الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

قواعد التكامل

١) $\int P\,dس = Pس + ج$

مثال: $\int ٢\,dس = ٢س + ج$

$\int ٥\,dس = ٥س + ج$

$\int ٣ن\,dن = ٣ن + ج$

٢) $\int س^{ن}\,dس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ج$

مثال ١) $\int س\,dس = \frac{س^{٢}}{٢} + ج$

٣) $\int ٤س^{٣}\,dس = \frac{٤س^{٤}}{٤} + ج = س^{٤} + ج$

٤) $\int \sqrt{س}\,dس = \int س^{\frac{١}{٢}}\,dس$

$= \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ج = \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ج$

٥) $\int (٢س^{٣} + \sqrt[٣]{س})\,dس$

$= \int (٢س^{٣} + س^{\frac{١}{٣}})\,dس$

$= \frac{٢}{٤}س^{٤} + \frac{س^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + ج$

$= \frac{١}{٢}س^{٤} + \frac{٣}{٤}س^{\frac{٤}{٣}} + ج$

٦) $\int (٥س^{٤} + ٤س^{٣} + ٣س^{٢} + ٦س + ٧)\,dس$

$= \frac{٥}{٥}س^{٥} + \frac{٤}{٤}س^{٤} + \frac{٣}{٣}س^{٣} + \frac{٦}{٢}س^{٢} + ٧س + ج$

$= س^{٥} + س^{٤} + س^{٣} + ٣س^{٢} + ٧س + ج$

٧) $\int \frac{٥س^{٤} + ٤س^{٣} + ٣س^{٢}}{س^{٣}}\,dس$ بتوزيع

$= \int (٥س + ٤ + ٣س^{-١})\,dس$

$= \frac{٥}{٢}س^{٢} + ٤س + \frac{٣}{-١}س^{-١} + ج$

$= \frac{٥}{٢}س^{٢} + ٤س + ٣س^{-١} + ج$

التكامل المحدود

$\int_{ا}^{ب} م\,dس = م(ب - ا)$

مثال: $\int_{-٤}^{٢} ٣\,dس = ٣(٢ - (-٤)) = ٣٦$

مثال: $\int_{٠}^{\pi} جا س + جتا س\,dس = [-جتا س + جا س]_{٠}^{\pi}$

$= (-جتا \pi + جا \pi) - (-جتا ٠ + جا ٠)$

$= (١ + ٠) - (-١ + ٠) = ١ + ١ = ٢$

$\int_{ا}^{ب} س^{ن}\,dس = \left[\frac{س^{ن+١}}{ن+١}\right]_{ا}^{ب}$

$= \frac{(ب)^{ن+١}}{ن+١} - \frac{(ا)^{ن+١}}{ن+١}$

مثال $\int_{١}^{٣} س^{٣}\,dس = \left[\frac{س^{٤}}{٤}\right]_{١}^{٣} = س^{٤}\Big|_{١}^{٣}$

$= (٣)^{٤} - (١)^{٤} = ٨١ - ١ = ٨٠$

مثال $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{س^{٢}}\,dس = \int_{٢}^{٤} س^{-٢}\,dس = \left[\frac{س^{-١}}{-١}\right]_{٢}^{٤}$

$= \frac{(٤)^{-١}}{-١} - \frac{(٢)^{-١}}{-١}$

ملاحظات:

١) في التكامل المحدود دائماً P أقل من ب

٢) إذا كان ب أقل من P وطبقنا المحدد التكامل نعكس إشارة الجواب.

مثال: إذا كان $\int_{٥}^{٠} م\,dس = -١٢$ فما قيمة م

$\int_{٥}^{٠} م\,dس = م(٠ - ٥) = -١٢$

$-٥م = -١٢ \leftarrow م = \frac{-١٢}{-٥} = ٢\frac{٣}{٥}$

خاصية الاضافة

$\int_{ا}^{ج} هـ\,dس = \int_{ا}^{ب} هـ\,dس + \int_{ب}^{ج} هـ\,dس$

مثال: إذا كان $\int_{١}^{٢} هـ\,dس = ٩$ ، $\int_{١}^{٥} هـ\,dس = ١١$

فإن $\int_{٢}^{٥} هـ\,dس = \int_{١}^{٥} هـ\,dس - \int_{١}^{٢} هـ\,dس$

$= ١١ - ٩ = ٢$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٢) اذا كان $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & 0\le x<2 \\ x^2 & 2\le x\le 3 \end{cases}$

اجد $\int_1^3 f(x)\,dx$

الحل $\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx$

$=\int_1^2 (2x+1)\,dx+\int_2^3 x^2\,dx$

$=\left[x^2+x\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3$

$=(4+2)-(1+1)+(9-\frac{8}{3})$

$=4+\frac{19}{3}=\frac{31}{3}$

٣) اذا كان $f(x)=|x+1|$ ، $x\in[-3,2]$

اجد $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$

الحل: $|x+1|$ ← نعيد التعريف

$x=-1$ ← -3 | -1 | 2 | − | + |

$=\begin{cases} -x-1 & -3\le x<-1 \\ x+1 & -1\le x\le 2 \end{cases}$

$=\int_{-3}^{-1}(-x-1)\,dx+\int_{-1}^{2}(x+1)\,dx$

$=\left[-\frac{x^2}{2}-x\right]_{-3}^{-1}+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{2}$

$=(\frac{1}{2}-1)-(-\frac{9}{2}+3)+(2+2)-(\frac{1}{2}-1)=\frac{17}{2}$

٤) $\int_0^5 [\frac{1}{2}x+1]\,dx$

نعيد التعريف $[\frac{1}{2}x+1]$

← $0\le x<2$ ، $2\le x<4$ ، $4\le x<5$

$=\begin{cases} 1 & 0\le x<2 \\ 2 & 2\le x<4 \\ 3 & 4\le x<5 \end{cases}$

$=\int_0^2 1\,dx+\int_2^4 2\,dx+\int_4^5 3\,dx$

$=1(2-0)+2(4-2)+3(5-4)=7$

٥) $\int_1^2 (\int_1^x (3t+2)\,dt)\,dx$

الحل نبدأ بـ $\int_1^x (3t+2)\,dt=\left|\frac{3t^2}{2}+2t\right|_1^x$

$=\frac{3}{2}x^2+2x-(\frac{3}{2}+2)$

$=\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{7}{2}$

اكمل: $\int_1^2 (\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{7}{2})\,dx$

$=\left|\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{7}{2}x\right|_1^2$

$=(4+4-7)-(\frac{1}{2}+1-\frac{7}{2})=\frac{3}{2}$

٦) اذا كان $\int_0^5 f(x)\,dx=6$ ، $\int_0^8 f(x)\,dx=14$

فما قيمة $\int_5^8 f(x)\,dx$

الحل: $\int_0^8 f(x)\,dx=\int_0^5 f(x)\,dx+\int_5^8 f(x)\,dx$

$14=6+\int_5^8$

$\int_5^8=8$

$\int_0^7 2f(x)\,dx=2\times 8=16$

٧) $\int_2^2 5x\,dx=$ صفر

٨) $\int_{-2}^{-2} 8x^3+9x\,dx=$ صفر

٩) $\int_1^c 2x^2+bx\,dx=$ صفر عندما $c=$

$=\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_1^c$

$(\frac{2}{3}c^3+\frac{b}{2}c^2)-(\frac{2}{3}+\frac{b}{2})=$ صفر

$\frac{2}{3}c^3+\frac{3}{2}bc^2-\frac{2}{3}-\frac{b}{2}=$ صفر $\times 3$

$2c^3+9bc^2-11=$ صفر

بالتجريب $c=1$ ← قسمة تركيبية

	$2c^3$	$9bc^2$	-11
1 ↓	2	11	0
	2	11	11

$(c-1)(2c^2+11c+11)=$ صفر

المميز $=b^2-4ac=121-4\times2\times11$

$=33$

وبما ان درجة المقام $=2$ ← $\frac{-b\pm\sqrt{\text{المميز}}}{2a}=\frac{-11\pm\sqrt{33}}{4}$

قيم $c=\{1,\frac{-11\pm\sqrt{33}}{4}\}$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١٠ $\int_2^6 3f(x)dx = 15$ و $\int_2^5 f(x)dx = 3$

فما قيمة $\int_5^6 f(x)dx$

الحل: $\int_2^6 3f(x)dx = 15 \Leftarrow \int_2^6 f(x)dx = 5$

المطلوب: $\int_5^6 f(x)dx = \int_2^6 f(x)dx - \int_2^5 f(x)dx$

$= 5 - 3 = 2$

١١ $\int_1^3 (2x^2 + 4x + 3)dx = -20$

فما قيمة b

الحل: $\int_1^3 (2x^2 + 4x + 3)dx = \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 3x\right]_1^3$

$= \left(\frac{2b^3}{3} + 2b^2 + 3b\right) - \left(\frac{2}{3} + 2 + 3\right) = -20$

$\frac{2b^3}{3} + 2b^2 + 3b + \frac{1}{3} + 5 = -20$

$\frac{2b^3}{3} + 2b^2 + 3b + \frac{16}{3} = 0$

$2b^3 + 6b^2 + 9b + 16 = 0$

$(b+1)(2b^2 + 4b + 16) = 0$

$b = -1$ أو $2b^2 + 4b + 16 = 0$ (مرفوض)

١٢ اذا كانت $\int_1^4 f(x)dx = 8$ و $\int_1^4 g(x)dx = 12$

فما قيمة $\int_1^4 [2g(x) - 3f(x) - 8]dx$

الحل: $\int_1^4 g(x)dx = 12 \Leftarrow \int_1^4 g(x)dx = 3$

المطلوب: $2\int_1^4 g(x)dx - 3\int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 8dx$

$= 2 \times 12 - 3 \times 8 - 8(4-1) = -24$

١٣ اذا كانت $f = \begin{cases} 6-2x & , x \le 3 \\ x^2 & , x > 3 \end{cases}$

وكان $\int_{-3}^{5} f(x)dx = 8$ فما قيمة p (واجب)

خاصية المقارنة

١ اذا كانت $f(x) \ge g(x)$ على $[p, b]$

$\Leftarrow \int_p^b f(x)dx \ge \int_p^b g(x)dx$

٢ اذا كانت $f(x)$ موجبة على $[p, b]$

فإنه تكاملها موجب على نفس الفترة.

٣ اذا كانت $f(x)$ سالبة على $[p, b]$

فإنه تكاملها سالب على نفس الفترة.

٤ تستخدم المقارنة في الحالات التالية:

١ معرفة اشارة التكامل.

٢ معرفة اي التكاملات أكبر

٣ ايجاد اصغر واكبر قيمة للتكامل.

١ أيهما أكبر $\int_1^4 (x^2 + 1)dx$ أم $\int_1^4 (x^2 + 3)dx$

الحل: $x^2 + 1 < x^2 + 3$

$\int_1^4 (x^2 + 1)dx < \int_1^4 (x^2 + 3)dx$ الأكبر.

٢ اثبت أن $\int_1^3 \sin x dx \le \int_1^3 x^2 dx$

الحل: $x \ge \sin x$ على $[1, 3]$

$\Leftarrow \int_1^3 \sin x dx \le \int_1^3 x^2 dx$

٣ ايهما أكبر $\int_1^3 \sin x dx$ أم $\int_1^3 x^2 dx$

الحل: $x^2 \ge x$ على $[1, 3]$

$\Leftarrow \int_1^3 x^2 dx \ge \int_1^3 \sin x dx$

٤ ليكن $f(x) = \frac{5x+2}{x^2+3}$, $x \in [0, 2]$

صار اشارة $\int_0^2 f(x)dx$

الحل: - نعلم أن $x^2 + 3 > 0$ لكل $x \in [0, 2]$

وأن $5x + 2 > 0$ لكل $x \in [0, 2]$

اذاً $\frac{5x+2}{x^2+3} > 0$ لكل $x \in [0, 2]$

$\Leftarrow$ اشارة $\int_0^2 \frac{5x+2}{x^2+3}dx$ موجب

٥ صار اشارة $\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+3}dx$ (واجب)

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٦ بدون حساب التكامل جد قيمة $\int_{-1}^{1} (س^٣ - ٤س)\,د س$

الحل: نجد اشارة $س^٣ - ٤س$ على $[-١، ١]$

$س^٣ - ٤س = ٠$

$س(س^٢ - ٤) = ٠$

$س = ٠ ، \pm ٢$

	-١		٠		١
$س$	$-$	$-$	٠	$+$	$+$
$س^٢ - ٤$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$س^٣ - ٤س$	$+$	$+$	٠	$-$	$-$

لان $س^٣ - ٤س$ سالبة على $[-١، ١]$

$\Rightarrow \int_{-١}^{١} (س^٣ - ٤س)\,د س$ = سالب المساحة

٧ بين أن $\int_{١}^{٢} \frac{١}{١ - س^٤}\,د س$ ينحصر بين العددين صفر ، ٢

الحل:- نجد القيم الصغرى والعظمى حيث

$هـ(س) = \frac{١}{١ - س^٤}$ على $[-١، ١]$

$هـ'(س) = \frac{-(-٤س^٣)}{(١ - س^٤)^٢} = صفر$

$٤س^٣ = ٠ \Leftarrow س = ٠$ وهي ضمن الفترة

اختبار الفترات $س = -٠.٥$ ، $س = ٠.٥$

اختبار الحدود $س = -١$ ، $س = ١$

	-١		٠		١
$هـ'(س)$	$+$	$+$	٠	$-$	$-$
$هـ(س)$	$\nearrow$	$\nearrow$	قيمة عظمى	$\searrow$	$\searrow$

المرجعة $= \{-١، ١، ٠\}$

$هـ(٠) = ١ \Leftarrow$ أكبر قيمة

$هـ(١) = ٠ \Leftarrow$ أصغر قيمة

$هـ(-١) = ٠$

$\Leftarrow ٠ \le هـ(س) \le ١$ لكل $س \in [-١، ١]$

$\int_{-١}^{١} ٠\,د س \le \int_{-١}^{١} \frac{١}{١ - س^٤}\,د س \le \int_{-١}^{١} ١\,د س$

$صفر \le \int_{-١}^{١} \frac{١}{١ - س^٤}\,د س \le ٢$

٨ اثبت أنه $صفر \le \int_{٣}^{٤} \frac{١}{٩ - س^٢}\,د س \le ١$ واجب

٩ بين أن $٦ \le \int_{١}^{٤} (٣جاس + ٥)\,د س \le ٢٤$

الحل: $-١ \le جاس \le ١$

$(-١ \le جاس \le ١) \times ٣$

$(-٣ \le ٣جاس \le ٣) + ٥$

$٢ \le ٣جاس + ٥ \le ٨$

$\int_{١}^{٤} ٢\,د س \le \int_{١}^{٤} (٣جاس + ٥)\,د س \le \int_{١}^{٤} ٨\,د س$

$٦ \le \int_{١}^{٤} (٣جاس + ٥)\,د س \le ٢٤$

١٠ بين أنه $\int_{صفر}^{١} س^{٣٠} \sqrt{١ + س^٤}\,د س$ ينحصر بين الصفر و $\frac{١}{٣١}$

الحل: $٠ \le س \le ١$

$٠ \le س^٣ \le ١$ ---①

$٠ \le س^{٣٠} \le ١$

$(٠ \le س^{٣٠} \le ١) + ١$

$١ \le ١ + س^{٣٠} \le ٢$ نأخذ الجذر

$١ \le \sqrt{١ + س^{٣٠}} \le \sqrt{٢}$ ---②

اضرب المعادلة ① في ②

$٠ \le س^{٣٠} \sqrt{١ + س^٤} \le \sqrt{٢} س^٣$ نكامل $[٠، ١]$

$\int_{٠}^{١} ٠\,د س \le \int_{٠}^{١} س^{٣٠} \sqrt{١ + س^٤}\,د س \le \int_{٠}^{١} \sqrt{٢} س^٣\,د س$

$صفر \le \int_{٠}^{١} س^{٣٠} \sqrt{١ + س^٤}\,د س \le \frac{\sqrt{٢}}{٤} س^٤ \Big|_{٠}^{١}$

$صفر \le \int_{٠}^{١} س^{٣٠} \sqrt{١ + س^٤}\,د س \le \frac{١}{٣١}$

١١ اذا كانت $هـ(س) = \begin{cases} \frac{ق}{ق - ١}(١ - س) & ٠ \le س < ق \\ \frac{ق}{ق - ١}(١ - س) & ق \le س \le ١ \end{cases}$

اثبت أن $\int_{٠}^{١} هـ(س)\,د س$ يكون عدد ثابت حيث $ق > ١$ ، $ق < ٠$

الحل: $\int_{٠}^{١} هـ(س)\,د س = \int_{٠}^{ق} \frac{ق}{ق - ١}(١ - س)\,د س + \int_{ق}^{١} \frac{ق}{ق - ١}(١ - س)\,د س$

$= \frac{ق}{ق - ١} \left| ١س - \frac{س^٢}{٢} \right|_{٠}^{ق} + \frac{ق}{ق - ١} \left| ١س - \frac{س^٢}{٢} \right|_{ق}^{١}$

$= \frac{ق}{ق - ١} \left(ق - \frac{ق^٢}{٢} \right) + \frac{ق}{ق - ١} \left((١ - \frac{١}{٢}) - (ق - \frac{ق^٢}{٢}) \right)$

$= \frac{ق^٢}{٢} + \frac{ق}{ق - ١} \left(\frac{١}{٢} - ق + \frac{ق^٢}{٢} \right)$

$= \frac{ق^٢}{٢} - ق + \frac{١}{٢}$ عدد ثابت

١٢ اذا كانت $هـ$ متصلة على $[١، ٥]$

وكان $-٢ \le هـ(س) \le ٤$ لكل $س \in [١، ٥]$

فجد قيمة $م$ ، $ن$ بحيث $م \le \int_{١}^{٥} هـ(س)\,د س \le ن$

الحل:- $-٢ \le هـ(س) \le ٤$

$\int_{١}^{٥} -٢\,د س \le \int_{١}^{٥} هـ(س)\,د س \le \int_{١}^{٥} ٤\,د س$

$-٨ \le \int_{١}^{٥} هـ(س)\,د س \le ١٦ \Leftarrow$ $م = -٨$ ، $ن = ١٦$

١٣ اذا كان $٣ \le هـ(س) \le ٦$ لكل $[٢، ٤]$

فجد قيمة $م$ ، $ن$ بحيث $م \le ٥ - \int_{٢}^{٤} هـ(س)\,د س \le ن$

الحل: $٣ \le هـ(س) \le ٦$ × (-١)

$-٣ \ge -هـ(س) \ge -٦$ نجمع ٥

$٢ \ge ٥ - هـ(س) \ge -١$ نكامل $[٢، ٤]$

$\int_{٢}^{٤} ٢\,د س \ge \int_{٢}^{٤} (٥ - هـ(س))\,د س \ge \int_{٢}^{٤} -١\,د س$

$٤ \ge ٥ - \int_{٢}^{٤} هـ(س)\,د س \ge -٢$

$م = -٢$ ، $ن = ٤$

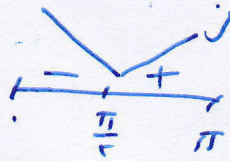
الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١٤ اصغر، اكبر قيمة للمقدار $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -3\sin x\,dx$

الحل $f(x) = -3\sin x$

$f'(x) = -\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$



$x = 0$ قيمة حدية $f(0) = 3$

$x = \frac{\pi}{2}$ = قيمة صغرى $f(\frac{\pi}{2}) = 2$

$x = \pi$ = قيمة عظمى $f(\pi) = 3$

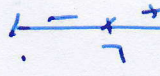
$2 \le -3\sin x \le 3$

$\int_0^{\pi} 2\,dx \le \int_0^{\pi} -3\sin x\,dx \le \int_0^{\pi} 3\,dx$

$2\pi \le \int_0^{\pi} -3\sin x\,dx \le 3\pi$

اكبر قيمة هي 3π

١٥ $\int_1^7 |x-6|\,dx$

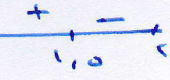


$= \int_1^6 -x+6\,dx + \int_6^7 x-6\,dx$

$= (6(6)-\frac{6^2}{2}) - (6(1)-\frac{1^2}{2}) + (\frac{7^2}{2}-6(7)) - (\frac{6^2}{2}-6(6)) = 20$

١٦ $\int_{-1}^{2} |3-2x|\,dx$

$3-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} = 1.5$



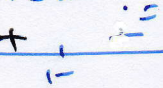
$= \int_{-1}^{1.5} 3-2x\,dx + \int_{1.5}^{2} 2x-3\,dx$

$= 3x-x^2\Big|_{-1}^{1.5} + x^2-3x\Big|_{1.5}^{2} = \ldots = 6.5$

١٧ $\int_{-2}^{3} |x(x-3)|\,dx$

$x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, 3$

$(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3, -1$



$= \int_{-2}^{-1} x^2-3x\,dx + \int_{-1}^{3} -x^2+3x\,dx$

$= \frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{-x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\Big|_{-1}^{3}$

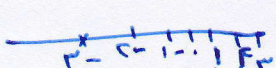
١٨ $\int_{-1}^{2} 3|x|\,dx$ ... واجب

الجواب $= 7$

١٩ $\int_{-1}^{2} x^2+3-|x-1|\,dx$ واجب

الجواب بكرة

٢٠ $\int_1^3 [x+3]\,dx$

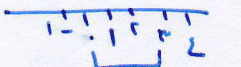


$\int_1^3 [x+3]\,dx$

$\int_1^2 4\,dx + \int_2^3 5\,dx = 4(2-1) + 5(3-2)$

$= 4\times1 + 5\times1 = 9$

٢١ $\int_0^3 [-x^2]\,dx$



$f = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ -1, & 1 \le x < 2 \\ -4, & 2 \le x < 3 \end{cases}$

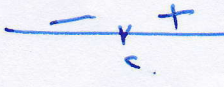
$\int_0^1 0\,dx + \int_1^2 -1\,dx + \int_2^3 -4\,dx$

$= 0(1-0) + -1(2-1) + -4(3-2) = -5$ = المطلوب

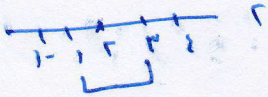
٢٢ $\int_2^3 x[x+3]\,dx$ واجب

٢٣ $\int_1^3 2x-[-x]\,dx$ واجب

٢٤ $\int_1^3 |x-2| + [2-x]\,dx$



$|x-2|$



$[2-x] \Rightarrow$ دل $= 1$ / x

$\begin{cases} 1, & 1 \le x < 2 \\ 0, & 2 \le x < 3 \end{cases}$

$\begin{cases} -x+2, & 1 \le x < 2 \\ -x+3, & 2 \le x < 3 \end{cases}$

$f = \int_1^2 2-x\,dx + \int_2^3 3-x\,dx$

$= 2x-\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + 3x-\frac{x^2}{2}\Big|_2^3 = \ldots =$ المطلوب

٢٥ اثبت انه $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx \le$ المطلوب

الحل: $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ لكل $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$0 \le \tan x \le 1$ $\quad [0, \frac{\pi}{4}]$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx \le$ المطلوب

٢٦ اذا كان $f = \begin{cases} x^3, & -2 \le x \le 1 \\ 3, & 1 < x \le 3 \end{cases}$

وكان $\int_0^3 f(x)\,dx = 10$ ، $\int_0^1 x^3\,dx = a$ فما قيمة b؟

الحل: $\int_0^3 x^3\,dx + \int_1^3 3\,dx = 10 \Rightarrow a + 3b - 3 = 10$

$a + 3b = 13$

$\frac{1}{4} + 3b = 13 \Rightarrow 3b = 12\frac{3}{4} \Rightarrow b = 4\frac{1}{4}$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

الاقتران البدائي م(س)

مثلاً: اذا كانه هـ = ٢س وكان
م١(س) = س^٢ + ١
م٢(س) = س^٢ - ٤
م٣ = س^٢ + ٤
فإنه م١ = م٢ = م٣ = هـ(س) = ٢س
اذاً م١ ، م٢ ، م٣ في ثلاث اقترانات بدائية لـ هـ

⇐ مشتقة الاقتران البدائي = الاقتران الاصلي
م' (س) = هـ(س)

⇐ تكامل الاقتران الاصلي = الاقتران البدائي
∫ هـ(س) = م(س)

⇐ اذا كانه م(س) بدائي لـ هـ(س) فإنه
∫_ب^أ هـ(س) دس = م(ب) - م(أ)

١ اذا كانه م(س) = س^٢ + ٤س هو البدائي للاقتران هـ فجد هـ(١).
الحل: هـ(س) = م'(س) = ٢س + ٤
هـ = ٢س + ٤ ⇐ هـ(١) = ٢×١ + ٤ = ٦

٢ اجد الاقتران البدائي للاقتران هـ = ٣س^٢ + ٢س
الحل م(س) = ∫ هـ(س) دس
= ∫ ٣س^٢ + ٢س دس
= ٣س^٣/٣ + ٢س^٢/٢ + جـ

٣ اجد الاقتران البدائي للاقتران هـ = س^٢ + ١
س ∈ [-١، ٢]
الحل:
م(س) = ∫ هـ(س) دس
= ∫ س^٢ + ١ دس
= س^٣/٣ + س |_{-١}^{٢} = (٨/٣ + ٢) - (-١/٣ - ١) = ٢٢/٣

٤ اذا كان م(س) بدائي للاقتران هـ(س) بحيث م(١) = ٣ ، م(٤) = ٩ فجد ∫_١^٤ هـ(س) دس
الحل = ∫_١^٤ هـ(س) = م(٤) - م(١)
= ٩ - ٣ = ٦

٥ اذا كان م(س) = √(س^٣ + ٩) فجد ∫_٠^٣ هـ(س) دس
الحل: ∫_٠^٣ هـ(س) دس = م(٣) - م(٠)
= √(٣٦) - √٩ = ٦ - ٣ = ٣

٦ اذا كان م(س) اقتران بدائي لـ هـ(س) وكان م(٢) = -٣ ، م(٥) = ٤ فجد ∫_٢^٥ (٣هـ(س) + ٤) دس
الحل: ∫_٢^٥ (٣هـ(س) + ٤) دس = ٣∫_٢^٥ هـ(س) دس + ٤س |_٢^٥
= ٣(م(٥) - م(٢)) + ٤(٥ - ٢)
= ٣(٤ - (-٣)) + ٤(٣)
= ٢١ + ١٢ = ٣٣

٧ اذا كان م(س) بدائي للاقتران هـ وكان
م(س) = س^٣ + ٢س + جـ ، ∫_١^٣ هـ(س) دس = ٤٢
الحل: ∫_١^٣ هـ(س) دس = م(٣) - م(١)
= (٣^٣ + ٢×٣^٢ + جـ) - (١^٣ + ٢×١ + جـ)
= (٤٥ + جـ) - (٣ + جـ)
٤٥ + جـ - ٣ - جـ = ٤٢ ⇐ ٤٢ = ٤٢

٨ اذا كانه هـ(س) = أس + ب وكان
م(س) بدائي لـ هـ(س) حيث
م(٢) = ٧ ، م(٢) = ٢ فجد أ ، ب.
الحل: م(س) = هـ(س) = أس + ب
م(٢) = ٢أ + ب = ٧ ——— ①
م(٢) = هـ(س) = أ
لكنه م(٢) = ٢ ⇐ أ = ٢ ⇐ ب = ٣

٩ اذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين بدائيان للاقتران هـ(س) وكان
∫_١^٣ (م - هـ) دس = ١٢ فجد ∫_١^٣ ٣(م - هـ) دس
الحل: نفرض م - هـ = جـ ، جـ ثابت
⇐ ∫_١^٣ م - هـ دس = ∫_١^٣ جـ دس = ١٢
جـ(٣ - ١) = ١٢ ⇐ جـ = ٦
∫_١^٣ ٣س^٢ × جـ دس = ٣∫_١^٣ س^٢ دس = ٣(س^٣/٣)|_١^٣ = ٣(٢٧/٣ - ١/٣) = ٣(٢٦/٣) = ٢٦

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

متطابقات هامة

$جا^2س + جتا^2س = 1$

$2جاس جتاس = جا2س$

$جتا^2س - جا^2س = جتا2س$

$1 + ظا^2س = قا^2س$

$1 + ظتا^2س = قتا^2س$

$\frac{1}{2}(1 - جتا2س) = جا^2س$

$\frac{1}{2}(1 + جتا2س) = جتا^2س$

قواعد التكامل

الاعتيادية	تكامل
جاس	$-$جتاس
جتاس	جاس
قاس ظاس	قاس
قتاس ظتاس	$-$قتاس
$قا^2س$	ظاس
$قتا^2س$	$-$ظتاس

قاعدة ١: $\int (ام س+ب)^ن دس = \frac{(ام س+ب)^{ن+1}}{م(ن+1)} + ج$

وكذلك باقي النسب المثلثية.

أمثلة:-

① $\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} جاس دس = \frac{1}{2}[-جتاس]_{0}^{\pi} = \frac{1}{2}(-(-1)-1) = 1$

② $\int (1 + ظا^2س) دس = \int قا^2س دس = ظاس + ج$

③ $\int قتا\frac{1}{3}ن ظتا\frac{1}{3}ن دن = \frac{-قتا\frac{1}{3}ن}{\frac{1}{3}} + ج$

④ $\int جا^2س + جتا^2س دس = \int \frac{جتا2س}{2} + \frac{جا4س}{4} + ج$

⑤ $\int جا^2س دس$

$= \int \frac{1}{2}(1 - جتا2س) دس$

$= \frac{1}{2}(س - \frac{جا2س}{2}) + ج$

⑥ $\int جتا^2س دس = \int \frac{1}{2}(1 + جتا2س) دس$

$= \frac{1}{2}(س + \frac{جا2س}{2}) + ج$

⑦ $\int 5جاس + 6جتاس ظتاس دس$

$= -5جاس - 3قتاس + ج$

⑧ $\int س^2 + 3قتا^2س دس$

$= \frac{س^3}{3} - 3ظتاس + ج$

⑨ $\int جا^2س + جتا^2س دس = \int 1 دس = س + ج$

⑩ $\int قاس (قاس + ظاس) دس$

$= \int قا^2س + قاس ظاس دس$

$= ظاس + قاس + ج$

⑪ $\int (جاس + جتاس)^2 دس$

$= \int جا^2س + 2جتاس جاس + جتا^2س دس$

$= \int 1 + 2جتاس جاس دس$

$= \int 1 + جا2س دس = س - \frac{1}{2}جتا2س + ج$

⑫ $\int \frac{قاس}{جتاس} دس = \int قاس . قاس دس = \int قا^2س دس$

$= ظاس + ج$

⑬ $\int جا3س + جتا(5س+2) + قا^2س ظاس دس$

$= -\frac{1}{3}جتا3س + \frac{1}{5}جا(5س+2) + \frac{1}{2}قا^2س + ج$

⑭ $\int قتا^4س دس = -\frac{1}{4}ظتا^4س + ج$

⑮ $\int \frac{جا^2س}{جا^3س \times جتاس} دس$

$= \int \frac{2جاس \cancel{جتاس}}{جا^3س . \cancel{جتاس}} دس = \int \frac{2جاس}{جا^3س} دس$

$= \int 2قتا^2س دس = -2ظتاس + ج$

⑯ $\int \frac{جتا^2س}{جا^3س جتاس} دس$

$= \int \frac{جتا^2س - جا^2س}{جا^3س جتاس} دس = \int \frac{\cancel{جتا^2س}}{جا^3س \cancel{جتاس}} - \frac{\cancel{جا^2س}}{\cancel{جا^3س} \cancel{جتاس}}$

$= \int \frac{1}{جا^3س} - \frac{1}{جتاس} دس = \int قتا^2س - قاس دس$

$= -ظتاس - ظاس + ج$

⑰ $\int \frac{جا^3س - 5}{1 - جتا^2س} دس$

$= \int \frac{جا^3س - 5}{جا^2س} دس = \int \frac{جا^3س}{جا^2س} - \frac{5}{جا^2س} دس$

$= \int جاس - 5قتا^2س دس = -جتاس + 5ظتاس + ج$

الاستاذ
ایاد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١٨ $\int \frac{1-\text{جا}^2 س}{\text{جا}س - \text{جتا}س}$ دس

$= \int \frac{\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س - 2\text{جا}س\text{جتا}س}{\text{جا}س - \text{جتا}س}$ دس

$= \int \frac{(\text{جا}س - \text{جتا}س)(\text{جا}س - \text{جتا}س)}{(\text{جا}س - \text{جتا}س)}$ دس

$= \int (\text{جا}س - \text{جتا}س)$ دس $= -\text{جتا}س - \text{جا}س + ج$

١٩ $\int \frac{\text{جا}^3 س}{1-\text{جتا}س}$ دس

$= \int \frac{1-\text{جتا}^2 س}{1-\text{جتا}س}$ دس $= \int \frac{(1-\text{جتا}س)(1+\text{جتا}س)}{1-\text{جتا}س}$ دس

$= \int (1+\text{جتا}س)$ دس $= س + \text{جا}س + ج$

٢٠ $\int \frac{2}{1-\text{جتا}^2 س}$ دس

$= \int \frac{2}{1-(1-2\text{جا}^2 س)}$ دس $= \int \frac{2}{2\text{جا}^2 س}$ دس

$\int \frac{1}{\text{جا}^2 س}$ دس $= \int \text{قا}^2 س$ دس $= \text{ظا}س + ج$

٢١ $\int \text{ظا}^2 س$ دس $= \int \text{قا}^2 س - 1$ دس $= \text{ظا}س - س + ج$

٢٢ $\int (\text{قا}س + \text{ظا}س)^2$ دس

$= \int \text{قا}^2 س + 2\text{قا}س\text{ظا}س + \text{ظا}^2 س$ دس

$= \int \text{قا}^2 س + 2\text{قا}س\text{ظا}س + \text{قا}^2 س - 1$ دس

$= \text{ظا}س + 2\text{قا}س + \text{ظا}س - س + ج$

٢٣ $\int \text{جا}^3 س$ دس

$= \int \frac{1}{2}(1-\text{جتا}2س)$ دس

$= \frac{1}{2}(س - \frac{\text{جا}2س}{2}) + ج$

٢٤ $\int \frac{5}{\text{قتا}^2 س}$ دس

$= \int 5\,\text{جا}^2 س$ دس $= \int 5 \times \frac{1}{2}(1-\text{جتا}2س)$ دس

$= \frac{5}{2}(س - \frac{1}{2}\text{جا}2س) + ج$

٢٥ $\int \text{جتا}^4 3س$ دس

$= \int \frac{1}{2}(1+\text{جتا}6س)$ دس

$= \frac{1}{2}(س + \frac{1}{6}\text{جا}6س) + ج$

٢٦ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 5\,\text{جا}س + 4\,\text{جتا}س$ دس

$= \left| -5\,\text{جتا}س + 4\,\text{جا}س \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= (-5\times 0 + 4\times 1) - (-5\times\frac{1}{\sqrt{2}} + 4\times\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4 + 5 = 9$

٢٧ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 + 3\,\text{ظا}^2 س$ دس $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3(1+\text{ظا}^2 س)$ دس

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3\,\text{قا}^2 س$ دس $= 3\,\text{ظا}س \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 3(\sqrt{3}-1) = 3$

٢٨ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\text{جا}2س}$ دس

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س + 2\text{جا}س\text{جتا}س}$ دس

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\text{جا}س + \text{جتا}س)(\text{جا}س + \text{جتا}س)}$ دس

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\text{جا}س + \text{جتا}س)^2}$ دس $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\text{جا}س + \text{جتا}س|$ دس

بسبب ان $\text{جا}س + \text{جتا}س$ موجب لانها باربع الاول

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}س + \text{جتا}س$ دس $= -\text{جتا}س + \text{جا}س \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$

٢٩ $\int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1+\text{جتا}2س}{2}}$ دس

$= \int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{2+2\,\text{جتا}2س}{2}}$ دس $= \int_{0}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2 س}$ دس

$\int_{0}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2 س}$ دس $= \int_{0}^{\pi} |\text{جتا}س|$ دس.

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}س + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\text{جتا}س$ دس

$= \text{جا}س \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \text{جا}س \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (1-0) - (0-1) = 2$

٣٠ $\int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-\text{جتا}2س}{2}}$ دس

$= \int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-(1-2\text{جا}^2 س)}{2}}$ دس $= \int_{0}^{\pi} \sqrt{\text{جا}^2 س}$ دس

$= \int_{0}^{\pi} |\text{جا}س|$ دس $= \int_{0}^{\pi} \text{جا}س$ دس $+ \int_{\pi}^{2\pi} -\text{جا}س$ دس

$= -\text{جتا}س \Big|_{0}^{\pi} + \text{جتا}س \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(-1-1) + (1-(-1)) = 4$

٣١ اذا كانت $م = \int_{0}^{\pi} \text{جا}^3 س$ دس ، $ن = \int_{0}^{\pi} \text{جتا}^3 س$ دس

فما قيمة $م + ن$

الحل: $م + ن = \int_{0}^{\pi} \text{جا}^3 س + \int_{0}^{\pi} \text{جتا}^3 س$ دس

$= \int_{0}^{\pi} \text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س$ دس $= \int_{0}^{\pi} 1$ دس $= س \Big|_{0}^{\pi} = \pi$

٣٢ اذا كانت $م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2 س$ دس ، $ن = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{ظا}^2 س$ دس

فما قيمة $م - ن$

الحل: $م - ن = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2 س - \text{ظا}^2 س$ دس

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2 س - \text{ظا}^2 س$ دس $= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 1 + \cancel{\text{ظا}^2 س} - \cancel{\text{ظا}^2 س}$ دس

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 1$ دس $= س \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

قاعدة ∫ جا^ن س جتا س دس
نستخدم احدى المتطابقات التالية:
½(١ − جتا٢س) = جا^٢س
½(١ + جتا٢س) = جتا^٢س
٢جاس جتاس = جا٢س

١ ∫ جا^٣س جتا^٤س دس
= ∫(جاس جتاس)^٣ دس = ∫(¼ جا^٣٢س) دس
= ¼ ∫ جا^٣٢س دس
¼ ∫ ½(١ − جتا٤س) دس
⅛ (س − جا٤س/٤) + ج

٢ ∫ جا^٤س دس
= ∫(جا^٢س)^٢ دس = ∫(½(١ − جتا٢س))^٢ دس
= ¼ ∫ ١ − ٢جتا٢س + جتا^٢٢س دس
¼ ∫ ١ − ٢جتا٢س + ½(١ + جتا٤س) دس
¼ (س − ٢جا٢س/٢ + ½(س + جا٤س/٤)) + ج
¼ (س − جا٢س + ½س + جا٤س/٨) + ج
(أو ∫ جتا^٤٢س دس)

٣ ∫ ١ + جاس / جاس + جتاس دس
∫ جا^٣س + جتا^٣س + ٣جاس جتاس / جاس + جتاس دس
= ∫ جا^٣س + ٣جاس جتاس + جتا^٣س / جاس + جتاس دس
= ∫ (جاس + جتاس)(جا^٢س − جاس جتاس + جتا^٢س) / (جاس + جتاس) دس
= ∫ جا^٢س − جاس جتاس + جتا^٢س دس
= ∫ ١ − جاس جتاس دس = س − ½ جا٢س + ج

قاعدة الطرافقة: عندما يكون في المقام ١ ± جا، ١ ± جتا، ١ ± قا ...

١ ∫ ١ / ١ + جتاس دس (نضرب بالمرافقة)
= ∫ ١ / ١ + جتاس × ١ − جتاس / ١ − جتاس دس
= ∫ ١ − جتاس / ١ − جتا^٢س دس = ∫ ١ − جتاس / جا^٢س دس
= ∫ ١ / جا^٢س − جتاس / جا^٢س دس = ∫ قا^٢س − ظاس ظاس دس
= −ظاس + ظاس + ج

٢ ∫ ١ / ١ − جاس دس
∫ ١ / ١ − جاس × ١ + جاس / ١ + جاس دس
∫ ١ + جاس / ١ − جا^٢س دس = ∫ ١ + جاس / جتا^٢س دس
= ∫ ١ / جتا^٢س + ∫ جاس / جتا^٢س
= ∫ قا^٢س + ∫ ظاس قاس دس
= ظا^٢س / ٢ + قاس + ج

متطابقات هامة

١ جاأ جتاب = ½(جا(أ−ب) + جا(أ+ب))
٢ جاأ جاب = ½(جتا(أ−ب) − جتا(أ+ب))
٣ جتاأ جتاب = ½(جتا(أ−ب) + جتا(أ+ب))

٤ ∫ جتا٣س جا٥س دس
= ½ ∫ (جا٢س + جا٨س) دس
½ (−جتا٢س/٢ − جتا٨س/٨) + ج

٥ ∫ جا٥س جتا٢س دس
= ½ ∫ جا(٥س−٢س) + جا(٥س+٢س) دس
= ½ ∫ (جا٣س + جا٧س) دس = ½(−⅓ جتا٣س − ⅐ جتا٧س) + ج

٦ ∫ جا٧س جا٣س دس
= ½ ∫ (جتا٤س − جتا١٠س) دس
= ½ (¼ جا٤س − ⅒ جا١٠س) + ج

٧ ∫ جتا٦س جتا٢س دس
= ½(جتا٨س + جتا٤س) دس = ½(⅛ جا٨س + ¼ جا٤س) + ج

٨ ∫ جتا٨س جتا٢س دس

٩ ∫ جا٥س جا٣س دس

(من تمارين الكتاب)

١ اذا كانت $\int (ق(س) + ٣س^{٢})\,دس = س^{٤} + ٩س^{٣} + ١٢$
وكان $ق(١) = ٧$ ، $ق(١) = ٣$ فما قيمة
① قيمة ٩ ② $ق(٢)$ ③ $ق(٢)$

الحل:
① $\int (ق(س) + ٣س^{٢})\,دس = س^{٤} + ٩س^{٣} + ١٢$
نشتق الطرفين $\Leftarrow ق(س) + ٣س^{٢} = ٤س^{٣} + ٢٧س^{٢}$
لكن $ق(١) = ٧ \Leftarrow ق(١) + ٣(١)^{٢} = ٤(١)^{٣} + ٢٧(١)^{٢}$
$٧ + ٣ = ٤ + ٢٧$
$\boxed{٩ = ٢}$

② $ق(س) + ٣س^{٢} = ٤س^{٣} + ٦س^{٢}$
$ق(س) = ٤س^{٣} + ٦س^{٢} - ٣س^{٢} = ٤س^{٣} + ٣س^{٢}$
$ق(٢) = ٤(٨) + ٣(٤) = ٣٢ + ١٢ = ٤٤$

③ $ه(س) = \int ق(س)\,دس = \int ٤س^{٣} + ٣س^{٢}\,دس$
$ه = س^{٤} + س^{٣} + جـ$ لكن $ه(١) = ٣$
$٣ = ١ + ١ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ١}$
$ه = س^{٤} + س^{٣} + ١ \Leftarrow ه(٢) = ١٦ + ٨ + ١ = ٢٥$

٢ اذا كانت $ه(س) = جاس - جتاس + ٢$
اثبت ان $ه(\frac{\pi}{٢}) - ق(\frac{\pi}{٢}) = ٢$
الحل: نشتق الطرفين
$ه(س) = جتاس + جاس$
$ه(\frac{\pi}{٢}) = ١ + ٠ = ١$
$ق(س) = -جاس + جتاس \Leftarrow ق(\frac{\pi}{٢}) = -١$
المطلوب: $ه(\frac{\pi}{٢}) - ق(\frac{\pi}{٢}) = ١ - (-١) = ٢$

٣ $\int \frac{جتاس}{جاس}\,دس$ واجب

٤ $\int \frac{١ - جاس}{جاس جتاس}\,دس$ $\boxed{\text{بضرب بسط ومقام بجتاس}}$
$\int \frac{جتاس}{\frac{١}{٢} جاس}\,دس = ٢\int ظتاس\,قتاس\,دس$
$= ٢(-قتاس) + جـ$

٥ $\int_{-٢}^{٣} [س - ٢]\,دس$
$= \int_{-٢}^{-١} -١\,دس + \int_{-١}^{٠} ٠\,دس + \int_{٠}^{١} ١\,دس + \int_{١}^{٢} ٢\,دس + \int_{٢}^{٣} ٣\,دس$
$= -١ + ٠ + ١ + ٢ + ٣ = ٥$ أخي

٦ $\int_{٦}^{٨} |س - ٦|\,دس$
$س - ٦ = ٠ \Leftarrow س = ٦$
$= \int_{٦}^{٨} (س - ٦)\,دس + \int_{٦}^{٨} -(س - ٦)\,دس$
$= \frac{س^{٢}}{٢} - ٦س \Big|_{٦}^{٨} + -\frac{س^{٢}}{٢} + ٦س \Big|_{٦}^{٨} = ٢٠$

٧ اذا كان $\int_{١}^{٣} ٢ه(س) + \frac{١}{س}\,دس = ٦ - ٢\ln ٣$
فما قيمة $\int_{١}^{٣} \frac{ه(س)}{س^{٢}} - ٣س^{-٢}\,دس$
الجواب النهائي $= -\frac{١}{٢}$

٨ دون اجراء التكامل بين أن $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جتاس\,دس \geq$ الصفر
الحل: بما أن جتاس متصلة في $[٠, \frac{\pi}{٤}]$
$\Leftarrow \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جتاس\,دس \geq$ الصفر

٩ $\int_{١}^{جـ} [\frac{١}{٣}س + ١]\,دس = ١١$ فما قيمة جـ ؟

$\int_{١}^{٣} ١\,دس + \int_{٣}^{٦} ٢\,دس + \int_{٦}^{جـ} ٣\,دس = ١١$
$٢ + ٦ + ٣(جـ - ٦) = ١١$
$٨ + ٣جـ - ١٨ = ١٢ \Leftarrow \boxed{جـ = ٧}$
وأيضاً

$\int_{١}^{٠} ١\,دس + \int_{٠}^{-٣} ٠\,دس + \int_{-٣}^{-٦} -١\,دس + \int_{-٦}^{-٩} -٢\,دس + \int_{-٩}^{جـ} -٣\,دس = ١١$
$-١ + ٠ + ٣ + ٦ - ٣(جـ + ٩) = ١١$
$\boxed{جـ = -١٠}$

١٠ $\int_{١}^{جـ} [\frac{١}{٢}س + ١]\,دس = ١٧$ فما قيمة جـ ؟
الجواب النهائي $جـ = \frac{١٥}{٢}$

١١ اذا كان $\int_{١}^{٣} ٣ه(س) - ٤\,دس = ٤$ ، $\int_{١}^{٤} ه(س)\,دس = ٦$
فما قيمة $\int_{١}^{٤} ه(س)\,دس$
الجواب النهائي $= \frac{٢}{٣}$