2.000

إضاءات في الرياضيات

Mathematics

توجيهي الفرع العلمي - المستوى الثالث

الوحدة الثالثة:

2016 -17

تطبيقات التفاضل

شاملة أسئلة الكتاب

إعداد المعلم :

محمد قريع

٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

الدرس الأول : تطبيقات هندسية :

تعريف : ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س١، ص١) يساوي المشتقة الأولى للاقتران عند تلك النقطة .

$م|_{س=س١} = قَ(س١)$

⇐ معادلة المماس عند (س١، ص١) هي

ص − ص١ = قَ(س١) (س − س١)

ص − ص١ = م (س − س١)

∴ ميل العمودي على المماس = $\frac{-١}{م}$

∴ معادلة العمودي على المماس هي

ص − ص١ = $\frac{-١}{م}$ (س − س١)

تذكر : م مستقيم × م العمودي = −١

ايضاً : ميل المماس = ظل زاوية ميل المماس

⇐ م = ظا هـ

هـ : الزاوية التي يصنعها المماس مع محور السينات الموجب .

ايضاً : ل١ // ل٢ ⇐ م ل١ = م ل٢

ل١ ⊥ ل٢ ⇐ م ل١ × م ل٢ = −١

المماس يوازي محور السينات ⇐ م = صفر

المماس افقي ⇐ م = صفر

ميل المستقيم المار بالنقطتين (س١، ص١)، (س٢، ص٢)

هو م = $\frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$

مهم { ① نقطة تماس المماس والمنحنى تحقق معادلتي المماس والمنحنى معاً .

② ق(س) ⊥ هـ(س) عند (س١، ص١)

⇐ قَ(س١) × هـَ(س١) = −١

③ اذا تقاطع منحنيان عند نقطة مثل (س١، ص١) فان قيمتهما متساوية عند س١

⇐ ق(س١) = هـ(س١) اذا تقاطع ق(س)، هـ(س) عند (س١، ص١)

④ يكون المماس موازياً لمحور الصادات اذا كان ميله = $\frac{م}{صفر}$ وتكتب معادلته على الصورة س = المقطع السيني للنقطة على المماس .

[redacted] { عند ذكر عبارة نقطة على المماس يجب التأكد ان النقطة نقطة تماس ام لا وذلك بتعويضها في الاقتران فاذا حققت كانت نقطة تماس .

مثال : جد معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى الاقتران ق(س) = س² + ٣ عند النقطة (٣، ١٢) .

الحل : النقطة (٣، ١٢) هي نقطة التماس لانه ق(٣) = ١٢

⇐ م = قَ(س١) = ٢ س١ + ٣

= ٢ × ٣ + ٣ = ٩

المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

معادلة المماس :

$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_1)$

$\text{ص} - ١٢ = ٩\,(\text{س} - ٣)$

$\text{ص} - ١٢ = ٩\text{س} - ٢٧$

$\Leftarrow \text{ص} = ٩\text{س} - ١٥$

$\text{ميل العمودي} = \dfrac{-١}{\text{ميل المماس}} = \dfrac{-١}{٩}$

معادلة العمودي :

$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_1)$

$\text{ص} - ١٢ = \dfrac{-١}{٩}\,(\text{س} - ٣)$

$\text{ص} - ١٢ = \dfrac{-١}{٩}\text{س} + \dfrac{١}{٣}$

$\text{ص} = \dfrac{-١}{٩}\text{س} + \dfrac{١}{٣} + \dfrac{٣٦}{٣}$

$\text{ص} = \dfrac{-١}{٩}\text{س} + \dfrac{٣٧}{٣}$

تدريب (١) ص١٥٤ : جد معادلة المماس والعمودي
على المماس لمنحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{س}}$
عند س = ٢ ؟

الحل : $\text{م} = \text{قَ}(\text{س}) = \dfrac{-١}{\text{س}^2}$

$\text{م} = \text{قَ}(٢) = \dfrac{-١}{٢^2} = \dfrac{-١}{٤}$

$\text{س} = ٢ \Leftarrow \text{ق}(٢) = \dfrac{١}{٢}$

نقطة التماس هي $(٢ ، \dfrac{١}{٢})$

$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_1)$

$\text{ص} - \dfrac{١}{٢} = \dfrac{-١}{٤}\,(\text{س} - ٢)$

$\text{ص} - \dfrac{١}{٢} = \dfrac{-١}{٤}\text{س} + \dfrac{١}{٢}$

$\text{ص} = \dfrac{-١}{٤}\text{س} + ١$

تدريب (٢) ص١٥٥ : بين ان المماسين
لمنحنى $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{س}}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}$
متعامدان عند نقطة تقاطعهما ؟

الحل : $\text{قَ}(\text{س}) = \dfrac{-١}{\text{س}^2}$

$\text{م}_1 = \text{قَ}(\text{س}_1) = \dfrac{-١}{\text{س}^2}$

$\text{هـَ}(\text{س}) = ١$

$\text{م}_2 = \text{هـَ}(\text{س}_1) = ١$

عند نقطة التقاطع $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$

$\Leftarrow \dfrac{١}{\text{س}} = \text{س}$

$\text{س}^2 = ١$

$\text{س} = \pm ١$

عند $\text{س} = ١ \Leftarrow \text{قَ}(١) \times \text{هـَ}(١)$

$= \dfrac{-١}{(١)^2} \times ١ = -١$

$\Leftarrow$ متعامدان

عند $\text{س} = -١ \Leftarrow \text{قَ}(-١) \times \text{هـَ}(-١)$

$= \dfrac{-١}{(-١)^2} \times ١ = -١$

$\Leftarrow$ متعامدان

تدريب (٣) ص١٥٦ : عين الثابت (جـ) حيث
الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{جـ}\text{س}^2$ ، اذا كان
قياس زاوية ميل المماس لمنحنى ق
عند س = ١ هو ٤٥° ؟

الحل : م = ظا هـ

$\Leftarrow \text{م} = \text{ظا}\ ٤٥ = ١$

ايضاً $\text{م} = \text{قَ}(\text{س}) = ٢\text{جـ}\text{س}$

$\text{س} = ١ \Leftarrow \text{م} = \text{قَ}(١) = ٢\text{جـ}$

$\Leftarrow ٢\text{جـ} = ١$

$\Leftarrow \text{جـ} = \dfrac{١}{٢}$

مثال: جد النقاط التي يكون عندها مماس منحنى العلاقة $9س^2 + 16ص^2 = 52$ موازياً المستقيم $9س - 8ص = 1$ ثم جد معادلة المماس عند تلك النقاط؟

الحل نشتق العلاقة ضمنياً

$18س + 32ص \frac{دص}{دس} = صفر$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-18س}{32ص} = \frac{-9س}{16ص}$

افرض نقطة التماس $(س_1، ص_1) \Leftarrow$

$م = \frac{دص}{دس} = \frac{-9س_1}{16ص_1}$

العلاقة والمستقيم متوازيان $\Leftarrow$

$م_{المستقيم} = م_{العلاقة} = \frac{9}{8}$

لدينا معادلة المستقيم $9س - 8ص = 1$

$\frac{8ص}{8} = \frac{9}{8}س - \frac{1}{8}$

$ص = \frac{9}{8}س - \frac{1}{8}$

$\Leftarrow م = معامل\ س = \frac{9}{8}$

$\Leftarrow \frac{-\cancel{9}س_1}{\cancel{16}_2 ص_1} = \frac{\cancel{9}}{\cancel{8}_1} \Leftarrow \boxed{2ص_1 = -س_1}$

$\boxed{ص_1 = -\frac{1}{2}س_1}$

عوض في العلاقة $9س^2 + 16ص^2 = 52$

$9س_1^2 + 16(-\frac{1}{2}س_1)^2 = 52$

$9س_1^2 + 16(\frac{1}{4}س_1^2) = 52$

$9س_1^2 + 4س_1^2 = 52$

$\frac{13س_1^2}{13} = \frac{52}{13}$

$س_1^2 = 4 \Leftarrow س_1 = \mp 2$

$س_1 = 2 \Leftarrow ص_1 = -\frac{1}{2} \times 2 = -1 \Leftarrow (2، -1)$

$س_1 = -2 \Leftarrow ص_1 = -\frac{1}{2} \times -2 = 1 \Leftarrow (-2، 1)$

مماس العلاقة موازي للمستقيم في النقطتين $(2، -1)$، $(-2، 1)$

عند $(2، -1) \Leftarrow ص + 1 = \frac{9}{8}(س - 2)$

$\Leftarrow ص = \frac{9}{8}س - \frac{9}{4} - \frac{4}{4}$

$ص = \frac{9}{8}س - \frac{13}{4}$

عند $(-2، 1) \Leftarrow ص - 1 = \frac{9}{8}(س + 2)$

$ص = \frac{9}{8}س + \frac{9}{4} + \frac{4}{4}$

$ص = \frac{9}{8}س + \frac{13}{4}$

تدريب (4) ص : جد معادلة المماس المرسوم من النقطة $(6، 0)$ لمنحنى العلاقة $س^2 + ص^2 = 18$ ؟

الحل $(6، 0)$ ليست نقطة التماس لأن

$(6)^2 + (0)^2 = 36 \neq 18$

نشتق العلاقة $2س + 2ص \frac{دص}{دس} = صفر$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-2س}{2ص} = \frac{-س}{ص}$

افرض نقطة التماس $(س_1، ص_1)$

$\Leftarrow م = \frac{دص}{دس} = \frac{-س_1}{ص_1}$

أيضاً $م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ ومنها $\overset{س_2\ ص_2}{(6، 0)}$

$\Leftarrow م = \frac{0 - ص_1}{6 - س_1}$

$\Leftarrow \frac{-ص_1}{6 - س_1} = \frac{-س_1}{ص_1}$

$\Leftarrow -ص_1^2 = -6س_1 + س_1^2$

$\Leftarrow ص_1^2 = 6س_1 - س_1^2$

$\Leftarrow ص_1^2 + س_1^2 = 6س_1$

بالتعويض في $س^2 + ص^2 = 18$

$6س_1 = 18 \Leftarrow س_1 = 3$

$ص_1^2 = 6 \times 3 - (3)^2 = 18 - 9$

$ص_1^2 = 9 \Leftarrow ص_1 = \pm 3$

$\Leftarrow$

⇐ (٣، ٣) ، (٣، -٣) نقطتي تماس

عند (٣، ٣) ⇐ $م = \frac{-س_1}{ص_1} = \frac{-٣}{٣} = -١$

$ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ص - ٣ = -١(س - ٣)$

$\boxed{ص = -س + ٦}$ ⇐ مماس

عند (٣، -٣) ⇐ $م = \frac{-س}{ص} = \frac{-٣}{-٣} = ١$

$ص + ٣ = ١(س - ٣)$

$ص + ٣ = س - ٣$

$\boxed{ص = س - ٦}$ ⇐ مماس

تدريب (٥) : بيّن ان لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^2 + ٨$ مماسين مرسومين من النقطة (١، ٥) التي لا تقع عليه .

الحل : افرض $(س_1، ص_1)$ نقطة التماس

$م = ق'(س) = ٢س$

عند $س_1$ ⇐ $م = ق'(س_1) = ٢س_1$

أيضاً $م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ هنا $(س_2، ص_2) = (١، ٥)$

$م = \frac{٥ - ص_1}{١ - س_1}$

⇐ $\frac{٥ - ص_1}{١ - س_1} = ٢س_1$

$٥ - ص_1 = ٢س_1 - ٢س_1^2$

$-ص_1 = ٢س_1 - ٢س_1^2 - ٥$

⇐ $ص_1 = ٢س_1^2 - ٢س_1 + ٥$

بالتعويض في الاقتران

$٢س_1^2 - ٢س_1 + ٥ = س_1^2 + ٨$

⇐ $س_1^2 - ٢س_1 - ٣ = صفر$

$(س_1 - ٣)(س_1 + ١) = ٠$

$س_1 = ٣$ ⇐ $ص_1 = ٢(٣)^2 - ٢(٣) + ٥$

$= ١٨ - ٦ + ٥ = ١٧$

⇐ (٣، ١٧) نقطة تماس

$س_1 = -١$ ⇐ $ص_1 = ٢(-١)^2 - ٢(-١) + ٥$

$= ٢ + ٢ + ٥ = ٩$

⇐ (-١، ٩) نقطة تماس

عند (٣، ١٧) $م = ٢ \times ٣ = ٦$

$ص - ١٧ = ٦(س - ٣)$

$ص = ٦س - ١٨ + ١٧$

$\boxed{ص = ٦س - ١}$ ⇐ مماس ①

عند (-١، ٩) $م = ٢ \times -١ = -٢$

$ص - ٩ = -٢(س + ١)$

$ص = -٢س - ٢ + ٩$

$\boxed{ص = -٢س + ٧}$ ⇐ مماس ②

٢٠١٦ ص : جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة

$(س + ٢ص)^3 - ٤س + ٦ص = ٤٣$

عند نقطة تقاطع منحنى العلاقة مع المستقيم

$٦ص = ٩ - ٣س$

الحل : نشتق العلاقة

$٣(س + ٢ص)^2(١ + ٢\frac{دص}{دس}) - ٤ + ٦\frac{دص}{دس} = صفر$

$٣(س+٢ص)^2 + ٦(س+٢ص)^2\frac{دص}{دس} + ٦\frac{دص}{دس} = ٤$

$\frac{دص}{دس}(٦(س+٢ص)^2 + ٦) = ٤ - ٣(س+٢ص)^2$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٤ - ٣(س+٢ص)^2}{٦(س+٢ص)^2 + ٦}$

النقطة $(س_1، ص_1)$ نقطة التماس

م = دص/دس = (٤ − ٣(س١ + ٢ص١)²) / (٦(س١ + ٢ص١)² + ٦)

لكن ميل العلاقة يتعامد مع المستقيم

⇐ نستخدم التعويض ٣/٣ س١ = ٩/٣ − ٦ص١/٣

⇐ س١ = ٣ − ٢ص١

من المعادلة الخاصة بالمستقيم .

(س + ٢ص)³ − ٤س + ٦ص = ٤٣

(٣ − ٢ص + ٢ص)³ − ٤(٣ − ٢ص) + ٦ص = ٤٣

(٣)³ − ١٢ + ٨ص١ + ٦ص١ = ٤٣

١٥ + ١٤ص١ = ٤٣

⇐ ١٤ص١/١٤ = ٢٨/١٤

⇐ $\boxed{\text{ص}_1 = ٢}$

بالتعويض س١ = ٣ − ٢(٢)

= ٣ − ٤

= −١

$\boxed{\text{س}_1 = -١}$

⇐ نقطة التماس (−١ ، ٢)

م التماس = (٤ − ٣(−١ + ٢×٢)²) / (٦(−١ + ٢×٢)² + ٦)

= (٤ − ٣(٣)²) / (٦(٣)² + ٦) = −٢٣/٦٠

م العمودي = ٦٠/٢٣

ص − ص١ = م (س − س١)

ص − ٢ = ٦٠/٢٣ (س + ١)

ص = ٦٠/٢٣ س + ٦٠/٢٣ + ٤٦/٢٣

ص = ٦٠/٢٣ س + ١٠٤/٢٣

وزارة ٢٠١٤ ش : اذا كان المستقيم

٢س − ص + جـ = صفر يمس منحنى الاقتران

ق(س) = −٢/س ، س ≠ صفر عند النقطة

(س١، ص١) الواقعة على منحناه ، فجد

قيم الثابت جـ .

الحل : ميل المماس = قَ(س) = ٢/س²

ايضاً المستقيم ٢س − ص + جـ = صفر

مماس للاقتران

⇐ ص = ٢س + جـ

ميل المماس = معامل س = ٢

م = ٢/س² = ٢

⇐ س² = ١

س = ±١

س = ١ ⇐ ق(١) = −٢/١ = −٢

⇐ نقطة التماس (١ ، −٢)

س = −١ ⇐ ق(−١) = −٢/−١ = ٢

⇐ نقطة التماس (−١ ، ٢)

ص = ٢ ⇐ ص = ٢س + جـ

٢ = ٢×−١ + جـ

⇐ جـ = −٤

ص = −٢ ⇐ ص = ٢س + جـ

−٢ = ٢×١ + جـ

⇐ جـ = ٤

وزارة ٢٠١٠ ش: جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $هـ(س) = س^2 - ٤س + ٣$ بحيث يكون المماس عند نقطة التماس عمودياً على المستقيم $٦ص - ٣س - ٥ = صفر$.

الحل : المستقيم عمودي على المماس

$$\frac{٦ص}{٦} = \frac{٣}{٦}س + \frac{٥}{٦}$$

$$ص = \frac{١}{٢}س + \frac{٥}{٦}$$

$\Leftarrow \boxed{م = \frac{١}{٢}} \Leftarrow$ ميل العمودي ⊥ المماس

$\Leftarrow \boxed{م = -٢} \Leftarrow$ ميل المماس

أيضاً

افرض نقطة التماس $(س_١ ، ص_١)$

$$م = هـ'(س_١) = ٢س_١ - ٤$$

$$-٢ = ٢س_١ - ٤$$

$$-٢ + ٤ = ٢س_١$$

$$\frac{٢}{٢} = \frac{٢س_١}{٢}$$

$$\boxed{١ = س_١}$$

$$هـ(١) = (١)^2 - ٤(١) + ٣ = صفر$$

$\Leftarrow ص_١ = ٠ \Leftarrow$ نقطة التماس $(١ ، ٠)$

$\Leftarrow$ معادلة المماس $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$$ص - ٠ = -٢(س - ١)$$

$$ص = -٢س + ٢$$

وزارة ٢٠١١ ش: جد نقطة تعامد منحنى الاقترانين $ق(س) = \sqrt{٢ - س}$ ، $هـ(س) = س^2$ ، ثم جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $ق(س)$ عند تلك النقطة :

الحل ق ، هـ متعامدان $\Leftarrow ق'(س) \times هـ'(س) = -١$

$$ق'(س) = \frac{-١}{٢\sqrt{٢ - س}} ، هـ'(س) = ٢س$$

$$\Leftarrow \frac{-١}{٢\sqrt{٢ - س}} \times ٢س = -١$$

$$\Leftarrow -٢س = -٢\sqrt{٢ - س}$$

$\Leftarrow س = \sqrt{٢ - س}$ بالتربيع

$$س^2 = ٢ - س$$

$$س^2 + س - ٢ = ٠$$

$$(س + ٢)(س - ١) = ٠$$

$$\Leftarrow س = -٢ ، س = ١$$

نتأكد من النقاط تقاطع المنحنيين

$ق(-٢) = \sqrt{٢ - -٢} = \sqrt{٤} = ٢$

$هـ(-٢) = (-٢)^2 = ٤$

-٢ تهمل

$ق(١) = \sqrt{٢ - ١} = \sqrt{١} = ١$

$هـ(١) = (١)^2 = ١$

١ المقطع تقع على المنحنيين

$\Leftarrow$ نقطة تعامد المستقيمين $(١ ، ١)$

$$م = ق'(١) = \frac{-١}{٢\sqrt{١}} = \frac{-١}{٢}$$

معادلة المماس $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

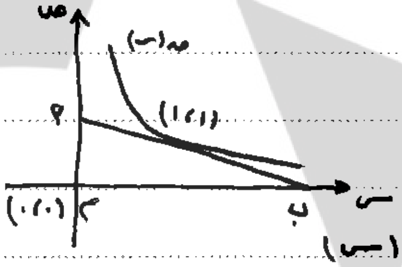
$$ص - ١ = \frac{-١}{٢}(س - ١)$$

$$ص = \frac{-١}{٢}س + \frac{١}{٢} + ١$$

$$\boxed{ص = \frac{-١}{٢}س + \frac{٣}{٢}}$$

المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

وزارة ٢٠١٦ ش : معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل المثلث أ و ب الذي ضلعه أب يمس منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جـ}}{\text{س}+١}$ ، س ≠ -١ عند النقطة (١،١) جد قيمة الثابت جـ التي تجعل مساحته تساوي $(\frac{٩}{٤})$ وحدة مربعة.



الحل : ميل المماس = ق'(س)

$= \frac{-\text{جـ}}{(\text{س}+١)^٢} = \frac{-\text{جـ}}{(\text{س}+١)^٢}$

لكن س = ١ ⇐ م = $\frac{-\text{جـ}}{(٢)^٢} = \frac{-\text{جـ}}{٤}$

عند ب ⇐ ص = ٠

⇐ $٠ - ١ = \frac{-\text{جـ}}{٤}(\text{س} - ١)$

⇐ $\frac{٤}{\text{جـ}} = \text{س} - ١ ⇐ \text{س} = \frac{٤}{\text{جـ}} + ١$

⇐ $\text{ب} = \frac{٤}{\text{جـ}} + ١$

عند أ ⇐ س = ٠

⇐ $\text{ص} - ١ = \frac{-\text{جـ}}{٤}(٠ - ١)$

$\text{ص} = \frac{\text{جـ}}{٤} + ١ ⇐ \text{أ} = \frac{\text{جـ}}{٤} + ١$

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times \text{ب} \times \text{أ}$

$\frac{٩}{٤} = \frac{١}{٢}(\frac{٤}{\text{جـ}} + ١)(\frac{\text{جـ}}{٤} + ١)$

$\frac{٩}{٤} = \frac{١}{٢}(١ + \frac{٤}{\text{جـ}} + \frac{\text{جـ}}{٤} + ١)$

$\frac{٩}{٤} = \frac{١}{٢}(\frac{٤}{\text{جـ}} + \frac{\text{جـ}}{٤}) + ١$

$\frac{٩}{٤} = \frac{١}{٢}(\frac{\text{جـ}^٢ + ١٦}{٤\text{جـ}}) + ١ \quad \times\boxed{٢}$

$\frac{٩}{٢} = \frac{\text{جـ}^٢ + ١٦}{٤\text{جـ}} + ٢$

$\frac{٥}{٢} = \frac{\text{جـ}^٢ + ١٦}{٤\text{جـ}}$

$٢\text{جـ}^٢ + ٣٢ = ٢٠\text{جـ}$

$\text{جـ}^٢ - ١٠\text{جـ} + ١٦ = \text{صفر}$

$(\text{جـ} - ٨)(\text{جـ} - ٢) = \text{صفر}$

⇐ جـ = ٨ تهمل لأنها لا تحقق المعادلة

⇐ جـ = ٢

حل آخر :

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جـ}}{\text{س}+١}$ النقطة (١،١) نقطة تماس

⇐ $\text{ق}(١) = \frac{\text{جـ}}{٢} = ١$

⇐ جـ = ٢

$\text{م} = \frac{-\text{جـ}}{(\text{س}+١)^٢} = \frac{-\text{جـ}}{٤} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$

$\text{ص} - ١ = \frac{-١}{٢}(\text{س} - ١)$

ص = ٠ ⇐ $-١ = \frac{-١}{٢}\text{س} + \frac{١}{٢}$

$\frac{-٣}{٢} = \frac{-١}{٢}\text{س} ⇐ \text{س} = ٣$

س = ٠ ⇐ $\text{ص} - ١ = \frac{-١}{٢}(٠ - ١)$

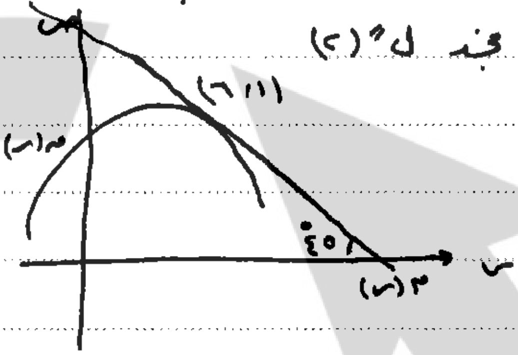
$\text{ص} = ١ + \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times \text{س} \times \text{ص}$

$= \frac{١}{٢} \times ٣ \times \frac{٣}{٢} = \frac{٩}{٤}$ وحدة مربعة

وهو المطلوب

وزارة ٢٠١٦ ص : اذا كان ق(س) ، ل(س) اقترانين قابلين للاشتقاق بحيث أن ق(س) = (س+٢) ل′(٣−س) وكان م(س) مماساً للاقتران عند النقطة (١، ٦) كما في الشكل جد ل″(٢)



م = ق′(س) = (س+٢) × ل″(٣−س) × −١ + ل′(٣−س)

= (−س−٢) ل″(٣−س) + ل′(٣−س)

م = ظا١٣٥ = −ظا٤٥ = −١

نقطة التماس هي (١، ٦)

⇐ ق(١) = (١+٢) ل′(٢) = ٣ ل′(٢) = ٦

أيضاً ق′(١) = ٦ ل″(٢) + ل′(٢) = −١

لكن ل′(٢) = ٢

⇐ ٦ ل″(٢) + ٢ = −١

٦ ل″(٢) = −٣

$\boxed{\text{ل}''(2) = -\frac{1}{2}}$

حل أسئلة ... ص ١٥٩ :

س١ جد ميل المماس لمنحنى الاقتران
ق(س) = س² - ٤س + ٣ عند النقطة (١ ، ٠) .

الحل : النقطة (١ ، ٠) تقع على المنحنى ق(س) لأن
ق(١) = (١)² - ٤(١) + ٣ = صفر
⇐ (١ ، ٠) نقطة التماس
م = ق′(١) = ٢س - ٤
= ٢(١) - ٤ = -٢

س٢ جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة
س² - ص² = -٨ ، المرسوم من النقطة (-٤ ، ٠) .

الحل : النقطة (-٤ ، ٠) لا تقع على منحنى العلاقة
لأن (-٤)² - (٠)² ≠ -٨ .
افرض (س١ ، ص١) نقطة التماس
نشتق العلاقة ٢س - ٢ص $\frac{دص}{دس}$ = صفر
$\frac{دص}{دس} = \frac{٢س}{٢ص} = \frac{س}{ص}$
عند نقطة التماس م = $\frac{دص}{دس} = \frac{س_١}{ص_١}$
أيضاً م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٠ - ص_١}{-٤ - س_١}$
م = $\frac{ص_١}{س_١ + ٤} = \frac{س_١}{ص_١}$

بالضرب التبادلي ص١² = ٤س١ + س١² وبالتعويض
في المنحنى س² - (٤س١ + س١²) = -٨
⇐ $\frac{-٤}{-٤}$س١ = $\frac{-٨}{-٤}$ ⇐ س١ = ٢
ص١² = ٤ × ٢ + (٢)²
ص١² = ١٢
⇐ ص١ = ± $\sqrt{١٢}$
⇐ (٢ ، $\sqrt{١٢}$) ، (٢ ، $-\sqrt{١٢}$) نقطتا تماس
م١ = $\frac{س_١}{ص_١} = \frac{٢}{\sqrt{١٢}}$

ص - $\sqrt{١٢}$ = $\frac{٢}{\sqrt{١٢}}$ (س - ٢)
ص = $\frac{٢}{\sqrt{١٢}}$ س - $\frac{٤}{\sqrt{١٢}}$ + $\sqrt{١٢}$
⇐ $\boxed{ص = \frac{٢}{\sqrt{١٢}} س + \frac{٨}{\sqrt{١٢}}}$
م٢ = $\frac{س_١}{ص_١} = \frac{٢}{-\sqrt{١٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{١٢}}$
ص - ص١ = م٢(س - س١)
ص + $\sqrt{١٢}$ = $\frac{-٢}{\sqrt{١٢}}$ (س - ٢)
ص = $\frac{-٢}{\sqrt{١٢}}$ س + $\frac{٤}{\sqrt{١٢}}$ - $\sqrt{١٢}$
$\boxed{ص = \frac{-٢}{\sqrt{١٢}} س - \frac{٨}{\sqrt{١٢}}}$

س٣ جد معادلة المماس لمنحنى
ق(س) = س² - ٦س + ٧ عند نقطة تقاطعه
مع المستقيم ص - ٣س + ١ = صفر .

الحل : عند التقاطع ص = ق(س)
٣س - ١ = س² - ٦س + ٧
⇐ س² - ٩س + ٨ = صفر
(س - ٨)(س - ١) = صفر
⇐ س = ٨ ، س = ١
س = ٨ ⇐ ص = ٣ × ٨ - ١ = ٢٣
س = ١ ⇐ ص = ٣ × ١ - ١ = ٢
⇐ نقطتي التقاطع (٨ ، ٢٣) ، (١ ، ٢)
م = ق′(س) = ٢س - ٦
م١ = ق′(٨) = ٢ × ٨ - ٦ = ١٠
ص - ص١ = م (س - س١)
ص - ٢٣ = ١٠ (س - ٨)
ص = ١٠س - ٨٠ + ٢٣
$\boxed{ص = ١٠س - ٥٧}$

$م = ق'(1) = 2\times 1 - 6 = -4$

$ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ص - 2 = -4(س - 1)$

$ص = -4س + 4 + 2$

$\boxed{ص = -4س + 6}$

س٤: اذا كان المستقيم $4س - 2ص - 8 = صفر$ يمس منحنى ق عند النقطة $(3 ، 2)$ وكان المستقيم $9ص + 3س = صفر$ عمودياً على المماس لمنحنى ل عند النقطة $(3 ، -1)$ جد $(ق\times ل)'(3)$.

الحل: $4س - 2ص - 8 = 0$ المستقيم الاول

اشتقه $4 - 2\frac{دص}{دس} = 0$

$2\frac{دص}{دس} = 4 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = 2$

$ق'(س) = \frac{دص}{دس} = 2$

$\Leftarrow ق'(3) = 2$

عند النقطة $(3 ، 2)$ $ق(3) = 2$

$9ص + 3س = صفر$ المستقيم الثاني

$9\frac{دص}{دس} + 3 = صفر$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-1}{3}$

المستقيم الثاني عمودي على المماس لمنحنى ل

$\Leftarrow$ ميل المماس $= 3$ لأنه $\boxed{3\times \frac{-1}{3} = -1}$

ل تمر بالنقطة $(3 ، -1)$ $\Leftarrow ل(3) = -1$

$(ق\times ل)'(3) =$ الاول × مشتقة الثاني + مشتقة الاول × الثاني

$= ق(3)\times ل'(3) + ق'(3)\times ل(3)$

$= 2\times 3 + 2\times -1$

$= 6 - 2$

$= 4$

س: جد معادلة المماس لمنحنى $س^2 + ص^2 = 25$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $س + ص = 1$

الحل: افرض نقطة التماس $(س_1 ، ص_1)$

معادلة المستقيم $ص_1 = 1 - س_1$

بالتعويض $س_1^2 + (1 - س_1)^2 = 25$

$س_1^2 + 1 - 2س_1 + س_1^2 = 25$

$\Leftarrow 2س_1^2 - 2س_1 - 24 = صفر$

$س_1^2 - س_1 - 12 = صفر$

$(س_1 - 4)(س_1 + 3) = صفر$

$\Leftarrow س_1 = 4 ، -3$

عند $س_1 = 4 \Leftarrow ص_1 = 1 - 4 = -3$

عند $س_1 = -3 \Leftarrow ص_1 = 1 - -3 = 4$

$\Leftarrow (4 ، -3) ، (-3 ، 4)$ نقطتي تماس

نشتقه $2س + 2ص\frac{دص}{دس} = 0$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-س}{ص}$

$م = \frac{-س_1}{ص_1}$

عند $(4 ، -3) \Leftarrow م = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

$ص - -3 = \frac{4}{3}(س - 4)$

$ص + 3 = \frac{4}{3}س - \frac{16}{3}$

$ص = \frac{4}{3}س - \frac{16}{3} - \frac{9}{3}$

$\boxed{ص = \frac{4}{3}س - \frac{25}{3}}$

عند $(-3 ، 4) \Leftarrow م = \frac{3}{4}$

$ص - 4 = \frac{3}{4}(س + 3)$

$ص - 4 = \frac{3}{4}س + \frac{9}{4}$

$ص = \frac{3}{4}س + \frac{9}{4} + \frac{16}{4}$

$\boxed{ص = \frac{3}{4}س + \frac{25}{4}}$

س٦) اذا كان المستقيم أس + ٣ص = ١ مماساً لمنحنى الاقتران ق(س) = ٤س^2 + أس + ب عند النقطة (١، ق(١)) فجد قيمة كل من الثابتين أ، ب.

الحل: ٣ص = ١ - أس

٣ $\frac{دص}{دس}$ = -أ ⟸ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-أ}{٣}$ = م

ق'(س) = ٨س + أ ⟸ م = ق'(١) = ٨ + أ

⟸ $\frac{-أ}{٣}$ = ٨ + أ

-أ = ٢٤ + ٣أ

⟸ ٤أ = -٢٤ ⟸ أ = -٦

بالتعويض ٣ص = ١ - أس

$\frac{٣}{٣}$ص = $\frac{١ - -٦×١}{٣}$

ص = $\frac{١ + ٦س}{٣}$

ص = $\frac{١ + ٦}{٣}$ = $\frac{٧}{٣}$

⟸ ق(١) = $\frac{٧}{٣}$

⟸ ق(١) = ٤(١)^2 + -٦×١ + ب = $\frac{٧}{٣}$

٤ - ٦ + ب = $\frac{٧}{٣}$

-٢ + ب = $\frac{٧}{٣}$

ب = $\frac{٧}{٣}$ + ٢

ب = $\frac{٧}{٣}$ + $\frac{٦}{٣}$

ب = $\frac{١٣}{٣}$

س٧) اثبت باستخدام التفاضل ان نصف قطر الدائرة يكون عمودياً على المماس للدائرة عند نقطة التماس.

الحل: افرض مركز الدائرة (د، هـ) ونقطة التماس (س، ص)

معادلة الدائرة (س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = ر^2

نشتق ٢(س - د) + ٢(ص - هـ) × $\frac{دص}{دس}$ = ٠

⟸ ٢(ص - هـ) $\frac{دص}{دس}$ = -٢(س - د)

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-٢(س - د)}{٢(ص - هـ)}$ = $\frac{-(س - د)}{(ص - هـ)}$

⟸ ميل المماس = $\frac{-(س - د)}{(ص - هـ)}$

نصف القطر يمر بالنقطتين (س، ص)، (د، هـ)

م = $\frac{ص - هـ}{س - د}$

ميل المماس × ميل نصف القطر

$\frac{-\cancel{(س - د)}}{\cancel{(ص - هـ)}}$ × $\frac{\cancel{(ص - هـ)}}{\cancel{(س - د)}}$ = -١

⟸ المماس عمودي على نصف القطر

س٨) جد جميع قيم س التي يكون عندها العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = س - جا٢س عندها موازياً لمحور الصادات.

الحل: العمودي موازٍ لمحور الصادات

⟸ المماس موازٍ لمحور السينات

ق'(س) = ١ - ٢جتا٢س = م = صفر

⟸ $\frac{٢}{٢}$جتا٢س = $\frac{١}{٢}$

جتا٢س = $\frac{١}{٢}$

⟸ ٢س = ٦٠، ٣٠٠، ...

٢س = ٦٠ + ن × ٣٦٠

⟸ س = ٣٠ + ١٨٠ن

أو ٢س = ٣٠٠ + ٣٦٠ن

⟸ س = ١٥٠ + ١٨٠ن

س٩ جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = س^٢ ، اذا كان العمودي مرسوماً من النقطة (٠ ، $\frac{٩}{٢}$) .

الحل: النقطة لا تقع على المستقيم .

ق(٠) = (٠)^٢ = ٠ ≠ $\frac{٩}{٢}$

افرض (س ، ص) نقطة التماس

م = ق'(س) = ٢س

ميل العمودي على المماس = $\frac{-١}{٢س}$

ايضاً العمودي يمر بالنقطتين (س ، ص) ، (٠ ، $\frac{٩}{٢}$)

⇐ م = $\frac{ص - \frac{٩}{٢}}{س - ٠}$ = $\frac{ص - \frac{٩}{٢}}{س}$

⇐ $\frac{-١}{٢س}$ = $\frac{ص - \frac{٩}{٢}}{س}$

⇐ $\frac{-١}{٢س}$ = $\frac{س^٢ - \frac{٩}{٢}}{س}$

-س = ٢س^٣ - ٩س

⇐ ٢س^٣ - ٨س = ٠

٢س(س^٢ - ٤) = ٠

٢س(س - ٢)(س + ٢) = ٠

⇐ س = ٠ ، س = ٢ ، س = -٢

⇐ هناك ٣ نقاط تماس

س = ٠ ⇐ ص = (٠)^٢ = ٠ ⇐ (٠ ، ٠)

س = ٢ ⇐ ص = (٢)^٢ = ٤ ⇐ (٢ ، ٤)

س = -٢ ⇐ ص = (-٢)^٢ = ٤ ⇐ (-٢ ، ٤)

(٠ ، ٠) ⇐ م العمودي = $\frac{-١}{٠}$ ⇐ العمودي موازي لمحور الصادات ⇐ $\boxed{س = ٠}$ معادلة العمودي

(٢ ، ٤) ⇐ م العمودي = $\frac{-١}{٢×٢}$ = $\frac{-١}{٤}$

ص - ٤ = $\frac{-١}{٤}$(س - ٢)

ص = $\frac{-١}{٤}$س + $\frac{١}{٢}$ + ٤

$\boxed{ص = \frac{-١}{٤}س + \frac{٩}{٢}}$

(-٢ ، ٤) ⇐ م = $\frac{-١}{٢×-٢}$ = $\frac{١}{٤}$

ص - ٤ = $\frac{١}{٤}$(س - -٢)

ص = $\frac{١}{٤}$س + $\frac{١}{٢}$ + ٤

$\boxed{ص = \frac{١}{٤}س + \frac{٩}{٢}}$

س١٠ اثبت ان المماسين المرسومين لمنحنيي العلاقتين : ٤س^٢ + ٩ص^٢ = ٤٥ ، س^٢ - ٤ص^٢ = ٥ عند نقطة تقاطع المنحنيين في الربع الاول متعامدين :

الحل : ⇐ المنحنيين متقاطعين ⇐

من الثانية س^٢ = ٤ص^٢ + ٥

بالتعويض في الاولى

٤(٤ص^٢ + ٥) + ٩ص^٢ = ٤٥

١٦ص^٢ + ٢٠ + ٩ص^٢ = ٤٥

$\frac{٢٥}{٢٥}$ص^٢ = $\frac{٢٥}{٢٥}$

ص^٢ = ١ ⇐ ص = ±١

ص = ١ ⇐ س^٢ = ٤(١)^٢ + ٥

س^٢ = ٩ ⇐ س = ±٣

⇐ نقطتي تقاطع (٣ ، ١) ، (-٣ ، ١)

ص = -١ ⇐ س^٢ = ٤(-١)^٢ + ٥

س^٢ = ٩ ⇐ س = ±٣

نقطتي تقاطع (٣ ، -١) ، (-٣ ، -١)

في الربع الاول نقطة التقاطع (٣ ، ١)

م١ ⇐ ٨س + ١٨ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-٨س}{١٨ص}$ = $\frac{-٤س}{٩ص}$

⇐ م١ = $\frac{-٤×٣}{٩×١}$ = $\frac{-٤}{٣}$

م٢ ⟸ ٢س − ٨ص دص/دس = ٠

دص/دس = ٢س/٨ص = س/٤ص

م٢ = ٣/(٤×١) = ٣/٤

م١ × م٢ = −٤/٣ × ٣/٤ = −١٢/١٢ = −١

⟸ المماسان متعامدان .

س١١ اذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٠، −٢) (٢، ٦) يمس منحنى الاقتران

ق(س) = أس² + ٢س − ١ فجد قيمة أ .

الحل : ميل المستقيم = (ص٢ − ص١)/(س٢ − س١) = (٦ − −٢)/(٢ − ٠) = ٨/٢ = ٤

قَ(س) = ٢أس + ٢

افرض (س١، ص١) نقطة تماس

ميل المماس = قَ(س١) = ٢أس١ + ٢ = ٤

⟸ ٢أس١/٢ = ٢/٢

⟸ أ = ١/س١

المستقيم يمس منحنى ق عند (س١، ص١)

ص + ٢ = ٤(س − ٠)

ص = ٤س − ٢

⟸ ٤س١ − ٢ = أس١² + ٢س١ − ١

٤س١ − ٢ = ١/س١ × س١² + ٢س١ − ١

٤س١ − ٢ = س١ + ٢س١ − ١

س١ = ١

⟸ أ = ١/١ = ١

س١٢ افرض نقطة التماس (س، ص)

م = قَ(س) = ٣س²

م = (ص٢ − ص١)/(س٢ − س١) = (ص − ١)/(س − ٠) = (ص − ١)/س

⟸ ٣س² = (ص − ١)/س

٣س² = (س³ + ٣ − ١)/س

٣س³ = س³ + ٢

٢س³ = ٢ ⟸ س³ = ١ ⟸ س = ١

ق(١) = (١)³ + ٣ = ٤

نقطة التماس = (١، ٤)

معادلة المماس ص − ٤ = ٣(س − ١)

ص = ٣س − ٣ + ٤

$\boxed{\text{ص} = ٣\text{س} + ١}$

ميل العمودي = −١/٣

معادلة العمودي ص − ٤ = −١/٣ (س − ١)

ص = −١/٣ س + ١/٣ + ١٢/٣

$\boxed{\text{ص} = -\frac{١}{٣}\text{س} + \frac{١٣}{٣}}$

نقطة التقاطع ص = ١ الثالثة

⟸ ١ = −١/٣ س + ١٣/٣

−٣ × −١/٣ س = −١٠/٣ × −٣

⟸ س = ١٠ ⟸ (١٠، ١)

⟸ مساحة المثلث = ١/٢ × ب جـ × أ ب

= ١/٢ × √٩٠ × √١٠

= ١/٢ × √٩٠٠

= ٣٠/٢ = ١٥ وحدة مساحة

السرعة اللحظية وتطبيقات فيزيائية:

* تعرفت سابقاً الى ان السرعة المتوسطة هو التغير الفيزيائي المتوسط للتغير اي ان

$$\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{\Delta ن}$$

$$\bar{ع} = \frac{ف(ن + \Delta ن) - ف(ن)}{\Delta ن}$$

عندما $\Delta ن \to 0$ ، عندها

$\lim_{\Delta ن \to 0} \frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ هو السرعة اللحظية لجسم يسير في خط مستقيم

$$\Leftarrow ع = \lim_{\Delta ن \to 0} \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = ف'(ن)$$

تعريف : اذا كانت ف(ن) = ل هي العلاقة التي تحدد موقع جسم في اللحظة ن فان السرعة اللحظية (ع) حيث ع(ن) = ف′(ن)

ايضاً : اذا كان ف′(ن) قابل للاشتقاق فان التسارع ت(ن) = ف″(ن) = ع′(ن)

ملخص : السرعة مشتقة المسافة والتسارع هو مشتقة السرعة (المشتقة الثانية للمسافة)

مهم جداً : امور تسهل الحل .

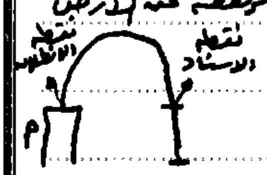
١ الجسم وصل اقصى ارتفاع تعني ع = صفر

٢ معنى السرعة الابتدائية ن = صفر

٣ في حالة القذف للجسم تكون السرعة موجبة اذا كان الجسم في الصعود وسالبة في الهبوط

٤ كلمة تسارع تعني ان تسارعه موجب وكلمة تباطؤ تعني ان تسارعه سالب

٥ حالة القذف من منطقة مرتفعة عن الارض



أ) المسافة العلوية للمقذوف هي م(ن) = ف(ن) + م

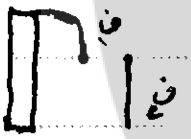
ب) الجسم عاد الى نقطة الانطلاق تعني ف(ن) = صفر (عودة الجسم الى نقطة الاسناد)

ج) عند وصول المقذوف الى الارض فان ف(ن) = − م (ارتفاع المنطقة)

٦ الجسم يسكن لحظياً تعني ع = صفر عند الوصول لاقصى ارتفاع وعند الارتداد عن سطح .

٧ اسقط جسم حراً تعني ع = صفر الابتدائية .

٨ نقطة التقاء جسم سقط من عمارة مع جسم آخر رمي من الارض عمودياً للاعلى (مجموع المسافتين العمودية يمثل ارتفاع العمارة) .



ارتفاع العمارة = ف١ + ف٢

٩ عند قذف جسم من تحت سطح الارض فانه يقطع مسافة عند وصوله لسطح الارض مساوية للعمق الذي اطلق منه

← ف(ن) = العمق .

مثال: يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث أن بعده م عن نقطة الأصل بعد ن ثانية من بدء حركته معطى بالعلاقة ف(ن) = $ن^3 - 3ن$ فاحسب سرعة الجسم وتسارعه بعد ٤ ثوانٍ؟

الحل: ع(ن) = ف′(ن) = $3ن^2 - 3$

ع(٤) = $3(4)^2 - 3$

= ٤٨ − ٣ = ٤٥ م/ث

ت(ن) = ع′(ن) = ٦ن

ت(٤) = ٦ × ٤ = ٢٤ م/ث^2

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة التالية ف(ن) = $\frac{2}{3}ن^3 - ن^2 - 4ن + 1$ احسب تسارع الجسم عندما تنعدم سرعته؟

الحل: ع(ن) = $2ن^2 - 2ن - 4$

تنعدم سرعته ⟸ ع = صفر

⟸ $2ن^2 - 2ن - 4 = 0$

(٢ن − ٤)(ن + ١) = ٠

٢ن − ٤ = ٠ ⟸ ن = ٢ ثانية

ن + ١ = ٠ ⟸ ن = −١ تهمل

ت(ن) = ٤ن − ٢

ت(٢) = ٤ × ٢ − ٢

= ٨ − ٢ = ٦ م/ث^2

تدريب ١١: اذا كان ف(ن) = ٣جا٤ن − ٥جتا٤ن حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني فاحسب كلاً من المسافة والتسارع عندما ن = $\frac{\pi}{8}$

الحل: ف(ن) = ٣جا٤ن − ٥جتا٤ن

ع(ن) = ١٢جتا٤ن + ٢٠جا٤ن

ع($\frac{\pi}{8}$) = ١٢جتا $\frac{\pi}{2}$ + ٢٠جا $\frac{\pi}{2}$

= ١٢ × ٠ + ٢٠ × ١

= ٢٠ م/ث

ت(ن) = −٤٨جا٤ن + ٨٠جتا٤ن

ت($\frac{\pi}{8}$) = −٤٨جا $\frac{\pi}{2}$ + ٨٠جتا $\frac{\pi}{2}$

= −٤٨ × ١ + ٨٠ × ٠

= −٤٨ م/ث^2

مثال: قذف جسم رأسياً من نقطة على سطح الأرض بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بالأمتار بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالاقتران ف(ن) = $40ن - 5ن^2$ جد ما يلي؟

① أقصى ارتفاع يصله الجسم

② الزمن اللازم حتى يعود الجسم الى سطح الأرض.

③ جد سرعة الجسم وهو على ارتفاع ٦٠ م

④ اللحظة التي تكون فيها سرعة الجسم ٣٠ م/ث

⑤ السرعة التي قذف بها الجسم.

⑥ الزمن الذي عنده تصبح سرعة الجسم مساوية لنصف سرعته الابتدائية.

الحل ① أقصى ارتفاع ⟸ ع = صفر

ع(ن) = ٤٠ − ١٠ن = صفر

١٠ن = ٤٠ ⟸ ن = ٤ ثواني

ف = ٤٠ × ٤ − ٥$(4)^2$

= ١٦٠ − ٨٠ = ٨٠ م

③ يعود الى الارض ⇐ ف = صفر

⇐ ٤٠ن − ٥ن² = صفر

٥ن (٨ − ن) = صفر

٨ − ن = صفر ⇐ ن = ٨ ثواني

③ على ارتفاع ٦٠م ⇐ ف = ٦٠

⇐ ٤٠ن − ٥ن² = ٦٠

⇐ ٥ن² − ٤٠ن + ٦٠ = ٠

ن² − ٨ن + ١٢ = ٠

(ن − ٦)(ن − ٢) = ٠

⇐ ن = ٦ ، ٢

ع(ن) = ٤٠ − ١٠ن

ع(٦) = ٤٠ − ١٠×٦ = −٢٠ م/ث

ع(٢) = ٤٠ − ١٠×٢ = ٢٠ م/ث

عند زمن ٢ ثانية كان الجسم صاعداً ع > ٠

وعند زمن ٦ ثانية كان الجسم ساقطاً ع < ٠

④ سرعة الجسم ٣٠ م/ث

٤٠ − ١٠ن = ٣٠

١٠ن/١٠ = ٣٠/١٠

ن = ٣ ثانية

⑤ السرعة التي قذف بها الجسم = السرعة الابتدائية

⇐ ن = ٠

ع(٠) = ٤٠ − ١٠×٠ = ٤٠ م/ث

⑥ سرعة = ½ السرعة الابتدائية = ٢٠ م/ث

٤٠ − ١٠ن = ٢٠

١٠ن/١٠ = ٢٠/١٠

ن = ٢ ثانية

مثال : يتحرك جسم حسب العلاقة

ف(ن) = حا²ن احسب سرعة الجسم

عندما ينعدم تسارعه لأول مرة ؟

الحل ع(ن) = ٢ حان جتان

ت(ن) = ٢حان × −حان + ٢جتان جتان

ت(ن) = −٢حا²ن + ٢جتا²ن

= ٢(جتا²ن − حا²ن)

= ٢ جتا٢ن

ينعدم التسارع ⇐ ت = صفر

⇐ ٢جتا٢ن = صفر

جتا٢ن = صفر

اول مرة ٢ن = π/٢ ⇐ ن = π/٤

ع(π/٤) = ٢ حا π/٤ جتا π/٤

= ٢ × ١/√٢ × ١/√٢

= ٢/٢ = ١ م/ث

ملاحظة : لو طلب المسافة

ف(π/٤) = حا² π/٤ = (١/√٢)² = ½ م

مثال : قذف جسم من سطح برج ارتفاعه ٢٢٥م حسب العلاقة ف(ن) = ٦٠ن − ٥ن²

جد ما يلي :

① اقصى ارتفاع للجسم عن سطح البرج.

② اقصى ارتفاع للجسم عن سطح الارض

③ الزمن اللازم لوصول الجسم الى الارض .

④ سرعة الجسم لحظة وصوله الى الارض .

الحل : ① اقصى ارتفاع ⇐ ع = صفر

ع(ن) = ٦٠ − ١٠ن = ٠

١٠ن = ٦٠ ⇐ ن = ٦ ثواني

المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

أقصى ارتفاع ⇐ ف(٦) = ٦٠ × ٦ − ٥ (٦)^2

= ٣٦٠ − ١٨٠ = ١٨٠ م

② أقصى ارتفاع عن سطح الأرض = البرج + ف

= ٢٢٥ + ١٨٠ = ٤٠٥ م

③ عند الوصول إلى الأرض

ف(ن) = − ارتفاع البرج (نقطة الإسناد)

ف(ن) + الارتفاع = ٦٠ن − ٥ن^2 + ٢٢٥ = صفر

⇐ ن^2 − ١٢ن − ٤٥ = صفر

(ن − ١٥)(ن + ٣) = صفر

ن − ١٥ = ٠ ⇐ ن = ١٥ ثانية

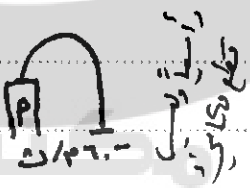
ن + ٣ = ٠ ⇐ ن = −٣ تهمل

⇐ يصل الجسم الأرض بعد ١٥ ثانية (زمن التحليق)

④ ع(١٥) = ٦٠ − ١٠ × ١٥

= ٦٠ − ١٥٠ = −٩٠ م/ث

تدريب ٣: قذف جسم من سطح بناية رأسياً إلى أعلى بحيث أن ارتفاعه عنها بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالاقتران ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن^2 إذا كانت سرعته لحظة وصوله إلى الأرض تساوي −٦٠ م/ث، فجد ارتفاع البناية.



الحل: ف(ن) = −أ

٣٠ن − ٥ن^2 = −أ

⇐ ٣٠ن − ٥ن^2 + أ = صفر

لكن ع(ن) = ٣٠ − ١٠ن = −٦٠ م/ث

⇐ $\frac{-١٠ن}{-١٠} = \frac{-٩٠}{-١٠}$

ن = ٩ ثواني

بالتعويض: ٣٠ × ٩ − ٥(٩)^2 + أ = صفر

٢٧٠ − ٤٠٥ + أ = ٠ ⇐ أ = ١٣٥ م

مثال: من سطح عمارة سقط جسم حسب العلاقة ف١(ن) = ١٠ن^2 وفي نفس الوقت قذف شخص جسماً للأعلى من سطح الأرض حسب العلاقة ف٢(ن) = ١٢٠ن − ١٠ن^2 جد

① ارتفاع العمارة بدلالة ن

② سرعة الجسمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الأرض.

الحل ① ارتفاع العمارة = ف١ + ف٢

= ١٠ن^2 + ١٢٠ن − ١٠ن

ف٣(ن) = ١٢٠ن

② يكون للجسمين الارتفاع نفسه عندما ف١ = ف٢

١٠ن = ١٢٠ن − ١٠ن^2

⇐ ١٢٠ن − ١٠ن^2 − ١٠ن = صفر

⇐ ١٠ن^2 + ١١٠ن = صفر

ن^2 − ١١ن = صفر

ن(ن − ١١) = صفر

⇐ ن = صفر تهمل ، ن = ١١ ثانية

ع١ = ف١' = ٢٠ن

ع١(١١) = ٢٠ × ١١ = ٢٢٠ م/ث

ع٢ = ف٢' = ١٢٠ − ٢٠ن

ع٢(١١) = ١٢٠ − ٢٠ × ١١

= ١٢٠ − ٢٢٠ = −١٠٠ م/ث

ملاحظة: ارتفاع العمارة في السؤال السابق ف٣(١١) = ١٢٠ × ١١ = ١٣٢٠ م

مثال: سقط جسم من سطح بناية حسب العلاقة ف₁(ن) = ١٠ ن² وبعد ثانية واحدة قذف جسم آخر رأسياً لأسفل من نفس المكان حسب العلاقة ف₂(ن) = ٣٠ ن + ١٠ ن² فوصل الجسمان معاً الى الارض جد سرعة كل من الجسمين لحظة وصول الارض ثم جد ارتفاع البناية

الحل: زمن الوصول للجسم الاول ن + ١

زمن الوصول للجسم الثاني ن

الجسمان تقطعا المسافة نفسها

⇐ ف₁(ن + ١) = ف₂(ن)

١٠(ن + ١)² = ٣٠ ن + ١٠ ن²

١٠(ن² + ٢ن + ١) = ٣٠ ن + ١٠ ن²

~~١٠ن²~~ + ٢٠ن + ١٠ = ٣٠ ن + ~~١٠ن²~~

١٠ن = ١٠ ⇐ ن = ١ ثانية

⇐ زمن الوصول للجسم الاول = ٢ ثانية

زمن الوصول للجسم الثاني = ١ ثانية

ف₁(٢) = ١٠(٢)² = ٤٠ م

ف₂(١) = ٣٠(١) + ١٠(١)² = ٤٠ م

⇐ ارتفاع البناية = ٤٠ م

ع₁(ن) = ف₁/(ن) = ٢٠ ن

ع₁(٢) = ٢٠ × ٢ = ٤٠ م/ث

ع₂(ن) = ف₂/(ن) = ٣٠ + ٢٠ ن

ع₂(١) = ٣٠ + ٢٠ × ١ = ٥٠ م/ث

مثال: قذف جسم رأسياً الى الأعلى بحيث ان ارتفاعه من النقطة التي قذف منها معطى بالعلاقة ف(ن) = جـ ن − ن² فإذا علمت ان اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم هو ٢٥ م فما قيمة جـ؟

الحل: عند اقصى ارتفاع ع = صفر ، ف = ٢٥

ف(ن) = جـ ن − ن² = ٢٥

⇐ ن² − جـ ن + ٢٥ = صفر

ع(ن) = جـ − ٢ن وعند اقصى ارتفاع

جـ − ٢ن = صفر

⇐ جـ = ٢ن وبالتعويض

ن² − ٢ن × ن + ٢٥ = صفر

− ن² + ٢٥ = صفر

ن² = ٢٥ ⇐ ن = ± ٥

−٥ تهمل ⇐ ن = ٥ ثواني

⇐ جـ = ٢ن = ٢ × ٥ = ١٠

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = ٨ن + ٦ $\sqrt{٢ن+١}$ فاحسب المسافة المقطوعة عندما تكون السرعة تساوي ١٠ م/ث ثم جد التسارع عندئذٍ

الحل: ع(ن) = ٨ + $\frac{٦ \times ٢}{٢\sqrt{٢ن+١}}$ = ٨ + $\frac{٦}{\sqrt{٢ن+١}}$

⇐ ٨ + $\frac{٦}{\sqrt{٢ن+١}}$ = ١٠

⇐ $\frac{٦}{\sqrt{٢ن+١}}$ = ٢

⇐ $\sqrt{٢ن+١}$ = ٣

⇐ ٢ن + ١ = ٩

٢ن = ٨ ⇐ ن = ٤

ت(ن) = $\frac{٠ - ٦ \times \frac{١}{٢}(٢ن+١)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢}{٢ن+١}$

= $\frac{-٦}{(٢ن+١)\sqrt{٢ن+١}}$

ت(٤) = $\frac{-٦}{٣ \times ٩}$ = $\frac{-٢}{٩}$ م/ث²

* حل التمارين والمسائل :

س٢) جسم يتحرك في خط مستقيم فإذا كانت سرعته بعد ن ثانية من حركته هي
ع(ن) = ن² − ٣ن + ٢ ، جد

① سرعته الابتدائية

② متى يسكن الجسم لحظياً وما تسارعه حينئذٍ؟

الحل ① السرعة الابتدائية ⇐ ن = ٠

ع(٠) = (٠)² − ٣ × ٠ + ٢ = ٢

② يسكن لحظياً ⇐ ع = صفر

ن² − ٣ن + ٢ = صفر

(ن − ٢)(ن − ١) = صفر

⇐ ن = ٢ ، ١

ت(ن) = ٢ن − ٣

ت(٢) = ٢ × ٢ − ٣ = ١

ت(١) = ٢ × ١ − ٣ = −١

س٤) يتحرك جسم بسرعة ابتدائية مقدارها ٢م/ث حسب العلاقة ف(ن) = أن² + ب ن حيث أ، ب ثوابت، احسب المسافة التي يقطعها الجسم بعد ٣ ثوانٍ من الحركة علماً بأن تسارعه ٨ م/ث².

الحل: ع(ن) = ف′(ن) = ٢أن + ب

السرعة الابتدائية = ٢ ⇐ ع(٠) = ٢

٢أ × ٠ + ب = ٢ ⇐ ب = ٢

ت(ن) = ع′(ن) = ٢أ = ٨

⇐ أ = ٤

⇐ ف(ن) = ٤ن² + ٢ن

ف(٣) = ٤(٣)² + ٢(٣) = ٤٢

س٣) يتحرك جسم بحيث أن بعده عن نقطة ثابتة بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته يعطى وفقاً للاقتران ف(ن) = جا ن + جتا ن ، ن ∈ [٠ ، ٢π] ، جد المسافة والتسارع في حالة السكون اللحظي للجسم.

الحل: ع(ن) = جتا ن − جا ن

في حالة السكون ع = صفر

جتا ن − جا ن = صفر

⇐ جتا ن = جا ن

⇐ ن = ٤٥° ، ٢٢٥°

$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$

ت(ن) = − جا ن − جتا ن

ن = $\frac{\pi}{4}$ ⇐ ف($\frac{\pi}{4}$) = جا $\frac{\pi}{4}$ + جتا $\frac{\pi}{4}$

= $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

ن = $\frac{5\pi}{4}$ ⇐ ف($\frac{5\pi}{4}$) = جا $\frac{5\pi}{4}$ + جتا $\frac{5\pi}{4}$

= $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}}$

ت($\frac{\pi}{4}$) = − جا $\frac{\pi}{4}$ − جتا $\frac{\pi}{4}$

= $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}}$

ت($\frac{5\pi}{4}$) = − جا $\frac{5\pi}{4}$ − جتا $\frac{5\pi}{4}$

= $-\,-\frac{1}{\sqrt{2}} - -\frac{1}{\sqrt{2}}$

= $\frac{2}{\sqrt{2}}$

س٥) يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته يعطى وفقاً للاقتران ف(ن) = ن³ فإذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠ ، أ] تساوي

المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

سرعته اللحظية عندما ن = ٢ مجذرتية أ ؟

السرعة اللحظية ع(ن) = ٣ن^{٢}

ع(٢) = ٣(٢)^{٢} = ١٢

السرعة المتوسطة ع̄ = $\frac{\text{ف(ن}_٢\text{)} - \text{ف(ن}_١\text{)}}{\text{ن}_٢ - \text{ن}_١}$

١٢ = $\frac{\text{ف(أ)} - \text{ف(٠)}}{\text{أ}}$

⇐ ١٢أ = أ^{٣} ⇐ أ^{٣} − ١٢أ = ٠

⇐ أ(أ^{٢} − ١٢) = ٠

أ(أ − $\sqrt{١٢}$)(أ + $\sqrt{١٢}$)

⇐ أ = صفر ، أ = $\sqrt{١٢}$ ، أ = −$\sqrt{١٢}$

تهمل ، تهمل

س: يتحرك جسم بسرعة تعطى حسب العلاقة ع^{٢} = ١ − ف^{٣} ، حيث ف المسافة بالأمتار، بين أن تسارع الجسم يساوي −$\frac{٣}{٢}$ م/ث^{٢} في حالة السكون اللحظي.

⇐ ٢ع × ع′ = −٣ف^{٢} ف′

٢ع × ت = −٣ف^{٢} × ع

ت = $\frac{-٣\text{ف}^{٢}}{٢}$

ع = ٠ ⇐ (٠)^{٢} = ١ − ف^{٣} ⇐ ف^{٣} = ١

⇐ ف = ١

∴ ت = $\frac{-٣ \times (١)^{٢}}{٢}$ = −$\frac{٣}{٢}$

س: يتحرك جسم على خط مستقيم وفقه المعادلة الزمنية ف(ن) = $\frac{١}{٤}$(ن + ٢)^{٤} − ٦ن^{٢} حيث ن بالثواني، ف بالأمتار، جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٨٩ م/ث ؟

الحل: ع(ن) = (ن + ٢)^{٣} − ١٢ن = ٨٩

ن^{٣} + ٦ن^{٢} + ١٢ن + ٨ − ١٢ن = ٨٩

ن^{٣} + ٦ن − ٨١ = صفر

ن = ٣ ⇐ (٣)^{٣} + ٣×٦ − ٨١ = صفر

ن^{٣}	ن^{٢}	ن	ن^{٠}	
١	٦	٠	−٨١	
	٣	٢٧	٨١	$\boxed{٣}$
١	٩	٢٧	٠	

⇐ ع(ن) = (ن − ٣)(ن^{٢} + ٩ن + ٢٧) = صفر

المميز = ٨١ − ٤×١×٢٧

= ٨١ − ١٠٨ = −٢٧

⇐ (ن − ٣)(ن^{٢} + ٩ن + ٢٧) = صفر

⇐ ن − ٣ = ٠ ⇐ ن = ٣

ت(ن) = ٣(ن + ٢)^{٢} − ١٢

ت(٣) = ٣(٣ + ٢)^{٢} − ١٢

= ٧٥ − ١٢ = ٦٣

س: قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض فإذا كان بعده عن نقطة القذف ن ثانية من بدء الحركة معطى بالاقتران ف(ن) = ٦٤ن − ١٦ن^{٢}، بين أن الجسم يفقد نصف سرعته الابتدائية على ارتفاع ٤٨ قدماً.

الحل: ع(ن) = ٦٤ − ٣٢ن

السرعة الابتدائية ⇐ ن = صفر

ع(٠) = ٦٤ قدم/ث

عند ف = ٤٨

٦٤ن − ١٦ن^{٢} = ٤٨

⇐ ن^{٢} − ٤ن + ٣ = ٠

(ن − ٣)(ن − ١) = ٠

⇐ ن = ٣ ، ١

ع(١) = ٦٤ − ٢ × ٣٢ × ١ = ٣٢

ع(٣) = ٦٤ − ٣٢ × ٣ = −٣٢

لاحظ ان ع(٠) = ٦٤

ع(١) = ٣٢ = ½ × ٦٤

ع(٣) = −٣٢ = −½ × ٦٤

عندها الجسم يفقد نصف سرعته الابتدائية.

س: يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة الاصل بالامتار بعد ن ثانية معطى بالعلاقة ف(ن) = جا⁴ن ، جد سرعة الجسم في اللحظة التي ينعدم فيها تسارعه لأول مرة بعد تحركه.

الحل: ع(ن) = ٤ جا³ن جتان

ت(ن) = ٤ جا³ن × −جان + ٣ × ٤ جا²ن جتا²ن

= −٤ جا⁴ن + ١٢ جا²ن جتا²ن

= ٤ جا²ن (−جا²ن + ٣ جتا²ن) = ٠

٤ جا²ن = ٠ ⇐ جان = ٠ ⇐ ن = ٠ ، π ، ٢π ، ...

−جا²ن + ٣ جتا²ن = ٠ ⇐ جا²ن / جتا²ن = ٣ جتا²ن / جتا²ن

⇐ ظا²ن = ٣

⇐ ظان = ± √٣

⇐ ن = π/٣ ، ٥π/٣ ، ...

ينعدم التسارع لأول مرة عند ن = π/٣

ع(π/٣) = ٤ جا³ π/٣ جتا π/٣

= ٤ × (√٣/٢)³ × ½

= ٣√٣ / ٤

س: تتحرك نقطة مادية حسب العلاقة ف(ن) = √ن (٢٧ − ن) اثبت ان هذه النقطة تبدأ في العودة بعد ٩ ثوان ثم جد المسافة التي قطعتها حينئذ.

الحل: ع(ن) = √ن (−١) + 1/(٢√ن) (٢٧ − ن)

= −√ن + (٢٧ − ن)/(٢√ن)

عند العودة ع = ٠

−√ن + (٢٧ − ن)/(٢√ن) = صفر

⇐ (٢٧ − ن)/(٢√ن) = √ن

٢٧ − ن = ٢ن

٣ن = ٢٧ ⇐ ن = ٩

من عند ن = ٩ : + + + + | − − − − − (٩)

⇐ السرعة تتغير اشارتها عند ن = ٩

⇐ الجسم يعكس اتجاه حركته

عند ن = ٩ ف(٩) = √٩ (٢٧ − ٩)

= ٣ × ١٨ = ٥٤ م

س: من نقطة على ارتفاع ٨٠ قدماً من سطح الارض قذف جسم رأسياً الى اعلى وضعه اقترانه المسافة ف(ن) = ٦٤ن − ١٦ن²

جد: أ) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم

ب) الزمن الذي بعده يعود الى نقطة القذف

ج) الزمن الذي بعده يعود الى سطح الارض

د) متى تصبح سرعة الجسيم ٤٠ قدم/ث

هـ) مجموعة القيم ن التي تكون عندها ع(ن) > صفر

الحل ① أقصى ارتفاع ⇐ ع = ٠

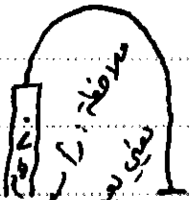
ع(ن) = ٦٤ − ٣٢ن = ٠

$\frac{٦٤}{٣٢} = \frac{٣٢ن}{٣٢}$

ن = ٢

ف(٢) = ٦٤(٢) − ١٦(٢)^٢

= ١٢٨ − ٦٤ = ٦٤م



ملاحظة: أ) سيعود الى نفس النقطة وليس لسطح البناية

ب) يعود الى نقطة القذف ⇐ ف = ٠

ف(ن) = ٦٤ن − ١٦ن^٢ = صفر

١٦ن(٤ − ن) = ٠

⇐ ن = صفر تهمل ن = ٤

جـ) بعد ٥ عن سطح الارض ⇐ ف(ن) = −م

⇐ ٦٤ن − ١٦ن^٢ = −٨٠

٦٤ن − ١٦ن^٢ + ٨٠

وعند وصوله سطح الارض

٦٤ن − ١٦ن^٢ + ٨٠ = ٠ بالقسمة ÷ −١٦

⇐ ن^٢ − ٤ن − ٥ = صفر

(ن − ٥)(ن + ١) = صفر

⇐ ن = ٥ ، ن = −١ تهمل

د) ع(ن) = ٦٤ − ٣٢ن = ٤٠

$\frac{−٣٢ن}{−٣٢} = \frac{−٢٤}{−٣٢}$

ن = $\frac{٣}{٤}$ ثانية

هـ) ع(ن) = ٦٤ − ٣٢ن = ٠

ن = ٢ ++++ ٢ ----

⇐ ع > ٠ ⇐ ن < ٢ ولان الزمن موجب

⇐ ن ∈ [٠، ٢)

مثال: من سطح بناية أفلت شخص جسماً من السكون وفقه الاقتران ف١(ن) = ١٦ن^٢ وفي اللحظة نفسها رمى شخص ثان جسماً عمودياً الى أسفل بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٠م/ث وفقه الاقتران ف٢(ن) = ٢٠ن + ١٦ن^٢ فاذا ارتطم الجسم الاول بعد ½ ثانية من ارتطام الجسم الثاني بالارض فجد

أ) سرعة كل من الجسم الاول والجسم الثاني لحظة ارتطامهما بالارض

ب) ارتفاع البناية

الحل ① زمن الاول = ن + ½

زمن الثاني = ن

الجسمان قطعا مسافة نفسها

⇐ ف١(ن + ½) = ف٢(ن)

١٦(ن + ½)^٢ = ٢٠ن + ١٦ن^٢

$\cancel{١٦ن^٢}$ + ١٦ن + ٤ = ٢٠ن + $\cancel{١٦ن^٢}$

$\frac{٤ن}{٤} = \frac{٤}{٤}$

ن = ١

⇐ زمن الجسم الاول = ½ + ١ = $\frac{٣}{٢}$ ثانية

زمن الجسم الثاني = ١ ثانية.

أ) ع٢(١) = ٢٠ + ٣٢(١) = ٥٢م/ث

ع١($\frac{٣}{٢}$) = ٣٢($\frac{٣}{٢}$) = ٤٨م/ث

ب) ف١($\frac{٣}{٢}$) = ١٦ × ($\frac{٣}{٢}$)^٢ = ٣٦م

ف٢(١) = ٢٠ × ١ + ١٦ × ١ = ٣٦م

⇐ ارتفاع البناية ٣٦م .

مراجعة عامة للمعلومات المرتبطة :

أولاً : الحجوم والمساحات :

* حجم المكعب = س³

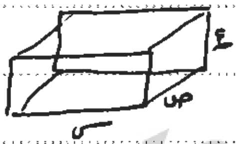
المساحة الجانبية = ٤ س²

المساحة الكلية = مساحة القاعدتين + الجانبية

= ٢ س² + ٤ س²

= ٦ س²

* حجم متوازي المستطيلات



ح = الطول × العرض × الارتفاع

= س × ص × ع

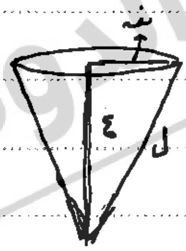
المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= (٢س + ٢ص) ع

المساحة الكلية = مساحة القاعدتين + الجانبية

= ٢ (س ص) + (٢س + ٢ص) ع

* حجم المخروط :



ح = ١/٣ مساحة القاعدة × الارتفاع

= ١/٣ نق² π ع

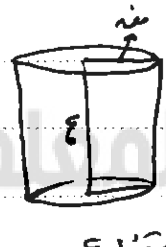
المساحة الجانبية للمخروط = π نق ل

حيث ل : طول راسم المخروط

المساحة الكلية للمخروط = القاعدة + الجانبية

= نق² π + π نق ل

* حجم الاسطوانة



ح = مساحة القاعدة × الارتفاع

= نق² π ع

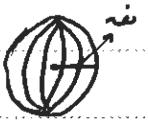
المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢ نق π ع

المساحة الكلية = القاعدتين + الجانبية

= ٢ نق² π + ٢ نق π ع

* حجم الكرة



ح = ٤/٣ نق³ π

مساحة سطح الكرة = ٤ نق² π

ثانياً : المساحات للأشكال :

* مساحة المربع = س²

محيط المربع = ٤ س

طول قطر المربع = $\sqrt{2}$ س

* المستطيل :

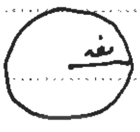
م = الطول × العرض

= س ص

محيط المستطيل = ٢ س + ٢ ص

قطر المستطيل = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

* الدائرة :



م = نق² π

محيط الدائرة = ٢ نق π

* القطاع الدائري

م = ١/٢ نق² هـ

هـ : بالقياس الدائري

طول القوس (ل) = هـ × نق .

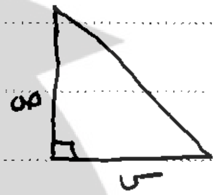
* شبه المنحرف

$م = \frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين × الارتفاع)

$= \frac{1}{2}$ (س + ص) ع

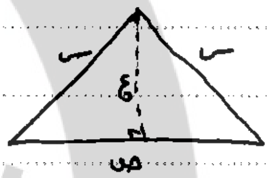
* المثلث :

① م = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع



$م = \frac{1}{2}$ س ص

ننزل عمود ينصف القاعدة

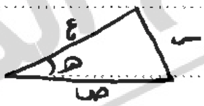


$م = \frac{1}{2}$ ص (ع)

② اذا علم ضلعان والزاوية المحصورة بينهما

$م = \frac{1}{2}$ (حاصل ضربهما) × جيب الزاوية بينهما

③ قانون جيب التمام



$س^2 = ص^2 + ع^2 - 2$ ص ع جتا هـ

④ قاعدة فيثاغورس: $(الوتر)^2 = (ض_1)^2 + (ض_2)^2$

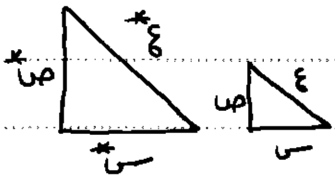
ثالثاً: المسافة بين نقطتين

$ف = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

اذا كانت النقطتان أ $(س_1، ص_1)$ ، ب $(س_2، ص_2)$

رابعاً: تشابه المثلثات:

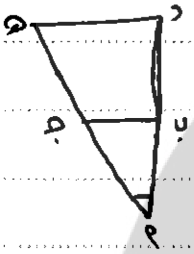
الرئيسية: اذا تشابه مثلثان فإن أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة.



$\frac{ع}{ع^*} = \frac{س}{س^*} = \frac{ص}{ص^*}$

ويستخدم لإيجاد علاقات بين الأطوال الأضلاع المتشابهة.

وعكسه ان يكون المثلثان متداخلان مثل



$\frac{أب}{أد} = \frac{ب جـ}{د هـ} = \frac{أجـ}{أهـ}$

كلما كانت

عليك ربطك للقوانين والمتغيرات أفضل

كلما حققت نتائج أفضل

أيضاً المسافة = السرعة × الزمن

* المنشور الرباعي هو نفسه متوازي المستطيلات

المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

الدرس الثالث : المعدلات المرتبطة بالزمن :

* لأي قيمة تتغير بمرور الزمن فإن معدل تغير القيمة (م) بالنسبة للزمن هو المشتقة $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$.

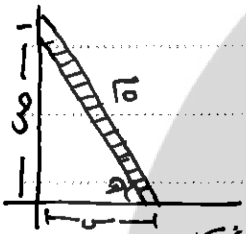
* اذا كانت علاقة ما تربط متغيرات مختلفة تتغير بمرور الزمن مثل س ، ص مثل العلاقة $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 10$ فاننا نشتقه ضمنياً بالنسبة للزمن فتصبح $2\text{س}\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + 2\text{ص}\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = 0$.

ملاحظة عند حل سؤال على المعدلات المرتبطة بالزمن يجب التأكيد على ما يلي :

1. توضيح المسألة من خلال الرسم ان امكن
2. من المعطيات احدد الثوابت والمتغيرات
3. معرفة تامة بالقوانين المتعلقة بالمساحات والحجوم وقوانين تشابه المثلثات والزوايا المحيطية والمركزية والمماسية ... الخ
4. وجود كلمات محددة تعني مشتقة مثل معدل ، سرعة
5. كلمة تناقص تعني المعدل سالب وكلمة تزايد تعني المعدل موجب .
6. اي جسم لم يتم اعطاء ابعاده في السؤال يعتبر نقطة متحركة .

مثال ① : سلم طوله ٥م يرتكز طرفه العلوي على حائط رأسي وطرفه السفلي على ارض افقية ، فاذا انزلق السلم بحيث ان طرفه السفلي يتحرك بسرعة ٢م/ث فجد في لحظة ما كان الطرف السفلي يبعد عن الحائط مسافة ٣م جد ما يلي عند تلك اللحظة

① معدل نزول الطرف العلوي للسلم .
② معدل التغير في مساحة المثلث المحصور بين السلم والحائط والارض .
③ معدل التغير في الزاوية المحصورة بين السلم والحائط العمودي .



$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = 2$

الحل : س تزداد

$\Leftarrow \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = 2$

① المطلوب $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$

$\Leftarrow \text{س}^2 + \text{ص}^2 = 25$ نظرية فيثاغورس

نشتقه ضمنياً بالنسبة للزمن

$2\text{س}\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + 2\text{ص}\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} =$ صفر

لكن $\text{ص}^2 = 25 - \text{س}^2$

$\Leftarrow \text{ص} = \sqrt{25 - \text{س}^2}$ وبالتعويض

$\Leftarrow 2\text{س}\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + 2\left(\sqrt{25 - \text{س}^2}\right)\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} =$ صفر

$\text{س} = 3 \Leftarrow 6\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + 2(4)\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} =$ صفر

$8\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = -6\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

$\Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{-6}{8} \times 2$

$= \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2} = -1{,}5$

ص تتناقص

انتبه الى ان قيمة ص = −٤ تهمل لانها مسافة

② $\text{م} = \frac{1}{2}\text{س ص}$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{1}{2}\text{س}\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} + \frac{1}{2}\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}\text{ص}$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times -1{,}5 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4$

$= -2{,}25 + 4$

$= 1{,}75$

المعلم : محمد قريع
0795680153

③ $\text{جتا}\ \text{هـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{س}}{5}$

$-\text{جا}\ \text{هـ}\ \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{1}{5}\ \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

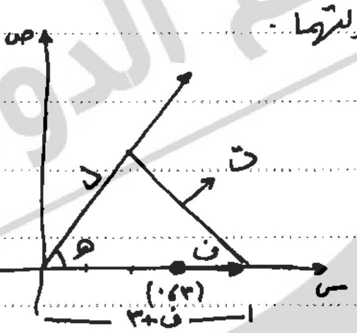
$-\frac{\text{ص}}{5} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{1}{5} \times 2$

$-\frac{4}{5}\ \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{2}{5}$

$\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{2}{5} \times \frac{-5}{4}$

$\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = -\frac{1}{2}$ راد/ث

مثال④: نقطة ابتدأت الحركة على محور السينات وبالاتجاه الموجب مبتدأة الحركة من النقطة (3، 0) بسرعة 2 سم/د وفي الوقت نفسه ابتدأت نقطة أخرى بالحركة في الربع الأول مبتدأة من نقطة الأصل على المستقيم الذي معادلته ص = $\sqrt{3}$ س بسرعة 3 سم/د، جد سرعة تباعد او تقارب النقطتين بعد 4 دقائق من بدء حركتهما.



الحل: نرسم

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = 2$ سم/د

$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = 3$ سم/د

المطلوب $\frac{\text{دت}}{\text{دن}}$

أولاً: نجد الزاوية هـ

ص = $\sqrt{3}$ س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{3}$ وهذا يعني ان ظا هـ = $\sqrt{3}$

$\Leftarrow$ هـ = 60°

من قانون جيب التمام

$\text{ت}^2 = (\text{ف}+3)^2 + \text{ل}^2 - 2(\text{ف}+3)(\text{ل})\ \text{جتا}\ 60$

$2\text{ت}\ \frac{\text{دت}}{\text{دن}} = 2(\text{ف}+3)\frac{\text{دف}}{\text{دن}} + 2\text{ل}\ \frac{\text{دل}}{\text{دن}} - \left(2(\text{ف}+3) \times \frac{1}{2}\frac{\text{دل}}{\text{دن}} + 2(\text{ل}) \times \frac{1}{2}\ \frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right)$

عند ن = 4 دقائق

المسافة = السرعة × الزمن

ف = 2 × ن = 2ن

ل = 3 × ن = 3ن

$\Leftarrow 2\text{ت}\ \frac{\text{دت}}{\text{دن}} = 2(2\text{ن}+3)\frac{\text{دف}}{\text{دن}} + 2(3\text{ن})\ \frac{\text{دل}}{\text{دن}} - \left(2(2\text{ن}+3) \times \frac{1}{2}\ \frac{\text{دل}}{\text{دن}} + 2(3\text{ن}) \times \frac{1}{2}\ \frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right)$

لكن عند ن = 4 فإن

$\text{ت}^2 = (2\times4+3)^2 + (3\times4)^2 - 2(2\times4+3)(3\times4) \times \frac{1}{2}$

$= 121 + 144 - 2(11)(12) \times \frac{1}{2}$

$= 265 - 133$

$= 132$

$\Leftarrow \text{ت} = \sqrt{132}$

بالتعويض

$2 \times \sqrt{132} \times \frac{\text{دت}}{\text{دن}} = 22\ \frac{\text{دف}}{\text{دن}} + 24\ \frac{\text{دل}}{\text{دن}}$
$- \left(2(11) \times \frac{1}{2}\ \frac{\text{دل}}{\text{دن}} + 2(12) \times \frac{1}{2} \times \frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right)$

$\Leftarrow 2\sqrt{132} \times \frac{\text{دت}}{\text{دن}} = 22 \times 2 + 24 \times 3$
$-\left((11 \times 3) + 12 \times 2\right)$

$\Leftarrow 2\sqrt{132}\ \frac{\text{دت}}{\text{دن}} = 44 + 72 - (33 + 24)$

$2\sqrt{132}\ \frac{\text{دت}}{\text{دن}} = 116 - 57$

$2\sqrt{132}\ \frac{\text{دت}}{\text{دن}} = 59$

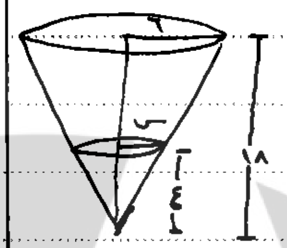
$\Leftarrow \frac{\text{دت}}{\text{دن}} = \frac{59}{2\sqrt{132}}$ سم/د وهو المطلوب

مثال③: إناء مخروطي قاعدته افقية ورأسه الى اسفل يتسرب منه الماء بمعدل 2 سم³/ث، فإذا كان قطر قاعدة الإناء يساوي 12 سم وارتفاعه 18 سم جد معدل تغير ارتفاع الماء في الإناء عندما يصبح

$\Leftarrow$

ارتفاع الماء فيه ١٠ سم

الحل : الحجم مرتبط بالارتفاع ونصف القطر



$\frac{دح}{دن} = ٢٠$ سم³/ث ، ع = ١٠

لاحظ ان المعلومات عن $\frac{دس}{دن}$

اي معدل تغير نصف القطر

⟸ ح = $\frac{١}{٣}$ س² π ع

لكن من تشابه المثلثات $\frac{٦}{س} = \frac{١٨}{ع}$

٣س = ع ⟸ س = $\frac{ع}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$ ع

⟸ ح = $\frac{١}{٣}$ ($\frac{١}{٣}$ ع)² π ع

ح = $\frac{١}{٢٧}$ π ع³ نشتقه ضمنياً

$\frac{دح}{دن} = \frac{١}{٢٧}$ π × ٣ع² $\frac{دع}{دن}$

٢٠ = $\frac{١}{٢٧}$ π × ٣ × ١٠² × $\frac{دع}{دن}$

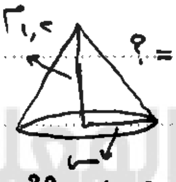
٢٠ = $\frac{١٠٠}{٩}$ π $\frac{دع}{دن}$

$\frac{١٨٠}{١٠٠π} = \frac{١٠٠π}{١٠٠π} \frac{دع}{دن}$

⟸ $\frac{دع}{دن} = \frac{٩}{٥π}$ سم/ث

تدريب (٢) : يتساقط الرمل مكوناً كومة على شكل مخروط دائري قائم على الأرض بمعدل ٠.٠٤٣٢ م³/ث ، اذا كان ارتفاع كومة الرمل دائماً يساوي ربع طول قطر قاعدتها جد سرعة ارتفاع كومة الرمل عندما يكون ارتفاعها ١.٢ من المتر ؟

الحل : $\frac{دح}{دن}$ = ٠.٠٤٣٢ م³/ث ، $\frac{دع}{دن}$ = ؟



من العلاقة بين الارتفاع ونصف القطر

ع = $\frac{١}{٤}$ (٢س) = $\frac{١}{٢}$ س

ح = $\frac{١}{٣}$ س² π ع من التعويض

⟸ ح = $\frac{١}{٣}$ (٢ع)² π

ح = $\frac{٤}{٣}$ π ع³

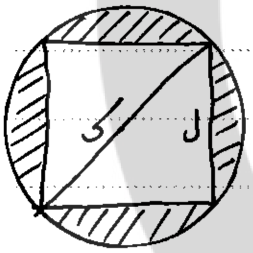
$\frac{دح}{دن} = \frac{٤}{٣}$ π (٣ع² $\frac{دع}{دن}$)

٠.٠٤٣٢ = $\frac{٤}{٣}$ π × ٣ × (١.٢)² $\frac{دع}{دن}$

٠.٠٤٣٢ = ٥.٧٦ π $\frac{دع}{دن}$

⟸ $\frac{دع}{دن} = \frac{٠.٠٤٣٢}{٥.٧٦π}$ م/ث

وزاري ٢٠١١ ص : تتمدد دائرة بحيث يزداد طول قطرها بمعدل ٦ سم/د رسم مربع داخل الدائرة واخذ يتمدد معها بحيث تبقى رؤوسه ملامسة لها ، جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين المربع والدائرة عندما يكون طول قطر الدائرة ١٠سم ؟



الحل $\frac{دم}{دن}$ = ؟؟

$\frac{دس}{دن}$ = ٦ سم/د

س = ١٠سم

مساحة المنطقة المحصورة = م

م = مساحة الدائرة − مساحة المربع

= $(\frac{س}{٢})^2$ π − ل²

نجد العلاقة بين س ، ل من نظرية فيثاغورس

ل² + ل² = س² ⟸ ٢ل² = س²

⟸ ل = $\frac{س}{\sqrt{٢}}$

وبالتعويض

م = $\frac{س^2 π}{٤} - \frac{س^2}{٢}$

= $\frac{١}{٤}$ (س² π − ٢س²)

= $\frac{١}{٤}$ س² (π − ٢)

= $\frac{π - ٢}{٤}$ س²

المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

$\Leftarrow \frac{دم}{دن} = \frac{ط - ٢}{٢} \times ٢ س \times \frac{دس}{دن}$

$\frac{دم}{دن} = \frac{ط - ٢}{٢} \times ١٠ \times ٦$

$= (ط - ٢) \times ٣٠$

$= ٣٠ ط - ٦٠$ سم²/د

مثال ⑤: في الساعة الواحدة ظهراً كانت الباخرة (أ) على بعد ٢٥ كم من ب جنوباً فإذا كانت (أ) تسير غرباً بسرعة ١٦ كم/س وكانت ب تسير جنوباً بسرعة ٢٠ كم/س فأوجد سرعة تغير المسافة بين الباخرتين في الساعة (١:٣٠) ظهراً.

الحل: حاول بنفسك عزيزي الطالب:

مثال ⑥: وعاء للماء على هيئة مخروط دائري قائم يصب فيه الماء بسرعة ١٠ لتر/د اوجد سرعة ارتفاع سطح الماء عند ما يكون هذا الارتفاع يساوي ٣٠ سم اذا علمت أن ارتفاع المخروط يساوي (١,٢م) ونصف قطر قاعدته (٦٠ سم)؟

الحل: المطلوب: سرعة ارتفاع سطح الماء ⇐ التغير في ارتفاع المخروط

$\frac{دح}{دن} = ١٠$ لتر/د ، ع = ٣٠ سم

ارتفاع المخروط = ١٢٠ سم ، نق = ٦٠ سم

نصف قطر الماء = س سم في اللحظة المطلوبة

$ح = \frac{١}{٣} س^٢ ط ع$

لكن من تشابه المثلثات

$\frac{٦٠}{س} = \frac{١٢٠}{ع}$

$\Leftarrow \frac{٦٠ \times ع}{١٢٠} = \frac{١٢٠}{١٢٠} \times س$

$\frac{١}{٢} ع = س$

$\Leftarrow$ بالتعويض $ح = \frac{١}{٣} (\frac{١}{٢} ع)^٢ ط ع$

$ح = \frac{١}{١٢} ط ع^٣$

$\frac{دح}{دن} = \frac{٣}{١٢} ط ع^٢ \frac{دع}{دن}$

$١٠ = \frac{٣}{١٢} \times ط \times ٩٠٠ \times \frac{دع}{دن}$

$\frac{١٠}{٢٢٥ ط} = \frac{٢٢٥ ط}{٢٢٥ ط} \frac{دع}{دن}$

$\frac{١}{٤٥ ط} = \frac{دع}{دن}$

$\Leftarrow \frac{دع}{دن} = \frac{١}{٤٥ ط}$ سم/د

مثال ⑦ بالون كروي يزداد حجمه بمعدل ٤٠٠ سم³/د أوجد معدل الزيادة في مساحة سطحه في اللحظة التي يكون فيها نصف قطره ١٠ سم؟

الحل: $\frac{دح}{دن} = ٤٠٠$ سم³/د ، نق = ١٠ لحظياً

مساحة سطح البالون = م

م = ٤ ط نق²

$\frac{دم}{دن} = ٤ ط \times ٢ نق \times \frac{دنق}{دن} = ٨ ط نق \frac{دنق}{دن}$

نجد $\frac{دنق}{دن}$ من علاقة الحجم

$ح = \frac{٤}{٣} ط نق^٣$

نشتق $\frac{دح}{دن} = \frac{4}{3} \times 3 نق^2 \frac{دنق}{دن} \pi$

$400 = 4 \times (10)^2 \times \pi \times \frac{دنق}{دن}$

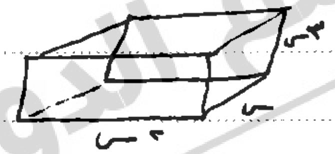
$\frac{400}{400\pi} = \frac{400\pi}{400\pi} \frac{دنق}{دن}$

$\frac{دنق}{دن} = \frac{1}{\pi}$ سم/د

$\Leftarrow \frac{دم}{دن} = 8\pi \times 10 \times \frac{1}{\pi}$

$= 80$ سم²/د

وزاري 2016 ص: صندوق معدني على شكل متوازي مستطيلات طوله مثلي عرضه وارتفاعه (3) أمثال عرضه يتمدد بالحرارة محافظاً على شكله بحيث يزداد حجمه بمعدل 72 سم³/د جد معدل التغير في مساحة سطحه الكلي عندما يكون طوله (36) سم؟



الحل الطول = 2س

العرض = س

الارتفاع = 3س

$\frac{دح}{دن} = 72$ سم³/د ، الطول = 2س = 36

$\Leftarrow$ س = 18 سم

ح = الطول × العرض × الارتفاع

ح = 2س × س × 3س

ح = 6س³

$\frac{دح}{دن} = 18 س^2 \frac{دس}{دن}$ لإيجاد معدل التغير

$72 = 18 (18)^2 \frac{دس}{دن}$

$\frac{72}{324} = \frac{324}{324} \frac{دس}{دن}$

$\Leftarrow \frac{دس}{دن} = \frac{2}{9}$ سم/د

مساحة سطحه = مساحة القاعدتين + المساحة الجانبية

م = 2(س × 2س) + 2(س + 2س) 3س

م = 4س² + 6س² + 12س²

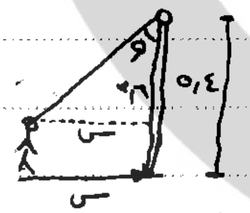
م = 22س²

$\frac{دم}{دن} = 44 س \frac{دس}{دن}$

$\frac{دم}{دن} = 44 \times 18 \times \frac{2}{9}$

$= 176$ سم²/د

وزاري 2014 ش: يقف رجل طوله (1,8) م أمام مصباح كهربائي مثبت على عمود ارتفاعه عن سطح الأرض (5,4) م إذا أخذ الرجل بالاقتراب من قاعدة العمود بمعدل 2م/ث جد معدل التغير في الزاوية المحصورة بين العمود الذي يحمل المصباح والشعاع الواصل بين المصباح ورأس الرجل عندما يكون الرجل على بعد (1,8) متر من قاعدة العمود.



$\frac{دس}{دن} = -2$ م/ث

ظا هـ $= \frac{س}{3,6}$

اشتق $قا^2 هـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{1}{3,6} \frac{دس}{دن}$

$قا^2 هـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{1}{3,6} \times -2$

$قا^2 هـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{-1}{1,8}$

استخدم المتطابقة $قا^2 هـ = 1 + ظا^2 هـ$

$(1 + ظا^2 هـ) \frac{دهـ}{دن} = \frac{-1}{1,8}$

$\left(1 + \left(\frac{س}{3,6}\right)^2\right) \frac{دهـ}{دن} = \frac{-1}{1,8}$ لحظة الوقوف

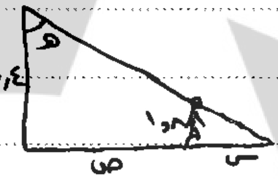
نعوض $\left(1 + \left(\frac{1,8}{3,6}\right)^2\right) \frac{دهـ}{دن} = \frac{-1}{1,8}$

$\Leftarrow (١ + \frac{١}{٤}) \frac{دهـ}{دن} = \frac{-١}{١٫٨}$

$\frac{٤}{٥} \times \frac{٥}{٤} \frac{دهـ}{دن} = \frac{-١}{١٫٨} \times \frac{٤}{٥}$

$\boxed{\frac{دهـ}{دن} = \frac{-٤}{٩}}$

حل آخر :



$\frac{دص}{دن} = -٢٠ سم/ث$

باستخدام التشابه $\frac{١٫٨}{س} = \frac{٥٫٤}{ص + س}$

$١٫٨ س + ١٫٨ ص = ٥٫٤ س$

$\frac{٣٫٦ س}{٣٫٦} = \frac{١٫٨ ص}{٣٫٦}$

$س = \frac{ص}{٢}$

لكن $ظا هـ = \frac{س + ص}{٥٫٤} = \frac{ص + \frac{ص}{٢}}{٥٫٤}$

$ظا هـ = \frac{٣ ص}{١٠٫٨}$

$قا^٢ هـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{٣}{١٠٫٨} \frac{دص}{دن}$

عندما $ص = ١٫٨ م \Leftarrow س = \frac{١٫٨}{٢} = ٠٫٩ م$

أيضاً $ظا هـ = \frac{٣ \times ١٫٨}{١٠٫٨} = \frac{٥٫٤}{١٠٫٨} = \frac{١}{٢}$

$قا^٢ هـ = ١ + ظا^٢ هـ$

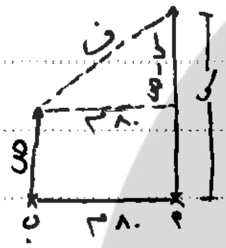
$= ١ + (\frac{١}{٢})^٢ = \frac{٥}{٤}$

$\Leftarrow (\frac{٥}{٤}) \frac{دهـ}{دن} = \frac{٣}{١٠٫٨} \times -٢$

$\frac{دهـ}{دن} = -\frac{١}{١٫٨} \times \frac{٤}{٥}$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{-٤}{٩}$

وزارة ٢٠١٠ ص : قاربان أ، ب المسافة الأفقية بينهما ٨٠ م بدأ القارب (أ) بالحركة بسرعة ٢٠ م/ث وبعد ثانيتين بدأ القارب (ب) بالحركة في خط موازٍ للقارب أ وبنفس الاتجاه بسرعة ١٠ م/ث جد معدل التغير في المسافة بين القاربين بعد ٤ ثوانٍ من انطلاق القارب (أ).



المسافة بين القاربين = ف

تغير المسافة بينهما $\frac{دف}{دن}$

$\frac{دس}{دن} = ٢٠ م/ث$

$\frac{دص}{دن} = ١٠ م/ث$

من نظرية فيثاغورس

$ف^٢ = (س - ص)^٢ + (٨٠)^٢$

$ف = \sqrt{(س - ص)^٢ + ٦٤٠٠}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٢(س - ص) \times (\frac{دس}{دن} - \frac{دص}{دن})}{٢\sqrt{(س - ص)^٢ + ٦٤٠٠}}$

المسافة = السرعة × الزمن

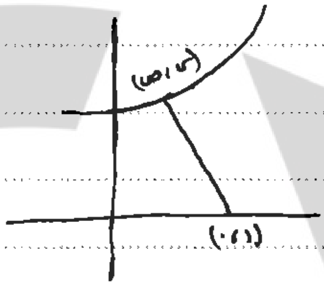
$س = ٢٠ \times ٤ = ٨٠ م$

$ص = ١٠ \times ٢ = ٢٠ م$

$\frac{دف}{دن} = \frac{\cancel{٢}(٨٠ - ٢٠)(٢٠ - ١٠)}{\cancel{٢}\sqrt{(٦٠)^٢ + ٦٤٠٠}}$

$= \frac{٦٠٠}{\sqrt{١٠٠٠٠}} = \frac{٦٠٠}{١٠٠} = ٦ م/ث$

مثال (٧): تتحرك نقطة على منحنى الاقتران $ق(س) = \sqrt{س^{٢} + ٥}$ بحيث يزداد احداثيها السيني بمعدل $٣\sqrt{١٠}$ سم/ث ، اوجد معدل تغير بعدها عن النقطة (١ ، ٠) عندما س = ٢؟



$$\frac{دس}{دن} = ٣\sqrt{١٠}$$

ف: المسافة بين نقطتين

$$ف = \sqrt{(س-١)^{٢} + ص^{٢}}$$

لكن $ص = \sqrt{س^{٢}+٥}$

$$ص^{٢} = س^{٢} + ٥$$

بالتعويض $ف = \sqrt{(س-١)^{٢} + س^{٢} + ٥}$

$$ف = \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١ + س^{٢} + ٥}$$

$$ف = \sqrt{٢س^{٢} - ٢س + ٦}$$

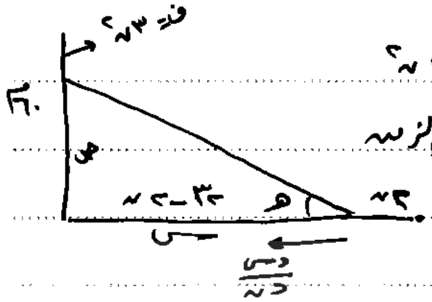
$$\frac{دف}{دن} = \frac{٤س - ٢}{٢\sqrt{٢س^{٢} - ٢س + ٦}} \cdot \frac{دس}{دن}$$

$$\frac{دف}{دن}\Big|_{س=٢} = \frac{٤\times٢ - ٢}{٢\sqrt{٨ - ٤ + ٦}} \times ٣\sqrt{١٠}$$

$$= \frac{٦}{٢\sqrt{١٠}} \times ٣\sqrt{١٠}$$

$$= ٩ \text{ سم/ث}$$

مثال (٨): سقط جسم رأسياً من اعلى برج ارتفاعه ٦٠م بحيث ان المسافة التي يقطعها $ف = ٣ن^{٢}$ حيث المسافة بالامتار والزمن بالثواني في لحظة معينة من السقوط تحرك رجل يبعد ٣٢م عن قاعدة البرج نحوه بسرعة ٢م/ث جد معدل التغير في زاوية ارتفاع الجسم بالنسبة للرجل عندما ن = ٢ ثواني
(هنا لا نعتبر طول الشخص وانما نقطة).



الحل: المسافة $= ٣ن^{٢}$

المسافة = السرعة × الزمن

الرجل يسير خطياً ف = السرعة × الزمن

$$\Leftarrow ف = ٢ن$$

$$ظا هـ = \frac{ص}{س} \quad ، \quad ص = ٦٠ - ٣ن^{٢}$$

$$س = ٣٢ - ٢ن$$

$$\Leftarrow ظا هـ = \frac{٦٠ - ٣ن^{٢}}{٣٢ - ٢ن}$$

$$قا^{٢}هـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{(٣٢ - ٢ن)(-٦ن) - (٦٠ - ٣ن^{٢})(-٢)}{(٣٢ - ٢ن)^{٢}}$$

عند ن = ٢ ثواني

$$ظا هـ = \frac{٦٠ - ٣(٤)^{٢}}{٣٢ - ٢\times٤} = \frac{١٢}{٢٤} = \frac{١}{٢}$$

$$قا^{٢}هـ = ١ + ظا^{٢}هـ$$

$$قا^{٢}هـ = ١ + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$$

$$قا^{٢}هـ = \frac{٥}{٤} \Leftarrow$$

$$\frac{٥}{٤}\frac{دهـ}{دن} = \frac{(٣٢ - ٨)(-٢٤) - (٦٠ - ٤٨)(-٢)}{(٢٤)^{٢}}$$

$$\frac{٥}{٤}\frac{دهـ}{دن} = \frac{٢٤ \times -٢٤ + ٢٤}{(٢٤)^{٢}} = \frac{٢٤(-٢٤ + ١)}{(٢٤)^{٢}}$$

$$\frac{٥}{٤}\frac{دهـ}{دن} = \frac{-٢٣}{٢٤}$$

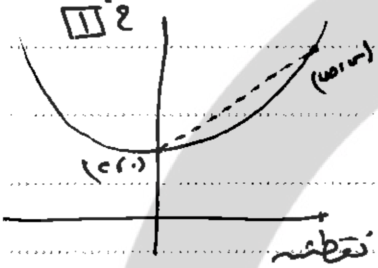
$$\frac{دهـ}{دن} = \frac{-٢٣}{٢٤} \times \frac{٤}{٥}$$

$$= \frac{-٢٣}{٣٠}$$

المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

تدريب (٣): تتحرك نقطة على منحنى اقترانه ص = س² + ٢ وفي لحظة ما كان معدل تغير احداثيها السيني ٠٫٠٥ سم/ث وكان معدل التغير في احداثيها الصادي ٠٫٠٤٣ سم/ث، جد بعد النقطة المتحركة على المنحنى عندئذٍ عن النقطة (٠، ٢)؟

خ١



دس/دن = ٠٫٠٥

دص/دن = ٠٫٠٤٣

البعد = المسافة بين نقطتين

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

خ٢ = $\sqrt{(س - ٠)^٢ + (ص - ٢)^٢}$

= $\sqrt{س^٢ + (ص - ٢)^٢}$

خ٣ + خ٤ لكن ص = س² + ٢

خ٥ $\frac{دص}{دن} = ٢س \frac{دس}{دن}$

٠٫٠٤٣ = ٢س × ٠٫٠٥

$\frac{٠٫٠٤٣}{٠٫٠٥} = \frac{٠٫٠٥ س}{٠٫٠٥}$

س = ٠٫٨٦

خ٦ ⇐ ف = $\sqrt{س^٢ + (س^٢ + ٢ - ٢)^٢}$

= $\sqrt{س^٢ + س^٤}$

= $\sqrt{(٠٫٨٦)^٢ + (٠٫٨٦)^٤}$

البعد بين النقطتين

ف = $\sqrt{١٫٢٨٦٦}$ = ٠٫٧٣٩٦ سم

بناءً على ما سبق نلاحظ :

خ١ ارسم جيداً

⇓

خ٢ اكتب القانون الرئيسي

⇓

خ٣ اربط المتغيرات ببعض

⇓

خ٤ استبعاد المتغيرات التي ليس لها مشتقة!!!

⇓

خ٥ اشتقه ضمنياً

⇓

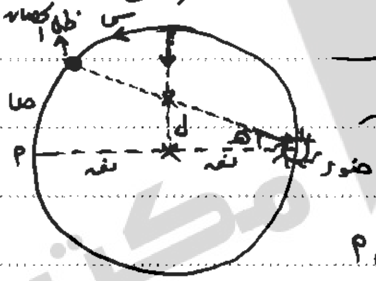
خ٦ التعويض

⇓

انتهى السؤال

سؤال: في لسنوية الكتاب ٢٠٠٨

مضمار سباق دائري يوجد على طرف قطره مصدر ضوء ، انطلق متسابق من نهاية قطر آخر عمودي على القطر الأول مقترباً من المركز بسرعة ٤ كم/د ، جد سرعة تغير ظل المتسابق على المضمار عندما يقطع المتسابق نصف المسافة عن المركز.



الحل: عند وقوع الضوء على المتسابق يكون ظله على المضمار وكلما تحرك المتسابق نحو المركز يتحرك ظله نحو النقطة م كما في الرسم المجاور

المطلوب ايجاد دس/دن

ل = ½ نق ، دل/دن = −٤ (لأنها تتناقص المسافة)

ظا هـ = ل/نق بشكل عام

باشتقاق قا²هـ دهـ/دن = 1/نق × دل/دن ---①

عند ل = ½ نق ⇐ ظا هـ = ½نق/نق = ½

⇐ قا²هـ = ١ + ظا²هـ

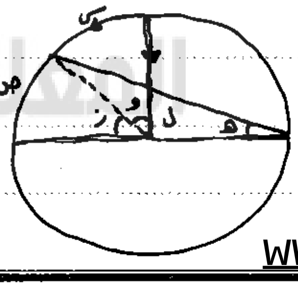
= ١ + (½)² = ٥/٤

بالتعويض في ① ٥/٤ دهـ/دن = 1/نق × −٤

⇐ دهـ/دن = −٤/نق × ٤/٥

$\boxed{\text{دهـ/دن} = -١٦ / (٥\ \text{نق})}$

لمعرفة س يجب رسم زاوية مركزية تقابله



س = نق × و

لكن و = ٩٠ − ز

⇐ س = نق (٩٠ − ز)

س = ٩٠ نق − نق ز

دس/دن = − نق دز/دن يجب ايجاده

ص = نق ز

دص/دن = نق دز/دن يجب ايجاده

ز = ٢هـ (محيطية ومركزية)

دز/دن = ٢ دهـ/دن

= ٢ × −١٦/(٥ نق)

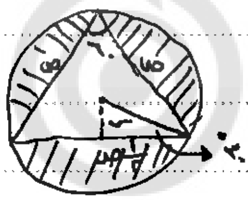
دز/دن = −٣٢/(٥ نق)

⇐ دس/دن = − نق × −٣٢/(٥ نق)

= $\boxed{٣٢/٥}$

وهو المطلوب

[redacted] رسم مثلث متساوي الأضلاع داخل دائرة بحيث تقع رؤوسه على محيط الدائرة ، بدأت الدائرة والمثلث بالتمدد محافظين على شكلها ووضعها بحيث يتمدد نصف قطر الدائرة بمعدل ٣ سم/د جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمثلث عندما يكون نصف قطر الدائرة ٩ سم



دس/دن = ٣ سم/د

س لحظياً ٩ سم

المساحة المحصورة = مساحة الدائرة − مساحة المثلث

= س²π − (½ ص × ص × جا ٦٠°)

= س²π − √٣/٤ ص²

هنا يجب ايجاد علاقة بين س ، ص

$جتا\ ٣٠ = \frac{\frac{1}{2}ص}{س}$

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\frac{1}{2}ص}{س} \Leftarrow ص = \sqrt{٣}\ س$

$\Leftarrow م = س^2 \pi - \frac{\sqrt{٣}}{٤}(\sqrt{٣}\ س)^2$

$م = س^2 \pi - \frac{٣\sqrt{٣}}{٤} س^2$

$م = \left(\pi - \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}\right) س^2$

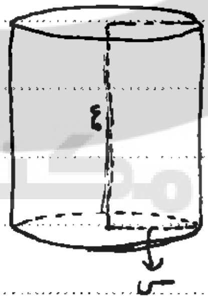
$\frac{دم}{دن} = \left(\pi - \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}\right) \times ٢ س \frac{دس}{دن}$

$\frac{دم}{دن}\Big|_{س=٩} = \left(\pi - \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}\right) \times ٢ \times ٩ \times ٣$

$= ٥٤\pi - \frac{٣ \times ٥٤ \times \sqrt{٣}}{٤}$

$= ٥٤\pi - \frac{١٦٢\sqrt{٣}}{٤}$

وزارة ٢٠٠٨ ص : اسطوانة دائرية قائمة مصنوعة من المعدن ارتفاعها يساوي $\frac{٧}{٣}$ طول قطر قاعدتها دائماً فإذا كان ارتفاعها يزيد بمعدل ٠٫٠١ سم/ث جد معدل التغير في حجم الاسطوانة عندما يكون طول نصف قطر ٦ سم ؟



$ع = \frac{٧}{٣} س$

$ع = \frac{٧}{٣} س$

$س = ٦$

$ع = \frac{٧}{٣} \times ٦ = ١٤$

الحل

$\frac{دع}{دن} = ٠٫٠١$ سم/ث

$ح = س^2 \pi ع$

$ح = \left(\frac{٣}{٧} ع\right)^2 \pi ع$

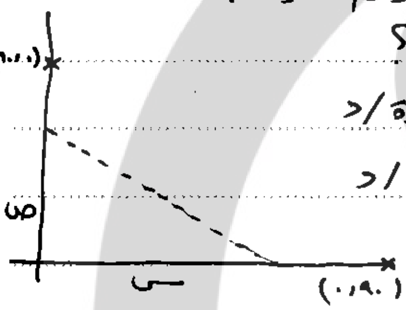
$ح = \frac{٩}{٤٩} \pi ع^3$

$\frac{دح}{دن} = \frac{٩}{٤٩} \pi \times ٣ ع^2 \frac{دع}{دن}$

$= \frac{٩}{٤٩} \pi \times ٣ \times (١٤)^2 \times ٠٫٠١$

$= \frac{٥٢٫٩٢\pi}{٤٩}$ ⟸ الجواب غير مهم ايجاده

سؤال : رجلان احدهما ينطلق من نقطة (٩٠،٠) باتجاه المركز والآخر من نقطة (٠،٦٠) نحو المركز أيضاً فإذا كانت سرعة الأول ٨ وحدة/د والثاني ٥ وحدة/د جد معدل التغير في مساحة المثلث المحصور بين الخط الواصل بينهما والاحداثيين السيني والصادي بعد ٥ دقائق من بدء حركتهما ؟



$\frac{دس}{دن} = -٨$ وحدة/د

$\frac{دص}{دن} = -٥$ وحدة/د

عند ن = ٥

س = السرعة × الزمن

$٨ \times ٥ = ٤٠$ وحدة

$ص = ٥ \times ٥ = ٢٥$ وحدة

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times س \times ص$

$\frac{دم}{دن} = \frac{1}{2}\left(س \frac{دص}{دن}\right) + \frac{1}{2}\left(ص \frac{دس}{دن}\right)$

$= \frac{1}{2} \times ٤٠ \times -٥ + \frac{1}{2} \times ٢٥ \times -٨$

$= -١٠٠ - ١٠٠$

$= -٢٠٠$ وحدة²/د

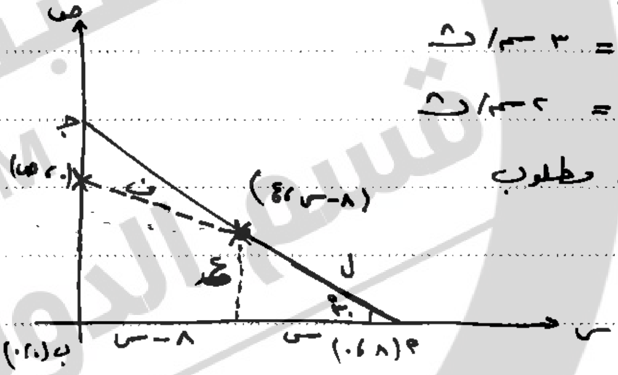
وزارة ٢٠١٥ شتوي:

في الشكل المجاور المثلث أ ب جـ مرسوم في المستوى حيث أ(٨، ٠) ، ب(٠، ٠) وكان قياس الزاوية ب أ جـ = ٣٠°، بدأت نقطة بالتحرك من أ على الضلع أ جـ باتجاه جـ وبسرعة مقدارها ٢ سم/ث وبنفس اللحظة بدأت نقطة أخرى بالحركة من ب على الضلع ب جـ باتجاه جـ وبسرعة مقدارها ٣ سم/ث جد معدل تغير بعد النقطتين المتحركتين عن بعضهما بعد ثانية واحدة من بدء الحركة

$\frac{dص}{dن}$ = ٣ سم/ث

$\frac{dل}{dن}$ = ٢ سم/ث

$\frac{dف}{dن}$ = مطلوب



ف^2 = (٨ - س)^2 + (ع - ص)^2

ف = $\sqrt{(٨-س)^2 + (ع-ص)^2}$

$\frac{dف}{dن} = \frac{٢(٨-س)\times -١\frac{dس}{dن} + ٢(ع-ص)\times(\frac{dع}{dن} - \frac{dص}{dن})}{٢\sqrt{(٨-س)^2+(ع-ص)^2}}$

$\frac{dف}{dن} = \frac{-٢(٨-س)\frac{dس}{dن} + ٢(ع-ص)(\frac{dع}{dن} - \frac{dص}{dن})}{٢\sqrt{(٨-س)^2+(ع-ص)^2}}$

لكن جا ٣٠° = $\frac{ع}{ل}$ ⇐ $\frac{١}{٢} = \frac{ع}{ل}$

⇐ ل = ٢ع ⇐ $\frac{dل}{dن} = ٢\frac{dع}{dن}$

⇐ $\frac{dع}{dن} = \frac{٢}{٢}$ = ١ سم/ث

أيضاً جتا ٣٠° = $\frac{س}{ل}$

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{س}{ل}$

$\sqrt{٣}$ ل = ٢س

$\sqrt{٣}\frac{dل}{dن} = ٢\frac{dس}{dن}$

$\frac{dس}{dن} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}\frac{dل}{dن}$

$\frac{dس}{dن} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٢ = \sqrt{٣}$

عند ن = ١ ، المسافة = السرعة × الزمن

ل = ٢ × ١ = ٢ سم

س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٢ = \sqrt{٣}$ سم

ص = ٣ × ١ = ٣ سم

ع = $\frac{١}{٢}$ ل = $\frac{١}{٢} \times ٢$ = ١ سم

بالتعويض

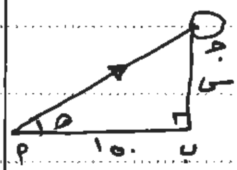
$\frac{dف}{dن} = \frac{-٢(٨-\sqrt{٣})\sqrt{٣} + ٢(١-٣)(١-٣)}{٢\sqrt{(٨-\sqrt{٣})^2 + (١-٣)^2}}$

$= \frac{-١٦\sqrt{٣} + ٦ + ٨}{٢\sqrt{٦٤ - ١٦\sqrt{٣} + ٣ + ٤}}$

$= \frac{-١٦\sqrt{٣} + ١٤}{٢\sqrt{٧١ - ١٦\sqrt{٣}}}$

$= \frac{٧ - ٨\sqrt{٣}}{\sqrt{٧١ - ١٦\sqrt{٣}}}$

تدريب (٤): يرتفع بالون رأسياً الى أعلى بمعدل ثابت قدره ٣٤٢م/د ، اذا تم رصد البالون من مشاهد على الارض يبعد ١٥٠م عن موقع البالون على الارض جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد (هـ) للبالون عندما يكون البالون على ارتفاع ١٥٠ متراً من سطح الارض.



الحل $\frac{دس}{دن} = ٣٤٢م/ث$

$\frac{دهـ}{دن} =$ المطلوب

$ظا هـ = \frac{س}{١٥٠}$

$قا^2 هـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{1}{١٥٠} \frac{دس}{دن}$

لكن عندما س = ١٥٠م فإن

$ظا هـ = \frac{١٥٠}{١٥٠} = ١$

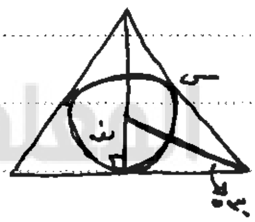
$\Leftarrow قا^2 هـ = ١ + ظا^2 هـ$

$قا^2 هـ = ١ + (١)^2 = ٢$

نعوض $٢ \frac{دهـ}{دن} = \frac{1}{١٥٠} \times ٣٤٢$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{٣٤٢}{٣٠٠}$ راد/ث

مثال ⑨: تتمدد اضلاع مثلث متساوي الاضلاع بمعدل ٢سم/د ، رسمت دائرة داخل المثلث تمس اضلاعه واخذت تتمدد مع المثلث جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين المثلث والدائرة عندما يكون طول ضلع المثلث ١٢سم.



الحل : افرض طول ضلع المثلث س

$\Leftarrow \frac{دس}{دن} = ٢سم/د$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times س \times$ الارتفاع

$= \frac{1}{2} \times س \times \frac{\sqrt{3}}{2} س$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} س^2$

مساحة المحصورة بينهما = مساحة المثلث − مساحة الدائرة

$= \frac{\sqrt{3}}{4} س^2 - نق^2 \pi$

لكن $ظا ٣٠ = \frac{نق}{\frac{1}{2} س}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{٢نق}{س}$

$\Leftarrow نق = \frac{س}{2\sqrt{3}}$

بالتعويض $م = \frac{\sqrt{3}}{4} س^2 - \left(\frac{س}{2\sqrt{3}}\right)^2 \pi$

$م = \frac{\sqrt{3}}{4} س^2 - \frac{س^2}{١٢} \pi$

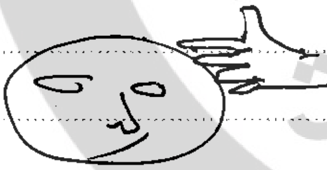
نشتق $\frac{دم}{دن} = \frac{2\sqrt{3}}{4} س \frac{دس}{دن} - \frac{٢س\pi}{١٢} \frac{دس}{دن}$

عند س = ١٢

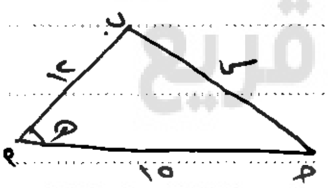
$\frac{دم}{دن} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times ١٢ \times ٢ - \frac{١٢}{٦} \pi \times ٢$

$= \frac{٢٤}{٢} \sqrt{3} - ٤\pi$

$= ١٢\sqrt{3} - ٤\pi$ سم²/د



مثال ٢: [redacted] أ ب جـ مثلث فيه أب = ١٢سم ، أجـ = ١٥سم ، يزداد قياس الزاوية ب أ جـ بمعدل $\frac{\pi}{٩٠}$ راديان/ث جد معدل تغير طول الضلع ب جـ عندما يكون قياس الزاوية ب أ جـ يساوي $\frac{\pi}{٣}$ راديان



الحل $\frac{دهـ}{دن} = \frac{\pi}{٩٠}$

من قانون جيب التمام

$$س^2 = (أب)^2 + (أهـ)^2 - ٢(أب)(أهـ)\ جتا\ هـ$$

$$س^2 = ١٤٤ + ٢٢٥ - ٢(١٢)(١٥)\ جتا\ هـ$$

$$س^2 = ٣٦٩ - ٣٦٠\ جتا\ هـ$$

$$\Leftarrow ٢س \frac{دس}{دن} = -٣٦٠ \times -جا\ هـ \frac{دهـ}{دن}$$

لكن هنا نجد س عند $هـ = \frac{\pi}{٣}$

$$س^2 = ٣٦٩ - ٣٦٠\ جتا \frac{\pi}{٣}$$

$$س^2 = ٣٦٩ - ١٨٠$$

$$س^2 = ١٨٩ \Leftarrow س = \sqrt{١٨٩}$$

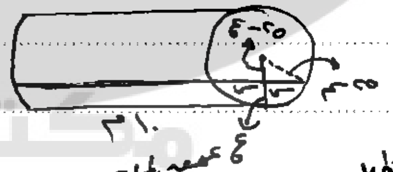
$$\Leftarrow ٢ \times \sqrt{١٨٩} \frac{دس}{دن} = +٣٦٠ \times جا \frac{\pi}{٣} \times \frac{\pi}{٩٠}$$

$$\frac{٢\sqrt{١٨٩}}{٢\sqrt{١٨٩}} \frac{دس}{دن} = \frac{٤\pi \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{٢\sqrt{١٨٩}}$$

$$\frac{دس}{دن} = \frac{\sqrt{٣}\pi}{\sqrt{١٨٩}}\ سم/د$$

وزارة ٢٠١٥ صيفي: يجري الماء في انبوب أفقي اسطواني الشكل طوله ١٠م وطول نصف قطره يساوي (٢٥)سم فإذا كان عمق الماء في الانبوب يتناقص بمعدل ٣سم/د جد معدل التغير في مساحة سطح الماء العلوي في الانبوب عندما يكون عمق الماء ١٨سم

الحل



$$\frac{دع}{دن} = -٣سم/د$$

مساحة سطح الماء مستطيل

طوله ١٠٠٠سم وعرضه ٢س

$$م = ٢ \times س \times ١٠٠٠$$

$$م = ٢٠٠٠\ س$$

$$\frac{دم}{دن} = ٢٠٠٠ \frac{دس}{دن}$$

من خلال المثلث القائم (فيثاغورس)

$$(٢٥)^2 = (٢٥ - ع)^2 + س^2$$

$$صفر = ٢(٢٥ - ع) \times -\frac{دع}{دن} + ٢س \frac{دس}{دن}$$

عندما ع = ١٨

$$٠ = ٢(٢٥ - ١٨) \times --٣ + ٢س \frac{دس}{دن}$$

$$٠ = ٤٢ + ٢س \frac{دس}{دن}$$

نجد س بناءً على $(٢٥)^2 = (٢٥ - ١٨)^2 + س^2$

$$٦٢٥ = ٤٩ + س^2$$

$$س^2 = ٦٢٥ - ٤٩$$

$$س^2 = ٥٧٦ \Leftarrow س = ٢٤$$

بالتعويض $٤٢ + ٢ \times ٢٤ \frac{دس}{دن} = صفر$

$$\frac{-٤٢}{٤٨} = \frac{٤٨}{٤٨} \frac{دس}{دن}$$

$$\frac{-٧}{٨} = \frac{دس}{دن}$$

بالتعويض في الدالة

$$\frac{دم}{دن} = ٢٠٠٠ \times \frac{-٧}{٨}$$

$$\frac{دم}{دن} = -١٧٥٠\ سم^2/د$$

سؤال: مثلث متساوي الأضلاع مرسوم داخل دائرة بحيث تلامس رؤوسه الثلاث الدائرة، وتتمدد الدائرة والمثلث معاً مع بقائهما على نفس الوضعية، فإذا علمت أن معدل الزيادة في نصف قطر الدائرة ١سم/د فاحسب معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين المثلث والدائرة عندما يكون طول نصف قطرها ٦سم؟

الحل: متروك للأعزاء الطلاب

١: [redacted]

س١: مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه بمعدل ٠.٠١ سم/ث ، جد معدل تناقص حجم المكعب عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم ؟

الحل: $\frac{دس}{دن} = -٠.٠١$ سم/ث

$ح = س^٣$

$\frac{دح}{دن} = ٣س^٢ \frac{دس}{دن}$

$= ٣ (١٠)^٢ \times -٠.٠١$

$= ٣٠٠ \times -٠.٠١ = -٣$ سم/ث

س٢: حوض سباحة على شكل متوازي مستطيلات بعدا قاعدته ٢٠م ، ٨م وعمقه ٢م ، اذا ضخ الماء في الحوض بمعدل ٥م³/د فجد سرعة ارتفاع الماء فيه ؟

$\frac{دح}{دن} = ٥$ م³/د

$ح = ٢٠ \times ٨ \times ع$

$ح = ١٦٠ ع$

$\frac{دح}{دن} = ١٦٠ \frac{دع}{دن}$

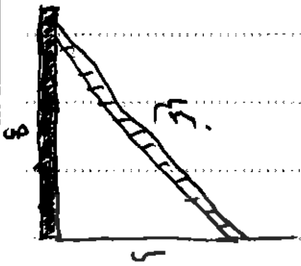
$٥ = ١٦٠ \frac{دع}{دن} \Leftarrow \frac{دع}{دن} = \frac{٥}{١٦٠} = \frac{١}{٣٢}$ م/د

س٣: سلم طوله ٣٦٠ سم يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي وبطرفه السفلي على أرض أفقية اذا تحرك الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل ٩٠ سم/ث وفي لحظة ما كان الطرف السفلي للسلم على بعد ١٨٠ سم من الحائط جد عند هذه اللحظة :

أ) سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلم

ب) معدل تغير مساحة المثلث المحصور بين الأرض والحائط والسلم

جـ) سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض



أ) $\frac{دس}{دن} = ٩٠$ سم/ث

$ص = \sqrt{(٣٦٠)^٢ - س^٢}$

$\frac{دص}{دن} = \frac{-٢س \frac{دس}{دن}}{٢\sqrt{(٣٦٠)^٢ - س^٢}}$

عندما $س = ١٨٠$

$\Leftarrow \frac{دص}{دن} = \frac{-٩٠ \times ١٨٠}{\sqrt{(٣٦٠)^٢ - (١٨٠)^٢}} = \frac{-١٦٢٠٠}{\sqrt{(٣٦٠)^٢ - (١٨٠)^٢}}$

ب) $م = \frac{١}{٢} س ص$

$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢} س \frac{دص}{دن} + \frac{١}{٢} ص \frac{دس}{دن}$

$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٢} \times ١٨٠ \times \frac{١٦٢٠٠}{\sqrt{(٣٦٠)^٢ - (١٨٠)^٢}} + \frac{١}{٢} \times ٩٠ \times ص$

$= \frac{١٦٢٠٠ \times ٩٠}{\sqrt{(٣٦٠)^٢ + (١٨٠)^٢}} + \frac{١٦٢٠٠}{\sqrt{(٣٦٠)^٢ + (١٨٠)^٢}} \times ٤٥$

$= \frac{١٦٢٠٠}{\sqrt{(٣٦٠)^٢ + (١٨٠)^٢}} (٩٠ + ٤٥)$

$\frac{دم}{دن} = \frac{١٦٢٠٠}{\sqrt{٩٧٢٠٠}} (١٣٥)$

جـ) $جتا هـ = \frac{س}{٣٦٠}$

$-جا هـ \frac{دهـ}{دن} = \frac{دس}{دن} \times \frac{١}{٣٦٠}$

$\frac{-ص}{٣٦٠} \frac{دهـ}{دن} = ٩٠ \times \frac{١}{٣٦٠}$

$\boxed{ص = ١٨٠\sqrt{٣}}$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{١}{٤}$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{-١}{٤} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} = \frac{-١}{٢\sqrt{٣}}$

عندما $س = ١٨٠$

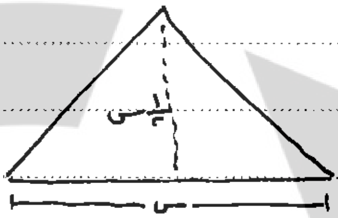
$ص = \sqrt{(٣٦٠)^٢ - (١٨)^٢}$

$= \sqrt{١٨٠ \times ٥٤٠} = \sqrt{٩٠٠ \times ٢ \times ٩ \times ٦}$

$= \sqrt{٣٠ \times ٣٠ \times ٢ \times ٣}$

$= ١٨٠\sqrt{٣}$

س٤: صفيحة معدنية على شكل مثلث، ارتفاعها يساوي نصف طول قاعدتها، تتمدد بالحرارة فتزداد مساحتها بمعدل ٠٫٠٥ سم²/ث. جد معدل التغير في طول قاعدة الصفيحة عندما يصبح طولها ١٠ سم.



$\frac{دم}{دن} = ٠٫٠٥$ سم²/ث

س = ١٠ سم

$م = \frac{1}{2} \times س \times \frac{1}{2} س$

$م = \frac{1}{4} س^2$

$\frac{دم}{دن} = \frac{1}{2} س \frac{دس}{دن}$

$٠٫٠٥ = \frac{1}{2} \times ١٠ \times \frac{دس}{دن}$

$\frac{٠٫٠٥}{٥} = \frac{٥}{٥} \frac{دس}{دن}$

$\frac{دس}{دن} = ٠٫٠١$ سم/ث

س٥: كرة حديدية قطرها ٨ سم مغطاة بطبقة من الجليد، فإذا كان الجليد ينصهر بمعدل ١٠ سم³/د، جد:

أ) سرعة تناقص سمك الجليد عندما يكون سمكه ٢ سم.

ب) سرعة تناقص مساحة السطح الخارجي للجليد عند تلك اللحظة.

الحل: أ) نق = ٨ سم ⇐ ٤ سم

$\frac{دح}{دن} = -١٠$ سم³/ث

نصف قطر الكرة بالجليد = س + ٤

حجم الجليد $= \frac{٤}{٣} \pi (س + ٤)^3$

$\frac{دح}{دن} = \frac{٤}{٣} \pi \times ٣ (س+٤)^2 \frac{دس}{دن}$

$-١٠ = ٤\pi (س+٤)^2 \frac{دس}{دن}$

عندما س = ٢

$\Leftarrow -١٠ = ٤\pi (٦)^2 \frac{دس}{دن}$

$-١٠ = ٤\pi \times ٣٦ \frac{دس}{دن}$

$\Leftarrow \frac{دس}{دن} = \frac{-١٠}{٤\pi \times ٣٦}$

$\frac{دس}{دن} = \frac{-٥}{٧٢\pi}$ سم/د

ب) $م = ٤\pi$ نق²

$\frac{دم}{دن} = ٤\pi \times ٢ (س+٤) \frac{دس}{دن}$

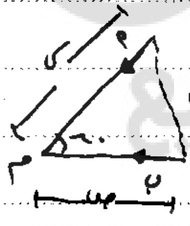
$\frac{دم}{دن} = ٨\pi (س+٤) \times \frac{-٥}{٧٢\pi}$

عندما س = ٢

$\frac{دم}{دن} = ٨\pi (٦) \times \frac{-٥}{٧٢\pi}$

$= \frac{-١٠}{٣}$ سم²/د

س٦: قطاران حديديان يميل أحدهما على الآخر بزاوية قياسها ٦٠°، ويلتقيان في النقطة (م)، يسير القطار (أ) على أحدهما بسرعة ٨٠ كم/ساعة مقترباً من النقطة (م) ويسير القطار (ب) على الآخر وبسرعة ٥٠ كم/ساعة مقترباً من النقطة (م) عند الساعة التاسعة صباحاً كان القطاران على بعد ٢٠٠، ١٨٠ كم بالترتيب من النقطة (م). جد معدل اقتراب القطارين من بعضهما عند الساعة الحادية عشرة صباحاً.



$\frac{دس}{دن} = -٨٠$ كم/ساعة

$\frac{دص}{دن} = -٥٠$ كم/ساعة

نجد متى بعد ساعتين $ن = ٢$

$س = ٢١٠ - (٢ \times ٨٠) = ٥٠$

$ص = ١٨٠ - (٢ \times ٥٠) = ٨٠$

$ف = \sqrt{س^٢ + ص^٢ - ٢ س ص جتا ٦٠}$

$ف = \sqrt{س^٢ + ص^٢ - س ص}$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن} - (س \frac{دص}{دن} + ص \frac{دس}{دن})}{٢\sqrt{س^٢ + ص^٢ - س ص}}$$

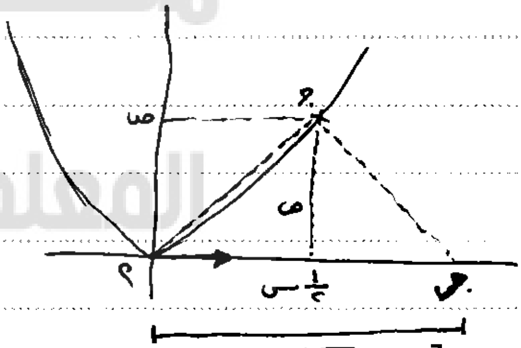
عند الساعة ٣ صباحاً

$$\frac{دف}{دن} = \frac{٢ \times ٥٠ \times -٨٠ + ٢ \times ٨٠ \times -٥٠ - (٥٠ \times -٥٠ + ٨٠ \times -٨٠)}{٢\sqrt{٥٠^٢ + ٨٠^٢ - (٥٠ \times ٨٠)}}$$

$$= \frac{-٨٠٠٠ - ٨٠٠٠ + ٨٩٠٠}{٢\sqrt{٢٥٠٠ + ٦٤٠٠ - ٤٠٠٠}}$$

$$= \frac{-٧١٠٠}{٢\sqrt{٤٩٠٠}} = \frac{-٣٥٥٠}{٧٠} = \frac{-٣٥٥}{٧}$$

س٧ بدأت النقطتان ب، جـ الحركة معاً من نقطة الأصل (م)، بحيث تتحرك النقطة ب على محور الصادات بالموجب مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٤ وحدات/ث وتتحرك النقطة (جـ) في الربع الأول وعلى منحنى الاقتران $ق(س) = س^٢$ بحيث يبقى دائماً طول م جـ يساوي طول ب جـ ، جد معدل التغير في مساحة المثلث م ب جـ بعد ٢ ثانية من بدء الحركة.



أم = ب جـ

$\frac{دس}{دن} = ٤$ $ن = ٢$

$م = \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$م = \frac{١}{٢} \times س \times ص$

لكن المثلث متساوي الساقين

$\Leftarrow ص = ق(\frac{١}{٢}س) = \frac{١}{٤} س^٢$

$\Leftarrow م = \frac{١}{٢} \times س \times \frac{١}{٤} س^٢$

$م = \frac{١}{٨} س^٣$

$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٨} \times ٣ س^٢ \frac{دس}{دن}$

$\frac{دم}{دن} = \frac{١}{٨} \times ٣ س^٢ \times ٤$

لكن المسافة تساوي السرعة × الزمن

$س = ٤ \times ٢ = ٨$

$\Leftarrow \frac{دم}{دن} = \frac{٣}{٢}(٨)^٢ = ٩٦$ وحدة²/ث

س٨ اثبت ان معدل التغير في حجم الكرة بالنسبة الى نصف قطرها يساوي مساحة سطح الكرة ؟ برهان $\frac{دح}{دنق}$

$ح = \frac{٤}{٣} نق^٣ \pi$

$\frac{دح}{دنق} = \frac{٤}{٣} \pi \times ٣ نق^٢$

$\Leftarrow \frac{دح}{دنق} = ٤\pi نق^٢$

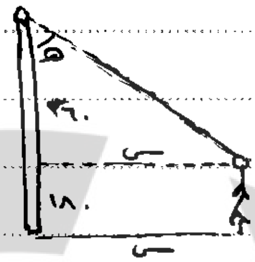
$\Leftarrow \frac{دح}{دنق} =$ مساحة سطح الكرة

س٩ رجل طوله ١٨٠ سم يقف امام مصباح كهربائي يرتفع عن سطح الارض مقدار ٥٤٠ سم اذا اخذ الرجل في الاقتراب من المصباح بمعدل ٣٠٠ سم/ث جد معدل التغير في الزاوية المحصورة بين العمود الذي يحمل المصباح والشعاع الواصل

المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

بين المصباح ورأس الرجل عندما يكون الرجل
٤ بعد ١٨٠ سم من قاعدة المصباح



$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -٣٠٠ \text{ سم/ث}$

$\text{ظا هـ} = \frac{\text{س}}{٣٦٠}$

$\text{قا}^2\text{هـ} \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{١}{٣٦٠} \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

لكن عندما $\text{س} = ١٨٠$ سم

$\text{ظا هـ} = \frac{\text{س}}{٣٦٠} = \frac{١٨٠}{٣٦٠} = \frac{١}{٢}$

$\text{قا}^2\text{هـ} = ١ + \text{ظا}^2\text{هـ} = ١ + (\frac{١}{٢})^2 = \frac{٥}{٤}$

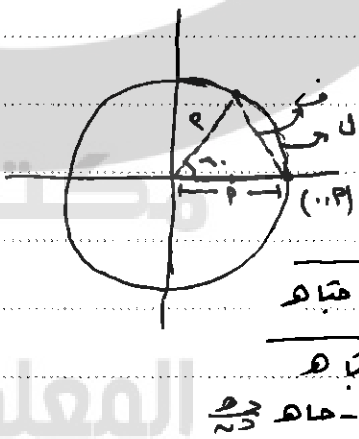
$\Leftarrow \frac{٥}{٤} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{١}{٣٦٠} \times -٣٠٠$

$\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{-٣٠٠}{٣٦٠} \times \frac{٤}{٥}$

$\Leftarrow \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{-٦٠}{٩٠} = -\frac{٢}{٣}$

س) ابتدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الأصل من النقطة (أ، ٠) بعكس اتجاه عقارب الساعة بحيث يزداد طول قوس الدائرة الذي ترسمه في أثناء حركتها بمعدل ٨ سم/ث جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة (أ، ٠) عندما يقابل القوس الذي ترسمه زاوية مركزية مقدارها $\frac{\pi}{٣}$

$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = ٨$



$\text{ف} = \sqrt{\text{أ}^2 + \text{أ}^2 - ٢ \times \text{أ} \times \text{أ} \text{ جتا هـ}}$

$= \sqrt{٢\text{أ}^2 - ٢\text{أ}^2 \text{ جتا هـ}}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٢ \times ٠ - ٢\text{أ}^2 \times -\text{جا هـ} \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}}{٢\sqrt{٢\text{أ}^2 - ٢\text{أ}^2 \text{ جتا هـ}}}$

لكن $\text{ل} = \text{أ هـ}$

$\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \text{أ} \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$

$٨ = \text{أ} \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$

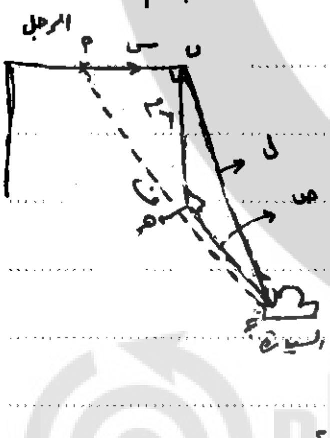
$\Leftarrow \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{٨}{\text{أ}}$

$\Leftarrow$ عند $\text{هـ} = \frac{\pi}{٣}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{\text{أ}^2 \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٨}{\text{أ}}}{\sqrt{٢\text{أ}^2 - \text{أ}^2}}$

$= \frac{\text{أ} \times ٤\sqrt{٣}}{\sqrt{\text{أ}^2}} = \frac{٤\sqrt{٣}\text{أ}}{\text{أ}} = ٤\sqrt{٣}$

س١١) جسر للمشاة يرتفع عن مستوى الشارع ٣٦م، يسير عليه رجل بمعدل ٣ كم/ساعة وفي اللحظة نفسها مرت من تحته سيارة بمعدل سرعة ٦٠ كم/ساعة، جد معدل ابتعاد السيارة عن الرجل بعد دقيقة واحدة من بدء الحركة



$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٣ \text{ كم/س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٦٠ \text{ كم/س}$

$\text{ن} = \frac{١}{٦٠} \text{ س}$

بعد دقيقة واحدة

$\text{س} = ٣ \times \frac{١}{٦٠} = \frac{١}{٢٠} \text{كم}$

$\text{ص} = ٦٠ \times \frac{١}{٦٠} = ١ \text{كم}$

$\text{ف}^2 = \text{ل}^2 + \text{س}^2$ من المثلث أ ب جـ

$\text{ف} = \sqrt{\text{ل}^2 + \text{س}^2}$

لكن من المثلث ب هـ جـ $\text{ل}^2 = \text{ص}^2 + (٠.٠٦)^2$

$\Leftarrow \text{ف} = \sqrt{\text{ص}^2 + \text{س}^2 + (٠.٠٦)^2}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٢\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دن}}}{٢\sqrt{\text{ص}^2 + \text{س}^2 + (٠.٠٦)^2}}$

$\Leftarrow \frac{دف}{دن} = \frac{٢ \times \frac{١}{\sqrt{٣}} \times ٣ + ٢ \times ١ \times ٦٠}{٢\sqrt{(١)^٢ + (\frac{١}{\sqrt{٣}})^٢ + (٠.٠٦)^٢}}$

$= \frac{٣.٠ + ٦٠}{٢\sqrt{١.٠١٦٧}} = \underbrace{٢٩.٧٥}_{}$

الاجابة تقريبية.

س) مربع تتمدد اضلاعه بمعدل ٤ سم/ د ، رسمت دائرة داخل المربع واخذت تتمدد مع المربع والدائرة بحيث تبقى ملامسة لاضلاعه ، جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين المربع والدائرة ، عندما يكون طول ضلع المربع ٢٠ سم ؟

الحل $\frac{دس}{دن} = ٤$ سم/د

$س = ٢٠$ سم

م = المربع − الدائرة

$= س^٢ - (\frac{١}{٢}س)^٢ \pi$

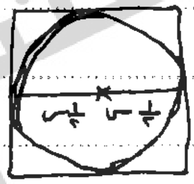
$= س^٢ - \frac{١}{٤}س^٢ \pi$

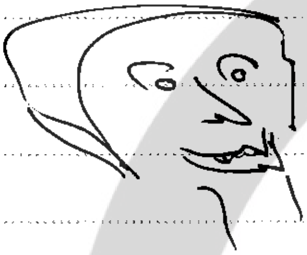
$= س^٢ (١ - \frac{١}{٤}\pi)$

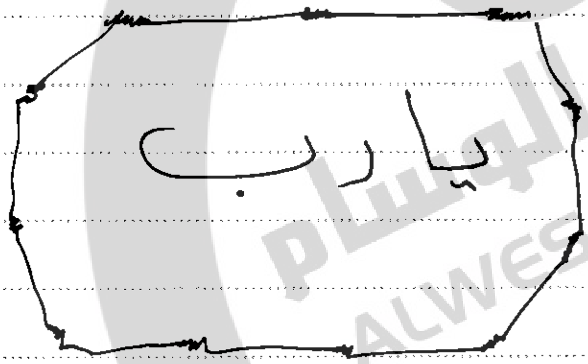
$\frac{دم}{دن} = ٢س (١ - \frac{\pi}{٤}) \frac{دس}{دن}$

$= ٢ \times ٢٠ \times (١ - \frac{\pi}{٤}) \times ٤$

$= ١٦٠ - ٤٠\pi$ سم^٢/د







[redacted]

التعريف: اذا كان ق(س) معرف على الفترة [أ، ب] وكانت س٢ > س١ ، س١، س٢ ∈ [أ، ب] فان:

① ق متزايد على الفترة [أ، ب] اذا كان ق(س٢) > ق(س١) (تناسب طردي)

② ق متناقص على الفترة [أ، ب] اذا كان ق(س٢) < ق(س١) (تناسب عكسي)

③ ق ثابت على الفترة [أ، ب] اذا كان ق(س٢) = ق(س١)

[redacted]: اذا كانت العلاقة بين قيم س وصورها علاقة طردية فالاقتران متزايد، اما اذا كانت العلاقة عكسية فالاقتران متناقص.

ق متزايد ⇐ ق(س٢) − ق(س١) > صفر

متناقص ⇐ ق(س٢) − ق(س١) < صفر

ثابت ⇐ ق(س٢) − ق(س١) = صفر

مثال: ق(س) = ٢س − ١

٣ > ٢ ⇐ ق(٣) = ٥

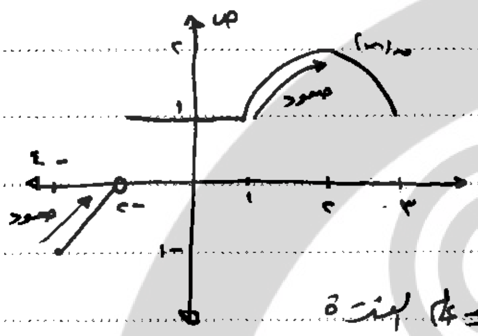
ق(٢) = ٣

⇐ ق(٣) > ق(٢)

⇐ ق متزايد.

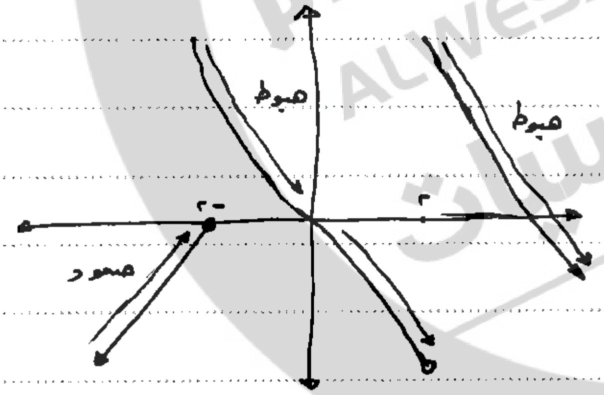
[redacted]: يكون ق(س) متزايداً عندما يكون اتجاه الرسم نحو اليمين العلوي ويكون متناقصاً اذا كان اتجاه الرسم نحو اليمين السفلي.

مثال: في الشكل المجاور حدد فترات التزايد؟



الحل: ق متزايد في الفترة (−٤، −٢] ∪ [١، ٢]

مثال: اذا كان الرسم التالي يمثل ق(س) جد فترات التزايد والتناقص



ق متزايد على الفترة (−∞، −٢]

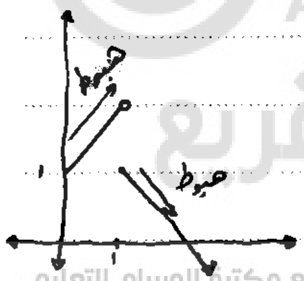
ق متناقص على الفترة [−٢، ٢) ∪ [٢، ∞)

هنا يمكن القول للفترة [−٢، ∞)

مثال: في هذا الشكل

ق متزايد في الفترة [٠، ١)

ق متناقص في الفترة [١، ∞)



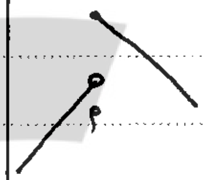
المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

[redacted]: لتحديد متى تكون الفترة مغلقة أو مفتوحة في التزايد والتناقص:

عند التزايد تكون الفترة مفتوحة أو مغلقة حسب التعريف: مثل

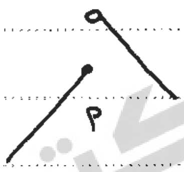
أ) متزايد (-∞، أ] وهنا الإغلاق لأن ق(أ) أكبر من قيمة ما قبلها

متناقص [أ، ∞)



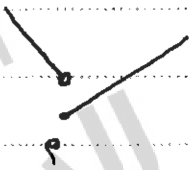
ب) متزايد (-∞، أ] لأن ق(أ) أكبر من صورة ما قبلها.

متناقص (أ، ∞) وهنا مفتوحة لأن ق(أ) أصغر من صورة ما بعدها



جـ) متزايد [أ، ∞)

متناقص (-∞، أ]

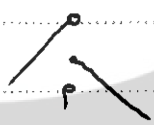


د) متناقص (-∞، أ]

متزايد (أ، ∞)

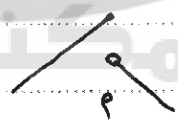
هـ) متزايد (-∞، أ)

متناقص [أ، ∞)



و) متزايد (-∞، أ]

متناقص [أ، ∞)



[redacted] اذا كان ق متصلاً على الفترة [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق على الفترة (أ، ب) فإن:

١) ق متزايد على الفترة [أ، ب] اذا كان ق'(س) > صفر لكل س ∈ (أ، ب).

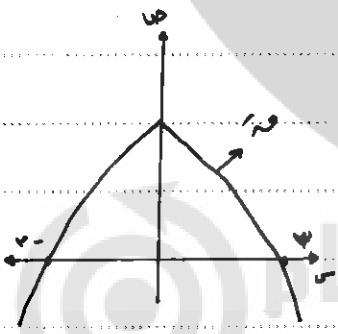
٢) ق متناقص على الفترة [أ، ب] اذا كان ق'(س) < صفر لكل س ∈ (أ، ب).

٣) ق ثابت على الفترة [أ، ب] اذا كان ق'(س) = صفر لكل س ∈ (أ، ب)

تفسير رسم المشتقة: يكون ق(س) متزايداً كلما كان رسم المشتقة فوق محور السينات ويكون متناقصاً كلما كان رسم المشتقة تحت محور السينات

وزارة ٢٠١٠ ص: اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) فبين مجالات التزايد؟

الحل: ق متزايد على الفترة [-٣، ٣]



تعريف: النقط الحرجة: اذا كانت النقطة (جـ) في مجال الاقتران ق فإن النقطة (جـ، ق(جـ)) تسمى نقطة حرجة للاقتران ق اذا كانت ق'(جـ) = صفر، ق'(جـ) غير موجودة

ق غير متصل عند أ ⇐ قَ(أ) غ.م

أطراف الفترات ⇐ قَ(س) غ.م

أ طرف فترة
أ نقطة عدم اتصال
ق غير معرف عند أ
قَ(أ) = ٠
⇐ (أ ، ق(أ)) نقطة حرجة

مثال : جد النقاط الحرجة للاقتران
ق(س) = س³ − ٣س ، س ∈ [−٣ ، ٣]

الحل : قَ(س) = ٣س² − ٣ = صفر
⇐ ٣س² = ٣
⇐ س² = ١ ⇐ س = ± ١
أيضاً س = −٣ ، س = ٣ أطراف فترات
⇐ س = ١ ⇐ ق(١) = −٢ ⇐ (١ ، −٢) حرجة
س = −١ ⇐ ق(−١) = ٢ ⇐ (−١ ، ٢) حرجة
س = −٣ ⇐ ق(−٣) = ١٨ ⇐ (−٣ ، ١٨) حرجة
س = ٣ ⇐ ق(٣) = −١٨ ⇐ (٣ ، −١٨) حرجة

مثال : إذا كان ق(س) = [س + ١] حيث س ∈ [−٢ ، ١[فما هي قيم س الحرجة للاقتران ق :

الحل : ق أكبر عدد صحيح ⇐ قَ(س) = صفر
⇐ قيم س = [−٢ ، ١[

مثال : جد قيم س الحرجة للاقتران ق(س) = ٣س − ١
حيث س ∈ [−٣ ، ١] .
قَ(س) = ٣ ≠ ٠ . قيم س = {−٣ ، ١}
أطراف الفترة

مثال : إذا كان ق معرف على الفترة [٢ ، ٤] وكان قَ(س) = س² − ٩
جد مجموعة قيم س التي للاقتران عندها نقاط حرجة ؟

الحل : قَ(س) غ.م عند س = ٢ ، س = ٤
قَ(س) = س² − ٩ = صفر
⇐ س = ± ٣
−٣ ∉ [٢ ، ٤]
⇐ س = {٢ ، ٣ ، ٤}

وزارة ٢٠١٣ ش : إذا كان ق(س) = √(س² − ٨س) فإن مجموعة الإحداثيات السينية للنقط الحرجة للاقتران ق هي :

الحل : قَ(س) = (٢س − ٨) / (٢√(س² − ٨س)) = ٠
⇐ ٢س − ٨ = ٠ ⇐ س = ٤
أيضاً قَ(س) = غ.م ⇐
√(س² − ٨س) = صفر
س² − ٨س = ٠
س(س − ٨) = ٠
⇐ س = ٠ ، س = ٨
لكن ق(٠) = √٠ = ٠ ، (٠ ، ٠) حرجة
ق(٨) = √٠ = ٠ ، (٨ ، ٠) حرجة
ق(٤) = √−١٦ غير معرف ، (٤ ، ؟) ليست حرجة
لأن ٤ ليست من مجال ق
قيم س = {٠ ، ٨}

[redacted] : اذا كان ق معرف على الفترة [١ ، ٥) وكانت ق(س) = ٢س - ١ حيث س ∈ (١ ، ٥) فإن مجموعة قيم س التي للاقتران عندها نقط حرجة هي :

الحل: ق'(س) = ٢س - ١ = صفر

⟸ س = $\frac{1}{2}$ خارج المجال

ق'(س) غ.م ⟸ س = ١

العدد ٥ ليس ضمن مجال ق

⟸ قيم س = {١}

مثال: اذا كان ق(س) = { س^٢ ، ٠ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٣س ، ٢ < س ≤ ٥

فأوجد قيم س التي عندها للاقتران نقاط حرجة.

الحل: ق'(س) = { ٢س ، ٠ < س < ٢ ؛ ٣ ، ٢ < س < ٥

ق'(س) = ٠ ⟸ ٢س = ٠ ⟸ س = ٠ نقطة حرجة

ايضاً ق غير متصل عند س = ٢ ⟸ ق'(٢) غ.م

⟸ س = ٢ نقطة حرجة.

ايضاً س = ٠ ، س = ٥ اطراف فترات ق'(س) غ.م

⟸ قيم س الحرجة = {٠ ، ٢ ، ٥}

[redacted] اذا كان ق متصل عند نقطة التشعب وقابل للاشتقاق عندها فلا تكون نقطة التشعب نقطة حرجة.

[redacted] النقط الحرجة يجب ان تكون ضمن مجال الاقتران.

ايجاد فترات التزايد والتناقص :

١) نشتق الاقتران بعد التأكد من الاتصال وقابلية الاشتقاق

٢) نساوي الاقتران بالصفر ونجد النقاط الحرجة

٣) نعين النقاط الحرجة على خط الاعداد وندرس اشارة الاقتران حولها

(++) تعني متزايد.

(--) تعني متناقص.

[redacted] (الكتاب): حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ١

الحل : ق متصل على الفترة ح وقابل للاشتقاق لانه كثير حدود

ق'(س) = ٣س^٢ - ٦س = ٠

٣س (س - ٢) = ٠

⟸ س = ٠ ، س = ٢

ق'(س) = غ.م ⟸ لا يوجد

ق متزايد في الفترة (-∞ ، ٠] ∪ [٢ ، ∞)

ق متناقص في الفترة [٠ ، ٢]

[redacted] (الكتاب): حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = جتا ٢س ، س ∈ [٠ ، π]

الحل : ق متصل على الفترة [٠ ، π] وقابل

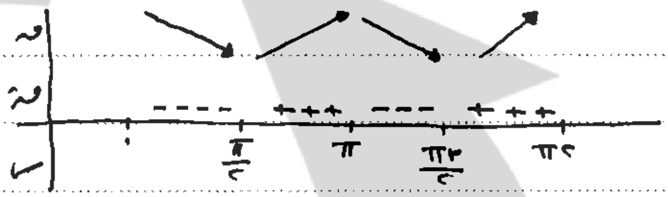
للاشتقاق على الفترة (٠، ٢π) لأن اقتران مثلثي ما بداخله متصل وقابل للاشتقاق لانه كثير حدود

ق'(س) = −٢ جا ٢س = ٠

⇐ جا ٢س = ٠

⇐ س = π ، س = $\frac{\pi}{2}$ ، س = $\frac{3\pi}{2}$ ، س = ٢π

ق'(س) = غ.م   س = ٠ ، س = ٢π



ق متزايد في الفترة [$\frac{\pi}{2}$ ، π] ، [$\frac{3\pi}{2}$ ، ٢π]

ق متناقص في الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{2}$] ، [π ، $\frac{3\pi}{2}$]

مثال: اذا كان ق : [−١ ، ٥] ← ح حيث

ق(س) = { س٢ + ١ ، −١ ≤ س < ١
 ٢س − ١ ، ١ ≤ س ≤ ٣
 ٥ ، ٣ < س ≤ ٥

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق .

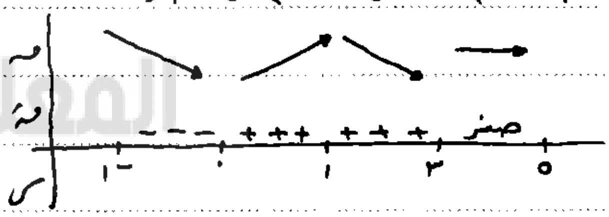
الحل: ق غير متصل عند س = ١ ⇐ ق(١) غ.م

ق'(س) = { ٢س ، −١ < س < ١
 ٢ ، ١ < س < ٣
 صفر ، ٣ < س < ٥

ق'+(٣) ≠ ق'-(٣) ⇐ ق'(٣) = غ.م

ق'(٥) غ.م   ق'(−١) غ.م

ق'(س) = ٠ ⇐ ٢س = ٠ ⇐ س = صفر



من خلال الجدول

ق متزايد في الفترة [٠ ، ١) ، [١ ، ٣]

ق متناقص في الفترة [−١ ، ٠]

ق ثابت في الفترة [٣ ، ٥]

المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

تمارين ومسائل : ص ١٥٨ :

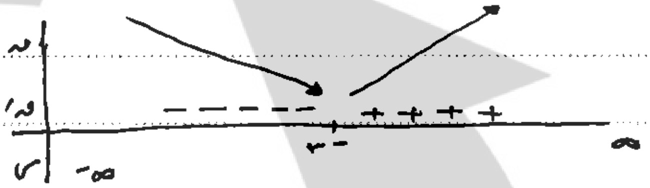
س ٢) أ) $ق(س) = س^٢ + ٦س - ٧$

الحل : ق متصل وقابل للاشتقاق لأنه كثير حدود

$ق'(س) = ٢س + ٦ = ٠$

$\Leftarrow ٢س = -٦$

$\Leftarrow س = -٣$



ق متزايد في الفترة $[-٣ ، \infty)$

ق متناقص في الفترة $(-\infty ، -٣]$

ب) $ق(س) = س - |٣ - س|$ ، $س \in [-٢ ، ٦]$

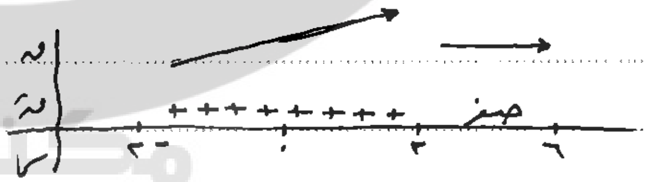
الحل : $ق(س) = \begin{cases} س - (٣ - س) ، & -٢ \le س < ٣ \\ س - (س - ٣) ، & ٣ \le س \le ٦ \end{cases}$

$\Leftarrow ق(س) = \begin{cases} -٣ + ٢س ، & -٢ \le س < ٣ \\ ٣ ، & ٣ \le س \le ٦ \end{cases}$

ق متصل عند س = ٣ ، $ق'(٣) \notin م$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢ ، & -٢ < س < ٣ \\ صفر ، & ٣ < س < ٦ \end{cases}$

$ق'(٣) \notin م$ ، $ق'(-٢) \notin م$ ، $ق'(٦) \notin م$



ق متزايد في الفترة $[-٢ ، ٣)$

ق ثابت في الفترة $(٣ ، ٦]$

جـ) $ق(س) = جا^٢ س$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

الحل : ق متصل في الفترة $[٠ ، ٢\pi]$ وقابل للاشتقاق

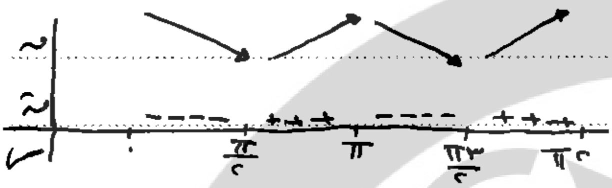
في الفترة $(٠ ، ٢\pi)$:

$ق'(س) = ٢ جاس جتاس = ٠$

$جاس = ٠ \Leftarrow س = \pi$

$جتاس = ٠ \Leftarrow س = \frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}$

$ق'(س) \notin م \Leftarrow س = ٠ ، ٢\pi$



ق متزايد في الفترة $[\frac{\pi}{٢} ، \pi]$ ، $[\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi]$

ق متناقص في الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ ، $[\pi ، \frac{٣\pi}{٢}]$

د) $ق(س) = (س - ١)^٣$

الحل : ق متصل وقابل للاشتقاق لأنه كثير حدود

$ق'(س) = ٣(س - ١)^٢ = ٠$

$س - ١ = ٠ \Leftarrow س = ١$

ق متزايد في ح

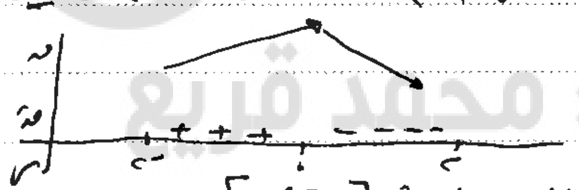
هـ) $ق(س) = \sqrt{٤ - س^٢}$ ، $س \in [-٢ ، ٢]$

الحل : ق متصل في الفترة $[-٢ ، ٢]$ وقابل للاشتقاق في الفترة $(-٢ ، ٢)$

$ق'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^٢}} = \frac{-س}{\sqrt{٤ - س^٢}}$

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$ق'(س) \notin م \Leftarrow ٤ - س^٢ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٢$



ق متزايد في الفترة $[-٢ ، ٠]$

ق متناقص في الفترة $[٠ ، ٢]$

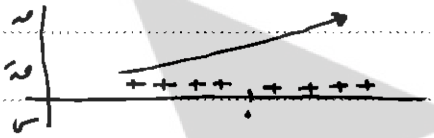
و) $ق(س) = س^{\frac{3}{5}}$

الحل: ق متصل وقابل للاشتقاق ق

$ق'(س) = \frac{3}{5} س^{\frac{-2}{5}} = \frac{3}{5 س^{\frac{2}{5}}}$

ق'(س) = صفر ⟸ غير موجود

ق'(س) غ.م ⟸ س = ٠



ق متزايد على ح

ز) $ق(س) = س + جاس$ ، $س \in [0، \frac{\pi}{2}]$

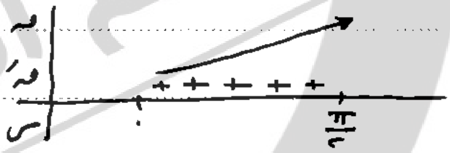
الحل: ق متصل وقابل للاشتقاق ق

ق'(س) = ١ + جتاس = صفر

⟸ جتاس = −١

$س = \pi \notin (0، \frac{\pi}{2})$

ق'(س) غ.م ⟸ س = ٠ ، $س = \frac{\pi}{2}$



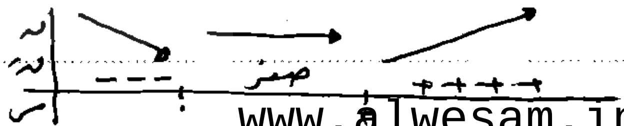
ق متزايد في الفترة $[0، \frac{\pi}{2}]$

ح) $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، س \le 0 \\ 1 & ، 0 < س < 2 \\ \sqrt{س-2} & ، س \ge 2 \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} 2س & ، س < 0 \\ صفر & ، 0 < س < 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{س-2}} & ، س > 2 \end{cases}$

ق غير متصل عند س = ٢ ⟸ ق'(٢) غير موجودة

ق'(س) = ٠ ⟸ ٢س = ٠ ⟸ س = ٠



ق متناقص في الفترة $(-\infty، 0]$

ق ثابت في الفترة $[0، 2)$

ق متزايد في الفترة $[2، \infty)$

ط) $ق(س) = \frac{س-3}{س^2+9}$

الحل: $ق'(س) = \frac{(س^2+9) - (س-3)(2س)}{(س^2+9)^2}$

$= \frac{س^2 + 9 - 2س^2 + 6س}{(س^2+9)^2}$

$= \frac{-س^2 + 6س + 9}{(س^2+9)^2}$

ق'(س) = ٠ ⟸ $-س^2 + 6س + 9 = 0$

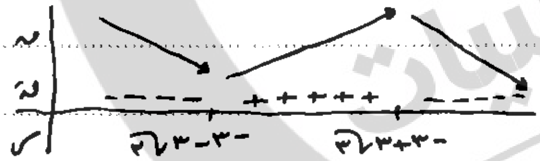
$س^2 - 6س - 9 = 0$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times -9}}{2 \times 1}$

$س = \frac{6 \pm \sqrt{36+36}}{2}$

$س = 3 \pm 3\sqrt{2}$

ق'(س) غ.م لا يوجد



ق متزايد في الفترة $[3-3\sqrt{2}، 3+3\sqrt{2}]$

ق متناقص في الفترة $(-\infty، 3-3\sqrt{2}]$ ، $[3+3\sqrt{2}، \infty)$

ي) $ق(س) = \begin{cases} 1 - 2س & ، -2 \le س < 1 \\ |س - 4| & ، 1 \le س \le 4 \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} 1 - 2س & ، -2 \le س < 1 \\ 2س - 4 & ، 1 \le س < 2 \\ 4 - 2س & ، 2 \le س \le 4 \end{cases}$

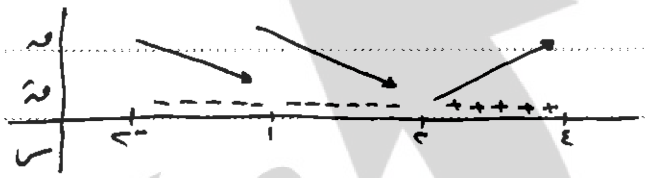
ق غير متصل عند س = ١ ⇐ قَ(١) غ.م

ق متصل عند س = ٢

قَ(س) = { -٢ ، -٢ ≤ س ≤ ١
　　　　-٢ ، ١ < س < ٢
　　　　٢ ، ٢ < س < ٤

قَ(س) غ.م ⇐ س = -٢ ، ٢ ، ٤ أطراف فترات

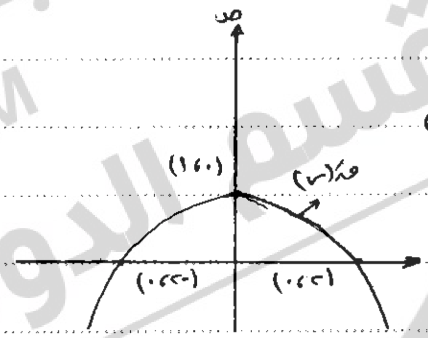
قَ(س) غ.م ⇐ س = ٢ ، قَ+(٢) ≠ قَ-(٢)



ق متناقص في الفترة [-٢،١) ، [١،٢]

ق متزايد في الفترة [٢،٤]

س٢ بالاعتماد على الشكل الذي يمثل منحنى اقتران المشتقة الأولى للاقتران ق كثير الحدود من الدرجة الثالثة ، حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.



الحل : ق متزايد في الفترة [-٢،٢]

ق متناقص في الفترة (-∞، -٢] ، [٢، ∞)

س٣ اذا كان قَ(س) = هَ(س) ، لكل س ∈ ح فأثبت أن ق(س) - هـ(س) = ثابتاً .

الحل : افرض د(س) = ق(س) - هـ(س)

⇐ لَ(س) = قَ(س) - هَ(س) = صفر

لأن قَ(س) = هَ(س)

⇐ ل(س) ثابت

س٤ اذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين على [أ،ب] وقابلين للاشتقاق على (أ،ب) وكان كل من ق(س) ، هـ(س) متزايداً على [أ،ب] وكان ل(س) = ق(س) + هـ(س) ، فأثبت أن ل(س) متزايداً على [أ،ب] .

الحل : ق(س) متزايد ⇐ قَ(س) > صفر

هـ(س) متزايد ⇐ هَ(س) > صفر

ل(س) = ق(س) + هـ(س)

لَ(س) = قَ(س) + هَ(س)

⇐ لَ(س) > صفر

⇐ ل(س) متزايد .

[redacted]

اذا كان ق(س) معرف على الفترة [أ، ب] وكانت س، ∈ [أ، ب] وكانت ف فترة مفتوحة حول س، (ف ⊂ [أ، ب]) عندئذٍ

١) يكون للاقتران قيمة عظمى محلية عند س، هي ق(س،) اذا كان ق(س،) ≥ ق(س)، ∀ س ∈ ف

٢) يكون للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند س، هي ق(س،) اذا كان ق(س،) ≥ ق(س)، ∀ س ∈ [أ، ب]

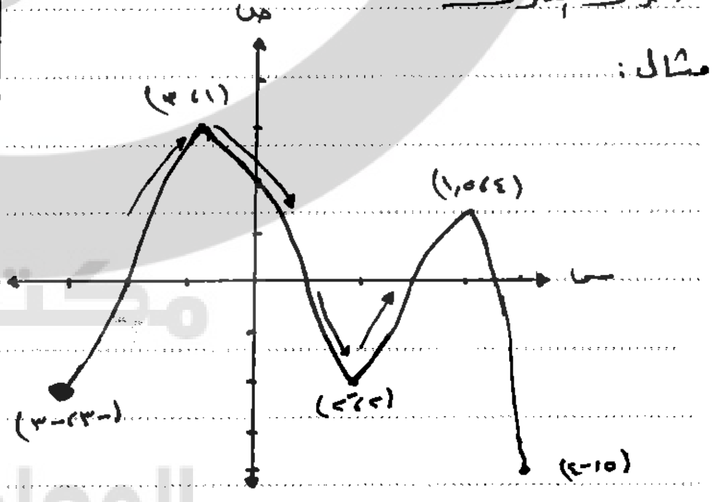
٣) يكون للاقتران قيمة صغرى محلية عند س، هي ق(س،) اذا كان ق(س،) ≤ ق(س)، ∀ س ∈ ف

٤) يكون للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند س، هي ق(س،) اذا كان ق(س،) ≤ ق(س)، ∀ س ∈ [أ، ب]

[redacted]

1) رسم ق(س) : تكون (جـ) قيمة قصوى اذا تغير سلوك الاقتران من التزايد الى التناقص وكذلك العكس، وايضاً القيم القصوى تكون عند اطراف الفترات

مثال:



في الشكل السابق ق متصل على الفترة [-٣، ٥]

النقاط (-٣، -٣)، (١، ٣)، (٣، -٢)، (٤، ١،٥) وكذلك (٥، -٤) كلها نقاط حرجة للاقتران ق

حيث:

١) (-٣، -٣) نقطة حرجة لأنها طرف فترة ولكن لم يحدث عندها تغير في الاقتران من التزايد الى التناقص او العكس وكذلك هي ليست اقل قيمة للاقتران ولذلك فهي ليست قيمة قصوى.

٢) النقطة (١، ٣) هناك تغير لسلوك الاقتران من التزايد الى التناقص فهي قيمة عظمى محلية وكذلك هي اعلى قيمة للاقتران ق على الفترة [-٣، ٥] اي انها كذلك قيمة عظمى مطلقة.

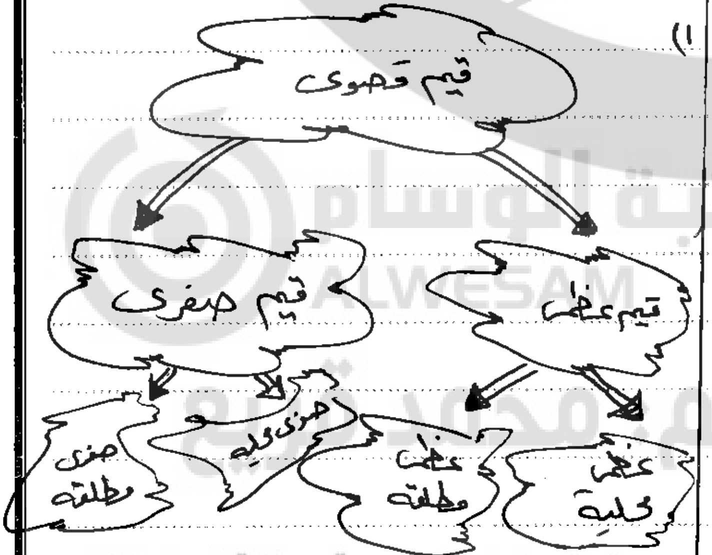
٣) (٣، -٢) تغير من التناقص الى التزايد فهي قيمة صغرى محلية.

٤) (٤، ١،٥) تغير من التزايد الى التناقص فهي قيمة عظمى محلية

٥) (٥، -٤) هنا تحدث اقل قيمة للاقتران ق على الفترة [-٣، ٥] وهذا يعني انها قيمة صغرى مطلقة للاقتران ق

[redacted]

١)



٢) قيمة قصوى ← نقطة حرجة
نقطة حرجة ← ليس شرطاً قيمة قصوى

٣) قيمة صغرى محلية
↓
تناقص ثم تزايد
↓
اذا كانت اقل قيمة للاقتران
↓
قيمة صغرى مطلقة

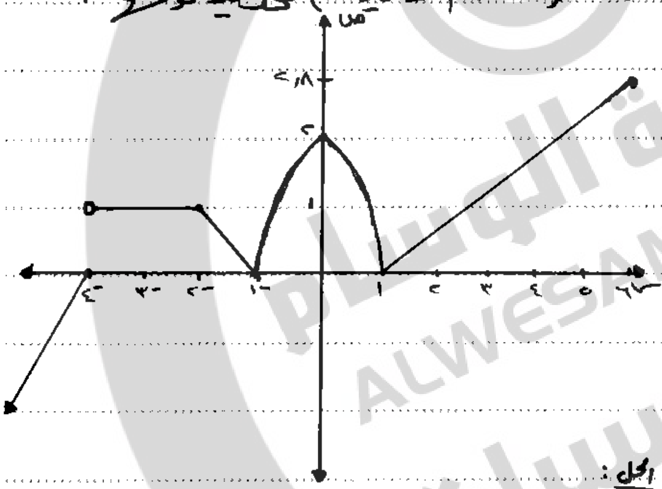
٤) قيمة عظمى محلية
↓
تزايد ثم تناقص
↓
اذا كانت اكبر قيمة للاقتران
↓
قيمة عظمى مطلقة

٥) القيم المحلية
↓
مكان الحدوث
↓
داخل الفترة فقط

القيم المطلقة
↓
مكان الحدوث
↓
عند اطراف الفترات وفي الداخل

٦) الاقتران الثابت على [أ، ب]
↓
قيمة عظمى مطلقة وصغرى مطلقة عند س ∈ [أ، ب]
↓
قيمة عظمى محلية وصغرى محلية عند س ∈ (أ، ب)

مثال : جد القيم القصوى لمنحنى الاقتران ق المرسوم تالياً مع تحديد نوعها :



الحل :

١) النقطة (٦، ٢٫٨) قيمة عظمى مطلقة عند (٢٫٨)

٢) النقطة (١، ٠) قيمة صغرى محلية عند (٠)

٣) النقطة (٠، ٢) قيمة عظمى محلية عند (٢)

٤) النقطة (-١، ٠) قيمة صغرى محلية عند (٠)

٥) النقطة (-٤، ٠) ق غير متصل ولاحظ ان ق(-٤) ليست اصغر قيمة في الفترة المحيطة بها ⇐ لا يوجد قيمة قصوى.

٦) على الفترة (-٤، -٢] الاقتران ثابت
⇐ قيم قصوى عظمى وصغرى محلية عند س ∈ (-٤، -٢)
ولا نكتب قيم مطلقة.

٧) النقطة (-٢، ١) قيمة عظمى محلية عند (١)

[redacted] الدوال [redacted] القيم القصوى :

ق متصل على الفترة [أ ، ب] وقابل للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) ، (جـ ، ق(جـ)) نقطة حرجة حيث جـ ∈ (أ ، ب) فإن

1) اذا كان ق′(س) ≥ صفر ، ∀ س < جـ وكان ق′(س) ≤ صفر ، ∀ س > جـ فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق .

2) اذا كان ق′(س) ≤ ٠ ، ∀ س < جـ ، ق′(س) ≥ ، ∀ س > جـ فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق

[redacted] الخطوات

1) نشتق الاقتران ق بعد التحقق من الشروط
2) نجد أصفار المشتقة الأولى ⇐ ق′(س) = ٠ .
3) البحث في اشارة المشتقة قبل كل صفر للاقتران وبعده لتحديد مجالات التزايد والتناقص
4) من خلال مسار الاقتران نحدد نوع القيمة القصوى
(- - - ثم + + +) صغرى
(+ + + ثم - - -) عظمى
5) نقارن بين القيم المحلية واطراف الفترة لتحديد القيم المطلقة

مثال: جد النقط الحرجة والقيم القصوى للاقتران ق(س) = ٣س² − س³ ، س ∈ [−٣ ، ٤] .

الحل : ق متصل على الفترة [−٣ ، ٤] وقابل للاشتقاق على الفترة (−٣ ، ٤) لأنه كثير حدود .

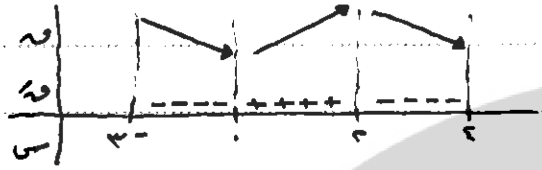
ق′(س) = ٦س − ٣س² = ٠ .

٣س (٢ − س) = ٠ .

س = ٠ ، س = ٢

أيضاً س = −٣ ، س = ٤ أطراف فترة ، ق′(س) غير موجودة .

قيم س الحرجة = {−٣ ، ٠ ، ٢ ، ٤}



ق(−٣) = ٣(٩) + ٢٧ = ٥٤

ق(٤) = ٤٨ − ٦٤ = −١٦

ق(٠) = ٠

ق(٢) = ٠

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند (−٣ ، ٥٤) طرف فترة

للاقتران قيمة عظمى محلية ق(٢) = (٠)

للاقتران قيمة صغرى محلية ق(٠) = (٠)

للاقتران قيمة صغرى مطلقة ق(٤) = (−١٦) طرف فترة .

[redacted] لايجاد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى نلاحظ ان طريقة العمل واحدة .

[redacted] : اذا كان ق(س) = ٤س − ⅓ س³ ، س ∈ [−٣ ، ٣] جد كلاً مما يأتي

1) الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق متزايداً .
2) الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق متناقصاً .
3) القيم القصوى للاقتران ق وبين نوعها .

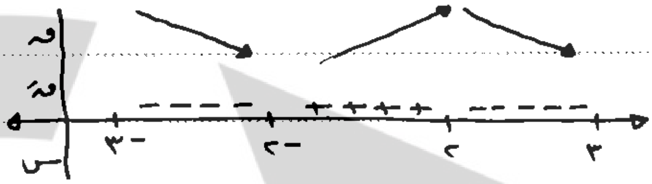
الحل : ق متصل على الفترة [−٣ ، ٣] وقابل للاشتقاق على الفترة (−٣ ، ٣) لأنه كثير حدود :

$ق'(س) = 4 - س^2 = صفر$

$\Leftarrow س^2 = 4$

$\Leftarrow س = \pm 2$

ق'(س) = غ.م ⟸ س = -3 ، 3 أطراف فترة



1) ق متزايد على الفترة [-2 ، 2]

2) ق متناقص على الفترة [-3 ، -2] ∪ [2 ، 3]

3) $ق(-3) = -12 + 9 = -3$ طرف فترة

$ق(-2) = -8 + \frac{8}{3} = \frac{-16}{3}$

$ق(2) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

$ق(3) = 12 - 9 = 3$ طرف فترة

للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = 2 وقيمتها $\frac{16}{3}$

وهي عظمى مطلقة ايضاً

للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = -2 وقيمتها $\frac{-16}{3}$

وهي صغرى مطلقة ايضاً

النقطة (-3 ، -3) حرجة فقط لوجود ما هو أقل منها وهي طرف فترة .

النقطة (3 ، 3) حرجة فقط لوجود ما هو أكبر منها وهي طرف فترة .

تدريب (2): جد النقطة الحرجة والقيم القصوى (ان وجدت) للاقتران $ق(س) = س^3 - 6س^2 + 9س$

س ∈ [-1 ، 5] .

الحل: ق متصل على الفترة [-1 ، 5] وقابل للاشتقاق على الفترة (-1 ، 5)

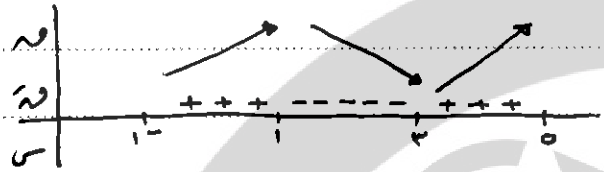
$ق'(س) = 3س^2 - 12س + 9 = 0$

$\Leftarrow س^2 - 4س + 3 = 0$

$(س - 3)(س - 1) = 0$

⟸ س = 3 ، س = 1

ق'(س) = غ.م ⟸ س = -1 ، 5



$ق(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 9(-1) = -16$

$ق(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) = 4$

$ق(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) = 0$

$ق(5) = (5)^3 - 6(5)^2 + 9(5) = 20$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = 1 وقيمتها (4)

للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = 3 وقيمتها (0)

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند س = 5 وقيمتها (20)

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند س = -1 وقيمتها (-16).

تدريب (3): جد القيم القصوى المحلية (ان وجدت) للاقتران ق(س) = جتاس + جاس ، س ∈ [0 ، 2π]

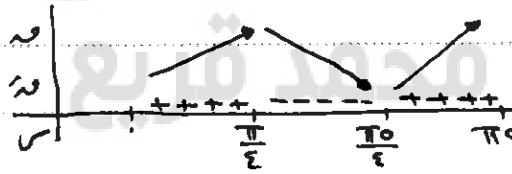
الحل: ق متصل وقابل للاشتقاق على الفترة (0 ، 2π)

ق'(س) = -جاس + جتاس = 0

جتاس = جاس

⟸ س = $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$

ق'(س) غ.م ⟸ س = 0 ، 2π



ق(0) = 1

ق($\frac{\pi}{4}$) = جتا $\frac{\pi}{4}$ + جا $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

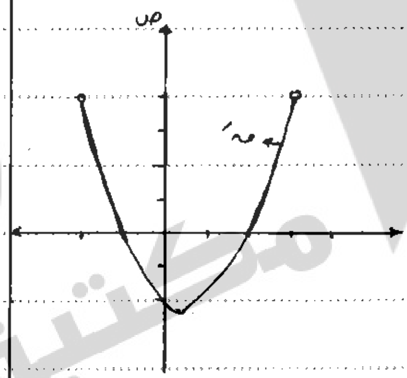
ق($\frac{5\pi}{4}$) = جتا $\frac{5\pi}{4}$ + جا $\frac{5\pi}{4}$ = $\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}}$

ق(2π) = جتا 2π + جا 2π = ١

للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{\pi}{4}$ وقيمتها ق($\frac{\pi}{4}$)

للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = $\frac{5\pi}{4}$ وقيمتها ق($\frac{5\pi}{4}$)

لا يوجد قيم مطلقة.



تدريب يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران كثير الحدود ق(س) المعرف في الفترة [-٢ ، ٣] اعتمد على ذلك في تعيين:

١) النقط الحرجة للاقتران ق

س = -١ ، ٢ لأن ق'(س) = صفر

ق'(س) غ.م ⟸ س = -٢ ، س = ٣

قيم س الحرجة = {-٢ ، -١ ، ٢ ، ٣}

٢) القيم القصوى المحلية للاقتران ق :-

للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = -١ وقيمتها ق(-١)

للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = ٢ وقيمتها ق(٢)

٣) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق

ق متزايد في الفترة [-٢ ، -١] ، [٢ ، ٣]

ق متناقص في الفترة [-١ ، ٢]

[illegible] إذا كان ق(س) = س$^{\frac{1}{3}}$ (س − ٢)$^{\frac{1}{3}}$

س ∈ [-١ ، ٥] فجد :

① فترات التزايد والتناقص.

② القيم القصوى وبين نوعها.

الحل: ① ق متصل وقابل للاشتقاق

ق(س) = (س² − ٢س)$^{\frac{1}{3}}$

ق'(س) = $\frac{1}{3}$ (س² − ٢س)$^{\frac{-2}{3}}$ × (٢س − ٢)

= $\dfrac{٢س − ٢}{٣\sqrt[3]{(س^2 − ٢س)^2}}$

ق'(س) = ٠ ⟸ ٢س − ٢ = ٠

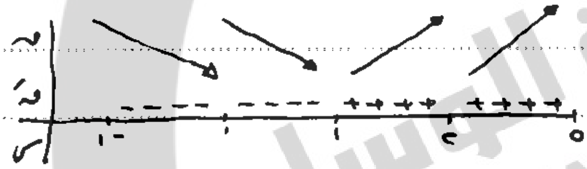
⟸ س = ١

ق'(س) غ.م ⟸ س² − ٢س = ٠

س (س − ٢) = ٠

س = ٠ ، س = ٢

قيم س الحرجة = {٠ ، ١ ، ٢}



ق متزايد في الفترة [١ ، ٥]

ق متناقص في الفترة [-١ ، ١]

② ق(-١) = -١ ، ق(٠) = ٠

ق(١) = -١ ، ق(٢) = ٠

ق(٥) = $\sqrt[3]{15}$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند س = ٥ وقيمتها ق(٥)

للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = ١ وقيمتها ق(١)

[redacted] اذا كان $ق(س) = \sqrt[3]{س^3 - 27س}$ ، $س \in (-10 , 10)$ جد كلاً مما يلي :

١) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٢) القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) .

الحل : ١) ق متصل وقابل للاشتقاق في الفترة المعطاة

$ق'(س) = \frac{1}{3}(س^2 - 27س)^{-\frac{2}{3}}(3س^2 - 27)$

$= \frac{س^2 - 9}{\sqrt[3]{(س^3 - 27س)^2}}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = \pm 3$

ق'(س) غ٠م $\Leftarrow س(س^2 - 27) = 0$

$س = 0 ، س = -\sqrt{27} ، س = \sqrt{27}$

$س = -3\sqrt{3} ، س = 3\sqrt{3}$

قيم س الحرجة = $\{-10 , -3\sqrt{3} , -3 , 0 , 3 , 3\sqrt{3} , 10\}$

ق متزايد في الفترة $(-10 , -3]$ ، $[3 , 10)$

ق متناقص في الفترة $[-3 , 3]$

٢) $ق(-10) = \sqrt[3]{-1270}$ غير معرف -10

$ق(-3\sqrt{3}) = \sqrt[3]{(-3\sqrt{3})^3 - 27(-3\sqrt{3})}$

$= \sqrt[3]{-81\sqrt{3} + 81\sqrt{3}} = 0$

$ق(3\sqrt{3}) = \sqrt[3]{(3\sqrt{3})^3 - 27(3\sqrt{3})} = 0$

$ق(-3) = \sqrt[3]{-27 + 81} = \sqrt[3]{54}$

$ق(3) = \sqrt[3]{27 - 81} = \sqrt[3]{-54}$

$ق(0) = \sqrt[3]{0} = 0$

$ق(10) = \sqrt[3]{1270}$ غير معرف عند 10

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $س = -3$ وقيمتها $\sqrt[3]{54}$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $س = 3$ وقيمتها $\sqrt[3]{-54}$

مناقشة [redacted] اذا كان $ق(س) = س(س - 3)^2 - 2$

$س \in [-1 , 4)$ جد كلاً مما يأتي للاقتران ق(س)

١) الفترات التي يكون فيها متزايداً .

٢) القيم القصوى وبين نوعها .

الحل : $ق(س) = س(س^2 - 6س + 9) - 2$

$= س^3 - 6س^2 + 9س - 2$

ق متصل وقابل للاشتقاق لانه كثير حدود

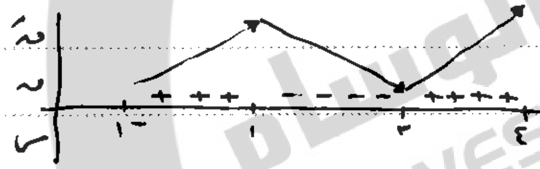
$ق'(س) = 3س^2 - 12س + 9 = 0$

$س^2 - 4س + 3 = 0$

$(س - 1)(س - 3) = 0$

$\Leftarrow س = 1 , 3$

ق'(س) غ٠م $س = -1$ ، $س = 4$



ق متزايد في الفترة $[-1 , 1]$ ، $[3 , 4)$

ق متناقص في الفترة $[1 , 3]$

$ق(-1) = -18$

$ق(1) = 2$

$ق(3) = -2$

$ق(4) = 2$ غير معرف

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $س = 1$ وقيمتها (2)

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $س = 3$ وقيمتها (-2)

للاقتران قيمة صغرى ومطلقة عند $س = -1$ وقيمتها (-18)

س٣ أ) ق(س) = س² − ٦س + ٥ ، س ∈ [−٣، ١]

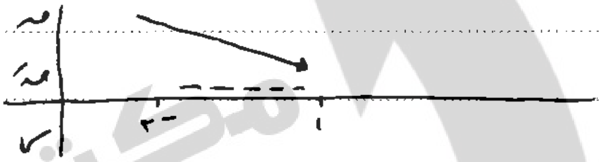
ق متصل في الفترة [−٣، ١] وقابل للاشتقاق في الفترة (−٣، ١) لأنه كثير حدود

ق′(س) = ٢س − ٦ = ٠

٢س − ٦ = ٠

س = ٣ خارج المجال

ق′(س) ∉ م ، س = −٣ ، س = ١



ق(١) = ٠ قيمة صغرى مطلقة.

ق(−٣) = ٣٢ قيمة عظمى مطلقة.

ب) ق(س) = ١٢س − س³ ، س ∈ [−٣، ٣]

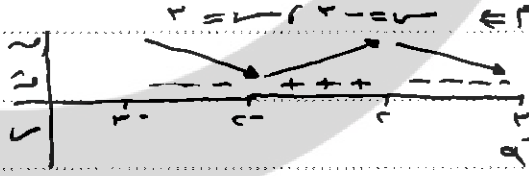
ق متصل وقابل للاشتقاق لأنه كثير حدود

ق′(س) = ١٢ − ٣س² = ٠

س² = ٤

س = ± ٢

ق′(س) ∉ م ، س = −٣ ، س = ٣



ق(−٣) = −٩

ق(−٢) = −١٦ صغرى محلية ومطلقة.

ق(+٢) = ١٦ عظمى محلية ومطلقة

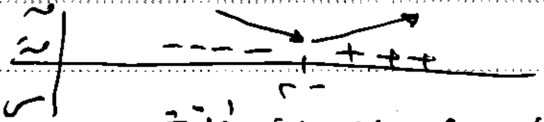
ق(٣) = ٩

جـ) ق(س) = س² + ٢س − ٥ ، س ∈ ح

ق متصل وقابل للاشتقاق

ق′(س) = ٢س + ٤

ق′(س) = ٠ ⟸ س = −٢



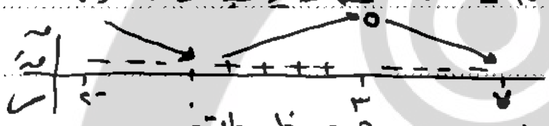
ق(−٢) = −٩ صغرى محلية ومطلقة.

د) ق(س) = { س² + ٥ ، −٢ ≤ س ≤ ٣
١٠ − ٢س ، ٣ < س < ٧

ق غير متصل عند س = ٣ ⟸ ق′(٣) ∉ م

ق′(س) = ٢س = ٠ ⟸ س = ٠.

ق′(س) = −٢ ⟸ لا يوجد نقاط حرجة.



ق(−٢) = ٩ قيمة عظمى مطلقة

ق(٠) = ٥ قيمة صغرى محلية

ق(٣) = نقطة حرجة. (غير متصل)

ق(٧) = −٤ قيمة صغرى مطلقة.

هـ) ق(س) = س² |س − ٢| ، س ∈ ح

⟸ ق(س) = { س³ − ٢س² ، س ≥ ٢
= −س³ + ٢س² ، س < ٢

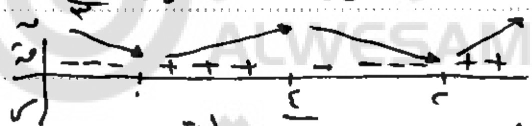
ق′(س) = { ٣س² − ٤س ، س > ٢
−٣س² + ٤س ، س < ٢

ق′(س) ∉ م عند س = ٢

ق′(س) = ٠ ⟸ ٣س² − ٤س = ٠.

س(٣س − ٤) = ٠.

س = ٠ ، س = ٤/٣



ق(٢) = ٠ صغرى محلية ومطلقة

ق(٤/٣) = ٣٢/٢٧ عظمى محلية

ق(٠) = ٠ صغرى محلية ومطلقة

المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

و) ق(س) $= س^3 - \frac{س^4}{4}$ ، س ∈ [-1، 4]

ق َ(س) $= 3س^2 - س^3 = 0$

$س^2(3 - س) = 0$

⇐ س = 0 ، س = 3

ق َ غ.م ⇐ س = -1 ، س = 4

ق(3) $= \frac{27}{4}$ عظمى محلية ومطلقة

ق(-1) $= \frac{-5}{4}$ صغرى مطلقة

ق(4) = 0 نقطة حرجة.

و) ق(س) $= س^3 - \frac{س^4}{4}$ ، س ∈ [-1، 4]

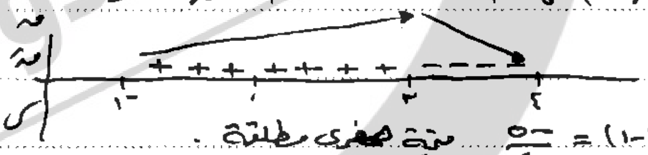
ق(س) متصل وقابل للاشتقاق لأنه كثير حدود

ق َ(س) $= 3س^2 - س^3 = 0$

$س^2(3 - س) = 0$

⇐ س = 0 ، س = 3

ق َ(-1) غ.م ، ق َ(4) غ.م أطراف فترات



ق(-1) $= \frac{-5}{4}$ قيمة صغرى مطلقة.

ق(4) = 0 حرجة نقطة

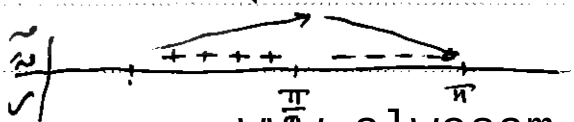
ق(3) $= \frac{27}{4}$ قيمة عظمى محلية ومطلقة

ن) ق(س) = $\sqrt{جاس}$ ، س ∈ [0، π]

ق َ(س) $= \frac{جتاس}{2\sqrt{جاس}}$

ق َ(س) = 0 ⇐ جتاس = 0 ⇐ س = $\frac{\pi}{2}$

ق َ غ.م ⇐ جاس = 0 ⇐ س = 0 ، π



ق(0) = 0 قيمة صغرى مطلقة.

ق($\frac{\pi}{2}$) = 1 قيمة عظمى مطلقة ومحلية

ق(π) = 0 قيمة صغرى مطلقة.

ح) ق(س) $= \sqrt[3]{(س^2 - 4س)^2}$ ، س ∈ ح

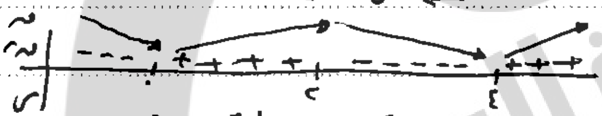
ق َ(س) $= \frac{2}{3}(س^2 - 4س)^{\frac{-1}{3}} \times (2س - 4)$

$= \frac{2(2س - 4)}{3\sqrt[3]{س^2 - 4س}}$

ق َ(س) = 0 ⇐ 2س − 4 = 0 ⇐ س = 2

ق َ غ.م ⇐ $س^2 - 4س$ = صفر ⇐ س(س − 4) = 0

⇐ س = 4 ، س = 0.



ق(0) = 0 قيمة صغرى مطلقة ومحلية.

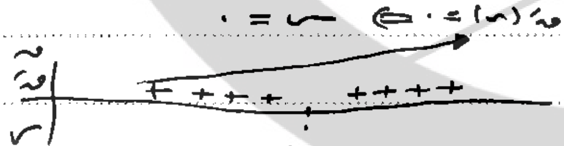
ق(2) = $\sqrt[3]{16}$ قيمة عظمى محلية.

ق(4) = 0 قيمة صغرى مطلقة ومحلية

ط) ق(س) $= س^3 + 1$ ، س ∈ ح

ق َ(س) $= 3س^2$

ق َ(س) = 0 ⇐ س = 0



ق لا يوجد له قيم قصوى.

س: جد قيم كل من الثابتين أ، ب التي تجعل للاقتران ق(س) $= س^3 + أس^2 + ب س$ نقطتين حرجتين

عند س = -1 ، س = 2.

الحل: ق َ(س) $= 3س^2 + 2أس + ب$

س = -1 ⇐ ق َ(-1) = 3 − 2أ + ب = 0.

⇐ −2أ + ب = −3 ---(1)

س = ٢ ⇐ قَ(٢) = ١٢ + ٤أ + ب = ٠

⇐ ٤أ + ب = -١٢ --- ②

- ٢أ + ب = -٣

٤أ + ب = -١٢ بالطرح

$\frac{-٦أ}{-٦} = \frac{٩}{-٦}$

$\boxed{أ = \frac{-٣}{٢}}$

بالتعويض في ②:

٤ $\left(\frac{-٣}{٢}\right)$ + ب = -١٢

-٦ + ب = -١٢

ب = -١٢ + ٦

$\boxed{ب = -٦}$

س٣ أ) النقط الحرجة: (-٣، ٠)، (-٢، -٢)، (٠، ٢)، (٢، -٧)، (٣، ٠)

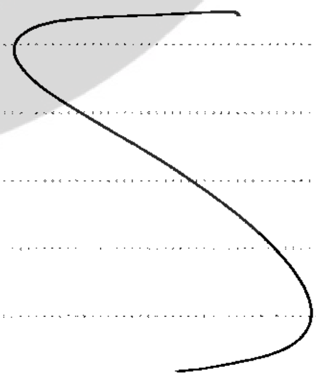
ب) للاقتران قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(-٢) = -٢

للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = ٠ وقيمتها (٢)

للاقتران قيمة صغرى مطلقة ومحلية عند س = ٢ وقيمتها (-٧)

جـ) ق متزايد في الفترة [-٢، ٠]، [٢، ٣]

ق متناقص في الفترة [-٣، -٢]، [٠، ٢]



المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

تطبيقات القيم القصوى :

* الحاجة الى معرفة اكبر قيمة لكمية متغيرة او اصغر قيمة لها (القيم القصوى) تقتضي تحويل بعض المسائل اللفظية الى اقترانات او معادلات لايجاد تلك القيم القصوى لها.

* كلمة اكبر ما يمكن أو اقل ما يمكن او ما شابهها تدل على القيم القصوى.

* آلية حل التطبيقات :

① قراءة المسألة تبدأ من رسم شكل توضيحي مناسب للمسألة وتحديد الثوابت والمتغيرات.

② تكوين اقتران من خلال المسألة يحتوي المتغير المراد ايجاد قيمته القصوى.

③ من خلال ربط المتغيرات ببعضها لاختصار عدد المتغيرات في الاقتران قدر الامكان حتى تصبح متغيراً واحداً. وهذا يتم من خلال المعادلات المساعدة.

④ من خلال ايجاد القيم القصوى باختبار المشتقة الاولى نجد المطلوب.

⑤ التركيز على ان كلمة اكبر أو اقل ما يمكن تمثل مفتاح حل المسألة.

⑥ تتبع الخطوات من ايجاد النقاط الحرجة ونوعها لتحديد المطلوب.

مثال (١) : جد العددين اللذين مجموعهما (٢٠) ومجموع مربعيهما اقل ما يمكن ؟

الحل : العدد الاول = س ، العدد الثاني = ص

مجموع المربعين اقل ما يمكن ⇐ الاقتران المراد اشتقاقه

⇐ $م = س^{٢} + ص^{٢}$

نلاحظ ان س + ص = ٢٠ (معطى)

⇐ ص = ٢٠ − س

بالتعويض في م

$م = س^{٢} + (٢٠ − س)^{٢}$

$م = س^{٢} + ٤٠٠ − ٤٠س + س^{٢}$

$م = ٢س^{٢} − ٤٠س + ٤٠٠$ (متغير واحد)

نشتق م' = ٤س − ٤٠ = ٠

⇐ $\frac{٤س}{٤} = \frac{٤٠}{٤}$

س = ١٠

⇐ ص = ٢٠ − س = ٢٠ − ١٠ = ١٠

العددان هما س = ١٠ ، ص = ١٠ (نقاط حرجة)

م' : − − − ١٠ + + +

س

للاقتران قيمة صغرى محلية مطلقة عند س = ١٠

∴ يكون مجموع مربعيهما اقل ما يمكن عندما س = ١٠ ، ص = ١٠

تدريب (١) : اذا كان مجموع عدد مع ثلاثة امثال عدد آخر يساوي ٦٠ . جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما اكبر ما يمكن.

الحل : العدد الاول = س ، الثاني = ص

حاصل الضرب اكبر ما يمكن ⇐

ق(س) = س × ص   هنا نريد نفي ص

س + ٣ص = ٦٠

$\frac{٣}{٣}ص = \frac{٦٠ − س}{٣}$

$ص = ٢٠ − \frac{س}{٣}$

⇐ بالتعويض

$ك(س) = س\,(٢٠ - \frac{س}{٣})$

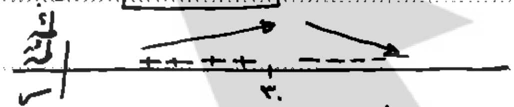
$ك(س) = ٢٠س - \frac{١}{٣}س^٢$

$ك'(س) = ٢٠ - \frac{٢}{٣}س$

$٢٠ - \frac{٢}{٣}س = ٠$

$\frac{٢}{٣}س = ٢٠$

$\boxed{س = ٣٠}$ حرجة



للاقتران قيمة عظمى عند س = ٣٠

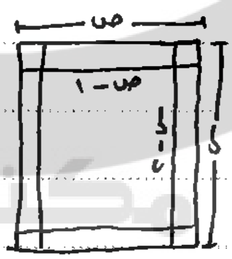
⇐ يكون ناتج الضرب أكبر ما يمكن عندما س = ٣٠

⇐ $س = ٣٠$

$ص = ٢٠ - \frac{٣٠}{٣}$

$= ٢٠ - ١٠ = ١٠$

مثال: صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ٥٠ سم²، يراد طباعة اعلان عليها، اذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١سم وفي كل من الجانبين $\frac{١}{٢}$ سم، جد بعدي الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن؟.



الحل: طول الورقة = س

عرض الورقة = ص

المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن

$م = (س - ٢)(ص - ١)$

$م = س\,ص - س - ٢ص + ٢$

لإيجاد ص بدلالة س

مساحة الورقة = س × ص

$٥٠ = س \times ص \Leftarrow \boxed{ص = \frac{٥٠}{س}}$

$م = س \times \frac{٥٠}{س} - س - ٢(\frac{٥٠}{س}) + ٢$

$م = ٥٠ - س - \frac{١٠٠}{س} + ٢$

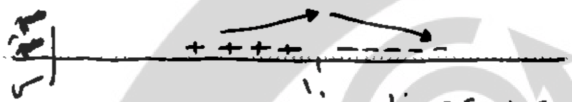
$م = -س - \frac{١٠٠}{س} + ٥٢$

$م' = -١ + \frac{١٠٠}{س^٢} = ٠$

$\Leftarrow \frac{١٠٠}{س^٢} = ١$

$\Leftarrow س^٢ = ١٠٠$

$\Leftarrow س = \pm ١٠$ ، -١٠ تهمل

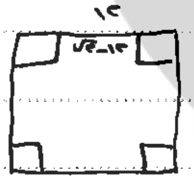


للاقتران قيمة عظمى عند س = ١٠

⇐ تكون المساحة أكبر ما يمكن عندما

س = ١٠ سم ، ص = $\frac{٥٠}{١٠}$ = ٥ سم

تدريب (٣): صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها ١٢ سم، قص من زواياها الأربع أربعة مربعات متساوية طول كل منها س سم ثم طويت الجوانب بحيث أصبحت الصفيحة بشكل علبة مفتوحة من الأعلى، جد قيمة س لتكون حجم العلبة أكبر ما يمكن



حجم أكبر ما يمكن

ح = الطول × العرض × الارتفاع

$= (١٢ - ٢س)^٢ \times س$

$ح = (١٤٤ - ٤٨س + ٤س^٢)\,س$

$ح = ١٤٤س - ٤٨س^٢ + ٤س^٣$

$ح' = ١٤٤ - ٩٦س + ١٢س^٢ = صفر$

$\Leftarrow س^٢ - ٨س + ١٢ = ٠$

$(س - ٦)(س - ٢) = ٠$

$\Leftarrow س = ٦$ ، $س = ٢$ (حرجة)

ق′: $+++$ ، $---$ ، $+++$ ، عند س = ٢ ، ٦

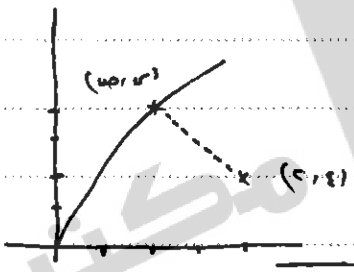
للاقتران قيمة صغرى عند س = ٦ تهمل .

للاقتران قيمة عظمى عند س = ٢

⇐ يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن عندما $\boxed{س = ٢}$

مثال ٩: جد النقطة على منحنى $ق(س) = \sqrt{٨س}$ التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٤، ٢)

الحل: يجب أن يكون هناك معرفة بشكل منحنى الاقتران الجذري



$ف = \sqrt{(س - ٤)^2 + (ص - ٢)^2}$

لكن $ص = \sqrt{٨س}$

$⇐ ف = \sqrt{(س - ٤)^2 + (\sqrt{٨س} - ٢)^2}$

$$ف' = \frac{٢(س - ٤) + ٢(\sqrt{٨س} - ٢) \times \frac{٨}{٢\sqrt{٨س}}}{٢\sqrt{(س - ٤)^2 + (\sqrt{٨س} - ٢)^2}}$$

$$ف' = ٠ ⇐ ٢س - ٨ + \frac{٨\sqrt{٨س} - ١٦}{\sqrt{٨س}} = ٠$$

$$٢س - ٨ + ٨ - \frac{١٦}{\sqrt{٨س}} = ٠$$

$$⇐ ٢س - \frac{١٦}{\sqrt{٨س}} = ٠$$

$٢س = \frac{١٦}{\sqrt{٨س}}$ بتربيع الطرفين

$٤س^2 = \frac{٢٥٦}{٨س}$ بالضرب التبادلي

$$\frac{٣٢س^3}{٣٢} = \frac{٢٥٦}{٣٢}$$

$س^3 = ٨$

$⇐ س = ٢$

ق′: $----$ ، $++++$ ، عند س = ٢

للاقتران قيمة صغرى عند س = ٢

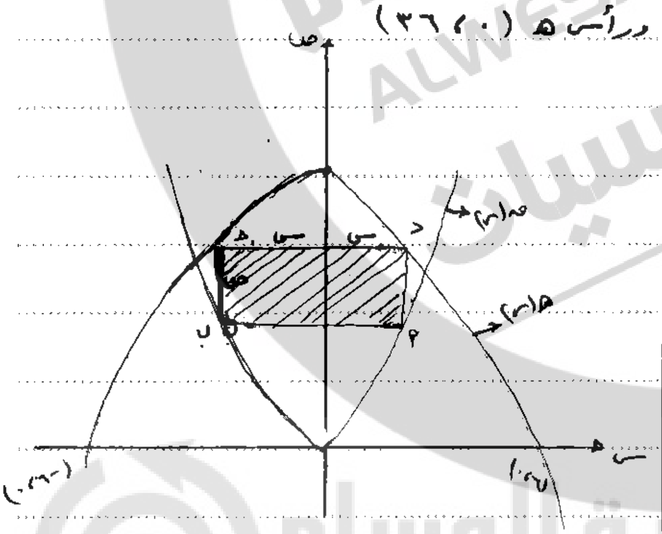
أي أن المسافة تكون أقل ما يمكن عند س = ٢

$ص = \sqrt{٨ \times ٢} = \sqrt{١٦} = ٤$

النقطة هي (٢، ٤)

مثال ١٠: أ ب جـ د مستطيل يقع داخل المنحنيين $ق(س) = ٢س^2$ ، $هـ(س) = ٣٦ - س^2$ بحيث يقع رأساه أ، ب على منحنى ق، ورأساه جـ، د يقعان على منحنى هـ. جد بعدي المستطيل أ ب جـ د لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

الحل: نرسم رسم تقريبي لأن الاقترانات تربيعية، ق مفتوح لأعلى، هـ مفتوح لأسفل ورأسه (٠،٠) ورأس هـ (٠، ٣٦)



⇐ طول المستطيل = ٢س

عرض المستطيل = ص

⇐ م = ٢س × ص

لكن ص = هـ(س) − ق(س)

$= ٣٦ - س^2 - ٢س^2$

$= ٣٦ - ٣س^2$

المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

بالتعويض م = ٢س (٣٦ − ٣س²)

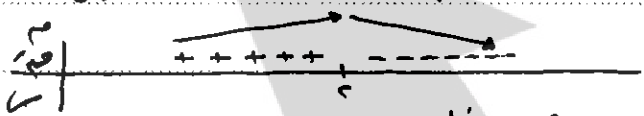
= ٧٢س − ٦س³

م′ = ٧٢ − ١٨س² = ٠

$\frac{١٨س^٢}{١٨} = \frac{٧٢}{١٨}$

س² = ٤

⇐ س = ٢ ، −٢ تهمل



للاقتران قيمة عظمى عند س = ٢

∴ تكون مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عندما

س = ٢ ، ص = ٣٦ − ١٢ = ٢٤

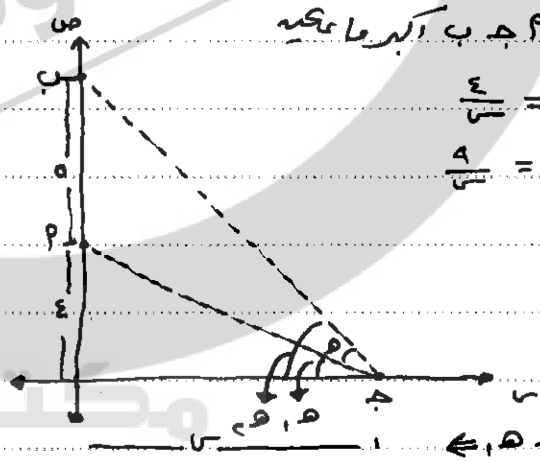
⇐ أبعاد المستطيل هي ٤ ، ٢٤ .

مثال: م(٠، ٤) ، ب(٠، ٩) نقطتان ثابتتان

جـ نقطة تتحرك على محور السينات الموجب

جد الإحداثي السيني للنقطة (جـ) الذي يجعل قياس

الزاوية م جـ ب أكبر ما يمكن



الحل: ظا هـ١ = $\frac{٤}{س}$

ظا هـ٢ = $\frac{٩}{س}$

⇐ هـ = هـ٢ − هـ١

ظا هـ = ظا (هـ٢ − هـ١)

ظا هـ = $\frac{ظا هـ_٢ - ظا هـ_١}{١ + ظا هـ_٢ ظا هـ_١}$

بالتعويض

ظا هـ = $\frac{\frac{٩}{س} - \frac{٤}{س}}{١ + \frac{٩}{س} \times \frac{٤}{س}}$

ظا هـ = $\frac{\frac{٥}{س}}{١ + \frac{٣٦}{س^٢}} = \frac{\frac{٥}{س}}{\frac{س^٢ + ٣٦}{س^٢}}$

ظا هـ = $\frac{٥}{س} \times \frac{س^٢}{س^٢ + ٣٦}$

ظا هـ = $\frac{٥س}{س^٢ + ٣٦}$ بالاشتقاق

قا² هـ هـ′ = $\frac{(س^٢ + ٣٦)(٥) - ٥س (٢س)}{(س^٢ + ٣٦)^٢}$

= $\frac{٥س^٢ + ١٨٠ - ١٠س^٢}{(س^٢ + ٣٦)^٢}$

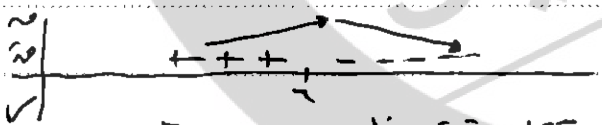
= $\frac{١٨٠ - ٥س^٢}{(س^٢ + ٣٦)^٢}$

لكن هـ′ = ٠ ⇐ $\frac{١٨٠ - ٥س^٢}{(س^٢ + ٣٦)^٢}$ = صفر

⇐ ١٨٠ − ٥س² = صفر

س² = ٣٦

س = ٦



للاقتران قيمة عظمى عند س = ٦

تكون الزاوية هـ أكبر ما يمكن عندما يكون

الإحداثي السيني للنقطة جـ يساوي (٦) .

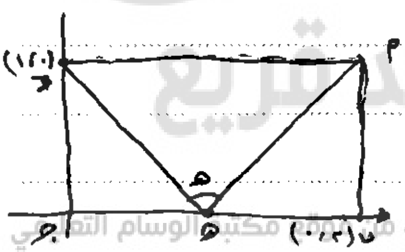
تدريب (٤) يمثل الشكل التالي المستطيل م ن جـ د

حيث ن (٠،٢)

د (٠،١) اذا

فرضت النقطة

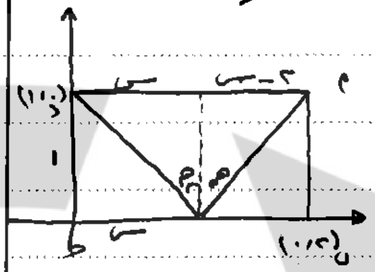
هـ على الضلع ن جـ



ومعلى بعد س سم من نقطة الأصل جـ ووصل م ٢ ، ٢ د نتكون الزاوية المستفيدة هـ ، جد قيمة س التي تجعل هـ في نهايتها العظمى.

$ظا هـ_1 = س$

$ظا هـ_2 = ٢ - س$



$ظا هـ = ظا(هـ_1 + هـ_2)$

$ظا هـ = \frac{ظا هـ_1 + ظا هـ_2}{١ - ظا هـ_1 ظا هـ_2}$ عوّض

$ظا هـ = \frac{س + ٢ - س}{١ - س(٢ - س)}$

$ظا هـ = \frac{٢}{س^2 - ٢س + ١}$

$قا^2 هـ \, هـ' = \frac{-٢(٢س - ٢)}{((س - ١)^2)^2}$

$قا^2 هـ \, هـ' = \frac{-٤(س - ١)}{(س - ١)^4} = \frac{-٤}{(س - ١)^3}$

$هـ' = ٠ \Leftarrow \frac{-٤}{(س - ١)^3} = ٠$

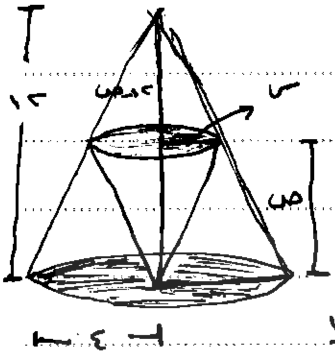
$(س - ١) = ٠ \Leftarrow س = ١$

+ + + | − − −
١

للاقتران قيمة عظمى عند س = ١

⇐ تكون هـ في نهايتها العظمى عند س = ١

مثال ١١: جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤ سم وارتفاعه ١٢ سم بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي



الحل $ح_د = \frac{١}{٣} نق^2 \pi ع$

$ح_د = \frac{١}{٣} س^2 \pi ص$

لكن من تشابه المثلثات

$\frac{س}{٤} = \frac{١٢ - ص}{١٢}$

$\Leftarrow ١٢ - ص = \frac{١٢ \times س}{٤}$

$ص = -٣س + ١٢$

$\Leftarrow ص = ١٢ - ٣س$

بالتعويض

$ح_د = \frac{١}{٣} س^2 \pi (١٢ - ٣س)$

$= ٤س^2 \pi - س^3 \pi$

$ح' = ٨ س \pi - ٣ س^2 \pi$

$ح' = ٠ \Leftarrow ٨ س \pi - ٣ س^2 \pi = ٠$

$س (٨ \pi - ٣ \pi س) = ٠$

إما س = صفر تهمل

أو $٨ - ٣ س = ٠ \Leftarrow س = \frac{٨}{٣}$

+ + + | − − −
$\frac{٨}{٣}$

يكون حجم المخروط أكبر ما يمكن عند $س = \frac{٨}{٣}$

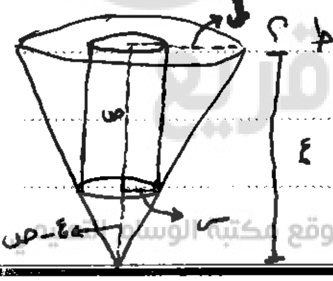
$ح_د = \frac{١}{٣} (\frac{٨}{٣})^2 \pi (١٢ - ٣ \times \frac{٨}{٣})$

$= \frac{٦٤}{٢٧} \pi (٤)$

$= \frac{٢٥٦}{٢٧} \pi$ سم³

تدريب (٥) اثبت أن أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم يساوي $\frac{٤}{٩}$ حجم المخروط

الحل $ح = س^2 \pi ص$



لكن من تشابه المثلثات

$\frac{ع - ص}{س} = \frac{ع}{ل}$

$\Leftarrow$ ع ل − ص ل = ع س

$\Leftarrow$ ص ل = ع ل − ع س

$\Leftarrow$ ص = $\frac{ع}{ل}$ (ل − س)

بالتعويض

ح = س² π ($\frac{ع}{ل}$ (ل − س))

ح = $\frac{\pi ع}{ل}$ (س² ل − س³)

= π ع س² − $\frac{\pi ع}{ل}$ س³

$\frac{دح}{دس}$ = ٢ π ع س − $\frac{٣ \pi ع}{ل}$ س²

$\frac{دح}{دس}$ = ٠

$\Leftarrow$ ٢ π ع س − $\frac{٣ \pi ع}{ل}$ س² = ٠

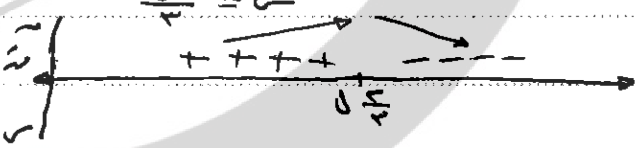
$\frac{\pi ع}{ل}$ (٢ س ل − ٣ س²) = ٠

$\Leftarrow$ ٢ س ل − ٣ س² = ٠

س (٢ ل − ٣ س) = ٠

$\Leftarrow$ س = ٠ ، $\frac{٣}{٣}$س = $\frac{٢}{٣}$ل

س = $\frac{٢}{٣}$ل



يكون حجم الاسطوانة أكبر ما يمكن عندما س = $\frac{٢}{٣}$ ل

$\Leftarrow$ ص = $\frac{ع}{ل}$ (ل − $\frac{٢}{٣}$ ل)

$\Leftarrow$ ص = ع − $\frac{٢}{٣}$ ع

ص = $\frac{١}{٣}$ ع

ح = س² π ص

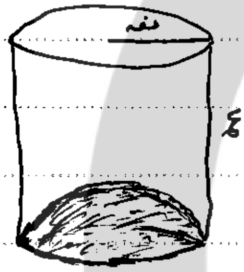
= س² π ($\frac{١}{٣}$ ع)

= $\frac{٤ ل^٢}{٩}$ π $\frac{١}{٣}$ ع $\Leftarrow$

ح = $\frac{٤}{٩}$ ($\frac{١}{٣}$ ل² π ع)

= $\frac{٤}{٩}$ (حجم المخروط)

مثال ٩: قطعة خشب على شكل اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٤٠٠ π سم²، حفر في هذه القطعة نصف كرة طول قطرها مساوٍ لطول قطر قاعدة الاسطوانة، جد طول نصف قطر قاعدة الاسطوانة الذي يجعل حجم الجزء المتبقي من الاسطوانة أكبر ما يمكن



الحل: الجزء المتبقي = ح

ح = حجم الاسطوانة − $\frac{١}{٢}$ حجم الكرة

= نق² π ع − $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٤}{٣}$ π نق³

ح = π نق² (ع − $\frac{٤}{٦}$ نق)

لكن

المساحة الجانبية = ٤٠٠ π

٢ نق π ع = ٤٠٠ π

ع = $\frac{٤٠٠ \pi}{٢ \pi نق}$ = $\frac{٢٠٠}{نق}$

بالتعويض في ح

ح = π نق² ($\frac{٢٠٠}{نق}$ − $\frac{٤}{٦}$ نق)

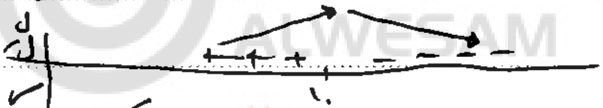
= ٢٠٠ π نق − $\frac{٤}{٦}$ π نق³

$\frac{دح}{دنق}$ = ٢٠٠ π − ٢ π نق² = ٠

$\Leftarrow$ نق² = ١٠٠

$\Leftarrow$ نق = ١٠

نهمل −١٠



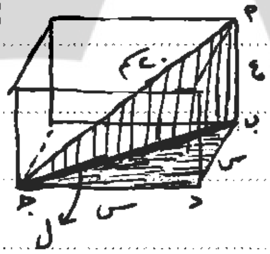
يكون حجم الجزء المتبقي من الاسطوانة أكبر ما يمكن عندما يكون نق = ١٠ سم

المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

المعلم : محمد قريع
٠٧٩٥٦٨٠١٥٣

التدريب (٦): كرة مصمتة نصف قطرها ١٠ سم حُفر بداخلها متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ع سم جد أبعاد متوازي المستطيلات ليكون حجمه أكبر ما يمكن ؟

الحل $\overline{أب}$: ارتفاع المتوازي = ع



$\overline{بد}$: طول ضلع القاعدة = س

$\overline{دهـ}$: طول ضلع القاعدة = س

$\overline{بهـ}$: قطر أحد أوجه المتوازي = ل

$\overline{أهـ}$: قطر المتوازي = قطر الكرة = ٢٠ سم

حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

$ح = س \times س \times ع = س^2 ع$

نجد س بدلالة ع أو العكس

الآن $ل^2 = س^2 + س^2$

$\Leftarrow ل^2 = ٢س^2$

$\Leftarrow ل = \sqrt{٢}\, س$

أيضاً $(٢٠)^2 = ل^2 + ع^2$

$\Leftarrow ٤٠٠ = ٢س^2 + ع^2$

$\Leftarrow س^2 = \frac{٤٠٠ - ع^2}{٢}$

$س^2 = ٢٠٠ - \frac{ع^2}{٢}$

بالتعويض $\Leftarrow ح = (٢٠٠ - \frac{ع^2}{٢}) \times ع$

$ح = ٢٠٠ع - \frac{١}{٢} ع^3$

$\frac{دح}{دع} = ٢٠٠ - \frac{١}{٢} \times ٣ ع^2 = ٠$

$\frac{٣}{٢} ع^2 = ٢٠٠$

$ع^2 = ٢٠٠ \times \frac{٢}{٣} = \frac{٤٠٠}{٣}$

$ع = \frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{-٢٠}{\sqrt{٣}}$ تهمل

$ح'$: + + + + + | − − − − عند $\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$ ، ع

يكون أكبر حجم المتوازي عندما $ع = \frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$

$\Leftarrow س^2 = ٢٠٠ - \frac{٤٠٠}{٢ \times ٣}$

$س^2 = ٢٠٠ - \frac{٢٠٠}{٣}$

$س^2 = \frac{٤٠٠}{٣}$

$\Leftarrow س = \frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$

[redacted]

س١: قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٦٠٠م، جد بعدي قطعة الأرض لتكون مساحتها أكبر ما يمكن

$\boxed{٦٠٠م \ المحيط}$ العرض ص، الطول س

م = الطول × العرض ← معادلة رئيسية (الاقتران المراد اشتقاقه)

م = س ص

لكن ٢س + ٢ص = ٦٠٠ معادلة مساندة

ص = $\frac{٦٠٠ - ٢س}{٢}$ = ٣٠٠ − س

⇐ م = س (٣٠٠ − س)

= ٣٠٠ س − $س^2$

$\frac{دم}{دس}$ = ٣٠٠ − ٢س = ٠

⇐ ٢س = ٣٠٠

⇐ س = ١٥٠

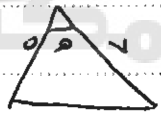
+ + + ١٥٠ − − −

تكون مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عندما

س = ١٥٠

⇐ ص = ٣٠٠ − ١٥٠ = ١٥٠

س: مثلث طولا ضلعيه ٥سم، ٧سم والزاوية المحصورة بينهما هـ، جد قيمة هـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن



م = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٧ × جاهـ

م = $\frac{٣٥}{٢}$ جاهـ

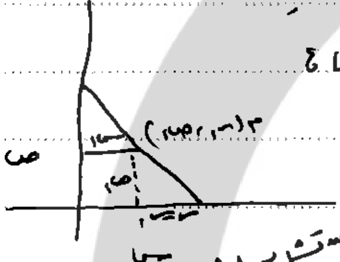
$\frac{دم}{دهـ}$ = $\frac{٣٥}{٢}$ جتاهـ = ٠

⇐ جتاهـ = ٠ ⇐ هـ = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$

+ + $\frac{\pi}{٢}$ − − − − $\frac{٣\pi}{٢}$ + + +

∴ تكون مساحة المثلث أكبر ما يمكن عندما هـ = $\frac{\pi}{٢}$

س٣: إذا كانت النقطة أ(س١، ص١) تقع في الربع الأول من المستوى الديكارتي، جد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ(س١، ص١) ويصنع مع المحورين السيني والصادي ونقطة الأصل مثلثاً مساحته أقل ما يمكن



م = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × س × ص

لكن $\frac{ص}{س} = \frac{ص١}{س - س١}$ ← تشابه المثلثات

ص = $\frac{ص١ \ س}{س - س١}$

∴ م = $\frac{١}{٢}$ × س × $\frac{ص١ \ س}{س - س١}$

= $\frac{١}{٢}$ ص١ × $\frac{س^2}{س - س١}$

$\frac{دم}{دس}$ = $\frac{١}{٢}$ ص١ × $\frac{(س - س١)(٢س) - س^2 (١)}{(س - س١)^2}$

$\frac{دم}{دس}$ = ٠ ⇐ (س − س١)(٢س) − $س^2$ = ٠

س (٢(س − س١) − س) = ٠

س (س − ٢س١) = ٠

⇐ س = ٠ يهمل ⇐ س = ٢س١

− − − − ٢س١ + + +

تكون مساحة المثلث أصغر ما يمكن عندما س = ٢س١

ص = $\frac{ص١ \times ٢س١}{٢س١ - س١}$ = $\frac{ص١ \times ٢س١}{س١}$

ص = ٢ص١

الآن نجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين

(٢س١، ٠)، (٠، ٢ص١)

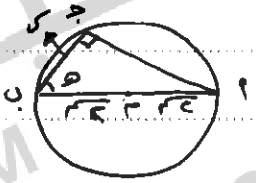
$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ص_١ - ٠}{٠ - ٢س_١} = \frac{-٢ص_١}{٢س_١} = \frac{-ص_١}{س_١}$

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٠ = \frac{-ص_١}{س_١}(س - ٢س_١)$

$\boxed{ص = \frac{-ص_١}{س_١}(س - ٢س_١)}$

س٤) الشكل التالي يمثل دائرة قطرها أب طوله ٤سم بدأت النقطة جـ بالحركة على الدائرة من النقطة ب باتجاه النقطة أ لترسم مع القطر أب مثلثاً قائم الزاوية في جـ. جد قياس الزاوية أ ب جـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.



الحل: $م = \frac{١}{٢} \times ٤ \times س \times جاهـ$

$\Leftarrow م = ٢س جاهـ$

لكن $جتاهـ = \frac{س}{٤} \Leftarrow س = ٤ جتاهـ$

$\Leftarrow م = ٢ \times ٤ جتاهـ جاهـ$

$م = ٤(٢جاهـ جتاهـ)$

$م = ٤ جا٢هـ$

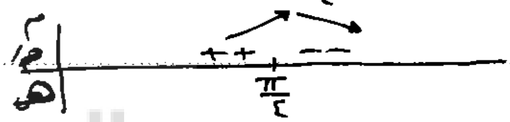
$\frac{دم}{دهـ} = ٤ \times ٢ جتا٢هـ$

$= ٨ جتا٢هـ = ٠$

$\Leftarrow جتا٢هـ = ٠$

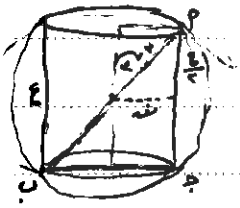
$\Leftarrow ٢هـ = \frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢} \Leftarrow$ هـ زاوية حادة

$\Leftarrow هـ = \frac{\pi}{٤}$



مساحة المثلث أكبر ما يمكن عندما $هـ = \frac{\pi}{٤}$

س) جد ارتفاع الاسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم التي يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها $٣\sqrt{٣}$ ؟



الحل: القطعة بين حافتي قاعدتي الاسطوانة تمثل قطر الكرة
قطر الكرة مع قطر قاعدة الاسطوانة مع ارتفاع الاسطوانة تشكل مثلث قائم الزاوية

$ح = \pi نق^٢ ع$

لكن $نق^٢ + (\frac{ع}{٢})^٢ = (٣\sqrt{٣})^٢$

$نق^٢ + \frac{ع^٢}{٤} = ٢٧$

$نق^٢ = ٢٧ - \frac{ع^٢}{٤}$

$\Leftarrow ح = (٢٧ - \frac{ع^٢}{٤})(\pi ع)$

$ح = -\frac{\pi}{٤} ع^٣ + ٢٧\pi ع$

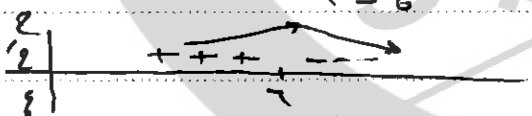
$\frac{دح}{دع} = -\frac{٣\pi}{٤} ع^٢ + ٢٧\pi = ٠$

$\Leftarrow -\frac{٣\pi}{٤} ع^٢ = -٢٧\pi$

$\Leftarrow ع^٢ = \frac{\cancel{٢٧}^{٩} \times ٤}{\cancel{٣}_{١}}$

$ع^٢ = ٣٦$

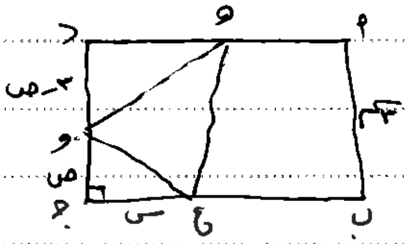
$ع = ٦$



يكون حجم الاسطوانة أكبر ما يمكن عندما ع = ٦

س) يمثل الشكل التالي مستطيل أ ب جـ د الذي فيه أ ب = ٣سم ، طويت الزاوية أ د هـ وفق الخط (د هـ) حتى انطبق الرأس د على المستقيم ب هـ في النقطة ع جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث و جـ ع.

الحل: افرض ع جـ = س



هـ و = ص

ع و = د و = ٣ − ص

م = $\frac{1}{2}$ س ص

من نظرية فيثاغورس

$س^2 + ص^2 = (٣ - ص)^2$

$س^2 = (٣ - ص)^2 - ص^2$

$\Leftarrow$ $س^2 = ٩ - ٦ص + ص^2 - ص^2$

$س^2 = ٩ - ٦ص$

$\Leftarrow$ $-ص = \frac{س^2 - ٩}{٦}$

$\Leftarrow$ $ص = \frac{1}{6}(٩ - س^2)$

بالتعويض:

$م = \frac{1}{2} س \left(\frac{1}{6}(٩ - س^2)\right)$

$م = \frac{1}{12} \times ٩س - \frac{1}{12} س^3$

$م = \frac{3}{4} س - \frac{1}{12} س^3$

$\frac{دم}{دس} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} س^2 = ٠$

$\frac{1}{4} س^2 = \frac{3}{4}$

$س^2 = ٣$

$\Leftarrow$ $س = \sqrt{3}$

$م'$: + + + | − − − عند $\sqrt{3}$ ، س

نجد حجم المثلث أكبر ما يمكن عندما س = $\sqrt{3}$

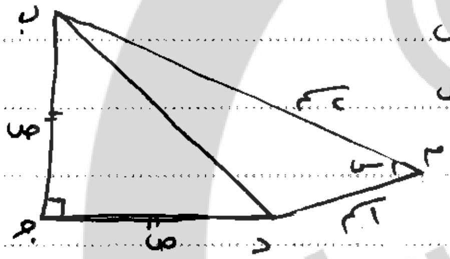
$ص = \frac{1}{6}(٩ - ٣)$

ص = ١

$\Leftarrow$ $م = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times ١$

$م = \frac{\sqrt{3}}{2}$

س: يمثل الشكل التالي الشكل الرباعي م ب جـ د الذي فيه الضلع م ب ثابت وطوله ٢ سم وفيه م د ثابت طوله ١ سم إلا أنه متحرك، يمكنه الدوران في مستوى الشكل حول النقطة م ويصنع مع الضلع الثابت م ب زاوية مقدارها س أما الزاوية د جـ ب فهي قائمة والضلعان جـ د، جـ ب متساويان دوماً. جد قيمة س التي تجعل الشكل الرباعي مساحته أكبر ما يمكن عندها؟



الحل: افرض طول الضلع ب جـ = ص

$م = \Delta م ب د + \Delta جـ د ب$

$= \frac{1}{2} \times ١ \times ٢ \times جا س + \frac{1}{2} ص \times ص$

$\Leftarrow$ $م = جا س + \frac{1}{2} ص^2$

لكن $(ب د)^2 = ٢ ص^2$

وأيضاً $(ب د)^2 = (١)^2 + (٢)^2 - ٢ \times ١ \times ٢ \times جتا س$

$\Leftarrow$ $(ب د)^2 = ٥ - ٤ جتا س$

$\Leftarrow$ $\frac{2}{4} ص^2 = \frac{5}{4} - \frac{4}{4} جتا س$

$\frac{1}{2} ص^2 = \frac{5}{4} - جتا س$

بالتعويض $م = جا س + \frac{5}{4} - جتا س$

$\Leftarrow$ $م = جا س - جتا س + \frac{5}{4}$

$\frac{دم}{دس} = جتا س + جا س = ٠$

$\Leftarrow$ $جا س = - جتا س$

$\Leftarrow$ $س = \frac{٣\pi}{4} = ١٣٥°$ الربع الثاني

$م'$: + + + | − − − عند $\frac{٣\pi}{4}$ ، س

نجد المساحة أكبر ما يمكن عندما س = $\frac{٣\pi}{4}$

ش٨ اتفقت احدى الجامعات مع شركة سياحية لتسيير رحلة الى العقبة بأن يدفع كل شخص ٦٥ دينار اذا كان عدد المشاركين في الرحلة ١٠٠ شخص واذا زاد عدد المشاركين عن ١٠٠ شخص فان الشركة تخفض نصف دينار عن كل مشترك جديد. جد عدد المشتركين في الرحلة لتكون ايراد الشركة اكبر ما يمكن

الحل: افرض عدد الاشخاص فوق المئة = س

⇐ المشتركين = ١٠٠ + س

التكلفة للشخص الواحد = ٦٥ − ½ س

ايراد الشركة = عدد المشتركين × تكلفة المشترك

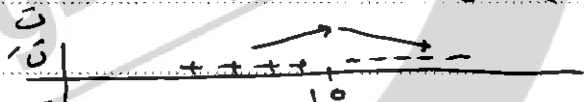
ت = (١٠٠ + س)(٦٥ − ½ س)

ت′ = (١٠٠ + س)(−½) + (٦٥ − ½ س)(١)

ت′ = −٥٠ − ½ س + ٦٥ − ½ س

ت′ = ١٥ − س = ٠

⇐ س = ١٥ شخص



يكون ايراد الشركة اكبر ما يمكن عندما س = ١٥ شخص

⇐ عدد المشتركين = ١١٥ شخص

ش٩ جد اكبر مساحة ممكنة لشبه منحرف يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث تكون احدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران

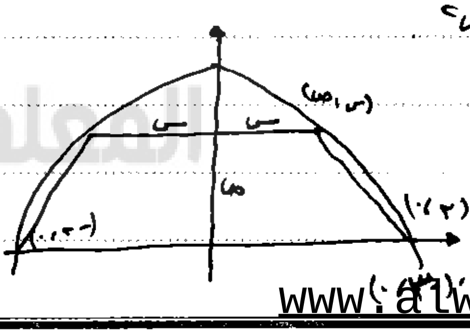
ق(س) = ٩ − س²

الحل: ق(س) = ٠

⇐ ٩ − س² = ٠

س = ±٣

نقاط التقاطع (٣، ٠)، (−٣، ٠)



م = ½ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

= ½ (٢س + ٦) × ص

⇐ م = (س + ٣) ص   عوض قيمة الاقتران

م = (س + ٣)(٩ − س²)

م′ = (س + ٣)(−٢س) + (٩ − س²)(١)

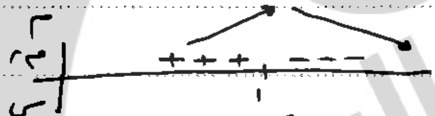
م′ = −٢س² − ٦س + ٩ − س²

م′ = −٣س² − ٦س + ٩ = ٠

⇐ ٣س² + ٢س − ٣ = ٠

(س + ٣)(س − ١) = ٠

⇐ س = −٣ تهمل ، س = ١



تكون المساحة اكبر ما يمكن عندما س = ١

⇐ م = (٤)(٨)

= ٣٢

ش١٠ وجد مصنع اثاث ان التكلفة المتعلقة بالانتاج الاسبوعي لغرف نوم عددها س تتحدد بالاقتران

ك(س) = س³ − ٣س² − ٨٠س + ٥٠٠ فاذا بيعت كل غرفة بسعر ٢٨٠٠ دينار جد الانتاج الاسبوعي للمصنع الذي يجعل الربح اكبر ما يمكن

الحل: الربح = الايراد − التكلفة

ر = ٢٨٠٠س − س³ + ٣س² + ٨٠س − ٥٠٠

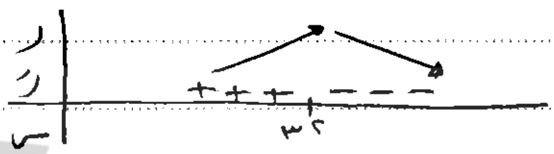
ر′ = ٢٨٠٠ − ٣س² + ٦س + ٨٠ = ٠

−٣س² + ٦س + ٢٨٨٠ = ٠

س² − ٢س − ٩٦٠ = ٠

$\Leftarrow$ (س − ٣٢)(س + ٣٠) = ٠

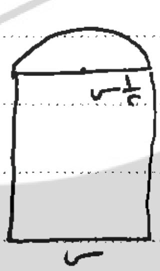
س = ٣٢ ، س = −٣٠ تهمل



يكون الربح أكبر ما يمكن عندما يكون عدد الغرف المطبوعة ٣٢ غرفة .

(١١) نافذة محيطها ٦ أمتار على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة ، اذا كان الزجاج الذي ع شكل نصف دائرة ، اذا كان الزجاج الذي على شكل نصف دائرة ملوناً ويسمح بادخال نصف كمية الضوء الذي يسمح بادخاله الزجاج العادي الذي يكون الجزء المستطيل من النافذة جد ابعاد المنطقة المستطيلة للنافذة حتى يسمح بادخال اكبر كمية ممكنة من الضوء .

الحل



ك = كمية الضوء الداخل من المستطيل + كمية الضوء الداخل من نصف الدائرة

$= ١ \times$ س ص $+ \frac{١}{٢} \times (\frac{١}{٢}$ س$)^٢ \times \frac{\pi}{٢}$

ك = س ص $+ \frac{\pi}{١٦}$ س^٢

نجد

محيط النافذة = س + ٢ص + $\frac{١}{٢}$ (٢ نق π)

٦ = س + ٢ص + $\frac{١}{٢} \pi$ س

٢ص = ٦ − $(١ + \frac{\pi}{٢})$ س

ص = ٣ − $(\frac{٢+\pi}{٤})$ س

بالتعويض

ك = س$\left(٣ - (\frac{٢+\pi}{٤})\text{س}\right) + \frac{\pi}{١٦}$ س^٢

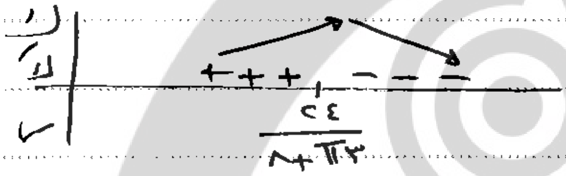
ك = ٣س − $\frac{٢+\pi}{٤}$ س^٢ + $\frac{\pi}{١٦}$ س^٢

ك′ = ٣ − $(\frac{٢+\pi}{٢})$ س + $\frac{\pi}{٨}$ س = ٠

س$(\frac{\pi}{٨} - ١ - \frac{\pi}{٢})$ = −٣

س$(\frac{-٨-٣\pi}{٨})$ = −٣

س = $\frac{٣ \times ٨}{٣\pi + ٨} = \frac{٢٤}{٣\pi+٨}$



تكون كمية الضوء اكبر ما يمكن عندما س = $\frac{٢٤}{٣\pi+٨}$

ص = ٣ − $(\frac{٢+\pi}{٤})$ س

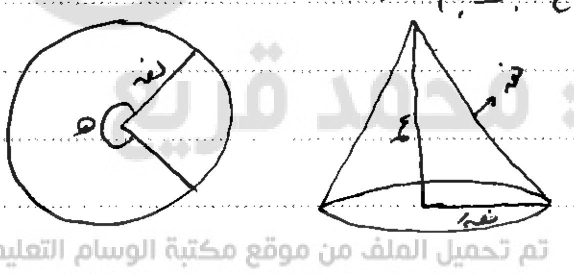
= ٣ − $(\frac{٢+\pi}{١})(\frac{٦}{٣\pi+٨})$

= ٣ − $\frac{١٢ + ٦\pi}{٣\pi+٨}$

ص = ٣$(\frac{٣\pi+٨}{٣\pi+٨}) - \frac{١٢+٦\pi}{٣\pi+٨}$

ص = $\frac{٣\pi + ١٢}{٣\pi+٨}$

(١٢) عمل قطاع دائري زاويته المركزية بالتقدير الدائري هـ ، ونصف قطر دائرته نق حول الى مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته نق١ وارتفاعه ع . جد قيمة هـ التي تجعل للمخروط الناتج اكبر حجم ممكن .



الحل : حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$ح = \frac{1}{3} (\pi نق^2) ع$

لكن $ل^2 = نق^2 + ع^2$

$\Leftarrow نق^2 = ل^2 - ع^2$

بالتعويض $ح = \frac{1}{3} (ل^2 - ع^2) \pi ع$

$ح = \frac{1}{3} (ل^2 ع - ع^3) \pi$

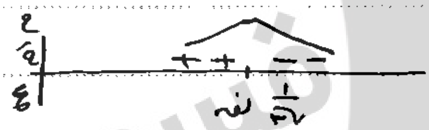
$ح' = \frac{1}{3} \pi (ل^2 - 3ع^2) = 0$.

$\Leftarrow ل^2 - 3ع^2 = 0$.

$ل^2 = 3ع^2$

$ع^2 = \frac{ل^2}{3}$

$ع = \frac{1}{\sqrt{3}} ل$



يكون حجم المخروط أكبر ما يمكن عندما $ع = \frac{1}{\sqrt{3}} ل$

بالتعويض

$نق^2 = ل^2 - ع^2$

$= ل^2 - \frac{ل^2}{3}$

$\Leftarrow نق^2 = \frac{2}{3} ل^2$

$نق = \sqrt{\frac{2}{3}} ل$

أيضاً محيط دائرة المخروط (القاعدة) = طول قوس القطاع

$2\pi نق = ل هـ$

$2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} ل = ل هـ$

$هـ = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}$

$= \sqrt{\frac{8}{3}} \pi$.

أسئلة المراجعة ص ٢١٣ :

س١: اذا كان المستقيم ٣س − ص − جـ = صفر يمس منحنى الاقتران $ق(س) = \frac{-٣}{س+١}$ عند النقطة (س١، ص١) الواقعة على منحناه، جد :

أ) احداثيي النقطة (س١، ص١)

ب) قيمة الثابت جـ .

الحل: من المستقيم ص = ٣س − جـ

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٣$

من المنحنى $ق'(س) = \frac{٣}{(س+١)^٢}$

عند النقطة (س١، ص١) مماس

$\frac{دص}{دس} = ق'(س)$

$\Leftarrow \frac{٣}{(س+١)^٢} = ٣$

$\Leftarrow ٣ = ٣(س+١)^٢$

$(س+١)^٢ = ١$

$س^٢ + ٢س + ١ = ١$

$س^٢ + ٢س = صفر$

$س(س + ٢) = صفر$

$\Leftarrow$ س = ٠ ، س = −٢

عند س = ٠ $\Leftarrow ق(٠) = \frac{-٣}{١} = -٣$ (٠ ، −٣)

بالتعويض في المستقيم

٣×٠ − جـ = ص = −٣

$\Leftarrow$ جـ = ٣

عند س = −٢ $\Leftarrow ق(-٢) = \frac{-٣}{-٢+١} = +٣$ (−٢ ، ٣)

بالتعويض في المستقيم

٣×−٢ − جـ = ٣

− جـ = ٩ $\Leftarrow$ جـ = −٩

س٢: يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة الاصل بالامتار بعد ن ثانية معطى بالعلاقة ف(ن) = ن + جتا ن ، ن ∈ [٠ ، π] جد تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة .

الحل: ف(ن) = ن + جتا ن

ع(ن) = ف'(ن) = ١ − جا ن = ٠ انعدام

$\Leftarrow$ جا ن = ١

$ن = \frac{\pi}{٢}$

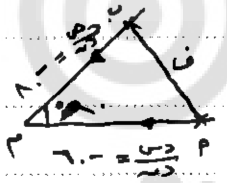
ت(ن) = − جتا ن

$ت(\frac{\pi}{٢}) = -جتا \frac{\pi}{٢}$

$ت(\frac{\pi}{٢}) = صفر$

س٣: خطان حديديان يميل احدهما عن الآخر بزاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$ ويلتقيان في النقطة م ، يسير القطار (أ) على احدهما بسرعة ٦٠ كم/س مقترباً من النقطة م ويسير القطار (ب) على الخط الآخر بسرعة ٨٠ كم/س مقترباً من النقطة (م) . عند الساعة العاشرة صباحاً اذا كان القطاران أ، ب على بعد ١٠٠ كم ، ٢٠ كم على الترتيب من النقطة (م) جد معادلة اقتراب القطارين معاً من بعضهما عند الساعة الحادية عشرة صباحاً ؟

الحل



$ف^٢ = س^٢ + ص^٢ - ٢س ص جتا ٦٠$

$ف^٢ = س^٢ + ص^٢ - ٢س ص \times \frac{١}{٢}$

$ف^٢ = س^٢ + ص^٢ - س ص$

$٢ف \frac{دف}{دن} = ٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن}$

$-(ص \frac{دس}{دن} + س \frac{دص}{دن})$

لاحظ س ، ص مجهولان نجدهما من علاقة الزمن بالسرعة

س = (السرعة × الزمن) + ١٠٠ عند ١١ صباحاً

= −٦٠ × ١ + ١٠٠ = ٤٠

ص = ١٢٠ − ٨٠ × ١ = ٤٠

(ف)^2 = (٤٠)^2 + (٤٠)^2 − ٤٠ × ٤٠ × ٢ × ½

ف^2 = ١٦٠٠ + ١٦٠٠ − ١٦٠٠

ف^2 = ١٦٠٠

ف = ٤٠

بالتعويض ٢ × ٤٠ × دف/دن = ٢ × ٤٠ × −٦٠ + ٢ × ٤٠ × −٨٠

− ((٤٠ × −٦٠) + (٤٠ × −٨٠))

٨٠ دف/دن = −٤٨٠٠ − ٦٤٠٠ − (−٢٤٠٠ + −٣٢٠٠)

٨٠ دف/دن = −١١٢٠٠ + ٥٦٠٠

٨٠/٨٠ دف/دن = −٥٦٠٠/٨٠ =

دف/دن = −٧٠

س٤ إذا كان ق(س) = ∛(س^3 − ٩س) ، س ∈ ح

جد أ) قيم س التي يكون عندها للاقتران نقاط حرجة

ب) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.

جـ) قيم س التي يكون عندها للاقتران قيم قصوى مبيناً نوعها.

الحل : ق(س) = (س^3 − ٩س)$^{\frac{1}{3}}$

ق'(س) = ⅓ (س^3 − ٩س)$^{-\frac{2}{3}}$ (٣س^2 − ٩)

= (س^2 − ٣) / ∛((س^3 − ٩س)^2)

ق'(س) = ٠ ⟸ س^2 − ٣ = ٠ ⟸ س = ± √٣

ق'(س) غ.م ⟸ س^3 − ٩س = ٠

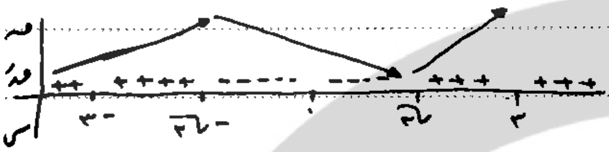
س (س^2 − ٩) = ٠

⟸ س (س − ٣)(س + ٣) = ٠

⟸ س = ٠ ، س = ٣ ، س = −٣

أ) قيم س الحرجة = {−٣ ، −√٣ ، ٠ ، √٣ ، ٣}

ب)



ق متزايد في الفترة (−∞ ، −√٣] ، [√٣ ، ∞)

ق متناقص في الفترة [−√٣ ، √٣]

جـ) ق(−√٣) = ∛(−٣√٣ − ٩√٣) = ∛(−٦√٣)

ق(√٣) = ∛(٣√٣ + ٩√٣) = ∛(٦√٣)

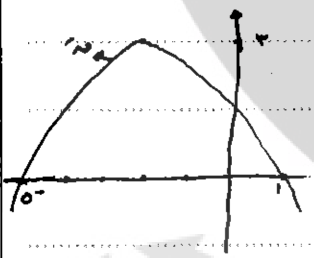
للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = −√٣

للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = √٣

س٥ عين قاعدة الاقتران ق(س) = أس^3 + ب س^2 + جـ س + د

والذي يمر منحناه بالنقطة (١ ، ٥) و ---

(السؤال غير مطلوب)



س٦ جد ما يلي اعتماداً على الشكل

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.

ق متزايد في الفترة [−٥ ، ١]

ق متناقص في الفترة (−∞ ، −٥] ∪ [١ ، ∞)

ب) القيم القصوى المحلية للاقتران ق

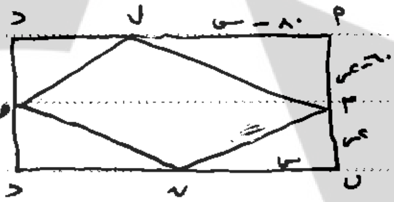
ق(−٥) قيمة صغرى محلية (من التناقص إلى التزايد)

ق(١) قيمة عظمى محلية (من التزايد إلى التناقص)

جـ + د) غير مطلوب

[redacted]

س: الشكل التالي يمثل المستطيل أ ب جـ د فيه أ ب = ٦٠ سم، ب جـ = ٨٠ سم وبداخله متوازي أضلاع م ن و ل الذي تقع رؤوسه على أضلاع المستطيل أ ب جـ د، جد قيمة س التي تجعل مساحة متوازي الأضلاع م ن و ل أكبر ما يمكن علماً بأن م ب = جـ ل ، ن



مساحة المتوازي = مساحة المستطيل − (مساحة أربع مثلثات)

م = ٤٨٠٠ − (٢ مساحة م ب ن + ٢ مساحة د ه و)

$= ٤٨٠٠ - (٢ \times \frac{١}{٢} \times س \times ٢س + ٢ \times \frac{١}{٢}(٨٠ - س)(٦٠ - ٢س))$

$م = ٤٨٠٠ - (٢س^٢ + ٤٨٠٠ - ١٦٠س - ٦٠س + ٢س^٢)$

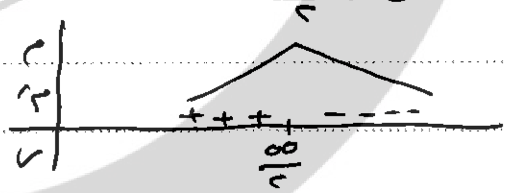
$م = ٤٨٠٠ - ٤س^٢ + ٢٢٠س - ٤٨٠٠$

$م = -٤س^٢ + ٢٢٠س$

$م' = -٨س + ٢٢٠ = ٠$

$\frac{٨س}{٨} = \frac{٢٢٠}{٨}$

$س = \frac{٥٥}{٢}$



تكون مساحة المتوازي أكبر ما يمكن عندما تكون

$س = \frac{٥٥}{٢}$