



# المعلم في مهارات الرياضيات

وحدة تطبيقات التفاضل

تارين مخلوق

لدرس تطبيقات هندسة



alawa2el

منتدى الاستاذ حمزة ابو الفول / منتديات التعليم العربي

**الحل :** نفرض نقطة التماس هي ( س ، ص )

الملاذ في مهارات الرياضيات  
0772259503  
الاستاذ حمزة عواد ابو

نسايي الميئين  $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2} \leftarrow ص_1 = \frac{ص_2 \cdot س_1}{س_1}$

$121 \pm = 121$   $\leftarrow$   $12 = 12$   $\leftarrow$   $2 = 2$   $\leftarrow$   $4 = 4$   $\leftarrow$

عند النقطة ( ٢ ، ١٢ )  $\Rightarrow \frac{2}{12} = m \Rightarrow$  معادلة المماس : ص - ١٢ =  $\frac{2}{12} (س - ٢)$

عند النقطة (٢، ١٢)  $\frac{2}{12} = m \leftarrow$  معادلة المماس :  $\frac{2}{12} = \frac{y-12}{x-2} \leftarrow$

### الحل :

$$1 - = (3) \text{ ل } , 2 = (3) \text{ ق } , (3) \text{ ق } \times (3) \text{ ل } + (3) \text{ ل } . (3) \text{ ق } = (3) \text{ (ق . ل )}$$

ق ( ٣ ) = ميل الحماس المنحني ق ويساوي ميل المستقيم ٤س - ٢ص - ٨ = ٠ أي أن ق ( ٣ ) = ٢

ل ( ٣ ) = ميل المماس لمنحنى ل لكن المستقيم ٩ ص + ٣ س = صفرًا عمودي على المماس لمنحنى ل

$$\frac{1}{3} = \frac{1-}{(3)-} = \text{ميل المماس لمنحنى ل (س)} \leftarrow \frac{1-}{3} = \frac{3-}{9} = \text{ميل العمودي}$$

ومنہ ل (۳) = ۳

$$\xi = 2 \times 1 - + 3 \times 2 = (3) \text{ (ق. ج) } .:$$





توجيهي علمي

الاستاذ حمزة ابو الفول

٠٧٧٢٢٥٩٥٩٠٣

الملاذ في مهارات الرياضيات  
وحدة تطبيقات التفاضل  
اسئلة التمارين مع الحل  
الموضوع التطبيقات الهندسية

٥) إذا كان المستقيم  $4x - 2y + 5 = 0$  صفرًا يمس منحنى  $C$  عند النقطة  $(2, 3)$ ، وكان المستقيم  $9x + 3y - 4 = 0$  صفرًا عمودياً على المماس لمنحنى  $L$  عند النقطة  $(3, -1)$ ، فجد  $(C \times L)$ .

الحل :

نقطة التماس هي نقطة تقاطع منحنى  $C$  مع المستقيم  $3x - 1 = 0$

$$3x^2 - 6x + 7 = 3x^2 - 2x + 9 + 8 = 0 \quad \leftarrow \quad 0 = (8 - x)(1 - x)$$

منه  $x = 8$  ،  $x = 1$   $\therefore$  المستقيم يقطع منحنى  $C$  عند  $(8, 23)$  ،  $(1, 2)$



$$C : (x - 2)^2 = 10$$

١) عند النقطة  $(8, 23)$  ، ميل المماس  $C$   $(8, 23)$   $\Rightarrow 10 = 10$

$$23 - 2x = 10 \quad \leftarrow \quad 10 = (8 - x) \quad \leftarrow \quad 57 - x = 0$$

٢) عند النقطة  $(1, 2)$  ، ميل المماس  $C$   $(1, 2)$   $\Rightarrow 4 = 4$

$$2 - x = 4 \quad \leftarrow \quad 4 = (1 - x) \quad \leftarrow \quad 6 + x = 0$$





توجيهي علمي

الملاذ في مهارات الرياضيات  
وحدة تطبيقات التفاضل  
اسئلة التمارين مع الحل  
الموضوع التطبيقات الهندسية

الاستاذ حمزة ابو الفول  
٠٧٧٢٢٥٩٥٩٠٣

٦) جد معادلة المماس لمنحنى  $s^2 + v^2 = 25$  عند نقطة تقاطعه مع المستقيم  $s + v = 1$ .

**الحل:** نقطة التماس هي نقطة تقاطع  $s^2 + v^2 = 25$  مع المستقيم  $s + v = 1$

نجد نقط التقاطع  $v = 1 - s$  .... تحقق العلاقة  $s^2 + (1 - s)^2 = 25$

$$s^2 + 1 - 2s + s^2 = 25 \Rightarrow 2s^2 - 2s - 24 = 0$$

$$2(s^2 - s - 12) = 0 \Rightarrow (s - 4)(s + 3) = 0 \Rightarrow s = 4, s = -3$$



عندما  $s = 4$  ،  $v = 1 - 4 = -3$  ← النقطة هي  $(4, -3)$

عندما  $s = -3$  ،  $v = 1 - (-3) = 4$  ← النقطة هي  $(-3, 4)$

نجد ميل المماس  $\Rightarrow s^2 + v^2 = 25$   $\Rightarrow 2s \frac{ds}{ds} + 2v \frac{dv}{dv} = 0$   $\Rightarrow \frac{ds}{dv} = -\frac{v}{s}$

١) عند النقطة  $(4, -3)$  ميل المماس  $\left. \frac{ds}{dv} = -\frac{v}{s} \right|_{(4, -3)} = \frac{3}{4}$

معادلة المماس  $v - (-3) = \frac{3}{4}(s - 4) \Rightarrow v + 3 = \frac{3}{4}s - 3 \Rightarrow v = \frac{3}{4}s - 6$

وهي معادلة المماس الأولى  $v = \frac{3}{4}s - 6$  .....  $\frac{3}{4}s - 6 = 1 - s \Rightarrow \frac{7}{4}s = 7 \Rightarrow s = 4$



٢) عند النقطة  $(-3, 4)$  ميل المماس  $\left. \frac{ds}{dv} = -\frac{v}{s} \right|_{(-3, 4)} = -\frac{4}{3}$

معادلة المماس  $v - 4 = -\frac{4}{3}(s + 3) \Rightarrow v - 4 = -\frac{4}{3}s - 4 \Rightarrow v = -\frac{4}{3}s$

وهي معادلة المماس الثانية  $v = -\frac{4}{3}s$  .....  $-\frac{4}{3}s = 1 - s \Rightarrow -\frac{4}{3}s + s = 1 \Rightarrow -\frac{1}{3}s = 1 \Rightarrow s = -3$



(٧) إذا كان المستقيم أس + ٣ ص = ١ يمس منحنى الاقتران ق(س) = ٤ س<sup>٢</sup> + أس + ب عند النقطة (١، ق(١))، فجد قيمة كل من الثابتين أ، ب.

الحل :

عند نقطة التماس (١، ق(١)) ميل المماس = ميل المستقيم ، أي أن :

$$\frac{1-}{3} = 1 + 8 \Leftrightarrow 1 = 8 - 6 \Leftrightarrow 1 = 2$$

$$\text{نجد قيمة ق(١)} \Leftrightarrow 1 = 3 + 6 - \frac{7}{3} \Leftrightarrow \frac{7}{3} = \text{ق(١)}$$

$$\text{وبالتعويض في ق نجد أن : } \frac{7}{3} = 4 + (1 - 6) + ب \Leftrightarrow \frac{13}{3} = ب$$

(٨) أثبت باستخدام التفاضل أن نصف قطر الدائرة يكون عمودياً على مماس الدائرة عند نقطة التماس.

الحل :

معادلة الدائرة التي مركزها (د، هـ) ونصف قطرها ر  
افرض نقطة التماس (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>)

لايجاد ميل المماس نشتق معادلة الدائرة

$$2(س - د) + (ص - هـ)^2 = 0 \quad \text{صفرًا}$$

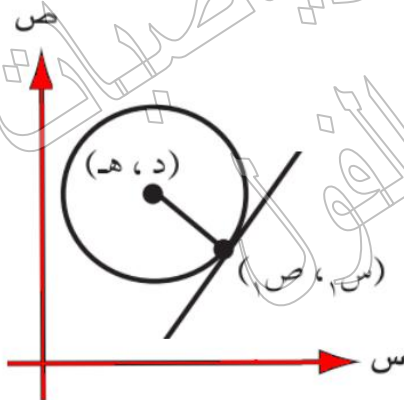
$$\frac{د - س}{ص - هـ} = \frac{2(س - د)}{2(ص - هـ)} = \frac{د - س}{ص - هـ}$$

∴ ميل المماس عند النقطة (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>) هو  $\frac{د - س_1}{ص_1 - هـ}$

ميل نصف القطر المار بالنقطتين (د، هـ)، (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>) هي  $\frac{ص_1 - هـ}{س_1 - د}$

$$\text{ميل المماس} \times \text{ميل نصف القطر} = \frac{د - س_1}{ص_1 - هـ} \times \frac{ص_1 - هـ}{س_1 - د} = 1 - 1 = 0$$

∴ المماس عمودي على نصف القطر عند نقطة التماس.





٩) جد جميع قيم  $s$  التي يكون العمودي على المماس لمنحنى  $q(s) = s - 2s$  عند  $s = 2$  موازياً لمحور الصادات.

الحل :  $q(s) = s - 2s$  عند  $s = 2$

بما ان العمودي يوازي محور الصادات  $\Rightarrow$  إذن المماس يوازي محور السينات  $\Rightarrow$  ومنه ميل المماس = صفر

$$q'(s) = 1 - 2s = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \quad \therefore \text{جنا } s = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = s \Rightarrow \frac{\pi}{6} = s$$

$$\text{أو } s = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} = s \Rightarrow \frac{\pi}{6} = s$$

الحل الاول  $s = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$

الحل العام قيم  $s$  هي  $\frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n$

دورة الاقتران  $\pi = \frac{\pi}{2}$

١٠) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى  $q(s) = s^2$ ، إذا كان العمودي مرسوماً من النقطة  $(\frac{9}{2}, 0)$ .

الحل : النقطة  $(\frac{9}{2}, 0)$  لا تقع على منحنى  $q$

افرض  $(s, v)$  نقطة التماس  $\Rightarrow$  ميل المماس =  $q'(s) = 2s$  ميل العمودي =  $-\frac{1}{2s}$

العمودي يمر بالنقطتين  $(s, v)$  و  $(\frac{9}{2}, 0)$   $\Rightarrow$  ميل العمودي =  $\frac{v - 0}{s - \frac{9}{2}} = -\frac{1}{2s}$

$$\therefore \frac{v}{s - \frac{9}{2}} = -\frac{1}{2s} \Rightarrow v = -\frac{s - \frac{9}{2}}{2s} = -\frac{2s - 9}{4s}$$



$s^2(2s - 9) = 0 \Rightarrow s = 0, s = \frac{9}{2}, s = -\frac{9}{2}$

$\therefore$  توجد ثلاث نقط تماس هي  $(0, 0), (\frac{9}{2}, -\frac{1}{4}), (-\frac{9}{2}, -\frac{1}{4})$

١) عند  $(0, 0)$  ميل العمودي =  $-\frac{1}{0}$   $\Rightarrow$  العمودي يكون عمودياً على محور السينات (موازي لمحور الصادات)

$\therefore$  معادلة العمودي  $s = 0$

٢) عند النقطة  $(\frac{9}{2}, -\frac{1}{4})$  ميل العمودي =  $-\frac{1}{-\frac{1}{4}} = 4$  معادلة العمودي  $v - (-\frac{1}{4}) = 4(s - \frac{9}{2}) \Rightarrow v = 4s - \frac{19}{2}$

٣) عند النقطة  $(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{4})$  ميل العمودي =  $-\frac{1}{-\frac{1}{4}} = 4$  معادلة العمودي  $v - (-\frac{1}{4}) = 4(s + \frac{9}{2}) \Rightarrow v = 4s + \frac{19}{2}$

الاستاذ حمزة ابو الفول  
٠٧٧٢٢٥٩٥٩٠٣

الملاذ في مهارات الرياضيات  
وحدة تطبيقات التفاضل  
اسئلة التمارين مع الحل  
الموضوع التطبيقات الهندسية

توجيهي علمي



(١١) أثبت أن المماسين المرسومين لمنحنيي العلاقتين:  $٩س^٢ + ٤س^٢ = ٤٥$  ،  
 $٤ص^٢ - ٤س^٢ = ٥$  عند نقطة تقاطع المنحنيين في الربع الأول متعامدان.

**الحل :**  $٩س^٢ + ٤ص^٢ = ٤٥ \Leftrightarrow ٩س^٢ - ٤٥ = -٤ص^٢ \Leftrightarrow \frac{٩س^٢}{٩} - \frac{٤٥}{٩} = \frac{-٤ص^٢}{٩} \dots (١)$

$٤ص^٢ - ٤س^٢ = ٥ \Leftrightarrow ٤ص^٢ - ٥ = ٤س^٢ \Leftrightarrow \frac{٤ص^٢}{٤} - \frac{٥}{٤} = \frac{٤س^٢}{٤} \dots (٢)$   
بمساواة (١)، (٢)

$$\frac{٥}{٤} + ٥ = \frac{٩س^٢}{٩} + \frac{٤س^٢}{٤} \Leftrightarrow \frac{٥}{٤} - \frac{٤س^٢}{٤} = \frac{٩س^٢}{٩} - ٥$$

$$\frac{٢٥}{٤} = \frac{٩س^٢ + ٤س^٢}{٣٦} \quad \text{اي أن} \quad \frac{٢٥}{٤} = \frac{١٦س^٢ + ٩س^٢}{٣٦}$$

$$٣٦ = ٩س^٢ \quad ٣٦ = ٤س^٢ \quad ٣ = س \quad ٣ = س$$

في الربع الأول  $٣ = س \Leftrightarrow ٤ - ٥ = ٤ص^٢ \Leftrightarrow ١ = ٤ص^٢ \Leftrightarrow ١ = ص$

هي (١، ٣)

نقطة التقاطع في الربع الاول

١م = ميل المماس لمنحنى العلاقة  $٩س^٢ + ٤ص^٢ = ٤٥$  عند النقطة (١، ٣)

$$٨س + ١٨ص = \frac{دص}{دس} \quad ٨س + ١٨ص = \frac{دص}{دس}$$

$$\frac{٤-}{٣} = \frac{٢٤-}{١٨} = \frac{دص}{دس} \quad \text{م} = \frac{دص}{دس} \quad (١، ٣)$$

٢م = ميل المماس عند النقطة (١، ٣) لمنحنى العلاقة  $٤ص^٢ - ٤س^٢ = ٥$

$$٨ص - ٢س = \frac{دص}{دس} \quad ٨ص - ٢س = \frac{دص}{دس}$$

$$\frac{٣-}{٤} = \frac{٦-}{٨} = \frac{دص}{دس} \quad \text{م} = \frac{دص}{دس} \quad (١، ٣)$$

$$١- = \frac{١٢-}{١٢} = \frac{٣-}{٤} \times \frac{٤-}{٣} = \text{م} \times \text{م}$$

∴ المماسان متعامدان







توجيهي علمي

الملاذ في مهارات الرياضيات  
وحدة تطبيقات التفاضل  
اسئلة التمارين مع الحل  
الموضوع التطبيقات الهندسية

الاستاذ حمزة ابو الفول  
٠٧٧٢٢٥٩٥٩٠٣

١٢) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين  $(2, 0)$  ،  $(6, 2)$  يمس منحنى الاقتران  
ق(س) =  $أس^2 + س - ١$  ، جد قيمة أ

**الحل :** ميل المستقيم =  $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{2 - 0}{6 - 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ق (س) =  $أس^2 + س - ١$

افرض (س، ص) نقطة تماس

ميل المماس = ق (س) =  $أس^2 + س - ١$  ،  $٢ = أس + ١$  ،  $٢ = أس + ١$  ،  $١ = أس$

المستقيم يمس منحنى ق عند النقطة (س، ص)

معادلة المستقيم

ص =  $٢ + ٤(س - ٠)$

ص =  $٤س + ٢$

إذن  $٤س + ٢ = أس^2 + س - ١$  ، ولكن  $١ = أس$

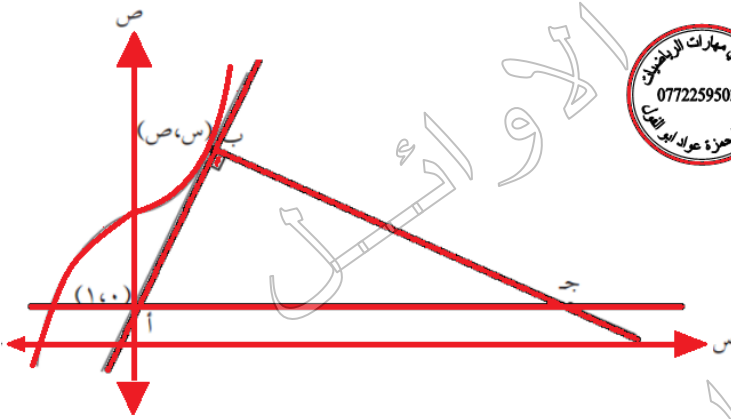
∴  $٤س + ٢ = أس^2 + س - ١$  ،  $٤س + ٣ = أس^2$

$٤س + ٣ = أس^2$  ،  $٤س + ٣ = أس^2$

∴  $١ = أس$  ،  $١ = أس$  ،  $١ = أس$



(١٣) في الشكل جد مساحة المثلث المكون من المماس المرسوم من النقطة (١، ٠) لمنحنى الاقتران  
ق(س) = (س) = ٣ + ٢ والعمودي على المماس عند نقطة التماس والمستقيم ص = ١



**الحل :** افرض نقطة التماس (س، ص)

**ميل المماس** = ق(س) = ٣ + ٢

أيضاً المماس يمر بالنقطتين (س، ص)، (١، ٠)

**ميل المماس** =  $\frac{١ - ص}{س}$

$\frac{١ - ص}{س} = ٣ + ٢$  لكن ص = ق(س) = ٣ + ٢

$\frac{١ - ص}{س} = ٣ + ٢$   $\Rightarrow ١ - ص = س(٣ + ٢)$

$١ - ص = ٣س + ٢س^٢$   $\Rightarrow ١ - ٣س - ٢س^٢ = ٠$

∴ نقطة التماس هي (١، ١) = ق(١) = ٣ + ٢

**(١) معادلة المماس** ←  $٣ + ٢ = ق(١) = ٣$  ، نقطة التماس (١، ١)

ص = ٤ - ٣(س) = ١ - ٣س

**(٢) معادلة العمودي** ←  $١ - ٣س = ق(١) = ٣$

ص = ٤ - ٣(س) = ١ - ٣س

**لايجاد نقطة تقاطع العمودي مع المستقيم ص = ١**

$١ = ٤ - ٣(س) = ١ - ٣س$   $\Rightarrow ١٠ = س$

∴ نقطة التقاطع (١، ١٠) وبذلك تكون إحداثيات رؤوس المثلث معلومة

**مساحة المثلث** =  $\frac{١}{٢} \times أ \times ج = \frac{١}{٢} \times (١ - ٤) \times (٠ - ١٠) = ١٥$  وحدة مساحة



الأستاذ: حمزة أبو الفول  
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

الملاذ في مهارات الرياضيات  
الصف الثاني الثانوي  
التوجيهي  
كورسات الملاذ في مهارات الرياضيات

جميع الفروع

## كورسات الملاذ في الرياضيات للتوجيهي

### الملاذ في الرياضيات / كورسات الفروع العلمي

- ١) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة النهايات والاتصال
- ٢) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة التفاضل
- ٣) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة تطبيقات التفاضل
- ٤) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة التكامل
- ٥) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة القطوع المخروطية
- ٦) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول للمستوى الثالث
- ٧) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول للمستوى الرابع
- ٨) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة للمستوى الثالث
- ٩) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة للمستوى الرابع

### الملاذ في الرياضيات / كورسات الفروع المشتركة

( الأدبي ، الشرعي ، الإدارة المعلوماتية ، الصحي ، الصناعي ، المنطقي )

- ١) الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / المستوى الثالث
- ٢) الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / المستوى الرابع
- ٣) الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول / للمستوى الثالث
- ٤) الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول / للمستوى الرابع
- ٥) الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة / للمستوى الثالث
- ٦) الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة / للمستوى الرابع

### الملاذ في الرياضيات / كورسات الفروع الصناعي

- ١) الملاذ في الرياضيات للفرع الصناعي / رياضيات اساسي
- ٢) الملاذ في الرياضيات للفرع الصناعي / رياضيات اساسي / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول
- ٣) الملاذ في الرياضيات للفرع الصناعي / رياضيات اساسي / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة

### الملاذ في الرياضيات / ملخصات واسئلة متوقعة