدد ٢

س	٣	٢.٥	٢.٠١	٢.٠٠١	٢	١.٩٩٩	١.٩٩	١.٥	١
ق(س)	١	١	١	١		١	١	١	١



نلاحظ مما سبق أن قيمة الإقتران تقترب من العدد (١) من جهة اليمين واليسار وبذلك تكون $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ١ و $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ١

قاعدة : إذا كانت النهاية من اليمين موجودة والنهاية من اليسار موجودة فإن :

١. إذا كانت النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار فإن النهاية من الجهتين موجودة وتساوي ذلك الرقم $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) .

٢. إذا كانت النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار فإن النهاية بشكلها العام غير موجوده $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) $\neq$ $\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) فإن $\lim_{س \to أ}$ ق(س) غير موجوده .

مثال (٢) : ليكن ق(س) = س إدرس سلوك الإقتران عندما تقترب س من العدد ٢

س	٣	٢.٥	٢.٠١	٢.٠٠١	٢	١.٩٩٩	١.٩٩	١.٥	١
ق(س)	٣	٢.٥	٢.٠١	٢.٠٠١		١.٩٩٩	١.٩٩	١.٥	١

$\longrightarrow$ ٢ $\longleftarrow$

\- +

نلاحظ مما سبق أن قيمة الإقتران تقترب من العدد (٢) من جهة اليمين واليسار وبذلك تكون $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ٢ و $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ٢ومنه $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٢

مثال (٣) : ليكن ق(س) = س^٢ أدرس سلوك الإقتران عندما تقترب س من العدد ٤ مستخدماً الجدول

س	٥	٤.٥	٤.٠١	٤.٠٠١	٤	٣.٩٩٩	٣.٩٩	٣.٥	٣
ق(س)	٢٥	٢٠.٥	١٦.٠٨٠١	١٦.٠٠٨٠٠١		١٥.٩٩٢٠٠١	١٥.٩٢٠١	١٢.٢٥	٩

$\longrightarrow$ ١٦ $\longleftarrow$

\- +

نلاحظ مما سبق أن قيمة الإقتران تقترب من العدد (١٦) من جهة اليمين واليسار وبذلك تكون $\lim_{س \to ٤^+}$ ق(س) = ١٦ و $\lim_{س \to ٤^-}$ ق(س) = ١٦ومنه $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) = ١٦

مثال (٤) : ليكن ق(س) = $\sqrt{س+٣}$ إدرس سلوك الإقتران عندما تقترب س من العدد ٦ مستخدماً الجدول

٤	٥	٥.٥	٥.٩٩٩	٦	٦.٠٠١	٦.٩	٧	٨	س
٢.٦٥	٢.٨٣	٢.٩٢	٢.٩٩٩٨		٣.٠٠٠١	٣.١٥	٣.١٦	٣.٤٦	ق(س)

٣

\- +

نلاحظ مما سبق أن قيمة الإقتران تقترب من العدد (٣) من جهة اليمين واليسار وبذلك تكون $\underset{س\leftarrow ٦^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣ و $\underset{س\leftarrow ٦^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣ومنه $\underset{س\leftarrow ٦}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣

إيجاد النهاية بطريقة الرسم :

لإيجاد النهاية بطريقة الرسم إتبع الخطوات التالية :

١. أرسم الإقتران ق(س) .

٢. حدد الإتجاه الذي تود الإقتراب منه .

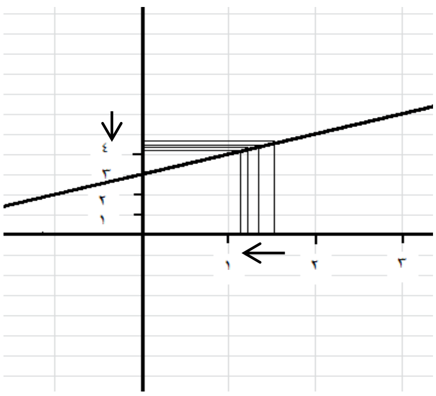
٣. إرسم خطوطاً عامودية من محور السينات لتلامس خط الاقتران .

٤. إرسم خطوطاً أفقيةً من خط الإقتران ومن نفس نقطة تقاطع الخطوط العامودية الى محور الصادات .

٥. حدد القيمة التي يتم الإقتراب منها على محور الصادات .

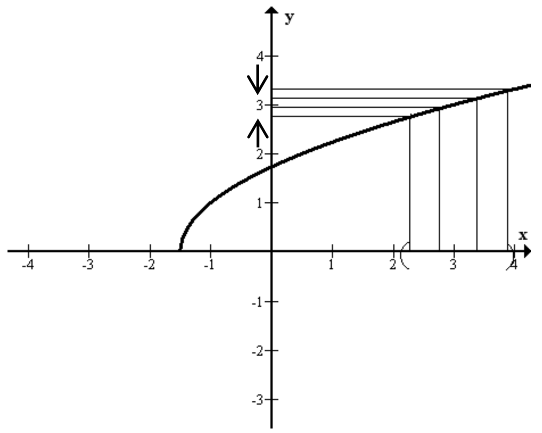
مثال (٥) : ليكن ق(س) = س+٣ إدرس سلوك الإقتران عندما تقترب س من العدد ١ من جهة اليمين مستخدماً الرسم .

٢	١	٠	١-	س
٥	٤	٣	٢	ق(س)



نلاحظ من خلال الرسم السابق أن قيمة الإقتران تقترب من العدد (٤) عندما تقترب قيمة (س) من العدد ١ من جهة اليمين وبذلك تكون $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نهـا} ق(س) = ٤$

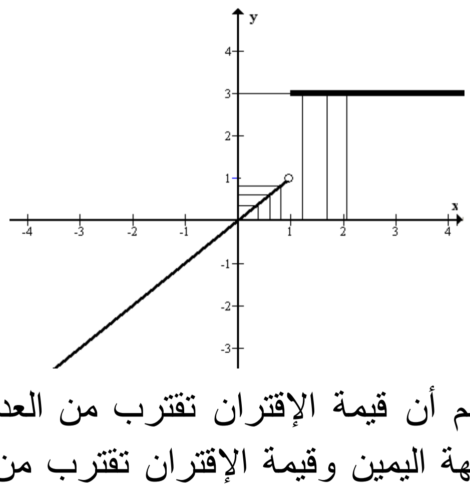
مثال (٦) : ليكن ق(س) = $\sqrt{٢س + ٣}$ إدرس سلوك الاقتران عنما تقترب س من الرقم ٣



نلاحظ من خلال الرسم السابق أن قيمة الإقتران تقترب من العدد (٣) عندما تقترب قيمة س من العدد ٣ وبذلك تكون $\underset{س \leftarrow ٣^{+}}{نهـا} ق(س) = ٣$ و $\underset{س \leftarrow ٣^{-}}{نهـا} ق(س) = ٣$ ومنها

$$\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} ق(س) = ٣$$

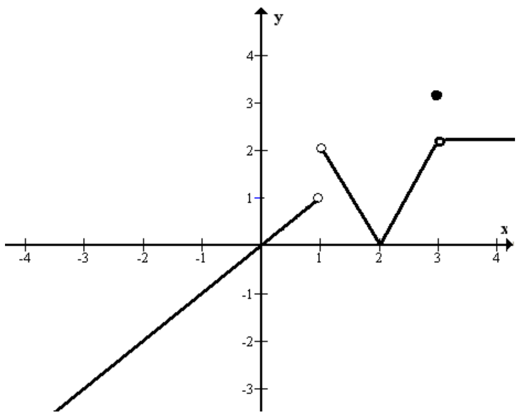
مثال (٧) : ليكن ق(س) = $\begin{cases} س ، س < ١ \\ ٣ ، س \geq ١ \end{cases}$ إدرس سلوك الإقتران عندما تقترب س من العدد ١ مستخدماً الرسم



نلاحظ من خلال الرسم أن قيمة الإقتران تقترب من العدد (٣) عندما تقترب قيمة س من العدد ١ من جهة اليمين وقيمة الإقتران تقترب من العدد ١ من جهة اليسار

وبذلك تكون $\underset{\text{س}\leftarrow\text{١}^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٣ و $\underset{\text{س}\leftarrow\text{١}^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ١ ومنه $\underset{\text{س}\leftarrow\text{١}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = غير موجودة

مثال (٨) : معتمدا على الرسم جد قيمة كل من



١) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{١}^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٢) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{١}^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) =

٣) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٤) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{١}}{\text{نهــا}}$ ق(س) =

٥) ق(٣)= ٦) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٣}}{\text{نهــا}}$ ق(س) =

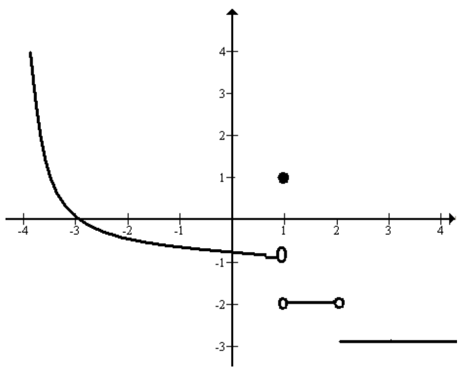
الحل

١) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{١}^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٢ ٢) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{١}^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ١

٣) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٠ ٤) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{١}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = **غير موجودة** لأن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

٥) ق(٣) =٣ ٦) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٣}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٢

مثال (٩) : معتمداً على الرسم جد قيمة كل من



١) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{-٣}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٢) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{١}}{\text{نهــا}}$ ق(س) =

٣) ق(٢)= ٤) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٣}}{\text{نهــا}}$ ق(س) =

الحل

١) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{-٣}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٠ ٢) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{١}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = غير موجودة

٣) ق(٢) =-٣ ٤) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٣}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = -٣

نظريات النهايات

في هذا الدرس سنقوم بإيجاد النهاية باستخدام النظريات بدون اللجوء الى الرسم البياني او الجدول

نظرية (١) :

أ. إذا كان أ و ب عددين حقيقيين وكان ق(س)= ب لكل س في مجاله فإن

$\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ ق(س) = ب (نهاية الإقتران الثابت هي نفس قيمة الإقتران الثابتة) .

مثال (١) : ليكن ق(س) = ١٥ أوجد $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ ق(س)

الحل : بالإنتباه الى الإقتران نجد أنه إقتران ثابت أي أن كل الأرقام التي يمكن تعويضها لها نفس الصور وبالإعتماد على النظرية السابقة فإن قيمة $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ ق(س) = ١٥

ب. إذا كان أ عدد حقيقي وكان ق(س) = س ^{ن} فإن $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ ق(س) = أ ^{ن} بحيث ن عدد طبيعي (يمكن إيجاد النهاية من خلال التعويض المباشر داخل إقترانات كثيرة الحدود بشرط أن يكون الأس عدداً طبيعي).

مثال (٢) : ليكن ق(س) = س ^{٣} اوجد $\underset{س \leftarrow ٥}{نهــا}$ ق(س)

الحل : بالإنتباه الى الإقتران نجد أنه إقتران كثير حدود بحيث يمكن إيجاد قيمة النهاية له بالإعتماد على النظرية السابقة لذلك فإن قيمة $\underset{س \leftarrow ٥}{نهــا}$ ق(س) = ٥ ^{٣} = ١٢٥

نظرية (٢) :

إذا كان ق(س) و هـ(س) إقترانين وكانت (أ) و(ب) و (ج) و (م) أعداداً حقيقية بحيث $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ ق(س) = ب و $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ هـ(س) =جـ فإن

أ. $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ (ق(س) ± هـ(س)) = $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ ق(س) ± $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ هـ(س) = ب±جـ

* النهاية توزع على الإقترانات في حالة الجمع والطرح إذا كانت نهاية كل إقتران موجودة .

مثال (٣) : ليكن $\underset{س \leftarrow ٥}{نهــا} ق(س) = ٢٠$ و $\underset{س \leftarrow ٥}{نهــا} هـ(س) = ٧$ اوجد

١. $\underset{س \leftarrow ٥}{نهــا} (ق(س) + هـ(س))$

٢. $\underset{س \leftarrow ٥}{نهــا} (ق(س) - هـ(س))$

الحل : نلاحظ أن النهاية لكل من الإقترانين ق(س) و هـ(س) موجودة لذلك يمكن توزيع النهاية على عملية الجمع والطرح

١. $\underset{س \leftarrow ٥}{نهــا} (ق(س) + هـ(س)) = \underset{س \leftarrow ٥}{نهــا} ق(س) + \underset{س \leftarrow ٥}{نهــا} هـ(س) = ٢٠ + ٧ = ٢٧$

٢. $\underset{س \leftarrow ٥}{نهــا} (ق(س) - هـ(س)) = \underset{س \leftarrow ٥}{نهــا} ق(س) - \underset{س \leftarrow ٥}{نهــا} هـ(س) = ٢٠ - ٧ = ١٣$

ب. $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا} (م ق(س)) = م \underset{س \leftarrow أ}{نهــا} ق(س) = م \times ب$

* يمكن إخراج العدد المضروب بالإقتران خارج النهاية إذا كانت نهاية الإقتران موجودة .

مثال (٤) : ليكن $\underset{س \leftarrow ٥}{نهــا} ق(س) = ٥$ اوجد $\underset{س \leftarrow ٥}{نهــا} ٥ ق(س)$

الحل : نلاحظ أن نهاية الإقتران ق(س) موجودة لذلك يمكن إخراج العدد الثابت خارج النهاية

$\underset{س \leftarrow ٥}{نهــا} ٥ ق(س) = ٥ \underset{س \leftarrow ٥}{نهــا} ق(س) = ٥ \times ٥ = ٢٥$

ج. $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا} (ق(س) \times هـ(س)) = \underset{س \leftarrow أ}{نهــا} ق(س) \times \underset{س \leftarrow أ}{نهــا} هـ(س) = ب \times جـ$

* النهاية توزع على الإقترانات في حالة الضرب اذا كانت نهاية كل إقتران موجودة .

مثال (٥) : ليكن $\underset{س\leftarrow ٢}{نهـــا}$ ق(س) = ٤و $\underset{س\leftarrow ٢}{نهـــا}$ هـ(س) = ٣اوجد $\underset{س\leftarrow ٢}{نهـــا}$ (ق(س) × هـ(س))

الحل : نلاحظ ان النهاية لكل من الاقترانين ق(س) و هـ(س) موجودة لذلك يمكن توزيع النهاية على عملية الضرب

$$\underset{س\leftarrow ٢}{نهـــا}(ق(س)\times هـ(س)) = \underset{س\leftarrow ٢}{نهـــا} ق(س)\times \underset{س\leftarrow ٢}{نهـــا} هـ(س) = ٤\times ٣ = ١٢$$

د. $\underset{س\leftarrow أ}{نهـــا}\left(\frac{ق(س)}{هـ(س)}\right) = \frac{\underset{س\leftarrow أ}{نهـــا} ق(س)}{\underset{س\leftarrow أ}{نهـــا} هـ(س)} = \frac{ب}{جـ}$ بحيث جـ ≠ ٠

* النهاية توزع على الاقترانات في حالة القسمة إذا كانت نهاية كل اقتران موجودة وكانت نهاية المقام لا تساوي صفر

مثال (٦) : ليكن $\underset{س\leftarrow ٣}{نهـــا}$ ق(س) = ٤ و $\underset{س\leftarrow ٣}{نهـــا}$ هـ(س) = ٨او $\underset{س\leftarrow ٣}{نهـــا}\frac{ق(س)}{هـ(س)}$

الحل : نلاحظ أن النهاية لكل من الاقترانين ق(س) و هـ(س) موجودة ونهاية هـ(س)لا تساوي صفر لذلك يمكن توزيع النهاية على عملية القسمة .

$$\underset{س\leftarrow ٣}{نهـــا}\frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\underset{س\leftarrow ٣}{نهـــا} ق(س)}{\underset{س\leftarrow ٣}{نهـــا} هـ(س)} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

هـ. $\underset{س\leftarrow أ}{نهـــا}\sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\underset{س\leftarrow أ}{نهـــا} ق(س)}$ = ب بشرط ان ب > ٠ اذا كانت ن عدد زوجي

مثال (٧) : ليكن $\underset{س\leftarrow ٣}{نهـــا}$ ق(س) = ٤ اوجد

١. $\underset{س\leftarrow ٣}{نهـــا}\sqrt{ق(س)}$ ٢. $\underset{س\leftarrow ٣}{نهـــا}\sqrt[٣]{ق(س)}$

الحل :

١. نلاحظ ان النهاية موجودة وقيمتها أكبر من الصفر ومنه نستطيع إدخال النهاية الى الجذر .

$$\underset{س\leftarrow ٣}{نهـا} \sqrt{ق(س)} = \sqrt{\underset{س\leftarrow ٣}{نهـا} ق(س)} = \sqrt{٤} = ٢$$

٢. نلاحظ أن نهاية الإقتران ق(س) موجودة لذلك نستطيع إدخال النهاية الى الجذر

$$\underset{س\leftarrow ٣}{نهـا} \sqrt[٣]{ق(س)} = \sqrt[٣]{\underset{س\leftarrow ٣}{نهـا} ق(س)} = \sqrt[٣]{٤}$$

ملاحظة :

١. النظريات السابقة صحيحة في حال كانت النهاية من اليمين أو من اليسار

٢. من أجل إستعمال النظريات السابقة يجب التأكد من ان الاقتران معرف من جهتي اليمين واليسار ويعطي نفس قيمة النهاية .

مثال (٨) : ليكن ق(س) = ٢س ^{٣} – س ^{٢} اوجد

١. $\underset{س\leftarrow ٥}{نهـا} ق(س)$ ٢. $\underset{س\leftarrow ٥}{نهـا} \sqrt{ق(س)}$

الحل :

١. بالانتباه الى الإقتران نجد أنه إقتران كثير حدود بحيث يمكن ايجاد قيمة النهاية له بالتعويض المباشر

$$\underset{س\leftarrow ٥}{نهـا} ق(س) = ٢ \underset{س\leftarrow ٥}{نهـا} س^{٣} - \underset{س\leftarrow ٥}{نهـا} س^{٢} = ٢ \times ٥^{٣} - ٥^{٢} = ٢٥٠ - ٢٥ = ٢٢٥$$

٢. يمكن إيجاد النهاية بإستخدام النظريات السابقة بحيث يجب التأكد من أن قيمة النهاية للإقتران ق(س) هي أكبر من صفر والسبب في ذلك لأن الجذور الزوجية لا تقبل القيم السالبة أسفلها ومن الفرع السابق يتضح لنا أن نهاية ق(س) عندما تقترب س من العدد ٥ أكبر من صفر ومنه يمكن إدخال النهاية داخل الجذر

$$\underset{س\leftarrow ٥}{نهـا} \sqrt{ق(س)} = \sqrt{\underset{س\leftarrow ٥}{نهـا} ق(س)} = \sqrt{٢٢٥}$$

مثال (٩) : ليكن ق(س) = $\frac{1}{2}$س ^{٢} – ٢ اوجد

١. $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ ق(س) ٢. $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}\sqrt{ق(س)}$

الحل :

١. بالإنتباه الى الإقتران ق(س) نجد أنه إقتران كثير حدود لذلك فانه يمكن إيجاد قيمة النهاية له بالتعويض المباشر

$$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} ق(س) = \frac{١}{٢} \times ٢^{٢} - ٢ = ٠$$

٢. يمكن إيجاد النهاية بإستخدام النظريات بحيث يجب التأكد من أن قيمة نهاية الإقتران ق(س) أكبر من صفر والسبب في ذلك أن الجذور الزوجية لا تقبل القيم السالبة أسفلها ومن الفرع السابق نستنتج أن نهاية ق(س) عندما تقترب س من العدد (٢) تساوي صفر ولذلك لا يمكن ادخال النهاية داخل الجذر ويجب إيجادها من جهة اليمين ومن ثم من جهة اليسار (هنالك منطقه على المستوى الاحداثي بجانب س=٢ ليس لها صور)

أ. $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{نهـا}\sqrt{ق(س)} = \sqrt{\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{نهـا} ق(س)} = \sqrt{٠} = ٠$

ب. $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{نهـا}\sqrt{ق(س)} =$ غ.م

ومنة $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}\sqrt{ق(س)} =$ غ.م

مثال (١٠) : ليكن ق(س) = ٣س – ٢س ^{٢} اوجد

١. $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ ق(س) ٢. $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}\sqrt{ق(س)}$

الحل :

١. بالإنتباه الى الإقتران نجد أنه اقتران كثير حدود بحيث يمكن إيجاد قيمة النهاية بالإعتماد على النظرية السابقة وذلك بإستخدام التعويض المباشر

$$\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ ق(س) ٣ \times ٢ - ٢^{٢} = -٢$$

٢. يمكن إيجاد النهاية بإستخدام النظريات بحيث يجب التأكد من أن قيمة نهاية الاقتران ق(س) أكبر من صفر و السبب في ذلك أن الجذور الزوجية لا تقبل القيم السالبة أسفلها ومن الفرع السابق فإن نهاية ق(س) عندما تقترب س من العدد ٢هي أقل من الصفر ومنه تكون نهاية ق(س) عندما تقترب س من العدد ٢ غير موجودة (لماذا) .....

مثال (١١) : اوجد $\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\left(\sqrt[٣]{٣س - ٢س^{٢}}\right)$

الحل :

لإيجاد النهاية مستعملاً النظريات يجب التأكد من أن الإقتران الموجود داخل الجذر نهايته موجودة بغض النظر عن أنها سالبه او موجبه او صفر

$\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}(٣س - ٢س^{٢}) = ٣\times٣ - ٢\times٣^{٢} = ٩ - ١٨ = -٩$ نجد أن النهاية موجودة وقيمتها سالبة وذلك لا يؤثر على الجذر لأن دليل الجذر عدد فردي (يوجد جذر حقيقي للقيم السالبة في الجذور الفردية) ومنه فإن

$$\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\left(\sqrt[٣]{٣س - ٢س^{٢}}\right) = \sqrt[٣]{\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}(٣س - ٢س^{٢})} = \sqrt[٣]{-٩}$$

مثال (١٢) : ليكن $\underset{س\leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ٣$ و $\underset{س\leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = ٢$ و $\underset{س\leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ ع(س) = ٦$ أوجد

١. $\underset{س\leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\left(\dfrac{ق(س) + هـ(س)}{ق(س) \times ع(س)}\right)$ ٢. $\underset{س\leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\left(\dfrac{س \times (ق(س) - هـ(س))}{س - ٢}\right)$

الحل :

نلاحظ أن النهاية لكل من الإقترانات ق(س) و هـ(س) و ع(س) موجودة وقيمها لا تساوي صفر لذلك يمكن توزيع النهاية .

١. $$\lim_{\text{س}\to ٥}\left(\frac{\text{ق(س)}+\text{هـ(س)}}{\text{ق(س)}\times\text{ع(س)}}\right)=\frac{\lim_{\text{س}\to ٥}(\text{ق(س)}+\text{هـ(س)})}{\lim_{\text{س}\to ٥}(\text{ق(س)}\times\text{ع(س)})}=$$

$$\frac{\lim_{\text{س}\to ٥}\text{ق(س)}+\lim_{\text{س}\to ٥}\text{هـ(س)}}{\lim_{\text{س}\to ٥}\text{ق(س)}\times\lim_{\text{س}\to ٥}\text{ع(س)}}=\frac{٣+٢}{٣\times ٦}=\frac{٥}{١٨}$$

٢. $$\lim_{\text{س}\to ٥}\left(\frac{\text{س}\times\text{ق(س)}-\text{هـ(س)}}{\text{س}-٢}\right)=\frac{\lim_{\text{س}\to ٥}(\text{س}\times\text{ق(س)}-\text{هـ(س)})}{\lim_{\text{س}\to ٥}(\text{س}-٢)}$$

$$\frac{\lim_{\text{س}\to ٥}\text{س}\times(\lim_{\text{س}\to ٥}\text{ق(س)}-\lim_{\text{س}\to ٥}\text{هـ(س)})}{\lim_{\text{س}\to ٥}(\text{س}-٢)}=\frac{٥\times(٣-٢)}{٣}=\frac{٥}{٣}$$

ملاحظة : لإيجاد نهاية إقتران قيمة مطلقة أو إقتران أكبر عدد صحيح يجب اعادة تعريف الإقتران والبحث في النهاية من جهة اليمين واليسار في حال كان ناتج التعويض داخل القيمة المطلقة صفراً وداخل اكبر عدد صحيح عدد صحيح

مثال (١٣) : اوجد $\lim_{\text{س}\to ١}|\text{س}^{٢}-\text{س}|$

الحل : نلاحظ أن الإقتران الذي نود إيجاد النهاية له هو إقتران قيمة مطلقة لذلك يجب اعادة تعريفه وكالتالي

١. نجد جذور (أصفار) الإقتران التربيعي الذي داخل القيمة المطلقة بإستخدام قانون المميز او التحليل

$\text{س}^{٢}-\text{س}=٠\Leftarrow\text{س}(\text{س}-١)=٠$ ومنه جذور (اصفار) الإقتران س=٠ و س=١

٢. نحدد جذور الإقتران على خط الأعداد ونبحث في إشارته عن طريق إختيار بعض القيم والتعويض داخل الاقتران

$$\begin{array}{ccccc} + & & — & & + \\ \hline & ٠ & & ١ & \end{array}$$

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - س & ، \quad ١ \le س \\ س - س^{٢} & ، \quad ٠ \le س < ١ \\ س^{٢} - س & ، \quad ٠ > س \end{cases}$$

عند إعادة تعريف الإقتران نلاحظ أن الإقتران يتشعب عندما تكون س=١ لذلك يجب علينا البحث في النهاية من جهة اليمين واليسار

١. $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهــا}} س^{٢} - س = ٠$

٢. $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهــا}} س - س^{٢} = ٠$

والآن نلاحظ أن النهاية من الجهتين موجودة ومتساوية إذاً $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}} \left| س^{٢} - س \right|$ موجودة وتساوي صفر

مثال (١٤) : أوجد

١. $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}} [س + ١]$ ٢. $\underset{س \to \frac{٣}{٢}}{\text{نهــا}} [س + ١]$

الحل :

١. نلاحظ أن الإقتران الذي نود إيجاد النهاية له هو إقتران أكبرعدد صحيح لذلك نعيد تعريفه بحيث نجعل القيمة التي نود إيجاد النهاية عندها داخل الفترات

$$ق(س) = \begin{cases} ٢ & ، \quad ١ \le س < ٢ \\ ٣ & ، \quad ٢ \le س < ٣ \end{cases}$$

أ. $\lim_{س \to ٢^+} [س + ١] = ٣$

ب. $\lim_{س \to ٢^-} [س + ١] = ٢$

* ومن هنا يتبين لنا بأن النهاية من جهة اليمين لا تساوي النهاية من جهة اليسار وبذلك تكون $\lim_{س \to ٢} [س + ١] = $ غ.م

٢. أ. $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}^+} [س + ١] = ٢$

ب. $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}^-} [س + ١] = ٢$

* ومنه فإن النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهت اليسار وبذلك $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}} [س + ١] = ٢$ ويمكن إيجاد النهاية دون التحقق من الجهتين لأن القيمة التي تقترب منها النهاية عند تعويضها لا تعطي قيمة صحيحة في داخل الإقتران

مثال (١٥) : أوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{|س - ٣|}{\sqrt{س} - ١}$

الحل : في هذه السؤال نجد أن المطلوب هو إيجاد النهاية لحاصل قسمة إقترانين وفي هذه الحالة سنقوم بإتباع النظريات السابقة بحيث أن النهاية ستوزع على القسمة إذا كانت نهاية البسط موجودة ونهاية المقام موجودة ولا تساوي صفر

١. نقوم بإيجاد نهاية البسط $\lim_{س \to ٣} |س - ٣|$ ومن الملاحظ أننا سنقوم بإعادة تعريف القيمة المطلقة ونجد النهاية من جهة اليمين واليسار وذلك لأن ناتج التعويض داخل القيمة المطلقة يعطي صفر

$$|س - ٣| = \begin{cases} س - ٣ & ،\quad س > ٣ \\ ٣ - س & ،\quad س \leq ٣ \end{cases}$$

$$\lim_{س \to ٣^+} |س - ٣| = \lim_{س \to ٣^+} س - ٣ = ٣ - ٣ = ٠$$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٣^-}{\text{نهـا}} |\text{س} - ٣| = \underset{\text{س}\leftarrow ٣^-}{\text{نهـا}}\ ٣ - \text{س} = ٣ - ٣ = ٠$ ومنه $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} |\text{س} - ٣| = ٠$

٢. نقوم بإيجاد نهاية المقام $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ١}$ بإستخدام النظريات السابق بحيث يجب أن يكون ناتج التعويض داخل الجذر أكبر من صفر $\text{س} - ١ = ٣ - ١ = ٢$ ومنه يتبين لنا أن نهاية الجذر موجوده وتساوي $\sqrt{٢}$

الآن نجد أن نهاية كل من البسط والمقام موجودة ونهاية المقام لا تساوي صفر وعليه يمكن توزيع النهاية كما يلي

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{|\text{س} - ٣|}{\sqrt{\text{س} - ١}} = \frac{\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} |\text{س} - ٣|}{\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ١}} = \frac{٠}{\sqrt{٢}} = ٠$$

* **فكر** : ما الفرق بين $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ١}}{\sqrt{\text{س} - ١}}$ و $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} - ١}}$

مثال (١٦) : أوجد

١. $\underset{\text{س}\leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ١}}{\sqrt{\text{س} - ١}}$ ٢. $\underset{\text{س}\leftarrow ١^-}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ١}}{\sqrt{\text{س} - ١}}$ ٣. $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ١}}{\sqrt{\text{س} - ١}}$

الحل :

١. ما ينطبق على الأعداد الحقيقية من ضم الجذور ينطبق على النهايات ولكن في النهايات ندرس سلوك الإقتران أي أننا نهتم بالأعداد التي تقع على جانبي العدد الذي نود الإقتراب منه وسنلاحظ أنه وعند الإقتراب من الرقم (١) من جهت اليمين ان قيمة الإقتران تقترب من الصفر وأن ناتج تعويض الأعداد التي هي اكبر من (١) إشارتها موجبة وأنها اكبر من الصفر ولذلك يمكننا ضم الجذر

$$\underset{\text{س}\leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ - ١}}{\sqrt{\text{س} - ١}} = \underset{\text{س}\leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} - ١}} = \underset{\text{س}\leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{(\text{س} + ١)(\text{س} - ١)}{\text{س} - ١}} =$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} \sqrt{(\text{س} + ١)} = \sqrt{\underset{\text{س}\leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} (\text{س} + ١)} = \sqrt{٢}$$

٢. نلاحظ أن كل من البسط والقام غير معرفين يسار العدد (١) لذلك تكون النهاية من جهة اليسار غير موجودة $\lim_{س \to ١^-} \frac{\sqrt{س^٢ - ١}}{\sqrt{س - ١}} =$ غ.م

٣. بالاعتماد على ما سبق فان $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^٢ - ١}}{\sqrt{س - ١}} =$ غ.م

مثال (١٧) : اذا كان $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ٣}{س - ٢} = ٣$ وكان ق(س) إقتران كثير حدود أوجد

١. $\lim_{س \to ١} ق(س)$ ٢. $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ٣}{٢س - ٥}$

الحل :

١. لإيجاد نهاية الإقتران ق(س) يجب البدء بتوزيع النهاية والتدرج بالحل لتصبح $\lim_{س \to ١} ق(س)$ موضوعة للقانون وتساوي عدد

$$\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ٣}{س - ٢} = \frac{\lim_{س \to ١} ق(س) - \lim_{س \to ١} ٣}{\lim_{س \to ١} س - \lim_{س \to ١} ٢} = \frac{\lim_{س \to ١} ق(س) - ٣}{-١} = ٣$$

بالضرب التبادلي نحصل على $\lim_{س \to ١} ق(س) - ٣ = -٣$ ومن ثم نقوم بجمع العدد ٣ للطرفين لتصبح $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٠$ وهي قيمة النهاية

٢. $$\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ٣}{٢س - ٥} = \frac{\lim_{س \to ١} ق(س) - \lim_{س \to ١} ٣}{\lim_{س \to ١} ٢س - \lim_{س \to ١} ٥} = \frac{٠ - ٣}{٢ - ٥} = \frac{-٣}{-٣} = ١$$

مثال (١٨) : إذا كان $\lim\limits_{س \to 1} \frac{ق(س) - 1}{هـ(س) - 2} = 3$ وكان ق(س) إقتران كثير حدود و $\lim\limits_{س \to 1} هـ(س) = 4$ أوجد $\lim\limits_{س \to 1} \frac{ق(س) - هـ(س)}{س - 5}$

الحل :

لحل هذا السؤال يجب إيجاد قيمة $\lim\limits_{س \to 1} ق(س)$ بإستخدام المعطيات

$\lim\limits_{س \to 1} \frac{ق(س) - 1}{هـ(س) - 2} = 3$ وفي هذا المعطى الذي سنستخدمة سنجد أن هنالك إقترانين هما ق(س) وهـ(س) وأن نهاية هـ(س) موجودة وقيمتها معروفة وفي هذه الحالة نطبق النظريات لإيجاد نهاية ق(س)

$$\lim_{س \to 1} \frac{ق(س) - 1}{هـ(س) - 2} = \frac{\lim\limits_{س \to 1} ق(س) - \lim\limits_{س \to 1} 1}{\lim\limits_{س \to 1} هـ(س) - \lim\limits_{س \to 1} 2} = \frac{(\lim\limits_{س \to 1} ق(س)) - 1}{4 - 2} = 3$$

$$(\lim_{س \to 1} ق(س)) = 7$$

الان وبعد أن اوجدنا نهاية ق(س) عندما تقترب س من العدد (١) نشرع بإيجاد قيمة النهاية المطلوبة

$$\lim_{س \to 1} \frac{ق(س) - هـ(س)}{س - 5} = \frac{\lim\limits_{س \to 1} ق(س) - \lim\limits_{س \to 1} هـ(س)}{\lim\limits_{س \to 1} س - \lim\limits_{س \to 1} 5} = \frac{7 - 4}{1 - 5} = \frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$$

نهايات اقترانات كسرية

في هذا الدرس سنقوم بإيجاد النهاية بإستعمال طرق عدة وسنهتم بدراسة الإقترانات التي يكون ناتج التعويض فيها $\frac{٠}{٠}$ بحيث تسمى هذه الحالة حالة عدم تعيين أي انه لا يوجد دلالة على أن النهاية موجودة ام لا ولذلك سنقوم في البحث عن العلاقة التي تجعل ناتج التعويض في البسط والمقام صفراً ومحاولة التخلص منها عبر الاختصار

* حالات التعويض المباشر ومعناها

اذا كان (ع) و(ن) أعداداً حقيقية فإن

أ. $\frac{ع}{ن}$ النهاية موجودة وقيمتها حاصل قسمتهما

ب. $\frac{٠}{ع}$ النهاية موجودة وقيمتها صفر

ج. $\frac{ع}{٠}$ النهاية غير موجودة

د. $\frac{٠}{٠}$ حالة عدم تعيين

طريقة التحليل : نلجأ لهذه الطريقة عند وجود إقترانات نستطيع تحليلها مثل الإقتران التربيعي والإقتران التكعيبي في البسط أو المقام وذلك بعد التأكد من أن ناتج التعويض المباشر يعطي $\frac{٠}{٠}$(حالة عدم تعيين).

ملاحظه : يمكن إستنتاج العلاقة التي سيتم إختصارها وذلك بكتابة إشارة مساواة بدلاً من إشارة الإقتراب ونقل القيمة الثابتة الى جانب المتغير لنحصل على

س- أ=٠وهي التي يجب التخلص منها .

مثال (١) : جد قيمة كل من

١. $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ ٢. $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$

الحل :

١. عند التعويض في الإقتران الأول سيكون ناتج التعويض $\frac{-٣}{-١}$=٣ أي أن النهاية موجودة وقيمتها ٣

٢. عند التعويض في الإقتران الثاني نجد ان ناتج التعويض سيكون $\frac{٠}{٠}$ أي حالة عدم تعيين لذلك سنقوم بالتخلص من س – ٢ وهي التي تجعل قيمة البسط والمقام صفر وبالنظر نجد ان العلاقة موجودة في المقام بشكل صريح أما في البسط فسنقوم بالتحليل للحصول عليها ليتم التخلص منها

$$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} (س + ٢) = ٤$$

مثال (٢) : أوجد قيمة $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}$

الحل : نقوم بالتعويض المباشر وقيمته $\frac{٠}{٠}$ اي حالة عدم تعيين وللتخلص من العلاقة التي تجعل ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ سنلجأ لتحليل العبارة التكعيبية الموجودة في البسط

$$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} (س^{٢} + ٢س + ٤) = ١٢$$

مثال (٣) : أوجد قيمة $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \frac{س - ٣}{٢٧ - س^{٣}}$

الحل : نقوم بالتعويض المباشر وقيمته $\frac{٠}{٠}$ اي حالة عدم تعيين وللتخلص من العلاقة التي تجعل ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ سنلجأ الى تحليل العبارة التكعيبية الموجودة في المقام

$$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \frac{س - ٩}{٢٧ - س^{٣}} = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \frac{-(٣ - س)}{(٣ - س)(٩ + ٣س + س^{٢})} = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \frac{-١}{(٩ + ٣س + س^{٢})} = \frac{-١}{٢٧}$$

مثال (٤) : أوجد قيمة $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{٨-\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٢}-٤}$

الحل : نقوم بالتعويض المباشر وقيمته $\frac{٠}{٠}$ اي حالة عدم تعيين وللتخلص من العلاقة التي تجعل ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ سنلجأ الى تحليل العبارة التكعيبية الموجودة في البسط وتحليل العبارة التربيعية الموجودة في المقام للحصول على س- ٢ و التخلص منها

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{٨-\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٢}-٤} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{(٢-\text{س})(٤+٢\text{س}+\text{س}^{٢})}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{-(\text{س}-٢)(٤+٢\text{س}+\text{س}^{٢})}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}$$

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{-(٤+٢\text{س}+\text{س}^{٢})}{(\text{س}+٢)} = \frac{-(٤+٤+٤)}{٤} = \frac{-١٢}{٤} = -٣$$

مثال (٥) : أوجد قيمة $\lim\limits_{\text{س}\to ٥} \frac{٢\text{س}^{٢}-٥٠}{\text{س}^{٣}-١٢٥}$

الحل : نقوم بالتعويض المباشر وقيمته $\frac{٠}{٠}$ اي حالة عدم تعيين وللتخلص من العلاقة التي تجعل ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ سنلجأ الى تحليل العبارة التربيعية الموجودة في البسط وتحليل العبارة التكعيبية الموجودة في المقام للحصول على س- ٥ و التخلص منها

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٥} \frac{٢\text{س}^{٢}-٥٠}{\text{س}^{٣}-١٢٥} = \lim\limits_{\text{س}\to ٥} \frac{٢(\text{س}^{٢}-٢٥)}{(\text{س}-٥)(\text{س}^{٢}+٥\text{س}+٢٥)}$$

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٥} \frac{٢(\text{س}-٥)(\text{س}+٥)}{(\text{س}-٥)(\text{س}^{٢}+٥\text{س}+٢٥)} = \lim\limits_{\text{س}\to ٥} \frac{٢(\text{س}+٥)}{(\text{س}^{٢}+٥\text{س}+٢٥)} = \frac{٢٠}{٧٥}$$

مثال (٦) : أوجد قيمة $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^{٢}-\text{س}-٦}{\text{س}^{٣}-٢٧}$

الحل : نقوم بالتعويض المباشر وقيمته $\frac{٠}{٠}$ اي حالة عدم تعيين وللتخلص من العلاقة التي تجعل ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ سنلجأ الى تحليل العبارة التربيعية الموجودة في البسط وتحليل العبارة التكعيبية الموجودة في المقام للحصول على س-٣ و التخلص منها

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - س - ٦}{س^{٣} - ٢٧} = \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٢)}{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)}$$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س + ٣}{س^{٢} + ٣س + ٩} = \frac{٦}{٢٧} = \frac{٢}{٩}$$

طريقة القسمة التركيبية : وتستعمل هذه الطريقة على الأغلب في الحالات التالية

١. إذا وجد إقتران كثير حدود له اسس كبيرة .

٢. إذا نسيت قاعدة التحليل للفرق بين مربعين والفرق بين مكعبين ومجموع مكعبين

مثال (٧) : أوجد قيمة $\lim_{س \to ٥} \frac{٢س^{٢} - ٥٠}{س - ٥}$ بإستخدام القسمة التركيبية

الحل : نقوم بالتعويض المباشر وقيمته $\frac{٠}{٠}$ أي حالة عدم تعيين وللتخلص من العلاقة التي تجعل ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ سنلجأ الى تحليل العبارة التربيعية الموجودة في البسط للحصول على س- ٥ والتخلص منها ولكن في هذه المرة سنستخدم القسمة التركيبية .

$$\lim_{س \to ٥} \frac{٢س^{٢} - ٥٠}{س - ٥}$$

٥	$س^{٢}$	س	ج
	٢	٠	٥٠-
	↓	١٠	٥٠
	٢	١٠	٠

$$\lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(٢س + ١٠)}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} (٢س + ١٠) = ٢٠$$

مثال (٨) : جد قيمة $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^{٥} - ١٠س^{٣} + ٢٥س^{٢} - ٦س - ٧٢}{س^{٢} - ٤}$

الحل : نقوم بالتعويض المباشر وقيمته $\frac{٠}{٠}$ اي حالة عدم تعيين وللتخلص من العلاقة التي تجعل ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ سنلجأ الى التحليل بإستخدام القسمة التركيبية وذلك

لأن الإقتران الموجود في البسط هو من الدرجة الخامسة وليس له قاعدة تحليل وذلك للحصول على س- ٢ و التخلص منها

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٥} - ١٠\text{س}^{٣} + ٢٥\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ٧٢}{\text{س}^{٢} - ٤}$$

٢	س ٥	س ٤	س ٣	س ٢	س	ج
	٢	٠	١٠-	٢٥	٦-	٧٢-
		٤	٨	٤-	٤٢	٧٢
	٢	٤	٢-	٢١	٣٦	٠

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٢)(٢\text{س}^{٤} + ٤\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ٢١\text{س} + ٣٦)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)} =$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(٢\text{س}^{٤} + ٤\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ٢١\text{س} + ٣٦)}{\text{س} + ٢} = \frac{١١٠}{٤} = \frac{٥٥}{٢}$$

طريقة تبسيط الكسور: وتستعمل هذه الطريقة إذا أردنا ايجاد نهاية إقتران يتكون من بسط ومقام وكان البسط او المقام او كلاهما حاصل جمع او طرح كسرين (يحتوي على كسور) بحيث ما ينطبق على جمع وطرح الاعداد النسبية ينطبق على الإقترانات الكسرية

مثال (٩) : جد قيمة $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \frac{٢}{\text{س} - ٥}\left(\frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{٥}\right)$

الحل : نقوم بالتعويض المباشر وقيمته $\frac{٠}{٠}$ اي حالة عدم تعيين وللتخلص من العلاقة التي تجعل ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ سنلجأ الى جمع الكسور بكسر واحد لنتمكن من التخلص من س-٥ كالتالي

$$\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \frac{٢}{\text{س} - ٥}\left(\frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{٥}\right) = \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \frac{٢}{\text{س} - ٥}\left(\frac{٥}{٥\text{س}} - \frac{\text{س}}{٥\text{س}}\right) = \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \frac{٢}{\text{س} - ٥}\left(\frac{٥ - \text{س}}{٥\text{س}}\right)$$

$$\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢}{\text{س} - ٥} \times \frac{٥ - \text{س}}{٥\text{س}}\right) = \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \frac{٢(٥ - \text{س})}{(\text{س} - ٥)٥\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \frac{-٢}{٥\text{س}} = \frac{-٢}{٢٥}$$

مثال (١٠) : أوجد قيمة $\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{٢}{س^{٢}-٤}\left(\frac{١}{٤}-\frac{١}{س^{٢}}\right)$

الحل : نقوم بالتعويض المباشر وقيمته $\frac{٠}{٠}$ اي حالة عدم تعيين وللتخلص من العلاقة التي تجعل ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ سنلجأ الى جمع الكسور بكسر واحد لنتمكن من التخلص من س-٢ كالتالي

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{٢}{س^{٢}-٤}\left(\frac{س^{٢}}{٤س^{٢}}-\frac{٤}{٤س^{٢}}\right)=\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{٢}{س^{٢}-٤}\left(\frac{س^{٢}-٤}{٤س^{٢}}\right)=\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{٢(س^{٢}-٤)}{(س^{٢}-٤)٤س^{٢}}$$

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{١}{٢س^{٢}}=\frac{١}{٨}$$

مثال (١١) : أوجد قيمة $\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{\frac{٢}{س^{٢}-٤}}{\frac{٢س}{٢-س}}$

الحل : نقوم بالتعويض المباشر وقيمته $\frac{٠}{٠}$ اي حالة عدم تعيين وللتخلص من العلاقة التي تجعل ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ سنلجأ الى جمع الكسور بكسر واحد لنتمكن من التخلص من س-٢ كالتالي

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{٢}{س^{٢}-٤}\div\left(\frac{٢س}{٢-س}\right)=\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{٢}{س^{٢}-٤}\times\left(\frac{٢-س}{٢س}\right)=\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{٢(٢-س)}{٢س(س^{٢}-٤)}$$

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{٢(٢-س)}{٢س(س-٢)(س+٢)}=\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{-٢}{٢س(س+٢)}=\frac{-٢}{١٦}=\frac{-١}{٨}$$

مثال (١٢) : أوجد قيمة $\lim\limits_{\text{س}\to 4} \dfrac{\dfrac{3}{\text{س}+2}-\dfrac{2}{\text{س}}}{\text{س}-4}$

الحل : نقوم بالتعويض المباشر وقيمته $\frac{0}{0}$ اي حالة عدم تعيين وللتخلص من العلاقة التي تجعل ناتج التعويض $\frac{0}{0}$ سنلجأ الى تبسيط الكسور الموجودة في البسط لنتمكن من التخلص من س-٤ كالتالي

$$\lim\limits_{\text{س}\to 4} \dfrac{\dfrac{3}{\text{س}+2}-\dfrac{2}{\text{س}}}{\text{س}-4} = \lim\limits_{\text{س}\to 4} \dfrac{\dfrac{3\text{س}-2(\text{س}+2)}{\text{س}(\text{س}+2)}}{\text{س}-4} = \lim\limits_{\text{س}\to 4} \dfrac{3\text{س}-2\text{س}-4}{(\text{س}-4)(\text{س}(\text{س}+2))}$$

$$\lim\limits_{\text{س}\to 4} \dfrac{\text{س}-4}{(\text{س}-4)(\text{س}(\text{س}+2))} = \dfrac{1}{24}$$

الضرب بالمرافق : الضرب بالمرافق هي عملية ليست جديدة على الطلبة حيث انها كانت تعرف في الصف الثامن بكتابة الأعداد الحقيقية دون أن يظهر الجذر في المقام او البسط والهدف منها هو التخلص من الجذر دون التغيير بقيمته من خلال الضرب والقسمة علية نفسة

مرافقات الجذور التربيعية والتكعيبية التي يجب ان يكون الطالب على دراية بها وحفظها

إذا علمت أن ق(س) وهـ (س)هي إقترانات وكانت نهاية كل منها معروفة فان :

١. مرافق $\sqrt{\text{ق}(\text{س})}-\text{هـ}(\text{س})$ هو $\sqrt{\text{ق}(\text{س})}+\text{هـ}(\text{س})$

٢. مرافق $\sqrt{\text{ق}(\text{س})}-\sqrt{\text{هـ}(\text{س})}$ هو $\sqrt{\text{ق}(\text{س})}+\sqrt{\text{هـ}(\text{س})}$

٣. مرافق $\sqrt[3]{\text{ق}(\text{س})}-\text{هـ}(\text{س})$ هو $\sqrt[3]{\text{ق}(\text{س})}^{\,2}+\text{هـ}(\text{س})\sqrt[3]{\text{ق}(\text{س})}+\text{هـ}^2(\text{س})$

٤. مرافق $\sqrt[3]{\text{ق}(\text{س})}+\text{هـ}(\text{س})$ هو $\sqrt[3]{\text{ق}(\text{س})}^{\,2}-\text{هـ}(\text{س})\sqrt[3]{\text{ق}(\text{س})}+\text{هـ}^2(\text{س})$

٥. مرافق $\sqrt[3]{ن(س)} - \sqrt[3]{هـ(س)}$ هو $\sqrt[3]{ن(س)}^{٢} + \sqrt[3]{ن(س)}\,\sqrt[3]{هـ(س)} + \sqrt[3]{هـ(س)}^{٢}$

٦. مرافق $\sqrt[3]{ن(س)} + \sqrt[3]{هـ(س)}$ هو $\sqrt[3]{ن(س)}^{٢} - \sqrt[3]{ن(س)}\,\sqrt[3]{هـ(س)} + \sqrt[3]{هـ(س)}^{٢}$

٧. مرافق $ن(س) - \sqrt{هـ(س)}$ هو $ن(س) + \sqrt{هـ(س)}$

٨. مرافق $ن(س) - \sqrt[3]{هـ(س)}$ هو $ن^{٢}(س) + ن(س)\sqrt[3]{هـ(س)} + \sqrt[3]{هـ(س)}^{٢}$

ملاحظة : نستطيع تحديد طبيعة المرافق الذي نود إستعماله بالنظر الى دليل الجذر

مثال (١٣) : أوجد $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٢}$

الحل : عند تعويض العدد ٤ نجد أن ناتج التعويض المباشر هو $\frac{٠}{٠}$ أي حالة عدم تعيين وسنلجأ في الحل الى الضرب بمرافق الجذر التربيعي وذلك لوجود جذر تربيعي في البسط

$$\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س} + ٢}{\sqrt{س} + ٢}$$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{(س - ٤)(\sqrt{س} + ٢)} = \lim_{س \to ٤} \frac{١}{\sqrt{س} + ٢} = \frac{١}{٤}$$

مثال (١٤) : أوجد $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{٣ - \sqrt{س^{٢} + ٥}}{س^{٢} - ٤}$

الحل : عند تعويض العدد ٢ نجد ان ناتج التعويض المباشر هو $\frac{٠}{٠}$ أي حالة عدم تعيين وسنلجأ في الحل الى الضرب بالمرافق وذلك لوجود جذر في البسط وتحليل الإقتران التربيعي في المقام للحصول على س - ٣

$$\lim_{س \to ٢} \frac{٣ - \sqrt{س^{٢} + ٥}}{س^{٢} - ٤} = \lim_{س \to ٢} \frac{٣ - \sqrt{س^{٢} + ٥}}{س^{٢} - ٤} \times \frac{٣ + \sqrt{س^{٢} + ٥}}{٣ + \sqrt{س^{٢} + ٥}}$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٩}-(\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥})}{(\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤})(\text{٣}+\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥}})}=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٤}-\text{س}^{\text{٢}}}{(\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤})(\text{٣}+\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥}})}$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{-\text{١}}{\text{٣}+\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥}}}=-\frac{\text{١}}{\text{٦}}$$

مثال (١٥) : أوجد $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt{\text{س}+\text{٧}}-\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}}}{\text{س}^{\text{٣}}-\text{٢٧}}$

الحل : عند تعويض العدد ٣ نجد ان ناتج التعويض المباشر هو $\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$ أي حالة عدم تعيين وسنلجأ في الحل الى الضرب بالمرافق وذلك لوجود جذر في البسط وتحليل الإقتران التكعيبي الموجود في المقام للحصول على س - ٣

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt{\text{س}+\text{٧}}-\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}}}{\text{س}^{\text{٣}}-\text{٢٧}}=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\sqrt{\text{س}+\text{٧}}-\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}}}{\text{س}^{\text{٣}}-\text{٢٧}}\times\frac{\sqrt{\text{س}+\text{٧}}+\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}}}{\sqrt{\text{س}+\text{٧}}+\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}}}$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س}+\text{٧})-(\text{س}^{\text{٢}}+\text{١})}{(\text{س}^{\text{٣}}-\text{٢٧})(\sqrt{\text{س}+\text{٧}}+\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}})}=\underset{\text{س}\leftarrow\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}+\text{٧}-\text{س}^{\text{٢}}-\text{١}}{(\text{س}^{\text{٣}}-\text{٢٧})(\sqrt{\text{س}+\text{٧}}+\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}})}$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٦}+\text{س}-\text{س}^{\text{٢}}}{(\text{س}-\text{٣})(\text{س}^{\text{٢}}+\text{٣}\text{س}+\text{٩})(\sqrt{\text{س}+\text{٧}}+\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}})}$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \frac{-(\text{س}-\text{٣})(\text{س}+\text{٢})}{(\text{س}-\text{٣})(\text{س}^{\text{٢}}+\text{٣}\text{س}+\text{٩})(\sqrt{\text{س}+\text{٧}}+\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}})}$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \frac{-(\text{س}+\text{٢})}{(\text{س}^{\text{٢}}+\text{٣}\text{س}+\text{٩})(\sqrt{\text{س}+\text{٧}}+\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}})}=\frac{-\text{٥}}{\text{٥٤}\sqrt{\text{١٠}}}$$

مثال (١٦) : أوجد $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٤}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}-\text{٤}}{\sqrt{\text{٤س}}-\text{٤}}$

الحل : عند تعويض العدد ٤ نجد ان ناتج التعويض المباشر هو $\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$ أي حالة عدم تعيين وسنلجأ في حلنا الى الضرب بالمرافق وذلك لوجود جذر في المقام

$$\lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{\text{س}-\text{٤}}{\sqrt{\text{٤س}}-\text{٤}} = \lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{\text{س}-\text{٤}}{\sqrt{\text{٤س}}-\text{٤}} \times \frac{\sqrt{\text{٤س}}+\text{٤}}{\sqrt{\text{٤س}}+\text{٤}} = \lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{(\text{س}-\text{٤})(\sqrt{\text{٤س}}+\text{٤})}{\text{٤س}-\text{١٦}}$$

$$\lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{(\text{س}-\text{٤})(\sqrt{\text{٤س}}+\text{٤})}{\text{٤}(\text{س}-\text{٤})} = \lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{(\sqrt{\text{٤س}}+\text{٤})}{\text{٤}} = \text{٢}$$

مثال (١٧) : أوجد $\lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{\sqrt[3]{\text{٢س}}-\text{٢}}{\text{س}-\text{٤}}$

الحل : عند تعويض العدد ٤ نجد ان ناتج التعويض المباشر هو $\frac{\cdot}{\cdot}$ أي حالة عدم تعيين وسنلجأ في حلنا الى الضرب بالمرافق وذلك لوجود جذر تكعيبي في البسط

$$\lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{\sqrt[3]{\text{٢س}}-\text{٢}}{\text{س}-\text{٤}} = \lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{\sqrt[3]{\text{٢س}}-\text{٢}}{\text{س}-\text{٤}} \times \frac{\sqrt[3]{\text{٢س}}^{\,\text{٢}}+\text{٢}\sqrt[3]{\text{٢س}}+\text{٤}}{\sqrt[3]{\text{٢س}}^{\,\text{٢}}+\text{٢}\sqrt[3]{\text{٢س}}+\text{٤}}$$

$$\lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{\text{٢س}-\text{٨}}{(\text{س}-\text{٤})(\sqrt[3]{\text{٢س}}^{\,\text{٢}}+\text{٢}\sqrt[3]{\text{٢س}}+\text{٤})} = \lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{\text{٢}(\text{س}-\text{٤})}{(\text{س}-\text{٤})(\sqrt[3]{\text{٢س}}^{\,\text{٢}}+\text{٢}\sqrt[3]{\text{٢س}}+\text{٤})}$$

$$\lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{\text{٢}}{(\sqrt[3]{\text{٢س}}^{\,\text{٢}}+\text{٢}\sqrt[3]{\text{٢س}}+\text{٤})} = \frac{\text{١}}{\text{٦}}$$

مثال (١٨) : جد $\lim_{\text{س}\to\text{٤}} \frac{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٢س}+\text{١٢}}-\text{٦}}{\sqrt[3]{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٨}}-\text{٤}}$

الحل : عند تعويض العدد ٤ نجد ان ناتج التعويض المباشر هو $\frac{\cdot}{\cdot}$ أي حالة عدم تعيين وسنلجأ في حلنا الى الضرب بمرافق الجذر التربيعي والتكعيبي وذلك لوجود جذور في كل من البسط والمقام

$$\lim_{\text{س}\to ٤} \frac{\sqrt{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١٢}-٦}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}-٨}-٤} \times \frac{\sqrt[٣]{٤\text{س}^{٢}}^{\,٢}+٤\sqrt[٣]{٤\text{س}^{٢}}+١٦}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}-٨}^{\,٢}+٤\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}-٨}+١٦} \times \frac{\sqrt{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١٢}+٦}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١٢}+٦}$$

$$\lim_{\text{س}\to ٤} \frac{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١٢-٣٦}{\text{س}^{٢}-٨-١٦} \; \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}-٨}^{\,٢}+٤\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}-٨}+٤}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١٢}+٦}$$

$$\lim_{\text{س}\to ٤} \frac{\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٢٤}{\text{س}^{٢}-٨} \; \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}-٨}^{\,٢}+٤\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}-٨}+٤}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١٢}+٦}$$

$$\lim_{\text{س}\to ٤} \frac{(\text{س}-٤)(\text{س}+٦)}{(\text{س}+٤)(\text{س}-٤)} \; \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}-٨}^{\,٢}+٤\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}-٨}+٤}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١٢}+٦}$$

$$\lim_{\text{س}\to ٤} \frac{\text{س}+٦}{\text{س}+٤} \times \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}-٨}^{\,٢}+٤\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}-٨}+١٦}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١٢}+٦} = \frac{١٠}{٨} \times \frac{٤٨}{١٢} = ٥$$

طريقة الإضافة والطرح : وتستخدم هذه الطريقة عند وجود حاصل جمع او طرح إقترانين من نوعين مختلفين مثل (جذر واقتران خطي) بحيث تقوم هذه الطريقة بتسهيل التعامل مع الإقترانات وإيجاد النهاية لها وتتم هذه العملية حسب الخطوات التالية

١. نقوم بتحديد القيمة التي نريد إضافتها وطرحها وذلك بأخذ أحد الإقترانين المختلفين والتعويض فيه

٢. نقوم بإضافة وطرح القيمة على الإقترانين

٣. نقوم بفصل النهاية إلى نهايتين يكون ناتج التعويض فيهما $\frac{\cdot}{\cdot}$ ومن ثم نجد النهايات باستعمال الطرق السابقة في حلها

مثال (١٩) : اجد $\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\sqrt{٢\text{س}^{٢}-٤}-\text{س}^{٢}+٢}{\text{س}-٢}$

الحل : عند تعويض العدد ٢ نجد أن ناتج التعويض المباشر هو $\frac{٠}{٠}$ أي حالة عدم تعيين وسنلجأ في حلنا الى الضرب بمرافق الجذر التربيعي وذلك لوجود جذر في البسط ولكن في هذا المثال سنستخدم طريقة الاضافة والطرح :

$$\lim_{س\to٢} \frac{\left(\sqrt{٢س^٢ - ٤} - س^٢ + ٢\right) - ٢ + ٢}{س - ٢} = \lim_{س\to٢} \frac{\sqrt{٢س^٢ - ٤} - ٢}{س - ٢} + \lim_{س\to٢} \frac{٢ - س^٢ + ٢}{س - ٢}$$

نأخذ كل نهاية على حده

١. $\lim_{س\to٢} \frac{\sqrt{٢س^٢ - ٤} - ٢}{س - ٢}$

$$\lim_{س\to٢} \frac{\sqrt{٢س^٢ - ٤} - ٢}{س - ٢} \times \frac{\sqrt{٢س^٢ - ٤} + ٢}{\sqrt{٢س^٢ - ٤} + ٢} = \lim_{س\to٢} \frac{٢س^٢ - ٤ - ٤}{(س - ٢)(\sqrt{٢س^٢ - ٤} + ٢)}$$

$$\lim_{س\to٢} \frac{٢س^٢ - ٨}{(س - ٢)(\sqrt{٢س^٢ - ٤} + ٢)} = \lim_{س\to٢} \frac{٢(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)(\sqrt{٢س^٢ - ٤} + ٢)} = \frac{٨}{٤} = ٢$$

٢. $\lim_{س\to٢} \frac{٢ - س^٢ + ٢}{س - ٢}$

$$\lim_{س\to٢} \frac{٤ - س^٢}{س - ٢} = \lim_{س\to٢} \frac{(٢ + س)(٢ - س)}{س - ٢} = \lim_{س\to٢} -(٢ + س) = -٤$$

اذا $\lim_{س\to٢} \frac{\sqrt{٢س^٢ - ٤} - س^٢ + ٢}{س - ٢} = ٢ - ٤ = -٢$

نهاية الإقترانات الدائرية

سميت الإقترانات الدائرية بهذا الإسم لأنها تكرر نفس القيم بعد ٣٦٠ درجه و بالترتيب ومن الجدير بالذكر أننا في هذه الوحدة سنقوم بدراسة سلوكها عند إقترابها من نقطة معينة (نجد نهايتها) وسنجد نهاية هذه الإقترانات بعدة طرق مراعين حالات التعويض المباشر في بادئ الأمر والتسلسل في الطرق من الأعلى الى الاسفل لنجد الطريقة المناسبة ونستخدمها .

طرق إيجاد نهاية الإقترانات الدائرية :

١. توزيع البسط على المقام
٢. الضرب بالمرافق
٣. الفرض
٤. القسمة على الزاوية
٥. المتطابقات

حالات التعويض المباشر :

هي نفس الحالات التي تعرفنا اليها في الدرس السابق وهنالك زوايا مشهورة يجب ان يكون الطالب على دراية بقيم الـ جيب والجتا والظل لها والجدول التالي يلخصها

الزاوية (س)	التقدير الدائري	جا (س)	جتا(س)	ظا(س)
٠	٠	٠	١	٠
٣٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
٤٥	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١
٦٠	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
٩٠	$\frac{\pi}{٢}$	١	٠	غير معرف
١٨٠	π	٠	١-	٠
٢٧٠	$\frac{٣\pi}{٢}$	١-	٠	غير معرف
٣٦٠	٢π	٠	١	٠

مثال (١) : أوجد

١. $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٦}} ٣ جا٢س$ ٢. $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{١ + جتاس}{\pi + س}$

٣. $\lim\limits_{س \to \pi} \frac{١ + جتاس}{س}$ ٤. $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{١ - جاس}{\frac{\pi}{٦} - س}$

الحل :

نلاحظ في هذا السؤال أن طريقة الحل هي التعويض المباشر والسبب هو ناتج التعويض لا يعطي $\frac{٠}{٠}$ أي حالة عدم التعيين

١. $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٦}} ٣ جا٢س = ٣ جا\frac{\pi}{٣} = ٣ \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢. $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{١ + جتاس}{\pi + س} = \frac{١ + جتا\frac{\pi}{٣}}{\pi + \frac{\pi}{٣}} = \frac{١ + \frac{١}{٢}}{\frac{٤\pi}{٣}} = \frac{٦}{٨\pi}$

٣. $\lim\limits_{س \to \pi} \frac{١ + جتاس}{س} = \frac{١ + جتا\pi}{\pi} = \frac{٠}{\pi} = ٠$

٤. $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{١ - جاس}{\frac{\pi}{٦} - س} = \frac{١ - جا\frac{\pi}{٦}}{\frac{\pi}{٦} - \frac{\pi}{٦}} = \frac{١ - جا\frac{\pi}{٦}}{٠}$ النهاية غير موجودة

توزيع البسط على المقام : ونلجأ لهذه الحالة إن اقتصر البسط والمقام على جا س او ظا س او س وتكون النهاية تقترب من الصفر والمهم بالذكر ان الطرق التي سنخوض بها هي طرق للوصول الى $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا أس}{ب س}$ والتي ناتجها $\frac{أ}{ب}$ وهي محور نهاية الإقترانات الدائرية .

بعض الإختصارات التي تساعد الطلبة للوصول الى الناتج بشكل أسرع .

إذا كانت أ،ب اعداداً حقيقية فإن

١. $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جاأس}{بس} = \frac{أ}{ب}$ ٢. $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{أس}{جابس} = \frac{أ}{ب}$ ٣. $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جاأس}{جابس} = \frac{أ}{ب}$

٤. $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظاأس}{بس} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\frac{جاأس}{جتاأس}}{بس} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{جاأس}{بس جتاأس}$

$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{جاأس}{بس} \times \frac{١}{جتاأس} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{جاأس}{بس} \times \lim\limits_{س \to ٠} \frac{١}{جتاأس} = \frac{أ}{ب} \times ١ = \frac{أ}{ب}$

٥. $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{أس}{ظابس} = \frac{أ}{ب}$

٦. $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظاأس}{ظابس} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\frac{ظاأس}{س}}{\frac{ظابس}{س}} = \frac{\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظاأس}{س}}{\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظابس}{س}} = \frac{أ}{ب}$

٧. $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جاأس}{ظابس} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\frac{جاأس}{س}}{\frac{ظابس}{س}} = \frac{\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جاأس}{س}}{\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظابس}{س}} = \frac{أ}{ب}$

٩. $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظاأس}{جابس} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\frac{ظاأس}{س}}{\frac{جابس}{س}} = \frac{\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظاأس}{س}}{\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جابس}{س}} = \frac{أ}{ب}$

ولكن ينصح واثناء حل ورقة إمتحان الثانوية العامة بقسمة البسط والمقام على الزاوية نفسها وهذه النظريات للتأكد من صحة الحل بشكل سريع ومبسط

مثال (٢) : أوجد $\underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا٣س}+\text{جا٤س}}{\text{س}}$

الحل : عند التعويض المباشر يكون الناتج $\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$ أي حالة عدم تعيين وبالنظر الى النهاية نجد أنها تحتوي على جا و ظا و س وان النهاية تقترب من الصفر اي سيكون الحل بتوزيع البسط على المقام

$$\underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا٣س}+\text{جا٤س}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{ظا٣س}}{\text{س}} + \frac{\text{جا٤س}}{\text{س}}\right) = \underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا٣س}}{\text{س}} + \underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٤س}}{\text{س}}$$

$$\text{٣} + \text{٤} = \text{٧}$$

مثال (٣) : أوجد $\underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا٥س ظاس} + \text{س جا٦س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}}$

الحل : عند التعويض المباشر يكون الناتج $\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$ اي حالة عدم تعيين وبالنظر الى النهاية سنجد أنها تحتوي على جا و ظا وان النهاية تقترب من الصفر أي سيكون الحل بتوزيع البسط على المقام ومن ثم قسمة البسط والمقام على $\text{س}^{\text{٢}}$

$$\underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٥س ظاس} + \text{س جا٦س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}} = \underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{جا٥س ظاس}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}} + \frac{\text{س جا٦س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}}\right)$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٥س}}{\text{جا٢س}} \underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظاس}}{\text{جا٢س}} + \underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{جا٢س}} \times \underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٦س}}{\text{جا٢س}}$$

$$= \frac{\underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٥س}}{\text{س}}}{\underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٢س}}{\text{س}}} \times \frac{\underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}}}{\underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٢س}}{\text{س}}} + \underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{جا٢س}} \times \frac{\underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٦س}}{\text{س}}}{\underset{\text{س}\leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٢س}}{\text{س}}}$$

$$= \frac{\text{٥}}{\text{٤}} + \frac{\text{٦}}{\text{٤}} = \frac{\text{١١}}{\text{٤}}$$

مثال (٤) : أوجد $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\dfrac{\text{ظا}^{\text{٢}}\text{س}+\text{ظا٢س جاس}}{\text{س جا٢س}}$

الحل : عند التعويض المباشر يكون الناتج $\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$ أي حالة عدم تعيين وبالنظر الى النهاية سنجد أنها تحتوي على جا و ظا و س وان النهاية تقترب من الصفر أي سيكون الحل بتوزيع البسط على المقام

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ظا}^{\text{٢}}\text{س}+\text{ظا٢س جاس}}{\text{س جا٢س}}=\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{ظا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{س جا٢س}}+\frac{\text{ظا٢س جاس}}{\text{س جا٢س}}\right)$$

$$=\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ظاس}}{\text{س}}\times\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ظاس}}{\text{جا٢س}}+\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{ظا٢س}}{\text{س}}\times\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{جاس}}{\text{جا٢س}}$$

$$=\frac{\text{١}}{\text{٢}}+\text{١}=\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$$

الضرب بالمرافق : وتستخدم هذه الطريقة إذا وجد $\text{١}-\text{جتا س}$ على الأغلب الذي مرافقه $\text{١}+\text{جتا س}$ لإستخدام المتطابقة $\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}+\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}=\text{١}$

مثال (٥) : أوجد $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\dfrac{\text{١}-\text{جتاس}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

الحل : عند التعويض المباشر يكون ناتج التعويض $\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$ أي حالة عدم تعيين وبالنظر الى النهاية فإنها تحتوي على ١- جتا س وأن النهاية تقترب من الصفر ولحل هذه السؤال سنستخدم الضرب بالمرافق لأن التوزيع في هذة الحالة لا يفيد

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{١}-\text{جتاس}}{\text{س}^{\text{٢}}}=\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{١}-\text{جتاس}}{\text{س}^{\text{٢}}}\times\frac{\text{١}+\text{جتاس}}{\text{١}+\text{جتاس}}=\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{١}-\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}}(\text{١}+\text{جتاس})}$$

$$=\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}}}\times\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\frac{\text{١}}{\text{١}+\text{جتاس}}=\frac{\text{١}}{\text{٢}}$$

مثال (٦) : أوجد $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{س}-\text{س جتا٢س}}{\text{س}^{\text{٣}}}$

الحل : عند التعويض المباشر يكون الناتج $\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$ أي حالة عدم تعيين وبالنظر الى النهاية فأنها تحتوي على ١- جتا س ولكنها مضروبة في س وأن النهاية تقترب من الصفر وان الإقترانات المثلثية مقسومة على الزاوية ولحل مثل هذا السؤال نقوم بإخراج س عامل مشترك ومن ثم الضرب بالمرافق والذي هو ١+جتا٢س

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{س}(\text{١}-\text{جتا٢س})}{\text{س}^{\text{٣}}}=\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{١}-\text{جتا٢س}}{\text{س}^{\text{٢}}}\times\frac{\text{١}+\text{جتا٢س}}{\text{١}+\text{جتا٢س}}=\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{١}-\text{جتا}^{\text{٢}}\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}}(\text{١}+\text{جتا٢س})}$$

$$=\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}}}\times\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{١}}{\text{١}+\text{جتا٢س}}=\left(\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا٢س}}{\text{س}}\right)^{\text{٢}}\times\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{١}}{\text{١}+\text{جتا٢س}}=\frac{\text{٤}}{\text{٢}}=\text{٢}$$

مثال (٧) : أوجد $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س ظا٣س}+\text{س}-\text{س جتا٢س}}{\text{جا}^{\text{٣}}\text{٣س}}$

الحل : ناتج التعويض المباشر $\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$ حالة عدم تعيين

$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س ظا٣س}+\text{س}-\text{س جتا٢س}}{\text{جا}^{\text{٣}}\text{٣س}}=\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س ظا٣س}}{\text{جا}^{\text{٣}}\text{٣س}}+\frac{\text{س}-\text{س جتا٢س}}{\text{جا}^{\text{٣}}\text{٣س}}$$

$$=\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}}\times\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{ظا٣س}}{\text{جا٣س}}+\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{س}-\text{س جتا٢س}}{\text{جا}^{\text{٣}}\text{٣س}}=\frac{\text{١}}{\text{٦}}\times\text{١}+\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{س}}{\text{جا٣س}}\times\frac{\text{١}-\text{جتا٢س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}}$$

$$=\frac{\text{١}}{\text{٦}}+\frac{\text{١}}{\text{٣}}\times\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{١}-\text{جتا٢س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}}=\frac{\text{١}}{\text{٦}}+\frac{\text{١}}{\text{٣}}\times\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{١}-\text{جتا٢س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}}\times\frac{\text{١}+\text{جتا٢س}}{\text{١}+\text{جتا٢س}}$$

$$=\frac{\text{١}}{\text{٦}}+\frac{\text{١}}{\text{٣}}\times\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{١}-\text{جتا}^{\text{٢}}\text{٢س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}(\text{١}+\text{جتا٢س})}=\frac{\text{١}}{\text{٦}}+\frac{\text{١}}{\text{٣}}\times\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}(\text{١}+\text{جتا٢س})}$$

$$=\frac{\text{١}}{\text{٦}}+\frac{\text{١}}{\text{٣}}\times\frac{\text{٤}}{\text{١٢}}$$

مثال (٨) : أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س جتاس}}{\text{س ظاس جا}^{٢}\text{٣س}}$

الحل : ناتج التعويض المباشر $\frac{٠}{٠}$ حالة عدم تعيين

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س جتاس}}{\text{س ظاس جا}^{٢}\text{٣س}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}(١ - \text{جتاس})}{\text{س ظاس جا}^{٢}\text{٣س}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{س ظاس}} \times \frac{(١ - \text{جتاس})}{\text{جا}^{٢}\text{٣س}}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{س ظاس}} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ - \text{جتاس})}{\text{جا}^{٢}\text{٣س}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{\text{ظاس}} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ - \text{جتاس})}{\text{جا}^{٢}\text{٣س}}$$

$$١ \times \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{٣س}} \times \frac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{٣س}} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{١ + \text{جتاس}}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{٣س}} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{١ + \text{جتاس}} = \frac{١}{٩} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{١٨}$$

فرض الزاوية : ونلجأ لهذه الطريقة عندما تكون النهاية لا تقترب من الصفر وتستعمل هذه الطريقة أيضاً لتبسيط النهاية وجعلها تقترب من الصفر لإستخدام نظرية نهاية الجيب

مثال (٩) : أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س} - \frac{\pi}{٢})}{\text{س} - \frac{\pi}{٢}}$

الحل : عند التعويض المباشر يكون الناتج $\frac{٠}{٠}$ أي حالة عدم تعيين وبالنظر الي النهاية فإننا لا نستطيع أن نطبق عليها نظرية الجيب وذلك بسبب ان النهاية تقترب من $\frac{\pi}{٢}$ لذلك نسعى لفرض الزاوية

نفرض $\text{س} - \frac{\pi}{٢} = \text{ص}$ ومنة ستتغير القيمة التي تقترب منها النهاية لتتغير من $\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}$ الى $\text{ص} \leftarrow$.ويمكن معرفتها عن طريق تعويض القيمة التي تقترب منها س بالفرض $\text{س} - \frac{\pi}{٢} = \text{ص}$

$$\underset{\text{ص} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا(ص)}}{\text{ص}} = ١$$

مثال (١٠) : أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{جا(\frac{س}{٢} - ١)}{س - ٢}$

الحل : عند التعويض المباشر يكون الناتج $\frac{٠}{٠}$ أي حالة عدم تعيين وبالنظر الى النهاية فإننا لا نستطيع تطبيق نظرية الجيب عليها وذلك بسبب ان النهاية تقترب من (٢) ومن هنا نسعى لفرض الزاوية

$\frac{س}{٢} - ١$=ص ومنة س= ٢ص+١ و الأن نحدد القيمة التي تقترب منها ص

س ← ٢ إذا ص ← ٠ وعلية تصبح النهاية كالتالي $\lim_{ص \to ٠} \frac{جا(ص)}{٢ص} = \frac{١}{٢}$

القسمة على الزاوية :

وتستعمل هذه الطريقة عندما تكون الزاوية عبارة عن إقتران وليست س والنهاية تقترب من الصفر

مثال (١٢) : اوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{جا(س - ٤)}{٣س - ١٢}$

الحل : عند التعويض المباشر يكون الناتج $\frac{٠}{٠}$ اي حالة عدم تعيين وبالنظر الى النهاية فإننا لا نستطيع أن نطبق عليها نظرية الجيب وذلك بسبب عدم وجود جا او ظا أو مرافق ومن الملاحظ أن الحل سيكون بالقسمة على الزاوية وكالتالي

$$\lim_{س \to ٤} \frac{جا(س - ٤)}{٣س - ١٢} = \lim_{س \to ٤} \frac{\frac{جا(س-٤)}{س-٤}}{\frac{٣س-١٢}{س-٤}} = \frac{\lim_{س \to ٤} \frac{جا(س-٤)}{س-٤}}{\lim_{س \to ٤} \frac{٣س-١٢}{س-٤}}$$

نستعمل الفرض في البسط وفي المقام تكون نهاية اقترانات كسرية

نهاية البسط

$\lim_{س \to ٤} \frac{جا(س-٤)}{س-٤}$ نفرض ص = س-٤ ومنة س = ص+٤

اذا كانت س ← ٤ فان ص ← ٠

$$\underset{ص \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{جاص}{ص} = ١$$

نهاية القام

$$\underset{ص \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{٣س - ١٢}{س - ٤} = \underset{ص \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{٣(س - ٤)}{س - ٤} = ٣$$

ومنة تكون $\dfrac{\underset{س \leftarrow ٤}{نهـــا} \dfrac{جا(س - ٤)}{س - ٤}}{\underset{س \leftarrow ٤}{نهـــا} \dfrac{٣س - ١٢}{س - ٤}} = \dfrac{١}{٣}$

مثال (١٣) : اوجد $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \dfrac{ظا(س^{٢} - ٤)}{س^{٣} - ٨}$

الحل : عند التعويض المباشر يكون الناتج $\frac{٠}{٠}$ أي حالة عدم تعيين وبالنظر الى النهاية سنجد بأننا لا نستطيع أن نطبق نظرية الجيب عليها وأنها تخلو من المرافق ولذلك سيكون الحل باللجوء الى إستخدام القسمة على الزاوية كالتالي

$$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \frac{جا(س^{٢} - ٤)}{س^{٣} - ٨} = \underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \frac{\dfrac{جا(س^{٢} - ٤)}{س^{٢} - ٤}}{\dfrac{س^{٣} - ٨}{س - ٤}} = \frac{\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \dfrac{جا(س^{٢} - ٤)}{س^{٢} - ٤}}{\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \dfrac{(س^{٣} - ٨)}{س^{٢} - ٤}}$$

في البسط نستعمل الفرض و في المقام تكون نهاية اقترانات كسرية

نهاية البسط

$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \dfrac{جا(س^{٢} - ٤)}{س^{٢} - ٤}$ نفرض ص $= س^{٢} - ٤$ ومنة

اذا كانت س ← ٢ فان ص ← ٠

$$\underset{ص \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{جاص}{ص} = ١$$

نهاية القام

$$\lim_{ص\to ٢} \frac{س^{٣}-٨}{س^{٢}-٤} = \lim_{ص\to ٢} \frac{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}{(س+٢)(س-٢)} = \lim_{ص\to ٢} \frac{س^{٢}+٢س+٤}{س+٢} = ٢$$

ومنة تكون $\dfrac{\lim_{س\to ٢} \frac{جا(س^{٢}-٤)}{س^{٢}-٤}}{\lim_{س\to ٢} \frac{س^{٣}-٨}{س^{٢}-٤}} = \frac{١}{٢}$

المتطابقات : وتستخدم طريقة المتطابقات في حالات عدة من ابرزها

١. عدم وجود الجيب والظل بشكل صريح

٢. عدم وجود مرافق

٣. تكون قيمة المتغير في مقام الزاوية مثل $\frac{\pi}{س}$

٤. عند وجود حاصل جمع او طرح اقترانين دائريين

وهنا ابرز المتطابقات التي يجب على الطالب ان يكون حفظها وعلى دراية بها

* $ظا(س) = \frac{جا(س)}{جتا(س)}$ * $ظتا(س) = \frac{جتا(س)}{جا(س)}$
* $قا(س) = \frac{١}{جتا(س)}$ * $قتا(س) = \frac{١}{جا(س)}$
* جا(- س) = - جا (س) * جتا (- س) = جتا (س)
* ظا (- س) =- ظا (س) * جا ($\frac{\pi}{٢}$ - س)= جتا (س)
* جتا ($\frac{\pi}{٢}$ - س) = جا (س) * ظا ($\frac{\pi}{٢}$ - س) = $\frac{١}{ظا(س)}$
* جا (س + $\frac{\pi}{٢}$) = جتا (س) * جتا (س + $\frac{\pi}{٢}$) =– جا (س)
* ظا (س + $\frac{\pi}{٢}$) = - $\frac{١}{ظا(س)}$ * جا(π – س) = جا (س)
* جتا (π – س) = - جتا (س) * ظا (π – س) = - ظا (س)

* جا (س + π) = - جا (س)
* جتا (س + π) = - جتا (س)
* ظا (س + π) = ظا (س)
* جا (س + ٢ π) = جا (س)
* جتا (س + ٢ π) = جتا (س)
* ظا(س + ٢ π) = ظا (س)
* جا (٢ π - س) = جا (- س) = - جا (س)
* جتا (٢ π - س) = جتا (- س) = جتا (س)
* ظا (٢ π - س) = ظا (- س) = - ظا (س)
* جتا (أ - ب) = جتا (أ) جتا (ب) + جا (أ) جا (ب)
* جتا (أ + ب) = جتا (أ) جتا (ب) – جا (أ) جا (ب)
* جا (أ - ب) = جا (أ) جتا (ب) – جتا (أ) جا (ب)
* جا (أ+ ب) = جا (أ) جتا (ب) + جتا (أ) جا (ب)
* ظا (أ – ب) = $\frac{\text{ظا(أ)–ظا(ب)}}{\text{١+ظا(أ)ظا(ب)}}$
* ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا(أ)+ظا(ب)}}{\text{١–ظا(أ)ظا(ب)}}$
* جا (أ) + جا (ب) = ٢ جا ($\frac{\text{أ+ب}}{٢}$) جتا ($\frac{\text{أ–ب}}{٢}$)
* جا (أ) – جا (ب) = ٢ جتا ($\frac{\text{أ+ب}}{٢}$) جا ($\frac{\text{أ–ب}}{٢}$)
* جتا (أ) + جتا (ب) = ٢ جتا ($\frac{\text{أ+ب}}{٢}$) جتا ($\frac{\text{أ–ب}}{٢}$)
* جتا (أ) – جتا (ب) = -٢ جا ($\frac{\text{أ+ب}}{٢}$) جا ($\frac{\text{أ–ب}}{٢}$)
* جا ($\frac{\text{س}}{٢}$) = $\pm\sqrt{\frac{\text{١–جتا(س)}}{٢}}$ ومنه ١- جتا (س) = ٢جا^{٢} ($\frac{\text{س}}{٢}$)
* جتا ($\frac{\text{س}}{٢}$) = $\pm\sqrt{\frac{\text{١+جتا(س)}}{٢}}$ ومنه ١+ جتا (س) = ٢جتا^{٢} ($\frac{\text{س}}{٢}$)

* ظا $(\frac{س}{٢}) = \pm \sqrt{\frac{١-جتا(س)}{١+جتا(س)}}$

* جتا ٢س = $\begin{cases} جتا^{٢}(س)-جا^{٢}(س) \\ ٢جتا^{٢}(س)-١ \\ ١-٢جا^{٢}(س) \end{cases}$

* جا (٢س) = ٢ جا (س) جتا (س)

* ظا (٢س) = $\frac{٢ظا(س)}{١-ظا^{٢}(س)}$

* جا^{٢}(س)+جتا^{٢}(س) = ١ * جا^{٢}(س) = ١-جتا^{٢}(س)

* جتا^{٢}(س) = ١-جا^{٢}(س) * ظا^{٢}(س) + ١ =قا^{٢}(س)

* ظا^{٢}(س) =قا^{٢}(س) - ١

مثال (١٤) : أوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا٤س-جتا٢س}{س}$

الحل : عند التعويض المباشر يكون الناتج $\frac{٠}{٠}$ أي حالة عدم تعيين وبالنظر الى النهاية فإننا سنلاحظ بأنه سيتعذرعلينا تطبيق نظرية الجيب وذلك بسبب عدم وجود جا او ظا كما وسنلاحظ عدم وجود مرافق لذلك سنستخدم المتطابقات (متطابقة الفرق بين النسب المثلثية)

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جتا٤س-جتا٢س}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا(\frac{٤س+٢س}{٢})-جا(\frac{٤س-٢س}{٢})}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا(٣س)-جا(س)}{س}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا(٣س)}{س} - \lim_{س \to ٠} \frac{جا(س)}{س} = ٣ - ١ = ٢$$

مثال (١٥) : أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{جا\pi س}{س-٢}$

الحل : عند التعويض المباشر سيكون الناتج $\frac{\cdot}{\cdot}$ اي حالة عدم تعيين ومن النظر الى النهاية فإنه سيتعذر علينا إستخدام طريقة توزيع البسط على المقام وطريقة الضرب بالمرافق وأنه وفي حال تم فرض الزاوية سنلاحظ عدم وجود أي اختصار بين الزاوية والمقام لذلك لحل مثل هذه الاسئلة نقوم بإعادة كتابة الجيب بصيغة اخرى (الصيغة موجودة داخل المتطابقات) بحيث نستطيع الحصول على ٢- س او س -٢

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\pi\text{س}}{\text{س}-٢} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{-\text{جا}(٢\pi-\pi\text{س})}{\text{س}-٢} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{-\text{جا}\pi(٢-\text{س})}{\text{س}-٢}$$

نفرض ص = ٢- س ومنة س = ٢- ص

اذا كانت س ← ٢اذا ص ← ٠لنحصل على

$$\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-\text{جا}\pi\text{ص}}{-\text{ص}} = \pi$$

مثال (١٦) : أوجد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}^{٣}+\text{ظا}^{٢}(\pi-٤\text{س})}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$

الحل : عند التعويض المباشر سيكون الناتج $\frac{\cdot}{\cdot}$ أي حالة عدم تعيين وعند الانتباه فإننا سنلاحظ إقتراب النهاية من الصفر لذلك نستخدم المتطابقه $\text{ظا}(\pi-\text{س}) = -\text{ظا}\text{س}$ وبعدها نوزع البسط على المقام لإيجاد قيمة النهاية

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}^{٣}+\text{ظا}^{٢}(\pi-٤\text{س})}{\text{جا}^{٢}\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}^{٣}-\text{ظا}^{٢}٤\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}^{٣}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} - \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}^{٢}٤\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$$

$$٠-١٦=-١٦$$

مثال (١٧) : أوجد $\underset{\text{س}\to ٣\pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\frac{\text{س}}{٣}-\pi}$

الحل : عند التعويض المباشر يكون الناتج $\frac{\cdot}{\cdot}$ اي حالة عدم تعيين وعند الانتباه فإننا سنلاحظ أن النهاية لا تقترب من الصفر لذلك نستخدم الفرض لجعل النهاية تقترب من صفر ومن ثم نستخدم المتطابقة $\text{جا}(\text{س}+\pi) = -\text{جا}\text{س}$ وبعدها نوزع البسط على المقام لإيجاد قيمة النهاية

نفرض ص = $\frac{\text{س}}{٣} - \pi$ وعلية فإن س $= ٣\text{ص} + ٣\pi$

إذا كانت س ← ٣π فإن ص ← ٠

$$\lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{جا}(٣\text{ص} + ٣\pi)}{\text{ص}} = \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{جا}٣(\text{ص} + \pi)}{\text{ص}} = \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{-\text{جا}٣\text{ص}}{\text{ص}} = -٣$$

مثال (١٨) : أوجد $\lim_{\text{س}\to -١} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{\text{س}})}{\text{س} + ١}$

الحل : عند التعويض المباشر سيكون الناتج $\frac{٠}{٠}$ اي حالة عدم تعيين وعند الانتباه فإننا سنلاحظ أن النهاية لا تقترب من الصفر لذلك نستخدم الفرض لجعل النهاية تقترب من صفر و من ثم نستخدم المتطابقات

نفرض ص = $\frac{\text{س}}{٣} - \pi$ وعلية فإن س $= ٣\text{ص} + ٣\pi$

إذا كانت س ← ٣π فإن ص ← ٠

$$\lim_{\text{س}\to -١} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{\text{س}})}{\text{س} + ١} = \lim_{\text{س}\to -١} \frac{-\text{جا}(\pi + \frac{\pi}{\text{س}})}{\text{س} + ١} = \lim_{\text{س}\to -١} \frac{-\text{جا}\pi(١ + \frac{١}{\text{س}})}{\text{س} + ١} = \lim_{\text{س}\to -١} \frac{-\text{جا}\pi(\frac{\text{س} + ١}{\text{س}})}{\text{س} + ١}$$

$$\lim_{\text{س}\to -١} \frac{\dfrac{-\text{جا}\pi(\frac{\text{س}+١}{\text{س}})}{\frac{\text{س}+١}{\text{س}}}}{\dfrac{\text{س}+١}{\frac{\text{س}+١}{\text{س}}}} = \lim_{\text{س}\to -١} \frac{١}{\text{س}} \times \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{جا}\pi\text{ص}}{\text{ص}} = \frac{١}{-١} \times -\pi = \pi$$

مثال (١٩) : أوجد $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا(س)} - \text{جا}(\pi - \text{س})\text{جتاس}}{\text{س}^{3}}$

الحل : نستخدم المتطابقة $\text{جا}(\pi - \text{س}) = \text{جاس}$ لتصبح

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{جاس} - \text{جاس جتاس}}{\text{س}^{3}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{جاس}(1 - \text{جتاس})}{\text{س}^{3}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{1 - \text{جتاس}}{\text{س}^{2}}$$

$$1 \times \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{1 - \text{جتاس}}{\text{س}^{2}} \times \frac{1 + \text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{1 - \text{جتا}^{2}\text{س}}{\text{س}^{2}} \times \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{1}{1 + \text{جتاس}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}^{2}\text{س}}{\text{س}^{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

الإتصال عند نقطة

سنقوم بهذا الدرس بدراسة إتصال الإقترانات عند نقطة معينة ونحدد فيما إذا كان الإقتران متصلاً عند تلك النقطة أم منفصلاً ، ولتحديد ما إذا كان متصلاً أو منفصلاً عند نقطة معينه يجب أن تتحقق شروط الإتصال عند نقطة في الإقتران وإذا لم يتحقق شرط واحد منها على الاقل فإن الإقتران سيكون عندئذ منفصلاً عند تلك النقطة .

شروط الاتصال عند نقطة

١. ق(أ) موجودة

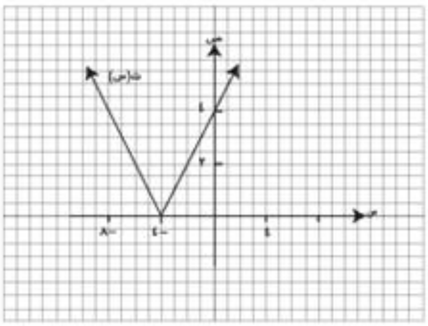
٢. نهــا (س←أ) ق(س) موجودة

٣. نهــا (س←أ) ق(س) = ق(أ)

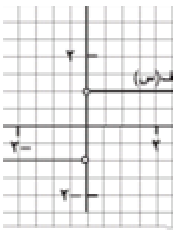
مثال (١) : من الرسم حدد أي من الإقترانات التالية متصلاً واي منها منفصلا

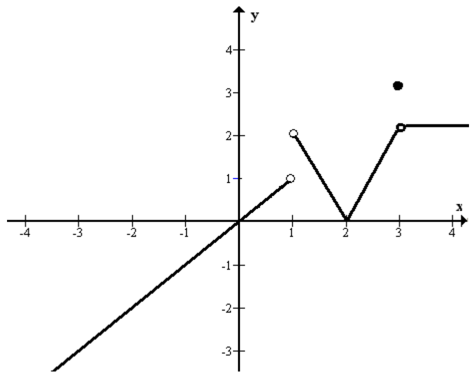
الحل :

من الرسم نجد أن الإقتران متصل (لا يوجد فيه انقطاع)

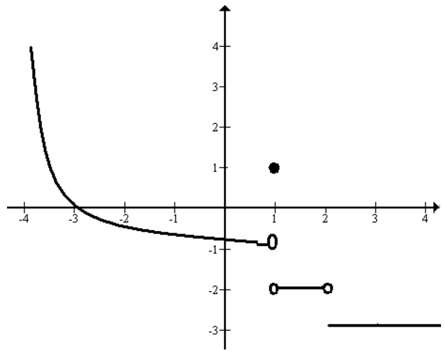


من الرسم نجد أن الإقتران منفصل عند س=٠





من الرسم نجد أن الإقتران منفصل عند س=١ وس=٣



من الرسم نجد أن الإقتران منفصل عند س=١ وس=٢

مثال (٢) : إذا علمت ان الإقتران ق(س)= $\begin{cases} س^{٢}+١ ، & س > ٠ \\ ١ ، & س = ٠ \\ س^{٣}+١ ، & س < ٠ \end{cases}$ إبحث في إتصال الإقتران عند س=٠

الحل :

١. الإقتران معرف عند س=٠ و ق(٠) = ١

٢. نهاية الإقتران عندما تقترب قيمة س من ٠

أ. $\lim_{س \to ٠^{+}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^{+}}$ س^{٢} + ١ = ٠ + ١ = ١

ب. $\lim_{س \to ٠^{-}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^{-}}$ س^{٣} + ١ = ٠ + ١ = ١

إذاً النهاية موجودة $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = ١

٣. ق(س) = $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = ١ إذاً الإقتران متصل عند س=٠

مثال (٣) : إذا علمت أن الإقتران $ق(س) = \begin{cases} جاس - ١ ، س > \frac{\pi}{٢} \\ ١ ، س = \frac{\pi}{٢} \\ ١ - جتاس ، س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$ إبحث في

إتصال الإقتران عند س= $\frac{\pi}{٢}$

الحل :

١. الإقتران معرف عند س= $\frac{\pi}{٢}$ و $ق(\frac{\pi}{٢}) = ١$

٢. نهاية الإقتران عندما تقترب قيمة س من $\frac{\pi}{٢}$

أ. $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}^+} ق(س) = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}^+} جاس - ١ = ١ - ١ = ٠$

ب. $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}^-} ق(س) = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}^-} ١ - جتاس = ١ - ٠ = ١$

إذاً النهاية غير موجودة ولذلك فإن الإقتران غير متصل عند س= $\frac{\pi}{٢}$ (منفصل)

مثال (٤) : إذا علمت أن الإقتران ق(س)= ظاس إبحث في إتصال الإقران عند س= π

الحل :

١. $ق(\pi) = \frac{٠}{-١} = ٠$

٢. نهاية الإقتران عندما تقترب قيمة س من π

أ. $\lim_{س \to \pi^+} ق(س) = \lim_{س \to \pi^+} ظاس = \frac{٠}{-١} = ٠$

ب. $\lim_{س \to \pi^-} ق(س) = \lim_{س \to \pi^-} ظاس = \frac{٠}{-١} = ٠$

إذاً النهاية موجودة $\lim_{س \to \pi} ق(س) = ٠$

٣. $ق(\pi) = \lim_{س \to \pi} ق(س) = ٠$

إذاً الإقتران متصل عند س= π

مثال (٦) : إذا علمت أن الإقتران ق(س)= $\begin{cases} \frac{جاس}{س} ، س > ٠ \\ [س] ، س = ٠ \\ \frac{|س|}{س} ، س < ٠ \end{cases}$ إبحث في اتصال الإقتران عندما س= ٠

الحل :

١. $ق(١) = [٠] = ٠$

٢. نهاية الإقتران عندما تقترب قيمة س من ٠

أ. $\lim_{س \to ٠^+} ق(س) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{جاس}{س} = ١$

ب. $\lim_{س \to ٠^-} ق(س) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{|س|}{-س} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{-س}{-س} = ١$

إذاً النهاية موجودة $\lim_{س \to ٠} ق(س) = ١$

٣. $\lim_{س \to ٠} ق(س) \neq ق(٠)$

إذاً الإقتران غير متصل عند س=٠

مثال (٧) : أوجد قيمة ؀ و ب التي تجعل الإقتران ق(س) متصلاً عند س= ٠

$$ق(س)=\begin{cases} \frac{١-جتا ؀س}{س^{٢}} ،س > ٠ \\ ١ ،س = ٠ \\ س + ب ،س < ٠ \end{cases}$$

الحل :

١. $ق(٠) = ١$

٢. من شروط الإتصال عند نقطة يجب ان تكون قيمة النهاية من الجهتين تساوي الصورة (ناتج تعويض العدد)

$$\underset{س \to ٠^{+}}{نهـا} ق(س) = ١ \Leftarrow \underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{١-جتا ؀س}{س^{٢}} = ١ \Leftarrow \underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{١-جتا ؀س}{س^{٢}} \times \frac{١+جتا ؀س}{١+جتا ؀س} = ١$$

$$\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{١+جتا^{٢} ؀س}{س^{٢}} \times \underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{١}{١+جتا ؀س} = ١ \Leftarrow \underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{جا^{٢} ؀س}{س^{٢}} \times \frac{١}{٢} = ١$$

$$\frac{؀^{٢}}{٢} = ١ \Leftarrow ؀ = \pm \sqrt{٢}$$

وبنفس الطريقة نجد قيمة (ب)

$$\underset{س \to ٠^{-}}{نهـا} ق(س) = ١ \Leftarrow \underset{س \to ٠^{-}}{نهـا} س + ب = ١ \Leftarrow ٠ + ب = ١ \Leftarrow ب = ١$$

مثال (٨) : أوجد قيمة ؀ و ب التي تجعل الإقتران ق(س) متصلاً عند س=١

$$ق(س)=\begin{cases} ؀س^{٢} - بس + ١ ،س < ١ \\ ٥ ،س = ١ \\ س^{٢} - (؀ + ب)س + ٢ ،س > ١ \end{cases}$$

الحل :

١. $ق(١) = ٥$

٢. من شروط الإتصال يجب أن تكون قيمة النهاية من الجهتين تساوي الصورة وعلية

$$\underset{س\leftarrow ١^{+}}{نهـا} ق(س) = ١^{٢} - (أ + ب) \times ١ + ٢ = ٣ - أ - ب$$

$$\underset{س\leftarrow ١^{-}}{نهـا} ق(س) = \underset{س\leftarrow ٠}{نهـا} أس^{٢} - بس + ١ = أ\times ١ - ب\times ١ + ١ = أ - ب + ١$$

$$٣ - أ - ب = ٥ \Leftarrow -أ - ب = ٢$$

$$أ - ب + ١ = ٥ \Leftarrow أ - ب = ٤$$

و الأن نستخدم طريقة حل معادلتين خطيتين بمتغيرين بطريقة الحذف او التعويض

$$أ = ١ \qquad ب = -٣$$

مثال (٩) : أوجد قيمة أ و ب التي تجعل الإقتران ق(س) متصلاً عند س=١

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ١}{س - ١} ، س \neq ١ \\ ٢أ^{٢} - ٥ ، س = ١ \end{cases}$$

الحل :

١. $ق(١) = ٢أ^{٢} - ٥$

٢. نجد قيمة النهاية

$$\underset{س\leftarrow ١}{نهـا} ق(س) = \underset{س\leftarrow ١}{نهـا} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} = \underset{س\leftarrow ١}{نهـا} س + ١ = ٢$$

نساوي النهاية بالصورة ونجد قيمة أ

$$٢أ^{٢} - ٥ = ٣ \Leftarrow أ^{٢} = \frac{٨}{٢} \Leftarrow أ \pm ٢$$

* **نظريات الإتصال**

١. اذا كان ق(س) إقتران كثير حدود فإن ق(س) متصلاً على جميع الأعداد الحقيقية

٢. إذا كان ق(س) و هـ(س) إقترانين متصلين عند س= ا فإن

أ. ل(س)= ق(س)+هـ(س) متصل عند س= ا

ب. ل(س)= ق(س)-هـ(س) متصل عند س= ا

ج. ل(س)= ق(س)$\times$ هـ(س) متصل عند س= ا

د. ل(س)= ق(س)$\div$ هـ(س) متصل عند س= ا بشرط ان هـ(ا)$\neq$ ٠

ملاحظة : اذا وجد اقترانين إحداهما منفصلاً على الأقل وطلب منك البحث فيما إذا كان ناتج جمعهما او طرحهما او ضربهما او قسمتهما متصلاً فيجب تشكيل الإقتران الجديد والبحث في اتصاله فقد يكون متصل او غير متصل

مثال (١٠) : إذا كان إقتران ق(س) = س و هـ(س) = $\frac{١}{س}$ ابحث في اتصال كل من

١. ل(س)= ق(س)+هـ(س)

٢. ع(س)= ق(س)-هـ(س)

٣. م(س)= ق(س)$\times$ هـ(س)

٤. ن(س)= ق(س)$\div$ هـ(س)

عند س=٠

الحل :

١. ل(س) = $\frac{س^٢ + ١}{س}$

ل(٠) = $\frac{س^٢ + ١}{س}$ = $\frac{١}{٠}$ الإقتران غير معرف عند س=٠ لذلك فهو غير متصل عند س=٠

٢. $ع(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س}$

$ع(٠) = \frac{س^{٢} - ١}{س} = \frac{١}{٠}$ الإقتران غير معرف عند س=٠ لذلك فهو غير متصل عند س=٠

٣. $م(س) = س \times \frac{١}{س} = ١$

أ) $م(٠) = ١$

ب) $\lim_{س \to ٠} م(س) = \lim_{س \to ٠} ١ = ١$

ج) $\lim_{س \to ٠} م(س) = م(٠) = ١$ إذا الإقتران م(س) متصل عند س=٠

٤. $ن(س) = س \div \frac{١}{س} = س^{٢}$

أ) $ن(٠) = ٠$

ب) $\lim_{س \to ٠} ن(س) = \lim_{س \to ٠} ٠ = ٠$

ج) $\lim_{س \to ٠} ن(س) = ن(٠) = ٠$ إذاً الإقتران ن (س) متصل عند س=٠

* **نتاجات :**

١. الإقترانات النسبية غير متصلة عند أصفار المقام

٢. إقتران اكبر عدد صحيح غير متصل عندما يكون ناتج التعويض داخل الإقتران عدد صحيح

٣. في الإقترانات المتشعبة نواجه المشاكل عند نقاط التشعب لذلك يجب دراستها

٤. تكون إقترانات الجيب والجتا متصلة إذا كان ما داخلهم متصلاً

٥. إقترانات الجذور التكعيبية والفردية متصلة إذا كان ما بداخل الجذور متصلاً

٦. إقتران القيمة المطلقة متصل اذا كان ما بداخل القيمة المطلقة متصلاً

الإتصال على فترة

سنقوم في هذا الدرس بدراسة إتصال الإقترانات على فترة بحيث أن الفترة تحتوي على عدد لا نهائي من النقاط ولمعرفة إذا كان الإقتران متصلاً على فترة معينة فيجب ان تتوفر فيه جميع شروط الإتصال على فترة وإذا لم يتحقق شرط واحد على الأقل فإن الاقتران يكون منفصلاً على تلك الفترة

شروط الإتصال على فترة

١. يجب ان يكون الإقتران متصلاً عند نقاط التشعب

٢. يجب ان يكون الإقتران متصلاً عند اطراف الفترة المغلقة

٣. يجب ان يكون الإقتران متصلاً على الفترات الجزئية المفتوحة (لا يوجد مشاكل في الفترة)

مثال (١) : حدد فيما إذا كانت الإقترانات التالية متصلة على الاعداد الحقيقية ام لا

١. $ق(س) = \sqrt[3]{\frac{س^٢ - ١}{س + ١}}$

٢. $ق(س) =$ جتا$(٢س + ١)$

٣. $ق(س) =$ جا$(\frac{س^٢ + ٢}{س})$

٤. $ق(س) = \sqrt[3]{جتاس - س + جاس}$

٥. $ق(س) = \sqrt[4]{١ - س}$

الحل :

١. الإقتران ليس متصلاً على الأعداد الحقيقية لأن ما بداخل الجذر التكعيبي غير متصل عند اصفار المقام

٢. الإقتران متصل على الأعداد الحقيقية لأن ما بداخل إقتران الجتا هو اقتران كثير حدود وهو متصل دائماً

٣. الإقتران غير متصل لأن ما بداخل إقتران الجيب هو اقتران كسري وهو غير متصل عند اصفار المقام

٤. الإقتران متصل لأن ما داخل إقتران الجذر التكعيبي متصل

٥. الإقتران غير متصل لأن إقتران الجذر التربيعي لا يقبل الا القيم الموجبة داخلة وهنالك اعداد حقيقية ناتج تعويضها قيم سالبة

مثال (٢) : إبحث في إتصال الإقتران $ق(س) = س^{٢} + س + ١$ على الفترة [٠،٢]

الحل :

١. نبحث عن نقاط التشعب ومن النظر نجد ان الإقتران غير متشعب لذلك فإن الشرط الأول من شروط الإتصال على فترة متحقق

٢. نبحث في إتصال الإقتران عند أطراف الفترات المغلقة ومن الملاحظ انه يوجد طرفين مغلقين لذلك نتحقق منهما

أ. نبحث في إتصاله عند س=٢

١) ق(٢)=٧

٢) $\lim_{س \to ٢^{-}} ق(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} س^{٢} + س + ١ = ٧$

٣) $\lim_{س \to ٢^{-}} ق(س) = ق(٢)$ إذاً الإقتران متصل عند س=٢

ب. نبحث في إتصاله عند س= ٠

١) ق(٠)=١

٢) $\lim_{س \to ٠^{-}} ق(س) = \lim_{س \to ٠^{-}} س^{٢} + س + ١ = ١$

٣) $\lim_{س \to ٠^{-}} ق(س) = ق(٠)$ اذا الاقتران متصل عند س=٠

٣. نبحث في إتصال الإقتران على الفترة الضمنية المفتوحة وهي (٢,٠) ونلاحظ ان الإقتران ليس لدية مشاكل داخل الفترة المفتوحة لذلك فإن الإقتران متصلاً على الفترة [٢,٠]

ويمكن اختصار الحل بالقول (أن الإقتران متصلاً على جميع الأعداد الحقيقية لأنه إقتران كثير حدود)

مثال (٣) : إبحث في إتصال الإقتران $ن(س)=\frac{س+١}{س-١}$ على ح (على جميع الأعداد الحقيقية)

الحل :

١. نبحث عن نقاط التشعب ومن النظر نجد ان الإقتران غير متشعب لذلك فإن الشرط الأول من شروط الإتصال على فترة متحقق

٢. نبحث في إتصال الإقتران عند اطراف الفترات المغلقة ومن الملاحظ أنه لا يوجد أطراف فترة مغلقة لان ح تعني $(-\infty،\infty)$ لذلك فإن الشرط الثاني من شروط الإتصال على فترة متحقق

٣. نتحقق من الفترات الضمنية المفتوحة وهي $(-\infty،\infty)$ ومن الملاحظ ان الإقتران هو اقتران نسبي والإقترانات النسبية غير متصلة عند أصفار المقام

اي عند س= ١

إذاً الإقتران منفصل عند س = ١

مثال (٤) : إبحث في إتصال الإقتران $ن(س) = |س+١|$ على مجاله

الحل :

ملاحظة : اذا طلب في السؤال البحث في إتصال الإقتران على مجاله يكون المطلوب البحث في جميع القيم التي يمكن تعويضها داخل الإقتران

في هذه السؤال في بادئ الأمر سنعيد تعريف القيمة المطلقة ومن ثم نبحث في إتصال الاقتران على مجاله

$$ن(س) = \begin{cases} س+١ ، & س \geq -١ \\ -س-١ ، & س < -١ \end{cases}$$

من الملاحظ ان مجال الإقتران يتمثل بجميع الأعداد الحقيقية أي ح

١. نبحث عن نقاط التشعب ومن النظر نجد ان الإقتران متشعب عند س = -١

أ) ق(-١)= ٠

ب) ١. $\underset{س \to -1^+}{نهـا} ق(س) = \underset{س \to -1^+}{نهـا} س + ١ = ٠$

٢. $\underset{س \to -1^-}{نهـا} ق(س) = \underset{س \to -1^-}{نهـا} - س - ١ = ٠$

ج) $ق(-١) = \underset{س \to -1^-}{نهـا} ق(س) = ٠$

إذا الإقتران متصل عند نقطة التشعب س = ١

٢. نبحث في إتصال الإقتران عند أطراف الفترات المغلقة ومن الملاحظ انه لا يوجد أطراف فترات مغلقة لأن مجال الإقتران هو ح وتعني (-∞،∞) لذلك الشرط الثاني من شروط الإتصال على فترة متحقق

٣. نتحقق من الفترات الضمنية المفتوحة وهي (-∞،-١) و(-١،∞) وفي الفترة (-١،∞) تكون قاعدة الإقتران س+١ وهذه القاعدة لا يوجد بها مشاكل داخل الفترة وفي الفترة (-∞،-١) تكون قاعدة الاقتران - س-١ وهذه القاعدة لا يوجد بها مشاكل أيضاً داخل الفترة

لذلك يتبين لنا أن الإقتران في هذه الحالة متصلاً على مجاله

مثال (٥) : إبحث في إتصال الإقتران $ق(س) = \left[\frac{س+١}{٢}\right]$ على الفترة (-١،١]؟

الحل :

في بادئ الأمر سنعيد تعريف قيمة اكبر عدد صحيح ومن ثم نبحث في إتصال الإقتران

$$ق(س) = \left[\frac{س}{٢} + \frac{١}{٢}\right] \Leftarrow ق(س) = \left\{\begin{matrix} ١،\ ٣ > س \geq ١ \\ ٠،\ ١ > س \geq -١ \end{matrix}\right.$$

١. نبحث عن نقاط التشعب ومن النظر نجد أن الإقتران ليس لدية نقاط تشعب في الفترة (-١،١) أي أن الشرط الأول من شروط الإتصال على فترة متحقق

٢. نبحث في إتصال الإقتران عند أطراف الفترات المغلقة ومن الملاحظ أنه يوجد طرف فتره مغلقة واحد لأن مجال الإقتران هو (−١،١] لذلك نبحث في اتصاله عند س = ١

أ) ق(١)=١

ب) $\lim_{س \leftarrow ١^-} ق(س) = ٠$

الإقتران غير متصل عند طرف الفترة س = ١ اذاً فالإقتران غير متصل

مثال (٦) : إبحث في إتصال الإقتران $ق(س) = \begin{cases} جا\frac{-س\pi}{٢}، & -٢ < س < -١ \\ \sqrt[٣]{\frac{-١}{س}}، & -١ \le س < ٥ \end{cases}$ على

الفترة (−٢،٣]

الحل :

١. نبحث عن نقاط التشعب ومن النظر نجد أن الإقتران لدية نقطة تشعب عند

س = -١

أ) ق(-١)=١

ب) ١. $\lim_{س \leftarrow -١^+} ق(س) = \lim_{س \leftarrow -١^+} \sqrt[٣]{\frac{-١}{س}} = ١$

٢. $\lim_{س \leftarrow -١^-} ق(س) = \lim_{س \leftarrow -١^-} جا\frac{-س\pi}{٢} = ١$

ج) $\lim_{س \leftarrow -١} ق(س) = ق(-١) = ١$ الإقتران متصل عند نقطة التشعب

٢. نبحث في إتصال الإقتران عند أطراف الفترات المغلقة ومن الملاحظ أنه يوجد طرف فتره مغلقة واحد لأن مجال الإقتران (−٢،٣] وهي س = ٣ لذلك نبحث في إتصاله

أ) ق(٣)= $\sqrt[3]{\frac{-1}{3}}$

ب) $\lim_{س \to 3^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to 3^-} \sqrt[3]{\frac{-1}{س}} = \sqrt[3]{\frac{-1}{3}}$

ج) $\lim_{س \to 3^-}$ ق(س) = ق(٣) = $\sqrt[3]{\frac{-1}{3}}$

إذاً الإقتران متصل عند طرف الفترة س = ٣

٣. نتحقق من الفترات الضمنية المفتوحة وهي (−٢،−١)و(−١،٣) وفي الفترة (−٢،−١) تكون قاعدة الإقتران جا$\frac{\pi س}{2}$وهذه القاعدة لا يوجد بها مشاكل داخل الفترة وفي الفترة (−١،٣) تكون قاعدة الاقتران $\sqrt[3]{\frac{-1}{س}}$وهذه القاعدة يوجد بها مشاكل داخل الفترة والمشكلة موجدة عندما تكون قيمة س = ٠لذلك فإن الإقتران في هذه الحاله يكون غير متصلاً

مثال (٧) : حدد الفترة او الفترات التي يكون فيها الإقتران متصل في كل من

١. ق(س) = $\sqrt[3]{\frac{1}{س^2+1}}$

٢. ف(س) = $\sqrt[3]{س^3+1}$

٣. ع(س) = $\sqrt{س^3+1}$

٤. هـ(س) = س$\sqrt{س^2-1}$

٥. و(س) =جا$\left(\frac{1}{س+1}\right)$

٦. ل(س) = $\frac{س^2+2}{س^3-8}$

ملاحظه : من الممكن ان تكون صياغة السؤال اين يكون كل من الإقترانات التالية متصلا

الحل :

١. الإقتران هو إقتران جذر تكعيبي تكون نقاط عدم الإتصال فيه هي نفسها نقاط عدم الإتصال في الاقتران الذي داخل الجذر التكعيبي وعند تحديد الفترات نبتعد عن تلك النقاط بوضع اشارة جزء فترة مفتوحة عند النقطة

نخرج نقاط عدم الإتصال وهي س = -١ إذاً الاقتران متصل على الفترات $(-\infty،-١) \cup (-١،\infty)$

٢. الإقتران هو إقتران جذر تكعيبي تكون نقاط عدم الإتصال فيه هي نفسها نقاط عدم الإتصال في الإقتران الذي داخل الجذر التكعيبي وعند تحديد الفترات نبتعد عن تلك النقاط بوضع اشارة جزء فترة مفتوحة عند النقطة

الإقتران الذي داخل الجذر التكعيبي متصلاً على ح إذاً يكون الاقتران ف(س) متصلاً دائما

٣. الإقتران هو إقتران جذر تربيعي تكون نقاط عدم الإتصال فيه هي نفسها نقاط عدم الإتصال في الإقتران الموجود داخل الجذر التربيعي والنقاط التي تجعل القيمة داخل الجذر التربيعي قيمة سالبة .. وعند تحديد الفترات نبتعد عن تلك النقاط بوضع اشارة جزء فترة مفتوحة عند النقطة

نقوم بمساواة ما داخل الجذر التربيعي بالصفر

$س^{٣} + ١ = ٠ \Leftarrow س = -١$ نبحث في اشارة الإقتران

+   ١-   -

و من هنا يتبين أن الإقتران الذي داخل الجذر التربيعي غير متصل دائما لذلك فإن الفترة التي يكون فيها ع(س) متصل هي $[-١،\infty)$

٤. ألإقتران هو إقتران جذر تربيعي مضروب بإقتران خطي وتكون نقاط عدم الإتصال فيه هي نفسها نقاط عدم الإتصال في الاقتران الذي داخل الجذر والنقاط التي تجعل قيمة ما داخل الجذر قيمة سالبة .. وعند تحديد الفترات نبتعد عن تلك النقاط بوضع اشارة جزء فترة مفتوحة عند النقطة

ما داخل الجذرهو إقتران كثير حدود وهو متصل دائما والأن نبحث في اشارة الإقتران

$س^{٢} + ١ = ٠$

وهذا الإقتران تكون اشارته موجبة دائماً أي أن الإقتران هـ(س) متصل على ح

٥. ألإقتران هو إقتران جيب تكون نقاط عدم الإتصال فيه هي نفسها نقاط عدم الإتصال في الإقتران الموجود داخل الجيب وعند تحديد الفترات نبتعد عن تلك النقاط بوضع اشارة جزء فترة مفتوحة عند اطرافه

نقوم بمساواة مقام الإقتران الموجود داخل الجيب بالصفر

$س + ١ = ٠ \Leftarrow س = -١$

الإقتران الموجود داخل الجيب متصلاً على الأعداد الحقيقية ما عدا -١ ولذلك فإن الفترة التي يكون فيها و(س) متصلاً هي ع – {١}

٦. الإقتران هو إقتران كسري وتكون نقاط عدم الاتصال فيه هي أصفار المقام ولإخراجها نقوم بمساواة المقام بالصفر

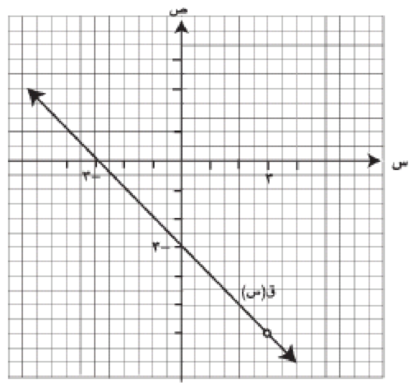
$س^{٣} - ٨ = ٠ \Leftarrow س = ٢$

الفترة التي يكون فيها الإقتران ل(س) متصلاً هي ع – {٢}

إجابات تدريبات الكتاب

نهاية إقتران عند نقطة

تدريب (١)



$\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٩ - \text{س}^{٢}}{\text{س} - ٣}$ ، س $\neq ٣$

$= \dfrac{(٣ - \text{س})(٣ + \text{س})}{\text{س} - ٣}$ ، س $\neq ٣$

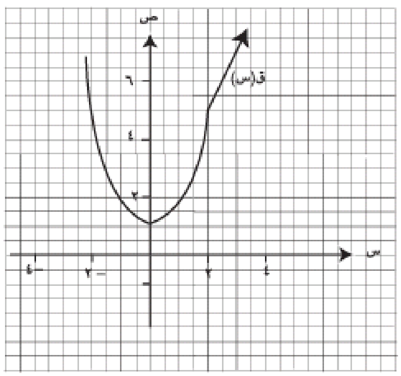
$= -(٣ + \text{س})$ ، س $\neq ٣$

١) $\underset{\text{س} \to ٣^{+}}{\text{نهــــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = -٦$

٢) $\underset{\text{س} \to ٣^{-}}{\text{نهــــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = -٦$

٣) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = -٦$

تدريب (٢)



$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ \ ، \ \text{س} \leq ٢ \\ ٢\,\text{س} + ١ \ ، \ \text{س} > ٢ \end{cases}$

١) $\underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهــــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٥$

٢) $\underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهــــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٥$

٣) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٥$

تدريب (٣)

١) $\underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{نهــــا}}$ م (س) غير موجودة لأن م غير معرف عند س = ١ من اليمين

٢) $\underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{نهــــا}}$ م (س) = صفرًا

٣) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهــــا}}$ م (س) غير موجودة لأن $\underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{نهــــا}}$ م (س) غير موجودة.

نظريات النهايات

تدريب (١)

١) $\underset{س \leftarrow ب}{\text{نهـا}} \sqrt[3]{٢\,\text{ق}(س)} = \sqrt[3]{\underset{س \leftarrow ب}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)}$

$= \sqrt[3]{٢\ \underset{س \leftarrow ب}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)} = \sqrt[3]{٢ \times ٤} = ٢$

٢) $\underset{س \leftarrow ب}{\text{نهـا}} \left(س^{٢}\,\text{ق}(س) - (\text{ق}(س))^{٢} + ٢\,س\right)$

$= \underset{س \leftarrow ب}{\text{نهـا}}\ س^{٢} \times \underset{س \leftarrow ب}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) - \left(\underset{س \leftarrow ب}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)\right)^{٢} - ٢\ \underset{س \leftarrow ب}{\text{نهـا}}\ س$

$= \text{صفر} - ٤^{٢} + \text{صفر} = -١٦$

تدريب (٢)

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} ٦ - ٢\,س \ ،\ س \le ٣ \\ ٢\,س - ٦ \ ،\ س > ٣ \end{cases}$$

١) $\underset{س \leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = \underset{س \leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ (٢\,س - ٦) = \text{صفر}$

$\underset{س \leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = \underset{س \leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ (٦ - ٢\,س) = \text{صفر}$

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = \text{صفر}$

٢) $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = \underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}}\ (٦ - ٢\,س) = ٦ + ٦ = ١٢$

تدريب (٣)

أعد تعريف ق (س)، هـ (س) دون استخدام رمز الصحيح:

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} ٥ \ ،\ ٠ \le س < ١ \\ ٦ \ ،\ ١ \le س < ٢ \end{cases} \quad ، \quad \text{هـ}(س) = \begin{cases} ٤ \ ،\ س = ٠ \\ ٣ \ ،\ ٠ < س \le ١ \\ ٢ \ ،\ ١ < س \le ٢ \end{cases}$$

١) $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = ٦ \ ،\ \underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = ٥$

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)$ غير موجودة

٢) $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س) = ٢ \ ،\ \underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س) = ٣$

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س)$ غير موجودة

٣) $$\text{ق}(س) + \text{هـ}(س) = \begin{cases} ٩ \ ،\ س = ٠ \\ ٨ \ ،\ ٠ < س < ١ \\ ٩ \ ،\ س = ١ \\ ٨ \ ،\ ١ < س < ٢ \end{cases}$$

$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \left(\text{ق}(س) + \text{هـ}(س)\right) = ٨ ،\ \underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \left(\text{ق}(س) + \text{هـ}(س)\right) = ٨ \Leftarrow \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(\text{ق}(س) + \text{هـ}(س)\right) = ٨$

نستنتج أنه إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)$ غير موجودة،وكانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س)$ غير موجودة، فليس من الضروري أن تكون $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ (\text{ق}(س) + \text{هـ}(س))$ غير موجودة.

نهايات إقترانات كسرية

تدريب (١)

١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٣}{\text{س} - ٣} = \lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ١)}{\text{س} - ٣} = ٢$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٥} \left(\dfrac{٢}{\text{س}} - \dfrac{٢}{٥}\right)\left(\dfrac{١}{\text{س}^{٢} - ٢٥}\right) = \lim\limits_{\text{س}\to ٥} \left(\dfrac{١٠ - ٢\,\text{س}}{٥\,\text{س}} \times \dfrac{١}{\text{س}^{٢} - ٢٥}\right)$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٥} \dfrac{٢\,(٥ - \text{س})}{٥\,\text{س}\,(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٥)} = \lim\limits_{\text{س}\to ٥} \dfrac{-٢}{٥\,\text{س}\,(\text{س} + ٥)} = \dfrac{-١}{١٢٥}$

تدريب (٢)

$\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٣\,\text{س} - ٢}{\text{س}^{٣} - ٨} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} + ٤)} = \dfrac{٩}{١٢} = \dfrac{٣}{٤}$

تدريب (٣)

$\text{غ}(٣) = \lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣} = \lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٩)}{\text{س} - ٣} = ٢٧$

تدريب (٤)

$\lim\limits_{\text{س}\to ٧} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س} + ١} - ٢}{\text{س} - ٧} = \lim\limits_{\text{س}\to ٧} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س} + ١} - ٢}{\text{س} - ٧} \times \dfrac{\sqrt[٣]{(\text{س} + ١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س} + ١} + ٤}{\sqrt[٣]{(\text{س} + ١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س} + ١} + ٤}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٧} \dfrac{(\text{س} + ١) - ٨}{(\text{س} - ٧)\left(\sqrt[٣]{(\text{س} + ١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س} + ١} + ٤\right)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٧} \dfrac{١}{\sqrt[٣]{(\text{س} + ١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س} + ١} + ٤} \times \dfrac{\text{س} - ٧}{\text{س} - ٧} = \dfrac{١}{١٢}$

نهاية الإقترانات الدائرية

تدريب (١)

نفرض أن ٢ س = ص ومنه س = $\frac{\text{ص}}{٢}$

عندما س ← ٠ فإن ص ← ٠

١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{٩\,\text{س}}{\text{حا}\,٢\,\text{س}} = \lim\limits_{\text{ص}\to ٠} \frac{٩ \times \frac{\text{ص}}{٢}}{\text{حا}\,\text{ص}} = \frac{٩}{٢} \lim\limits_{\text{ص}\to ٠} \frac{١}{\frac{\text{حا}\,\text{ص}}{\text{ص}}} = \frac{٩}{٢} \times ١ = \frac{٩}{٢}$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{ظا}\,٢\,\text{س}}{٧\,\text{س}} = \lim\limits_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{ظا}\,\text{ص}}{٧ \times \frac{\text{ص}}{٢}} = \frac{٢}{٧} \lim\limits_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{ظا}\,\text{ص}}{\text{ص}} = \frac{٢}{٧} \times ١ = \frac{٢}{٧}$

تدريب (٢)

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{قا}\,(٢\,\text{س}) - ١}{\text{س}^٢} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\frac{١}{\text{جتا}\,٢\,\text{س}} - ١}{\text{س}^٢} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{١ - \text{جتا}\,٢\,\text{س}}{\text{س}^٢\,\text{جتا}\,٢\,\text{س}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{١ - (١ - ٢\,\text{حا}^٢\,\text{س})}{\text{س}^٢\,\text{جتا}\,٢\,\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{٢\,\text{حا}^٢\,\text{س}}{\text{س}^٢\,\text{جتا}\,٢\,\text{س}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{٢}{\text{جتا}\,٢\,\text{س}} \times \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \left(\frac{\text{حا}\,\text{س}}{\text{س}}\right)^٢ = ٢ \times ١ = ٢$$

تدريب (٣)

$$\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{حا}\,\text{س} - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} = \lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتا}\,(\text{س} - \frac{\pi}{٢}) - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} \frac{-٢\,\text{جا}\,(\text{س} - \frac{\pi}{٤})\,\text{جا}\,(-\frac{\pi}{٤})}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$$

$$= -٢ \lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} \text{جا}\,(-\frac{\pi}{٤}) \times \lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{حا}\,(\text{س} - \frac{\pi}{٤})}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$$

$$= -٢ \times \frac{-١}{\sqrt{٢}} \times ١ = \sqrt{٢}$$

الإتصال عند نقطة

تدريب (١)

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز الصحيح.

ق (س) = { س ، ٠ ≥ س > ١
         { ٢ س ، ١ ≥ س > ٢

نهـا (س←١⁺) ق (س) = نهـا (س←١⁺) ٢ س = ٢، نهـا (س←١⁻) ق (س) = نهـا (س←١⁻) س = ١ ⟸ نهـا (س←١) ق (س) غير موجودة

ق غير متصل عند س = ١ لأن نهـا (س←١) ق (س) غير موجودة.

تدريب (٢)

بما أن ق متصل عند س = ١ فإن: نهـا (س←١⁻) ق (س) = نهـا (س←١⁺) ق (س) = ق (١)

أي أن:

نهـا (س←١⁻) (أ $س^٣$ − ب س + ١) = ٥ ومنه أ − ب = ٤ .... (١)

نهـا (س←١⁺) ($س^٢$ − (أ + ب) س + ٢) = ٥ ومنه أ + ب = − ٢ .... (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن أ = ١، ب = − ٣

تدريب (٣)

هـ (س) = { ٢ ، ١ ≥ س > ٢
          { ٣ ، ٢ ≥ س > ٣

ق (س) × هـ (س) = { ٢ $(س − ٢)^٣$ ، ١ ≥ س > ٢
                    { ٣ $(س − ٢)^٣$ ، ٢ ≥ س > ٣

نهـا (س←٢⁺) (ق × هـ) (س) = نهـا (س←٢⁺) ٣ $(س − ٢)^٣$ = صفرًا

نهـا (س←٢⁻) (ق × هـ) (س) = نهـا (س←٢⁻) ٢ $(س − ٢)^٣$ = صفرًا

نهـا (س←٢) (ق × هـ) (س) = صفر ، ق (٢) = صفرًا

مما سبق ق × هـ متصل عند س = ٢

الإتصال على فترة

تدريب (١)

$$ق(س) = \begin{cases} س + ٢ & ، \quad -٢ \leq س \leq ٢ \\ س^٢ & ، \quad س < -٢ ، س > ٢ \end{cases}$$

أولًا: ق متصل على الفترات (− ٢ ، ٢) ، (− ∞ ، − ٢) ، (٢ ، ∞) لأنه كثير حدود في هذه الفترات

ثانيًا: نبحث اتصال ق عند س = − ٢

$\lim_{س \to -٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to -٢^+}$ (س + ٢) = صفرًا

$\lim_{س \to -٢^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to -٢^-}$ س^٢ = ٤

$\lim_{س \to -٢}$ ق(س) غير موجودة ، وعليه فإن ق غير متصل عند س = − ٢ .

ثالثاً: نبحث اتصال ق عند س = ٢

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ٤ ، $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ٤

$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٤ ، $\lim_{س \to ٢}$ ق(٢) = ٤

بما أن $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ق(٢) فإن ق متصل عند س = ٢

مما سبق ق متصل على ح / {− ٢}

تدريب (٢)

$$ل(س) = \frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥} ، س \neq ٥$$

أولًا: ل غير متصل عند س = ٥ لأنه غير معروف عندها

ثانياً: إذا كانت س ≠ ٥ فإن ل(س) = $\frac{(س - ٥)(س + ٥)}{س - ٥}$ = س + ٥

ل(س) كثير حدود فهو متصل على مجاله

مما سبق ل(س) متصل على ح / {٥}

إجابات تمارين ومسائل

نهاية اقتران عند نقطة

السؤال الأول

أ) $\lim_{س \to ١^+}$ ق (س) = صفرًا ، $\lim_{س \to ١^-}$ ق (س) = ١

بما أن $\lim_{س \to ١^+}$ ق (س) ≠ $\lim_{س \to ١^-}$ ق (س) فإن $\lim_{س \to ١}$ ق (س) غير موجودة

ب) $\lim_{س \to ٢^+}$ ق (س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ ق (س) = ١

$\lim_{س \to ٢}$ ق (س) = ١

جـ) $\lim_{س \to ٣^+}$ ق (س) = $\lim_{س \to ٣^-}$ ق (س) = ١

$\lim_{س \to ٣}$ ق (س) = صفرًا

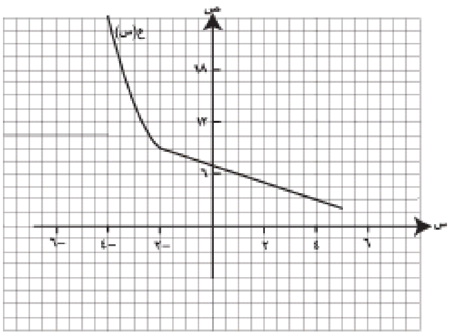
د) $\lim_{س \to ٠^+}$ ق (س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ ق (س) = صفرًا

$\lim_{س \to ٠}$ ق (س) = صفرًا

السؤال الثاني

أ) {-١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ب) {س : ٣ < س < ٤}

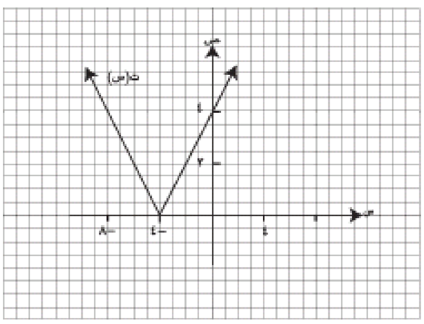
السؤال الثالث



أ) $\lim_{س \to -٢^+}$ ع (س) = ٩

$\lim_{س \to -٢^-}$ ع (س) = ٩

$\lim_{س \to -٢}$ ع (س) = ٩



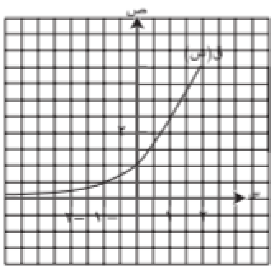
ب) $\lim_{س \to -٤^+}$ ت (س) = صفرًا

$\lim_{س \to -٤^-}$ ت (س) = صفرًا

$\lim_{س \to -٤}$ ت (س) = صفرًا

السؤال الرابع

أ) $\underset{س \to -١^{+}}{\text{نهـا}}$ ق (س) = $\underset{س \to -١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق (س) = $\frac{١}{٢}$

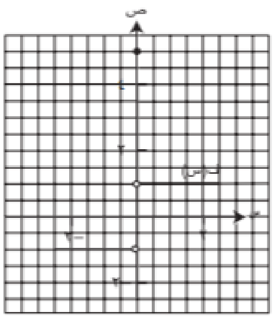


ب) نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$\text{ف (س)} = \begin{cases} ١ & \text{، س} > ٠ \\ -١ & \text{، س} < ٠ \\ ٥ & \text{، س} = ٠ \end{cases}$$

$\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ ف (س) = ١ ، $\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ ف (س) = −١

$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ ف (س) غير موجودة

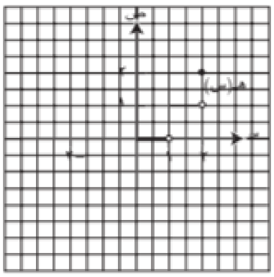


جـ) نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز الصحيح

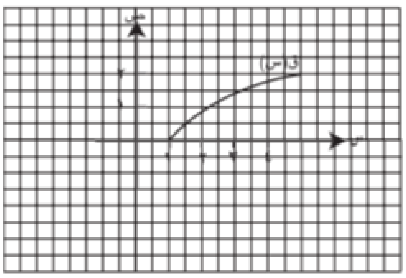
$$\text{ق (س)} = \begin{cases} ٠ & \text{، } ٠ \leq \text{س} < ١ \\ ١ & \text{، } ١ \leq \text{س} < ٢ \\ ٢ & \text{، س} = ٢ \end{cases}$$

$\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ هـ (س) = ١ ، $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ هـ (س) = صفرًا

$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ هـ (س) غير موجودة



السؤال الخامس



أ) $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ١

ب) $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ١

جـ) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ١

د) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ ق (س) غير موجودة لأن $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق (س) غير موجودة

نظريات النهايات

السؤال الأول

أ) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \left(\text{ق}(س) - \frac{١}{\text{هـ}(س)} \right) = \underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \text{ق}(س) - \underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \frac{١}{\text{هـ}(س)} = \frac{١}{٢} - (-\frac{١}{٢}) = ١$

ب) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \sqrt[٣]{\text{ق}(س) - \frac{١}{٢}} = \sqrt[٣]{\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \text{ق}(س) - \frac{١}{٢}}$

$= \sqrt[٣]{\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \text{ق}(س) - \frac{١}{٢}} = \sqrt[٣]{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}} = \text{صفرًا}$

السؤال الثاني

وزّع النهاية على حدود الطرف الأيمن لتحصل على:

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} س^٢ - \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} ٢\,\text{أ}\,س + \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} ٥ = -٤$

$٩ - ٦\,\text{أ} + ٥ = -٤$ ومنه $\text{أ} = ٣$

السؤال الثالث

وزّع النهاية على الحدود لتحصل على:

$\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـــا}} \frac{س^٣ - ٢}{س - ١} + \underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـــا}} س^٢ + \underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـــا}} ١ = \frac{٢٩}{٤} + ٩ + ١ = ١٧,٢٥$

السؤال الرابع

أ) $\underset{س \leftarrow ٣^-}{\text{نهـــا}} \text{د}(س) = \underset{س \leftarrow ٣^-}{\text{نهـــا}} ٥ = ٥$

ب) $\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهـــا}} \text{د}(س) = \underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهـــا}} (٢س^٢ - ١٥) = ١٨ - ١٥ = ٣$

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \text{د}(س)$ غير موجودة

جـ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \text{د}(س) = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} ٥ = ٥$

د) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} \text{د}(س) = \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} (٢س^٢ - ١٥) = ٣٢ - ١٥ = ١٧$

السؤال الخامس

أ) $\text{نهـــا}\ \text{ق}(س) = \sqrt{\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـــا}} \frac{س - ١}{س + ١}} = \text{صفرًا}$

لاحظ أن ق (س) غير معرف على يسار العدد ١ وعليه فإن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ ق (س) غير موجودة.

ب) $\lim\limits_{س \to \frac{1}{2}^+} \text{هـ}(س) = \lim\limits_{س \to \frac{1}{2}^+} [1 + 2س] = 2$

$\lim\limits_{س \to \frac{1}{2}^-} \text{هـ}(س) = \lim\limits_{س \to \frac{1}{2}^-} [1 + 2س] = 1$

$\lim\limits_{س \to \frac{1}{2}} \text{هـ}(س)$ غير موجودة

عندما $س \to \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{س \to \frac{1}{2}^+} \text{هـ}(س) = \lim\limits_{س \to \frac{1}{2}^+} [1 + 2س] = 1$

$\lim\limits_{س \to \frac{1}{3}^-} \text{هـ}(س) = \lim\limits_{س \to \frac{1}{3}^-} [1 + 2س] = 1$

$\lim\limits_{س \to \frac{1}{3}} \text{هـ}(س) = 1$

جـ) نعيد تعريف الاقتران دون استخدام القيمة المطلقة

$$\text{م}(س) = \begin{cases} 1 - س^2 &، \quad -1 \le س \le 1 \\ س^2 - 1 &، \quad 1 < س ، \; س < -1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{س \to -1^+} \text{م}(س) = \lim\limits_{س \to -1^+} (1 - س^2) = \text{صفرًا}$

$\lim\limits_{س \to -1^-} \text{م}(س) = \lim\limits_{س \to -1^-} (س^2 - 1) = \text{صفرًا}$

$\lim\limits_{س \to -1} \text{م}(س) = \text{صفرًا}$

نـهايات إقتـرانات كسرية

السؤال الأول

أ) $\lim\limits_{\text{س}\to 8} \dfrac{(\text{س}+1)^2-81}{8-\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to 8} \dfrac{(\text{س}+1-9)(\text{س}+1+9)}{8-\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 8} \dfrac{(\text{س}-8)(\text{س}+10)}{8-\text{س}} = \lim -(\text{س}+10) = -18$

ب) $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{1}{2}} \dfrac{8\text{س}^3-1}{\text{س}-\frac{1}{2}} = \lim \dfrac{(2\text{س}-1)(4\text{س}^2+2\text{س}+1)}{\text{س}-\frac{1}{2}} = 2\lim\limits_{\text{س}\to \frac{1}{2}} (4\text{س}^2+2\text{س}+1) = 6$

جـ) $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{7}{2}} \dfrac{\sqrt{2\text{س}+9}-4}{2\text{س}-7} = \lim\limits_{\text{س}\to \frac{7}{2}} \dfrac{\sqrt{2\text{س}+9}-4}{2\text{س}-7} \times \dfrac{\sqrt{2\text{س}+9}+4}{\sqrt{2\text{س}+9}+4}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to \frac{7}{2}} \dfrac{2\text{س}+9-16}{(2\text{س}-7)(\sqrt{2\text{س}+9}+4)} = \lim\limits_{\text{س}\to \frac{7}{2}} \dfrac{2\text{س}-7}{(2\text{س}-7)(\sqrt{2\text{س}+9}+4)}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{16}+4} = \dfrac{1}{8}$

د) $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{2\text{س}+25}-3}{\text{س}-2} = \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}+25}-3}{\text{س}-2} \times \dfrac{(\text{س}+25)^{\frac{2}{3}}+3(\text{س}+25)^{\frac{1}{3}}+9}{(\text{س}+25)^{\frac{2}{3}}+3(\text{س}+25)^{\frac{1}{3}}+9}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{س}+25-27}{(\text{س}-2)\left((\text{س}+25)^{\frac{2}{3}}+3(\text{س}+25)^{\frac{1}{3}}+9\right)}$

$= 2\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{1}{(\text{س}+25)^{\frac{2}{3}}+3(\text{س}+25)^{\frac{1}{3}}+9} = \dfrac{1}{9+9+9} = \dfrac{1}{27}$

هـ) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \left(\dfrac{1}{\text{س}}\left(\dfrac{1}{5+\text{س}} - \dfrac{1}{5-\text{س}}\right)\right) = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1}{\text{س}} \times \dfrac{5-\text{س}-(5+\text{س})}{(5+\text{س})(5-\text{س})}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1}{\text{س}} \times \dfrac{-2\text{س}}{(5+\text{س})(5-\text{س})} = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{-2}{(5+\text{س})(5-\text{س})} = \dfrac{-2}{25}$

و) $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{س}^3+3\text{س}-4}{\text{س}^2-1} = \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{(\text{س}-1)(\text{س}^2+\text{س}+4)}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{س}^2+\text{س}+4}{(\text{س}+1)} = 3$

ز) $\underset{س\to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{س-٥}+٢}{س^{٣}+٢٧} = \underset{س\to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{س-٥}+٢}{س^{٣}+٢٧} \times \dfrac{(س-٥)^{\frac{٢}{٣}}-٢(س-٥)^{\frac{١}{٣}}+٤}{(س-٥)^{\frac{٢}{٣}}-٢(س-٥)^{\frac{١}{٣}}+٤}$

$= \underset{س\to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س+٣}{(س+٣)(س^{٢}-٣س+٩)\left((س-٥)^{\frac{٢}{٣}}-٢(س-٥)^{\frac{١}{٣}}+٤\right)}$

$= \underset{س\to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س+٣}{(س^{٢}-٣س+٩)\left((س-٥)^{\frac{٢}{٣}}-٢(س-٥)^{\frac{١}{٣}}+٤\right)}$

$= \dfrac{١}{(٩+٩+٩)(٤+٤+٤)} = \dfrac{١}{٤٣٢}$

السؤال الثاني

بما أن $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}$ ل (س) موجودة، إذن $\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ ل (س) = $\underset{س\to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ل (س)

$\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{(س-١)(٣س-٢)}{(س-١)(٢س-١)} = ب \Leftarrow ب = ١$

السؤال الثالث

أ) $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{|س-٣|-١}{س-٢} = \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٣-س-١}{س-٢} = \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢-س}{س-٢} = -١$

ب) $\underset{س\to \frac{٥}{٢}^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س-[٢س]}{٤س^{٢}-٢٥} = \underset{س\to \frac{٥}{٢}^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س-٥}{٤س^{٢}-٢٥} = \underset{س\to \frac{٥}{٢}^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{٢س+٥} = \dfrac{١}{١٠}$

$\underset{س\to \frac{٥}{٢}^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س-[٢س]}{٤س^{٢}-٢٥} = \underset{س\to \frac{٥}{٢}^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س-٤}{٢س+٥} = \dfrac{١}{١٠}$

إذن $\underset{س\to \frac{٥}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س-[٢س]}{٤س^{٢}-٢٥} = \dfrac{١}{١٠}$

جـ) $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٤-٤س+س^{٢}}}{٢-س} = \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{(س-٢)^{٢}}}{٢-س} = \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{|س-٢|}{٢-س}$

نعيد تعريف $\dfrac{|س-٢|}{٢-س}$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$\dfrac{|س-٢|}{٢-س} = \begin{cases} -١ ، & س > ٢ \\ ١ ، & س < ٢ \end{cases}$

$$\underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نهــا}}\ \frac{\sqrt{٤-٤\text{س}+\text{س}^{٢}}}{٢-\text{س}}=\underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نهــا}}(-١)=-١$$

$$\underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهــا}}\ \frac{\sqrt{٤-٤\text{س}+\text{س}^{٢}}}{٢-\text{س}}=\underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهــا}}\ ١=١$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}}\ \frac{\sqrt{٤-٤\text{س}+\text{س}^{٢}}}{٢-\text{س}}\ \text{غير موجودة}$$

د) بما أن كلاً من البسط و المقام غير معرفين على يسار العدد ٧ فإن النهاية غير موجودة.

هـ) $$\underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ص}-٤\sqrt{\text{ص}}+٣}{\text{ص}^{٢}-١}=\underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهــا}}\ \frac{(\text{ص}+٣)-٤\sqrt{\text{ص}}}{\text{ص}^{٢}-١}\times\frac{(\text{ص}+٣)+٤\sqrt{\text{ص}}}{(\text{ص}+٣)+٤\sqrt{\text{ص}}}$$

$$=\underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهــا}}\ \frac{(\text{ص}+٣)^{٢}-١٦\text{ص}}{(\text{ص}^{٢}-١)(\text{ص}+٣+٤\sqrt{\text{ص}})}=\underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ص}^{٢}+٦\text{ص}-١٦\text{ص}+٩}{(\text{ص}^{٢}-١)(\text{ص}+٣+٤\sqrt{\text{ص}})}$$

$$=\underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهــا}}\ \frac{(\text{ص}+١)(\text{ص}-٩)}{(\text{ص}-١)(\text{ص}+١)(\text{ص}+٣+٤\sqrt{\text{ص}})}=\underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ص}-٩}{(\text{ص}+١)(\text{ص}+٣)(\text{ص}+٣+٤\sqrt{\text{ص}})}$$

$$=-\frac{-٨}{١٦}=-\frac{١}{٢}$$

السؤال الرابع

$$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}-١٦}{\text{س}-٨}=\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س}^{\frac{٤}{٣}}-١٦}{\text{س}-٨}\times\frac{\text{س}^{\frac{٨}{٣}}+١٦\text{س}^{\frac{٤}{٣}}+٢٥٦}{\text{س}^{\frac{٨}{٣}}+١٦\text{س}^{\frac{٤}{٣}}+٢٥٦}=\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س}^{٤}-٦٤^{٢}}{(\text{س}-٨)(\text{س}^{\frac{٨}{٣}}+١٦\text{س}^{\frac{٤}{٣}}+٢٥٦)}$$

$$=\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهــا}}\ \frac{(\text{س}^{٢}-٦٤)(\text{س}^{٢}-٦٤)}{(\text{س}-٨)(\text{س}^{\frac{٨}{٣}}+١٦\text{س}^{\frac{٤}{٣}}+٢٥٦)}=\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهــا}}\ \frac{(\text{س}-٨)(\text{س}+٨)(\text{س}^{٢}+٦٤)}{(\text{س}-٨)(\text{س}^{\frac{٨}{٣}}+١٦\text{س}^{\frac{٤}{٣}}+٢٥٦)}$$

$$=\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهــا}}\ \frac{(\text{س}+٨)(\text{س}^{٢}+٦٤)}{(\text{س}^{\frac{٨}{٣}}+١٦\text{س}^{\frac{٤}{٣}}+٢٥٦)}=\frac{١٦\times ١٢٨}{٢٥٦\times ٣}=\frac{٨}{٣}$$

السؤال الخامس

$$[٢\text{س}]=\begin{cases}٢ &،\ ١\le \text{س}<\frac{٣}{٢}\\ ٣ &،\ \frac{٣}{٢}\le \text{س}<٢\\ ٤ &،\ ٢\le \text{س}<\frac{٥}{٢}\end{cases}$$

$\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهــا}}[٢\text{س}]=٣$، عندما $\frac{٣}{٢}<\text{أ}<٢$

السؤال السادس

$$\underset{\text{س} \to \text{ك}^+}{\text{نهـــا}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to \text{ك}^+}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} + ٢} = \underset{\text{س} \to \text{ك}^+}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}{\text{س} + ٢} = \text{ك} - ٢$$

$$\underset{\text{س} \to \text{ك}^-}{\text{نهـــا}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to \text{ك}^-}{\text{نهـــا}}\ ٣\text{س} = ٣\ \text{ك}$$

تكون $\underset{\text{س} \to \text{ك}}{\text{نهـــا}}\ \text{د}(\text{س})$ موجودة إذا كان $\underset{\text{س} \to \text{ك}^+}{\text{نهـــا}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to \text{ك}^-}{\text{نهـــا}}\ \text{د}(\text{س})$

أي أن $\text{ك} - ٢ = ٣\ \text{ك}$ ومنه $\text{ك} = -١$

السؤال السابع

$$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـــا}} \left(\frac{\text{س}}{٩ - \text{س}^٢} + \frac{٣\ \text{س}}{\text{س}^٣ - ٩\ \text{س}} \right) = \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـــا}} \frac{-\text{س}^٢ + ٣\ \text{س}}{\text{س}(\text{س}^٢ - ٩)}$$

$$= \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـــا}} \frac{-\text{س}(\text{س} - ٣)}{\text{س}(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)} = \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـــا}} \frac{-١}{\text{س} + ٣} = -\frac{١}{٦}$$

السؤال الثامن

$$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{٤٩^{\text{س}} - ٧^{\text{س}}}{١ - ٧^{\text{س}}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{٧^{٢\text{س}} - ٧^{\text{س}}}{١ - ٧^{\text{س}}}$$

$$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{٧^{\text{س}}(٧^{\text{س}} - ١)}{١ - ٧^{\text{س}}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}} -٧^{\text{س}} = -٧^{\text{س}} = -١$$

السؤال التاسع

بما أن $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـــا}}\ \text{ق}(\text{س})$ موجودة، إذن $\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{نهـــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـــا}}\ \text{ق}(\text{س})$

إذن يجب أن يكون $(\text{س} - ١)$ عاملاً من عوامل البسط $\text{س}^٣ - \text{أ}\ \text{س} + ٣$

أي أن $\text{ق}(١) = ١ - \text{أ} + ٣ =$ صفر ومنه $\text{أ} = ٤$

$$\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{نهـــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـــا}}\ \text{ق}(\text{س})$$

$$\underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٣ - ٤\ \text{س} + ٣}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـــا}} (\text{ب}\ \text{س} - ٥)$$

$$\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^٢ + \text{س} - ٣)}{\text{س} - ١} = \text{نهـــا}\ (\text{ب}\ \text{س} - ٥)$$

$-١ = \text{ب} - ٥$ ومنه $\text{ب} = ٤$

نهاية الإقترانات الدائرية

السؤال الأول

$$\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{حا س}}{\text{س}} = \frac{\text{حا} \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

السؤال الثاني

$$\lim_{\text{س} \to 0} (\text{قاس} + \text{ظا } 4\text{ س}) = \lim_{\text{س} \to 0} \text{قاس} + \lim_{\text{س} \to 0} \text{ظا } 4\text{ س} = 1 + 0 = 1$$

السؤال الثالث

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{حا } 5\text{ س}}{8\text{ س}} = \frac{5}{8}$$

السؤال الرابع

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{حا}^2 3\text{ س}}{\text{س}^2} = \lim_{\text{س} \to 0} \left(\frac{\text{حا } 3\text{ س}}{\text{س}}\right)^2 = \left(\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{حا } 3\text{ س}}{\text{س}}\right)^2 = 3^2 = 9$$

السؤال الخامس

نفرض أن $2\text{ س}^2 = \text{هـ}$ ، عندما س $\leftarrow$ ٠ فان هـ $\leftarrow$ ٠ .

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا } 2\text{ س}^2}{4\text{ س}^2} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ظا هـ}}{2\text{ هـ}} = \frac{1}{2}$$

السؤال السادس

نفرض أن س + ٥ = هـ .

عندما س $\leftarrow$ −٥ فإن هـ $\leftarrow$ ٠ .

$$\lim_{\text{س} \to -5} \frac{\text{حا}(\text{س} + 5)}{25 - \text{س}^2} = \lim_{\text{س} \to -5} \frac{\text{حا}(\text{س} + 5)}{(5 - \text{س})(5 + \text{س})} = \lim_{\text{س} \to -5} \frac{\text{حا}(\text{س} + 5)}{\text{س} + 5} \times \lim_{\text{س} \to -5} \frac{1}{5 - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{حا هـ}}{\text{هـ}} \times \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{1}{10 - \text{هـ}} = 1 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

السؤال السابع

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س} - \text{حا } 3\text{ س} + \text{ظا } 5\text{ س}}{2\text{ س} - \text{ظا}^2\text{ س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}} - \frac{\text{حا } 3\text{ س}}{\text{س}} + \frac{\text{ظا } 5\text{ س}}{\text{س}}}{\frac{2\text{ س}}{\text{س}} - \frac{\text{ظا}^2\text{ س}}{\text{س}}}$$

$$= \frac{\lim_{\text{س} \to 0}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}} - \frac{\text{حا } 3\text{ س}}{\text{س}} + \frac{\text{ظا } 5\text{ س}}{\text{س}}\right)}{\lim_{\text{س} \to 0}\left(\frac{2\text{ س}}{\text{س}} - \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} \times \text{ظا س}\right)} = \frac{1 - 3 + 5}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$

السؤال الثامن

$$\lim_{س\to 0} \frac{1 - جتا\,2س}{2س^2} = \lim_{س\to 0} \frac{1-(1-2\,جا^2 س)}{2س^2} = \lim_{س\to 0} \frac{2\,جا^2 س}{2س^2}$$

$$= \lim_{س\to 0} \left(\frac{جا\,س}{س}\right)^2 = \left(\lim_{س\to 0} \frac{جا\,س}{س}\right)^2 = 1^2 = 1$$

السؤال التاسع

$$\lim_{س\to 0} \frac{جتا\,س}{\frac{\pi}{2} - س} = \frac{جتا\,0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

السؤال العاشر

نفرض أن $\frac{س}{3} - \pi = هـ$ ، ومنه $س = 3هـ + 3\pi$ ، عندما $س \to 3\pi$ فإن $هـ \to 0$

$$\lim_{س\to 3\pi} \frac{جا\,س}{\frac{س}{3} - \pi} = \lim_{هـ\to 0} \frac{جا(3هـ + 3\pi)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ\to 0} \frac{جا\,3هـ\,جتا\,3\pi + 3جتا\,هـ\,جا\,3\pi}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ\to 0} \frac{-جا\,3هـ}{هـ} = -3$$

السؤال الحادي عشر

$$\frac{\sqrt{1 - جتا\,س}}{س} = \frac{\sqrt{1-(1-2\,جا^2\frac{س}{2})}}{س} = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{جا^2\frac{س}{2}}}{س} = \sqrt{2} \times \frac{\left|جا\frac{س}{2}\right|}{س}$$

$$\frac{\left|جا\frac{س}{2}\right|}{س} = \begin{cases} \frac{جا\frac{س}{2}}{س} & ، \quad س > 0 \\ \frac{-جا\frac{س}{2}}{س} & ، \quad س < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{س\to 0^+} \frac{\sqrt{1 - جتا\,س}}{س} = \lim_{س\to 0^+} \frac{\sqrt{2}\,\left|جا\frac{س}{2}\right|}{س} = \sqrt{2}\lim_{س\to 0^+} \frac{جا\frac{س}{2}}{س} = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{س\to 0^-} \frac{\sqrt{1 - جتا\,س}}{س} = \lim_{س\to 0^-} \frac{\sqrt{2}\,\left|جا\frac{س}{2}\right|}{س} = \sqrt{2}\lim_{س\to 0} \frac{-جا\frac{س}{2}}{س} = -\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\lim_{س\to 0} \frac{\sqrt{1 - جتا\,س}}{س}$ غير موجودة

السؤال الثاني عشر

نفرض أن $\text{س}^{٢} - ٦٤ = \text{هـ}$ ومنه $\text{س}^{٢} = \text{هـ} + ٦٤$

عندما س ← ٨ فان هـ ← ٠

$$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا}(\text{س}^{٢} - ٦٤)}{\text{س} - ٨} = \underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{س} + ٨)\ \text{جا}(\text{س}^{٢} - ٦٤)}{\text{س}^{٢} - ٦٤}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\left(\sqrt{\text{هـ} + ٦٤} + ٨\right)\ \text{جا هـ}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـــا}} \left(\sqrt{\text{هـ} + ٦٤} + ٨\right) \times \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{حا هـ}}{\text{هـ}} = ١٦$$

السؤال الثالث عشر

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{١ + \text{جا } ٤ \text{ س} - \text{جتا}^{٢}\ ٢ \text{ س}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا}^{٢}\ ٢ \text{ س} + \text{جتا}^{٢}\ ٢ \text{ س} + ٢ \text{ جا } ٢ \text{ س جتا } ٢ \text{ س} - \text{جتا}^{٢}\ ٢ \text{ س}}{\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{حا } ٢ \text{ س } (\text{جا٢ س} + ٢ \text{ جتا } ٢ \text{ س})}{\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا } ٢ \text{ س}}{\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} (\text{حا } ٢ \text{ س} + ٢ \text{ جتا } ٢ \text{ س}) = ٢ + ٢ = ٤$$

السؤال الرابع عشر

$$\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا س} - \text{حا أ}}{\text{س} - \text{أ}} = \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـــا}} \frac{٢ \text{ جتا } \frac{\text{س} + \text{أ}}{٢} \text{ جا } \frac{\text{س} - \text{أ}}{٢}}{\text{س} - \text{أ}}$$

$$= \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا} \frac{\text{س} - \text{أ}}{٢}}{\frac{\text{س} - \text{أ}}{٢}} \times \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـــا}} \text{ جتا} \left(\frac{\text{س} + \text{أ}}{٢}\right) = ١ \times \text{جتا أ} = \text{جتا أ}$$

السؤال الخامس عشر

$$\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{حا أ س}}{٦ \text{ س}} = ٢ \Leftarrow \frac{\text{أ}}{٦} = ٢ \text{ ومنه أ} = ١٢$$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ظا ٥ س}}{\text{ب س} - \text{س}} = ٢ \Leftarrow \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\frac{\text{ظا ٥س}}{\text{س}}}{\frac{\text{ب س}}{\text{س}} - \frac{\text{س}}{\text{س}}} = ٢$$

$$\frac{\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ظا ٥ س}}{\text{س}}}{\text{ب} - ١} = ٢ \Leftarrow \frac{٥}{\text{ب} - ١} = ٢ \text{ ومنه ب} = \frac{٧}{٢}$$

الإتصال عند نقطة

السؤال الأول

قيم س التي عندها ق غير متصل هي س = ٠ ، س = ٢

السؤال الثاني

أولا: عندما س = −٢

$\underset{س \to -٢^{+}}{\text{نهـا}}$ د (س) = $\underset{س \to -٢^{+}}{\text{نهـا}}$ (٣ س^{٢} − ٥) = ١٢ − ٥ = ٧

$\underset{س \to -٢^{-}}{\text{نهـا}}$ د (س) = $\underset{س \to -٢^{-}}{\text{نهـا}}$ (١ − ٤س) = ١ + ٨ = ٩

$\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}}$ د (س) غير موجودة وعليه فإن د غير متصل عند س = −٢

ثانيًا: عندما س = ٠

$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ د (س) = $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ (٣س^{٢} − ٥) = −٥

د (٠) = −٥

بما أن $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ د (س) = د (٠)، فإن د (س) متصل عند س = ٠

السؤال الثالث

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} -\dfrac{\text{ظاس}}{\text{س}} & \text{، س} < ٠ \\ ١ - ٢\ \text{جتا س} & \text{، س} \ge ٠ \end{cases}$$

$\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ ق (س) = $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ (١ − ٢ جتا س) = −١

$\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ ق (س) = $\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ $-\dfrac{\text{ظاس}}{\text{س}}$ = −١

$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ ق (س) = −١ ، ق (٠) = −١

بما أن $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ ق (س) = −١ = ق (٠) ، إذن ق متصل عند س = ٠

السؤال الرابع

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$\text{ك (س)} = \begin{cases} \sqrt{\text{س} - ٢} & \text{، س} > ٢ \\ ٢\text{س} - \text{س}^{٢} & \text{، } ٠ \le \text{س} \le ٢ \\ \text{س}^{٢} - ٢\text{س} & \text{، س} < ٠ \end{cases}$$

أولا: عندما س = ٠

$\underset{س \leftarrow ٠^+}{نهــا}$ ك (س) = $\underset{س \leftarrow ٠^+}{نهــا}$ (٢ س − $س^٢$) = صفر

$\underset{س \leftarrow ٠^-}{نهــا}$ ك (س) = $\underset{س \leftarrow ٠^-}{نهــا}$ ($س^٢$ − ٢ س) = صفر، ك (٠) = ٠

بما أن $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا}$ ك (س) = ك (٠) فإن ك متصل عند س = ٠

ثانيًا: عندما س = ٢

$\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهــا}$ ك (س) = $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهــا}$ $\sqrt{س - ٢}$ = صفرًا

$\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهــا}$ ك (س) = $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهــا}$ (٢س − $س^٢$) = صفرًا

$\underset{س \leftarrow ٢}{نهــا}$ ك (س) = صفرًا، ك (٢) = صفرًا

بما أن $\underset{س \leftarrow ٢}{نهــا}$ ك (س) = ك (٢) فإن ك متصل عند س = ٢

السؤال الخامس

أولا: عندما س = ١

$\underset{س \leftarrow ١^+}{نهــا}$ ق (س) = صفر، $\underset{س \leftarrow ١^-}{نهــا}$ ق (س) = صفرًا

$\underset{س \leftarrow ١}{نهــا}$ ق (س) = صفرًا، ق (١) = صفرًا،

إذن ق متصل عند س = ١ لأن $\underset{س \leftarrow ١}{نهــا}$ ق (س) = ق (١)

ثانيًا: عند س = ٣

$\underset{س \leftarrow ٣^+}{نهــا}$ ق (س) = ١، $\underset{س \leftarrow ٣^-}{نهــا}$ ق (س) = ١

إذن $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ ق (س) = ١ ، ق (٣) = ١

ق متصل عند س = ٣ لأن $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ ق (س) = ق (٣)

السؤال السادس

نعيد تعريف الاقتران ك . لاحظ أن $\sqrt{س^٢} = |س|$

$$ك(س) = \begin{cases} \frac{حا س}{س} &، س > ٠ \\ -\frac{حا س}{س} &، س < ٠ \\ ١ &، س = ٠ \end{cases}$$

$\underset{س \leftarrow ٠^+}{نهــا}$ ك (س) = $\underset{س \leftarrow ٠^+}{نهــا}$ $\frac{حا س}{س}$ = ١

$\underset{س \leftarrow ٠^-}{نهــا}$ ك (س) = $\underset{س \leftarrow ٠^-}{نهــا}$ $-\frac{حا س}{س}$ = −١

$\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا}$ ك (س) غير موجودة وبناء عليه ك غير متصل عند س = ٠

السؤال السابع

$$\lim_{\text{س}\to 1^+} \text{د}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}} - 1}{\text{س} - 1} \times \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}} + 1}{\text{س}\sqrt{\text{س}} + 1}$$

$$= \lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{\text{س}^3 - 1}{(\text{س} - 1)(\text{س}\sqrt{\text{س}} + 1)} = \lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{\text{س}^2 + \text{س} + 1}{\text{س}\sqrt{\text{س}} + 1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{\text{س}\to 1^-} \text{د}(\text{س}) = 2\,\text{أ}$$

بما أن د (س) متصل عند س = ١ فإن $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \text{د}(\text{س})$ موجودة

$$\lim_{\text{س}\to 1^+} \text{د}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to 1^-} \text{د}(\text{س})$$

$$\frac{3}{2} = 2\,\text{أ} \quad \text{ومنه أ} = \frac{3}{4}$$

د (١) = $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \text{د}(\text{س})$ لأن د متصل عند س = ١ ومنه ب = $\frac{3}{2}$

السؤال الثامن

أولا: نبحث في اتصال م (س) عند س = − ٢

$$\lim_{\text{س}\to -2^+} \text{م}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to -2^+} \frac{\frac{1}{8}\text{س}^3 + 1}{\text{س} + 2} = \lim_{\text{س}\to -2^+} \frac{(\frac{1}{2}\text{س} + 1)(\frac{1}{4}\text{س}^2 - \frac{1}{2}\text{س} + 1)}{(\text{س} + 2)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to -2^+} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\text{س}^2 - \frac{1}{2}\text{س} + 1\right) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{\text{س}\to -2^-} \text{م}(\text{س}) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{\text{س}\to -2} \text{م}(\text{س}) = \frac{3}{2} \text{ ، } \text{م}(-2) = \frac{3}{2}$$

م (س) متصل عند س = − ٢ لأن $\lim\limits_{\text{س}\to -2} \text{م}(\text{س}) = \text{م}(-2)$

ثانياً: نبحث اتصال هـ (س) عند س = − ٢

$$\lim_{\text{س}\to -2} \text{هـ}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to -2} \frac{\text{جتا}\,\frac{\pi\,\text{س}}{4}}{\text{س}} = \text{صفرًا}$$

هـ (− ٢) = صفرًا

هـ (س) متصل عند س = − ٢ لأن $\lim\limits_{\text{س}\to -2} \text{هـ}(\text{س}) = \text{هـ}(-2)$

بما أن م ، هـ متصلان عند س = − ٢ فإن م + هـ متصل عند س = − ٢

السؤال التاسع

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 & \text{، } \text{س} \le 3 \\ 2\,\text{س} + 4 & \text{، } \text{س} > 3 \end{cases} \quad \text{،} \quad \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 2\,\text{س} & \text{، } \text{س} \le 3 \\ 5 & \text{، } \text{س} > 3 \end{cases}$$

ق، د غير متصلين عند س = ٣ بينما ق + هـ متصل عند س = ٣

الإتصال على فترة

السؤال الأول

أولًا: عندما س > ١

د (س) = $\frac{١}{س}$ + ٥ = $\frac{٥ س + ١}{س}$ اقتران نسبي متصل على مجاله.

ثانيًا: عندما س < ١

د (س) = ٢ س^{٢} + ٤ كثير حدود متصل على مجاله.

ثالثًا: نبحث اتصال د عند س = ١

$\lim_{س \to ١^{+}}$ د (س) = $\lim_{س \to ١^{+}}$ ($\frac{١}{س}$ + ٥) = ٦، $\lim_{س \to ١^{-}}$ د (س) = $\lim_{س \to ١^{-}}$ (٢ س^{٢} + ٤) = ٦

إذن $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ٦ ، د (١) = ٦

د متصل عند س = ١ لأن $\lim_{س \to ١}$ د (س) = د (١)

مما سبق د متصل على ح

السؤال الثاني

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$ف (س) = \begin{cases} -(٢ س + ٧) & ، \quad -٥ \leq س < -\frac{٧}{٢} \\ ٢ س + ٧ & ، \quad -\frac{٧}{٢} \leq س \leq ٠ \end{cases}$$

أولًا: ف (س) على صورة كثير حدود في الفترة [− ٥، − $\frac{٧}{٢}$) وفي الفترة (− $\frac{٧}{٢}$ ، ٠] فهو متصل في هاتين الفترتين.

ثانيًا: نبحث اتصال عندما س = − $\frac{٧}{٢}$

$\lim_{س \to -\frac{٧}{٢}^{+}}$ ف (س) = $\lim_{س \to -\frac{٧}{٢}^{+}}$ (٢ س + ٧) = صفرًا

$\lim_{س \to -\frac{٧}{٢}^{-}}$ ف (س) = $\lim_{س \to -\frac{٧}{٢}^{-}}$ − (٢ س + ٧) = صفرًا

إذن $\lim_{س \to -\frac{٧}{٢}}$ ف (س) = صفرًا ، ف (− $\frac{٧}{٢}$) = صفرًا

ف (س) متصل عند س = − $\frac{٧}{٢}$ لأن $\lim_{س \to -\frac{٧}{٢}}$ ف (س) = ف (− $\frac{٧}{٢}$)

مما سبق ف متصل على [−٥ ، ٠]

السؤال الثالث

اولاً: في الفترة (− ٣، ∞) يكون ٢ س + ٦ > صفر، وكذلك $\underset{س \leftarrow أ}{نهــــا}$ ك (س) = ك (أ)، وعليه يكون ك متصلاً على (−٣، ∞).

ثانيًا: نبحث اتصال ك عندما س = − ٣

$\underset{س \leftarrow -٣^{+}}{نهــــا}$ ك (س) = صفر، ك (− ٣) = صفرًا

إذن ك متصل عند س = − ٣ من اليمين

مما سبق يكون ك (س) متصلاً على [− ٣ ، ∞)

السؤال الرابع:

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز الصحيح

$$ق(س) = \begin{cases} -٢ & ، -١ \leq س < -\frac{١}{٢} \\ -١ & ، -\frac{١}{٢} \leq س < ٠ \\ ٠ & ، س = ٠ \\ ٢س - ١ & ، ٠ < س \leq ٢ \end{cases}$$

أولاً: ق على شكل كثير حدود في الفترات [− ١، − $\frac{١}{٢}$)، (− $\frac{١}{٢}$ ، ٠)، [٠ ، ٢] فهو متصل على هذه الفترات.

ثانيًا: نبحث اتصال ق عند س = − $\frac{١}{٢}$.

$\underset{س \leftarrow -\frac{١}{٢}^{+}}{نهــــا}$ ق (س) = − ١، $\underset{س \leftarrow -\frac{١}{٢}^{-}}{نهــــا}$ ق (س) = − ٢

$\underset{س \leftarrow -\frac{١}{٢}}{نهــــا}$ ق (س) غير موجودة، وعليه فإن ق غير متصل عند س = − $\frac{١}{٢}$

ثالثاً: نبحث اتصال ق عند س = ٠

$\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{نهــــا}$ ق (س) = − ١ ، $\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{نهــــا}$ ق (س) = − ١

$\underset{س \leftarrow ٠}{نهــــا}$ ق (س) = − ١ ، ق (٠) = ٠

ق غير متصل عند س = ٠ لأن $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــــا}$ ق (س) ≠ ق (٠)

مما سبق ق متصل على [− ١ ، ٢] / {- $\frac{١}{٢}$ ، ٠}.

السؤال الخامس:

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$د(س) = \begin{cases} -١ & ، س < ٠ \\ ١ & ، ٠ < س < ١ \\ \frac{١}{٢} س + \frac{١}{٢} & ، س \geq ١ \end{cases}$$

اولاً: د (س) على شكل كثير حدود في الفترات (− ∞، ٠)، (٠ ، ١)، (١ ، ∞) فهو متصل على هذه الفترات .

ثانيًا: وغير معرف عند س = ٠ فهو غير متصل عند هذه النقطة.

نهـــــا ك (س) = صفر ، ك (− ٣) = صفرًا

ثالثاً: نبحث اتصال وعند س = ١

$\underset{\text{س} \leftarrow \text{١}^-}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ١ ، $\underset{\text{س} \leftarrow \text{١}^+}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ١

$\underset{\text{س} \leftarrow \text{١}}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ١ ، د (١) = ١

د متصل عند س = ١ لأن د (١) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{١}}{\text{نهـــا}}$ د (س)

مما سبق د متصل على ح / {٠}

السؤال السادس

بما أن د متصل على ح، فهو متصل عند س = ٦

$\underset{\text{س} \leftarrow \text{٦}^+}{\text{نهـــا}}$ د (س) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٦}^+}{\text{نهـــا}} \dfrac{(\text{س} - \text{٦})(\text{س} + \text{٥})}{\text{أ}(\text{س} - \text{٦})} = \dfrac{\text{١١}}{\text{أ}}$

$\underset{\text{س} \leftarrow \text{٦}^-}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ٦ ب

بما أن د متصل على ح، فإن $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٦}^+}{\text{نهـــا}}$ د (س) = $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٦}^-}{\text{نهـــا}}$ د (س) = د (١) ومنه

$\dfrac{\text{١١}}{\text{أ}}$ = ٦ ب = ١ ومنه أ = ١١ ، ب = $\dfrac{\text{١}}{\text{٦}}$

السؤال السابع

ق متصل على ح فهو متصل عند س = ٣ . $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٣}}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = ق (٣) = ١١

$\underset{\text{س} \leftarrow \text{٣}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - (\text{٣} - \text{٢ جـ})\,\text{س} - \text{٦ جـ}}{\text{س} - \text{٣}} = \underset{\text{س} \leftarrow \text{٣}}{\text{نهـــا}} \dfrac{(\text{س} - \text{٣})(\text{س} + \text{٢ جـ})}{\text{س} - \text{٣}} = \text{١١}$

إذن ٣ + ٢ جـ = ١١ ومنه جـ = ٤

السؤال الثامن

بما أن ق متصل على ح فهو معرف عند جميع قيم س ∈ ح

بما أن المقام ليس له جذور (المميز سالب)، إذن:

أ$^{\text{٢}}$ − ١٢ > ٠ ومنه أ$^{\text{٢}}$ > ١٢

$\sqrt{\text{أ}^{\text{٢}}} > \sqrt{\text{١٢}}$ ومنه |أ| > $\sqrt{\text{١٢}}$ أي أن − $\sqrt{\text{١٢}}$ > أ > $\sqrt{\text{١٢}}$

تقييم ذاتي

السؤال الأول : أوجد كل مما يلي :-

١) $\lim\limits_{س \to -٤} \frac{١}{س+٤}\left(\frac{١}{س^{٢}-١٧}+١\right)$

٢) $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^{٢}+٩}+\sqrt[٣]{٢س}-٧}{س-٤}$

٣) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س^{٢}-٤}+\sqrt{س+٢}-٢}{\sqrt{س-٢}}$

٤) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س+١)^{٢}\sqrt{٣س}-٤٨}{س^{٢}-٩}$

٥) $\lim\limits_{س \to ٨} \frac{\sqrt{٧+\sqrt[٣]{س}}-٣}{س-٨}$

٦) $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{س^{٢}-٢٥}{س^{٢}+أس-ب} = \frac{١٠}{١٢}$

٧) اذا كانت $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{س^{٢}-٢٥}{س^{٢}+أس-ب} = \frac{١٠}{١٢}$ **أوجد كل من أ و ب**

٨) $\lim\limits_{س \to ٠} س^{٢}\sqrt{\frac{١}{س}+١}$

٩) $\lim\limits_{س \to ٣} \left(\frac{١}{\sqrt{س^{٢}-س}}-\frac{١}{\sqrt{٦}}\right)\left(\frac{٢}{س-٣}\right)$

١٠) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١}{س}\left(\frac{١}{\sqrt{١+س}}-١\right)$

١١) $\lim_{س \to ١} \dfrac{\left|\dfrac{٣}{س+٥}\right| - \dfrac{١}{٢}}{س^{٢} - ١}$

١٢) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{٤^{س+١} - ٤}{١٦^{س} - ١}$

١٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{جا^{٢}س - جا^{٢}٢س}{٢س - \dfrac{\pi}{٢}}$

١٤) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{س + جا(\pi - ٢س)}{(س+١)^{٢} - ١}$

١٥) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{٢ - جتا٤س - جتا٢س}{س + ١}$

١٦) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{١ - ٢جا٢س - جتا٢س}{س^{٢}}$

١٧) $\lim_{س \to ١} \dfrac{س - س^{٢} - جا(\sqrt[٣]{س} - ١)}{س^{٢} - ١}$

١٨) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{١ - ظاس}{جتاس - جاس}$

١٩) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{ظا٢س}{٧س^{٢} + ١٢س}$

٢٠) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{٢ - جتا٤س - جتا٢س}{س^{٢} + س}$

السؤال الثاني : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{|٣ - س|}{٣ - س} ، & س > ٣ \\ [٣ - ٤] ، & س \leq ٣ \end{cases}$ و

هـ(س) $= \begin{cases} س^2 ، & س < 3 \\ س^2 + 3 ، & س \geq 3 \end{cases}$ إبحث في إتصال الإقتران ل(س)= ق(س) + هـ(س) عند س = ٢

السؤال الثالث : إذا كان ق(س) $= \begin{cases} س^2 + 4 ، & س < 3 \\ 3س + 4 ، & س \geq 3 \end{cases}$ إبحث في إتصال الإقتران ق(س) عند س = ٣

السؤال الرابع : إذا كان ق(س) $= \begin{cases} \dfrac{|س - 2|}{س^2 - 4} ، & س < 2 \\ \dfrac{[س + 2]}{2} ، & س \geq 2 \end{cases}$ إبحث في إتصال الإقتران ق(س) عند

١. س = ٢ ٢. على ح

السؤال الخامس : إذا كان ق(س) $= \begin{cases} س^3 + س^2 ، & س < 2 \\ [س + 3] ، & س = 2 \\ \sqrt{س^2 + 5} ، & س = 2 \end{cases}$ إبحث في اتصال الإقتران ق(س) عند س = ٢

السؤال السادس : إذا كان ق(س) $= \begin{cases} \dfrac{1 - \text{جتا}^2(\text{ب}س) - س^2}{س\,\text{جا}2س} ، & \dfrac{-\pi}{4} < س < 0 \\ 2 ، & س = 0 \\ \dfrac{س^2 - (\text{أ} - 1)س}{\text{أ}س} ، & 0 < س \leq 2 \end{cases}$

متصل عند س=٠ أوجد قيمة أ و ب

السؤال السابع : إذا كان ق(س) $= \begin{cases} [س + 2] ، & س = 1 \\ 3س + \text{جا}\dfrac{\pi}{س} ، & 1 < س < 2 \\ |5س - 3| ، & س = 2 \\ س^3 - 1 ، & س > 2 \end{cases}$ إبحث في إتصال الإقتران ق(س) على الفترة (١، ∞)

السؤال الثامن : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} |س^{٢} - ٤| ، & -٤ < س < ١ \\ \left[\frac{س}{٣} - ٣\right] ، & ١ \le س \le ٦ \end{cases}$ إبحث في إتصال

الإقتران ق(س)على الفترة (٤،٦]

السؤال التاسع : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س + ١} ، & ٠ \le س < ٣ \\ \left[\frac{س}{٥} + ٢\right] ، & ٣ \le س < ٦ \\ |٩ - س| ، & س = ٦ \end{cases}$ إبحث في إتصال

الإقتران ق(س) على الفترة [٠،٦]

إنتهت

مع أمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

الأستاذ محمد الصقور