المدارس العمرية & مدارس الجامعة الثانية

شرح الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

للصف الثاني الثانوي العلمي

إعداد

د.خالد جلال

٠٧٧٧١٦٣٣٠٢

المدارس العمرية & مدارس الجامعة الثانية

شرح الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

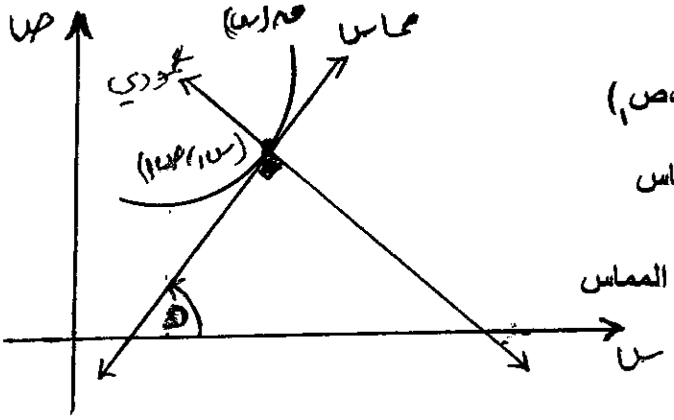
للصف الثاني الثانوي العلمي

إعداد

د.خالد جلال

٠٧٧٧١٦٣٣٠٢

التفسير الهندسي للمشتقة الاولى والتطبيقات الهندسية



تفسر المشتقة هندسيا بانها ميل المماس

لمنحنى الاقتران ق(س) عند نقطة التماس($س_1$،$ص_1$)

أي ان ق(س)= ميل المماس ، ويرمز لميل المماس

بالرمز م = قَ(س) = ظاهـ حيث هـ زاوية ميل المماس

لاحظ الشكل المجاور

ملاحظات مهمة

١. لايجاد نقط تقاطع منحنيين ق(س) ، ل(س) نساوي قاعدتيهما اي نضع ق(س) = ل(س).

٢. لايجاد نقط تقاطع منحنى ق(س) مع محور السينات نضع ق(س) = صفر ثم نجد قيم س.

٣. لايجاد نقط تقاطع منحنى ق(س) مع محور الصادات نضع س = صفر ثم نجد قيم ص.

٤. اذا كان $م_1$ = $م_2$ فإن المستقيمان متوازيان (شرط التوازي) .

٥. اذا كان $م_1$ x $م_2$ = -١ فإن المستقيمان متعامدان (شرط التعامد) .

٦. ميل المماس = مقلوب ميل العمودي بعكس الاشارة.

٧. ميل العمودي = مقلوب ميل المماس بعكس الاشارة

المطلوب في الدرس

١. إيجاد ميل المماس ، ميل العمودي على المماس.

٢. ايجاد زاوية ميل المماس .

٣. ايجاد معادلة المماس ومعادلة العمودي علي المماس .

٤. ايجاد احداثيات نقط التماس.

اولا : ايجاد ميل المماس ، ميل العمودي على المماس

مثال ١ . جد ميل المماس والعمودي على المماس لمنحنى العلاقات الاتية عند النقط المعطاة .

١. ص = $(٢س - ١)^{٥}$ عند س = ١ .

٢. ص = جتا٢س + جا٢س عند س = $\frac{\pi}{٤}$.

٣. ص =(ق∘ل)(س) حيث ق(س) = س^{٢} ، ل(س)= س^{٣} عند س = ١ .

٤. ص = ن^{٢} − ٣ ن ، س = ٤ ن + ١ عند س = ٩ .

٥. $(س + ص)^{٤}$ = س^{٢} عند النقطة (١ ، ٠) .

ثانيا : ايجاد زاوية ميل المماس

نتبع الخطوات الاتية :

- **نجد ميل المماس م ثم نضع م = ظاهـ ثم نقوم بحل المعادلة السابقة ان امكن.**

مثال٢. جد قياس زاوية ميل المماس للمنحنيات الاتية عند النقط المعطاة ازاء كل منها .

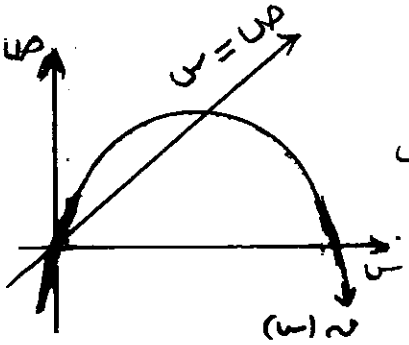
١. ص = $\frac{-٩}{س+١}$ عند س = ٢

٢. ص = $\frac{٩}{س+٣}$ عند س = ٠

٣. ص = $\sqrt{٣}$ س − س^{٢} عند النقطة (٠ ، ٠) .

٤. ص = س^{٣} + ٥س^{٢} + ١ عند س = ١

مثال٣. لاحظ الشكل المجاور:



جد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم ص= س والمماس لمنحنى ق(س) عند نقطة الاصل حيث ق(س)= $\sqrt{٣}$ س − س^{٢} .

ثالثا : ايجاد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س).

أ. معادلة المماس هي : ص – ص$_1$= م (س – س$_1$) .

ب. معادلة العمودي هي : ص – ص$_1$= $\frac{-1}{م}$(س – س$_1$).

لايجاد المعادلات السابقة لابد من : معرفة نقطة التماس والميل ثم نعوض في المعادلة المطلوبة مع ملاحظة انه يوجد نوعان من الاسئلة .

<u>النوع الاول مباشر :</u>

مثال٤. جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى ص= س^{٣}+ ١ عند س=٢ .

مثال ٥. جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى ص = جاس+ جتاس عند عند النقطة ($\frac{\pi}{٢}$، ١) .

مثال٦. جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى ص = س^{٢}– ٤ عند نقط تقاطعه مع المستقيم ص = ٣س .

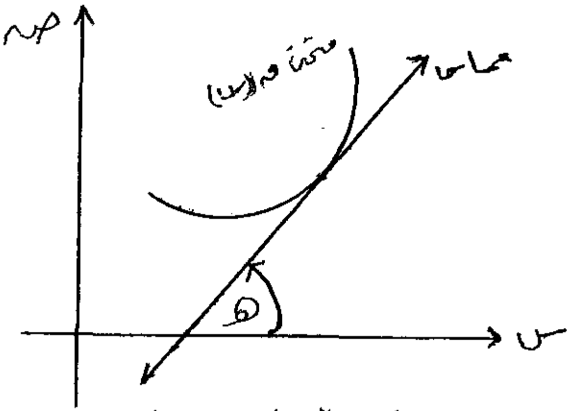
<u>النوع الثاني غير مباشر:</u>

مثال٧. جد مساحة المثلث المكون من المماس لمنحنى ص=$\frac{١}{س}$ عند النقطة (٢، $\frac{١}{٢}$) ومحوري الاحداثيات .

مثال٨. جد مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس لمنحني الاقتران ص= $\frac{٩- س^{٢}}{٢}$ عند س =-١ .و محور السينات .

رابعا : ايجاد احداثيات نقط التماس

في هذه الحالة لابد ان يكون الميل معلوم قيمته العددية او يمكن ايجاد قيمة الميل من الاوضاع المختلفة للمماس وهي كما يلي:



١. المماس يصنع زاوية مقدارها هـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإننا نستفيد ما يلي:

قَ(س)= ظاهـ .

مثال٩. جد نقط على منحني ق(س)= س^{٢}– ٤س +٥ بحيث يكون المماس عندها يصنع زاوية مقدارها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

٢. المماس يوازي محور السينات

او المماس افقي

(او العمودي//يوازي محور الصادات)

فإننا نستفيد ما يلي:

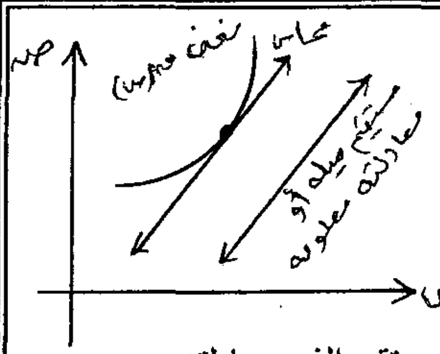
قَ(س)= صفر .

ملاحظة : النقطة (أ ، ب) عندها المماس لمنحني ق(س) يكون افقي

⇐ ق(أ)= ب ، قَ(أ)= صفر

مثال١٠. جد نقط على منحني الاقتران ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}+٩}$ والتي عندها المماس لمنحني الاقتران ق(س) افقي.

مثال١١. اذا كان ق(س) = $\frac{\text{ل(س) + ٨س}}{\text{هـ(س)}}$ ، هـ(س) ≠ صفر وكان لمنحني كل من ل(س) ، هـ(س) مماس افقي عند النقطة (١ ، ٤) فما قيمة قَ(١) . ؟

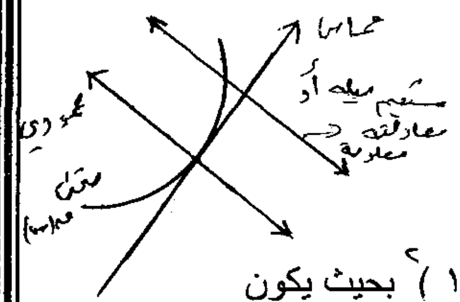


٣. المماس يوازي مستقيم ميله

او معادلته معلومه

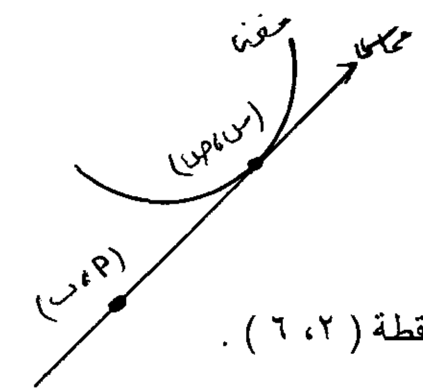
فإننا نستفيد ما يلي: **$\bar{\text{ق}}$(س) = ميل المستقيم المعلوم .**

مثال١٢. جد معادلة المماس لمنحني ق(س)= س^{٢} والذي يوازي المستقيم الذي معادلته هي ص= ٢س- ٣ .



٤. العمودي على المماس من نقطة التماس يوازي مستقيم ميله او معادلته معلومه فإننا نستفيد ما يلي: **$\bar{\text{ق}}$(س) = $\frac{-١}{\text{ميل المستقيم}}$**

مثال١٣. جد جميع قيم س على منحني الاقتران ق(س)= $\frac{(\text{س}+١)^{٢}}{\text{س}+٢}$ بحيث يكون عندها العمودي على المماس لمنحني ق(س) موازيا المستقيم ص= $\frac{-٢٥\text{س} + ٧}{١٦}$



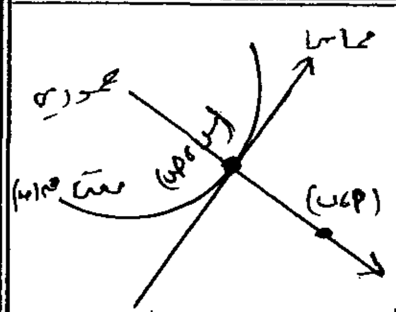
٥. المماس لمنحني $\bar{\text{ق}}$(س) مرسوم

من النقطة الخارجية (م ، ب)

فإننا نستفيد ما يلي: **$\bar{\text{ق}}$(س) = $\frac{\text{ص} - \text{ب}}{\text{س} - \text{م}}$**

مثال١٤. جد معادلة المماس المرسوم لمنحني ص= ٢س^{٢} من النقطة (٢، ٦) .

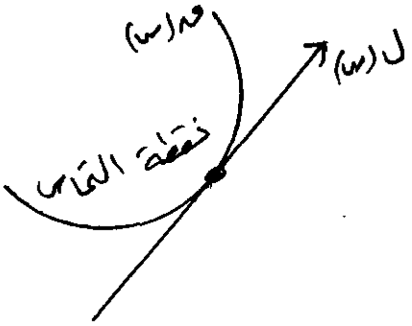
مثال١٥.جد نقط على منحني العلاقة ص^{٢} - ص - ٢س = -٤ والتي عندها المماس يكون مارا بالنقطة (-٥ ، ٢) .



٦. العمودي على المماس لمنحني ق(س) مرسوم من النقطة الخارجية (م ، ب) فإننا نستفيد ما يلي: **ميل العمودي = $\frac{\text{ص} - \text{ب}}{\text{س} - \text{م}}$ ⇐ $\bar{\text{ق}}$(س) = $\frac{-\text{س} + \text{ب}}{\text{ص} - \text{ب}}$**

مثال١٦. جد معادلة العمودي على منحني ق(س)= ٢$\sqrt{\text{س}}$ والذي يمر بالنقطة (٦ ، ٠).

<u>ايجاد مجاهيل (ثوابت):</u>



١. اذا علمت معادلة المماس ل(س) وقاعدة المنحني ق(س) فإنه عند نقطة التماس نستفيد ما يلي :

ل(س) = ق(س) ، لَ(س) = قَ(س).

مثال١٦. اذا كان المستقيم ص= ٨ س مماسا لمنحني ص= ٢س^{٢}+ أ جد قيمة أ .

---

٢. اذا كان ميل المماس لمنحني ق(س) عند النقطة (أ ، ب) يساوي جـ فإن

ق(أ)= ب ، قَ(أ)= جـ . (اذا علمت معادلة المماس نشتق المعادلة لايجاد جـ).

مثال١٧. اذا كان معادلة المماس لمنحني ق(س)= أ س^{٣}+ ب س^{٢} عند النقطة (١، ٥)

هي ٣ س + ص = ٨ جد قيمة كل من أ، ب .

مثال١٨. جد قاعدة اقتران كثير الحدود من الدرجة الثالثة بحيث يكون المستقيم ص= ٣س – ٣ مماسا له عند (١، ٠) والمستقيم ص= ١٨س – ٢٧ مماسا له عند النقطة (٢ ، ٩) .

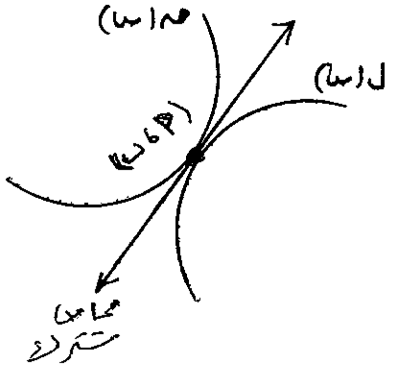
---

٣. اذا كان ميل العمودي على المماس لمنحني ق(س) عند النقطة (أ ، ب)

يساوي جـ فإن **ق(أ)= ب ، قَ(أ)= $-\frac{١}{جـ}$**

(اذا علمت معادلة العمودي على المماس نشتق المعادلة لايجاد جـ).

مثال١٩. إذا كان العمودي على المماس لمنحني ق(س)= $\frac{١}{أ}$س^{٤}+ ب س يصنع زاوية ظلها يساوي $-\frac{١}{٩}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (٢ ، ٦) جد قيمة أ، ب .



٤. اذا كان لمنحنيي الاقترانين ل(س) ، ق(س)

مماس مشترك عند النقطة (م ، ب) نستفيد ما يلي:

ل(م) = ق(م) ، لَ(م) = قَ(م) ، ل(م) = ب ، ق(م)= ب.

مثال٢٠. اذا تماس المنحنيان ق(س)= جـس – س^{٢} ، ل(س)= م س^{٢}+ ب س+ ٢

عند النقطة (١، ٢) جد قيمة الثوابت م ، جـ ، ب .

التطبيقات الفيزيائية

اذا تحرك جسيم بخط مستقيم ، وفرضت على ذلك الخط نقطة الاصل وكان موضع الجسيم بالنسبة لتلك النقطة بعد ن ثانية من بدء حركته هو ف

حيث ف = ق(ن) فإن :

١. سرعة الجسيم عند أي لحظة هي ع(ن) = قَ(ن) = $\frac{د ف}{د ن}$.

٢. تسارع الجسيم عند أي لحظة هو ت(ن) = عَ(ن) = $\frac{د ع}{د ن}$ = قً(ن) = $\frac{د^2 ف}{د ن^2}$.

٣. السرعة المتوسطة = $\frac{ف_2 - ف_1}{ن_2 - ن_1}$ حيث $ف_1$ = ق($ن_1$) ، $ف_2$ = ق($ن_2$) .

٤. التسارع المتوسط = $\frac{ع_2 - ع_1}{ن_2 - ن_1}$

ملاحظات

١. المتغيرات ف ، ع ، ت جميعها اقترانات في ن لذا غالبا لابد من معرفة قيمة ن لايجاد اي منها .

٢. لمعرفة موضع الجسيم الابتدائي نعوض عن ن= صفر في المسافة ف .

٣. لمعرفة السرعة الابتدائية نعوض عن ن = صفر في السرعة ع .

٤. يصل الجسيم إلى اقصى ارتفاع في اللحظة التي تكون فيها السرعة ع= صفر (زمن اقصى ارتفاع أو زمن اقصى بعد).

٥. يصل الجسيم إلى اقصى سرعة في لحظة يكون فيها ت= صفر.

٦. القيم ف ، ع ، ت تكون موجبة او سالبة او صفر ولكن ن ≤ صفر دائما .

٧. ف تكون موجبة عندما يكون الجسيم على يمين (فوق) نقطة الاصل.

٨. ف تكون سالبة عندما يكون الجسيم على يسار (تحت) نقطة الاصل.

٩. ع تكون موجبة عندما تتزايد المسافة ف ، وسالبة عندما تتناقص ف .

١٠. ت تكون موجبة عندما تتزايد السرعة ع ، وسالبة عندما تتناقص ع .

١١. لايجاد مجموعة قيم الزمن التي عندها السرعة موجبة نقوم بحل المتباينة

ع > صفر .

١٢. لايجاد مجموعة قيم الزمن التي عندها السرعة سالبة أو مجموعة قيم الزمن التي عندها يغير الجسيم من اتجاه حركته نقوم بحل المتباينة ع < صفر.

١٣. لاثبات ان الجسيم لا يغير من اتجاه حركته نبرهن ان ع > صفر دائما.

١٤. عند انعدام السرعة نضع ع = صفر .

١٥. عند انعدام التسارع نضع ت = صفر.

١٦. أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم = فـ(زمن أقصى ارتفاع).

١٧. لحظة وصول الجسم سطح الارض (نقطة الانطلاق)تكون الازاحة الكلية تساوي صفر أي ان مجموع المسافات التي قطعها الجسم = صفر وبحل هذه المعادلة نحصل على زمنين هما ن١= صفر وعنده يكون الجسم على سطح الارض عند بداية الحركة والزمن الاخر ن٢وهذا الزمن يمثل الزمن الكلي (زمن التحليق = زمن الصعود + زمن الهبوط).

التزايد والتناقص لمنحني الاقتران ق(س)

معنى التزايد هندسيا : ان منحنى ق(س) في صعود مستمر.

معنى التزايد جبريا : انه كلما زادت قيمة س ازدادت قيمة ق(س).

ونعبر عن ذلك رياضيا كالاتي:

لكل س٢ > س١ فإن ق(س٢) > ق(س١) .

معنى التناقص هندسيا : ان منحنى ق(س) في نزول مستمر.

معنى التناقص جبريا : انه كلما زادت قيمة س قلة قيمة ق(س).

ونعبر عن ذلك رياضيا كالاتي:

لكل س٢ > س١ فإن ق(س٢) < ق(س١) .

- **<u>لايجاد مجالات (فترات) التزايد والتناقص لمنحني ق(س) إذا علمت القاعدة نتبع الخطوات التالية:</u>**

١. نجد قَ(س)

٢. نجد قيم س التي عندها قَ(س) = صفر

٣. نجد قيم س التي عندها قَ(س) غير موجودة

(نقطة عندها ق(س) غير متصل ، نقطة عندها قَ(س+) ≠ قَ(س−) ، اصفار مقام المشتقة ، اطراف الفترات المغلقة ، الرؤوس المدببة).

٤. نرسم خط قَ(س) ونعين عليه قيم س السابقة ثم نحدد الاشارة داخل كل فترة.

٥. مراعاة النظرية الاتية:

* قَ(س) > صفر ⇐ ق(س) متزايد .

* قَ(س) < صفر ⇐ ق(س) متناقص .

* قَ(س) = صفر ⇐ ق(س) ثابت .

٦. نكتب فترات التزايد والتناقص بدءا من جهة اليسار.

ملاحظة ١

يمكن ايجاد مجالات (فترات) التزايد والتناقص لمنحني ق(س) إذا علم :

١. منحني ق(س)   ٢. منحني قَ(س)

ملاحظة٢

يمكن رسم منحني قَ(س) إذا علم منحني ق(س) والعكس.

قيم س الحرجة للاقتران ق(س)

تعريف: تسمى النقطة س =أ نقطة حرجة للاقتران ق(س) إذا كان

قَ(أ) = صفر أو قَ(أ) غير موجودة بشرط س =أ

تقع ضمن مجال ق(س).

- **لايجاد قيم س الحرجة لمنحنى ق(س) إذا علمت القاعدة نتبع الخطوات التالية:**

١. نجد قَ(س)

٢. نجد قيم س التي عندها قَ(س) = صفر

٣. نجد قيم س التي عندها قَ(س) غير موجودة

(نقطة عندها ق(س) غير متصل ، نقطة عندها قَ($س^+$) ≠ قَ($س^-$) ، اصفار مقام المشتقة ، اطراف الفترات المغلقة ، الرؤوس المدببة).

٤. نختار القيم التي تقع ضمن مجال ق(س) فتكون هي قيم س الحرجة.

ملاحظة ١

يمكن ايجاد قيم س الحرجة لمنحني ق(س) إذا علم :

١. منحني ق(س)   ٢. منحني قَ(س)

ملاحظة٢

- قيم س الحرجة للاقتران الثابت المعرف على الفترة[أ ، ب] هي الفترة[أ ، ب].
- قيم س الحرجة لاقتران اكبر عدد صحيح المنفرد المعرف على الفترة[أ ، ب] هي الفترة[أ ، ب].
- اطراف الفترة المغلقة تعتبر نقط حرجة.

نقط القيم العظمى والصغرى المحلية والمطلقة لمنحني الاقتران ق(س)

بعض المفاهيم

١. القيمة العظمى المحلية : هي عبارة عن قمة على منحنى ق(س).

٢. القيمة العظمى المطلقة : هي اكبر قيمة عظمى

٣. القيمة الصغرى المحلية: هي عبارة عن قاع أو واد على منحنى ق(س).

٤.القيمة الصغرى المطلقة: هي اصغر قيمة صغرى .

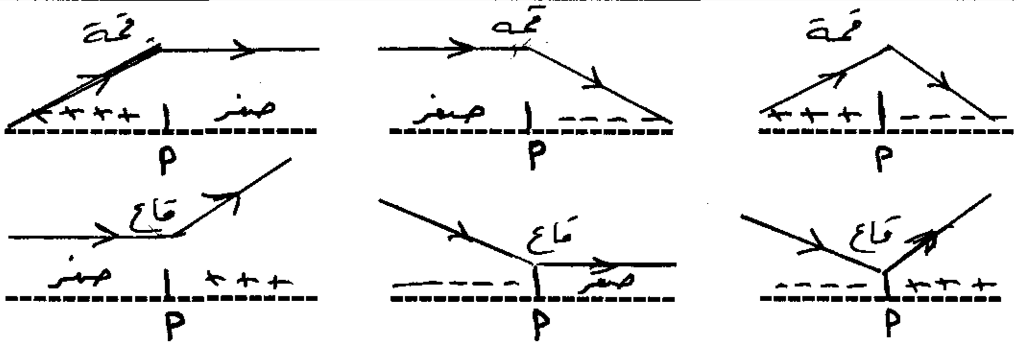
الطريقة الاولى : اختبار المشتقة الاولى

- **لايجاد نقط القيم القصوى(العظمى، الصغرى) المحلية باستخدام اختبار المشتقة الاولى نتبع الخطوات الاتية:**

١. نجد قيم س الحرجة للاقتران ق(س).

٢. رسم خط قَ(س) ثم نعين عليه قيم س الحرجة السابقة ثم نحدد الاشارة داخل كل فترة.

٣. مراعاة الاشكال الستة الاتية:



الطريقة الثانية: اختبار المشتقة الثانية

- **<u>لايجاد نقط القيم القصوى(العظمى، الصغرى) المحلية باستخدام اختبار المشتقة الثانية نتبع الخطوات الاتية:</u>**

١. نجد قيم س الحرجة للاقتران ق(س) ولتكن س=أ احداها.

٢. نجد ق''(س) .

٣. نجد ق''(أ) = موجب ⇐ (أ ، ق(أ)) نقطة صغرى محلية .

= سالب ⇐ (أ ، ق(أ)) نقطة عظمى محلية .

= صفر ⇐ يفشل الاختبار ونرجع للمشتقة الاولى .

- **<u>لايجاد نقط القيم القصوى(العظمى، الصغرى) المطلقة للاقتران ق(س) في الفترة[أ ، ب] نتبع الخطوات الاتية :</u>**

١. نجد نقط القيم القصوى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الاولى .

٢. نجد (أ ، ق(أ)) ، (ب ، ق(ب)) ثم نحدد نوع كل منهما .

٣. نقوم بالمقارنة بين المساقط الصادية للنقاط المتشابهة .

<u>ملاحظات</u>

١. لا توجد نقط قيم قصوى محلية عند اطراف الفترة

٢. منحني ق(س) يمر بالنقطة (أ ، ب) ⇐ ق (أ) = ب .

٣. (أ ، ب) نقطة حرجة للاقتران ق(س) ⇐ ق (أ) = ب ، ق' (أ) = صفر.

٤. (أ ، ب) نقطة قصوى (عظمى أو صغرى) للاقتران ق(س) ⇐

ق (أ) = ب ، ق' (أ) = صفر

تطبيقات القيم القصوى

يتميز هذا النوع من الاسئلة بالجمل الاتية :

١. اكبر ما يمكن وتعني قيمة عظمى مطلقة.

٢. اصغر ما يمكن وتعني قيمة صغرى مطلقة.

لحل هذا النوع من الاسئلة نتبع الخطوات الاتية:

١. تحديد على من تعود كلمة اكبر او اصغر والذي تعود عليه هو الاقتران المطلوب.

٢. نكتب الاقتران .(قانون من قوانين المساحات او الحجوم او ....)

٣. رسم شكل يوضح معطيات السؤال ان أمكن.

٤. فرض الرموز على الرسم (س ، ص) ثم نعوض بالاقتران فيصبح بمتغيرين .

٥. نجعل الاقتران بمتغير واحد س او ص (نبحث عن علاقة مساعدة) وذلك من معطيات السؤال او من خلال الرسم .

٦. نفس خطوات ايجاد نقط القيم القصوى.

ملاحظة:

١. نتسخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية اذا كان من السهل الحصول على المشتقة الثانية.

٢. نتسخدم اختبار المشتقة الاولى لتحديد القيم القصوى المحلية اذا كان من الصعب الحصول على المشتقة الثانية.

متطلبات حل هذا السؤال

١. طريقة الحل المشار اليها بالخطوات السابقة.

٢. معرفتك بقوانين المساحات والحجوم والمسافة بين نقطتين وكل العلاقات الهندسية التي سبق لك دراستها.

٣. المهارة في حل المعادلات (خطية، تربيعية، تكعيبية، كسرية، مثلثية).

المعدلات المرتبطة بالزمن

يتميز هذا النوع من الاسئلة بالكلمات الاتية:

١. معدل ***٢. سرعة***

وكل منهما تعني المشتقة بالنسبة للزمن

لحل هذا النوع من الاسئلة نتبع الخطوات الاتية:

١. رسم شكل يوضح معطيات السؤال عند اي لحظة ن .

٢. فرض الرموز على الرسم (س ، ص ، ل ، م ....).

٣. كتابة المعدلات المعطاة والمعدل المطلوب مع تحديد اشارة المعدلات المعطاة.

٤. تحديد العلاقة التي تربط بين الرموز المفروضة .

٥. نشتق العلاقة السابقة ضمنيا بالنسبة للزمن فينتج المطلوب.

ملاحظات :

١. أي جسم متحرك لم تعط ابعاده نعتبره نقطة متحركة.

٢. إذا ذكر في السؤال تناقص فإن المعدل يكون سالب.

٣. إذا ذكر في السؤال تزايد فإن المعدل يكون موجب.

٤. إذا لم يذكر شي نعتمد على الرمز المفروض فمثلا اذا كانت المسافة س تزداد بأزدياد الزمن فإن المعدل يكون موجب ، واذا كانت المسافة س تقل بأزدياد الزمن فإن المعدل يكون سالب وهكذا بالنسبة لبقية الرموز.

٥. قد نحتاج في بعض الاسئلة ان نجعل العلاقة بدلالة متغير واحد .