الأستاذ ناصر الذينات

التفوق والنجاح ملك لمن يتحداهم

نسخة الطالب
…………………………..

١. حلول التدريبات
٢. حلول التمارين والمسائل

الرياضيات - العلمي

المستوى الثالث

الوحدة الثانية
دوسية شاملة

٣. حلول المراجعة

تطبيقات على التفاضل

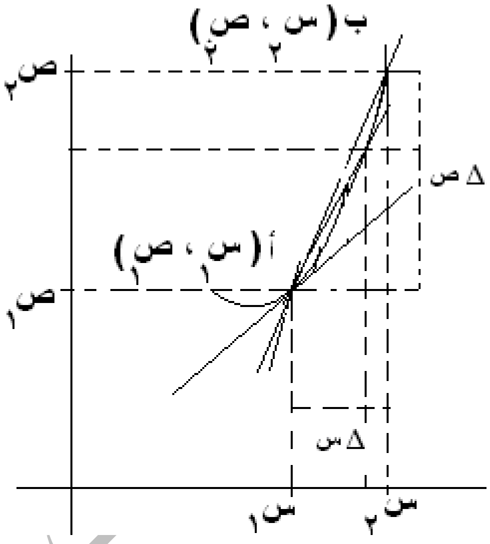
٤. حلول الاختبار الذاتي

(2017)

٥. اسئلة الوزارة حسب الدرس

للاستفسار ت (٠٧٨٨٢٤١٧٢٤)
اكاديمية نوبل........مركز الخوارزمي - البوابة الشمالية لجامعة اليرموك
لمزيد من الاسئلة المقترحة على كل وحدة ومتابعة كل ما هو جديد تابعونا على
صفحة الاستاذ ناصر الذينات وعلى نفس الموقع بالاضافة http://www.facebook.com/nasser.theynat

التفسير الهندسي للمشتقة



$$\text{ميل القاطع} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

عندما تتحرك النقطة ب Δ س تقل
وباقتراب Δ س من الصفر ا ب يصبح مماس للمنحنى في أ في هذه الحالة

ميل القاطع = ميل المماس عند النقطة أ.
(نقطة التماس)

$$م = \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \underset{س_٢ \leftarrow س_١}{\text{نهـا}} \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \underset{ع \leftarrow س}{\text{نهـا}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(س_١ + \Delta س) - ق(س_١)}{\Delta س}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(س_١ + هـ) - ق(هـ)}{هـ}$$

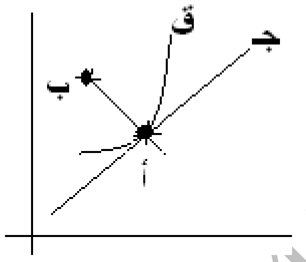
في حال وجودها فإنها تمثل المشتقة الأولى قَ(س)
النتيجة

ميل المماس = قَ(س) عند نقطة التماس

معادلة المماس

$$ص - ص_١ = م\,(س - س_١)$$

في الرسم أ ب ⊥ أ جـ



$م_{أب} \times م_{أجـ} = -١$: أ ب مماس ، أ جـ العمودي

ومنها

معادلة العمودى

$$ص - ص_١ = \frac{-١}{م}\,(س - س_١)$$

: قَ (س) = م = الميل عند نقطة التماس

- ملاحظـات مهمـة - يـا بنــي -
- كلمات لها معنى -

ملاحظة انتبه انتبه انتبه اقرأ الملاحظة بشكل جيد

في اي سؤال يوجد فيه كلمة عند هذه تعني ان النقطة هي نقطة تماس وهنا يكون ميل المماس= قَ(س)

اما اذا كان في السؤال كلمة المماس يمر او من نقطة مثل ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) هذه تعني انها ليست نقطة تماس فالذلك نجد نقطة التماس وذلك بفرض نقطة تماس ولتكن ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$)ثم نطبيق

$$قَ(س) = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$$ فنجد قيمة س

ثم نجد الاحداثي الصادي ثم نجد ميل المماس بتطبيق

قَ(س) = م

كلمة العمودي يمر او من نقطة مثل ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) هذه تعني انها ليست نقطة تماس فلذلك نجد نقطة التماس وذلك بفرض نقطة تماس ولتكن ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$)ثم نطبيق

$$قَ(س) \times \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = -١$$ فنجد قيمة س

١. ميل المماس عند نقطة هي المشتقة الأولى عند تلك النقطة
٢. م = ظا هـ التي يعينها المماس مع محور السينات الموجب
٣. معادلة المماس
$ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$
٤. معادلة العمودي
$$ص - ص_{١} = \frac{-١}{م} (س - س_{١})$$
٥. المستقيمان متوازيان $م_{١} = م_{٢}$
٦. المستقيمان متعامدان $م_{١} \times م_{٢} = -١$
٧. المماس يوازي محور السينات
قَ (س) = صفر
٨. المماس أفقي قَ (س) = صفر
٩. العمودي موازي لمحور الصادات فان المماس موازي لمحور السينات أي المماس افقي
١٠. الاقترانيين متقاطعين ق(س)= هـ (س)
١١. الاقتران ق يمس هـ
أ) قَ(س)= هـَ(س)
ب) ق(س) = هـ (س)
١٢. إذا كان ق(س) يمس محور السينات عند س= أ فان ق(أ) = صفر(يعني جذر)

***** مثال (١):**

اكتب معادلة المماس والعمودي لمنحنى الاقتران

$ق (س)= ٢ س^{٣} - ٣ س$ عندما س = ١

الحل :

لاحظ نقطة التماس معروف منها فقط الاحداثي السيني نجد الاحداثي الصادي وذلك بتعويض قيمة س بـ ق(س) لنجد نقطة التماس

عندما س = ١ ← ص = -١
ميل المماس = قَ (١)
$قَ(س) = ٦ س^{٢} - ٣$
قَ(١) = ٦ - ٣ = ٣ = م
معادلة المماس
$ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$
ص + ١ = ٣ (س - ١)

$$ميل العمودي = \frac{-١}{قَ(١)} = \frac{-١}{٣}$$

معادلة العمودي

$$ص - ص_{١} = \frac{-١}{م} (س - س_{١})$$

$$ص + ١ = \frac{-١}{٣} (س - ١)$$

مثال (٢):

إذا كانت ص = ٣ س – ٥ هي معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق عند النقطة (٢ ، ١) الواقعة على منحنى ق فجد

$$\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$ **عندما س = ٢**

الحل :

$$\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س} \Big|_{س = ٢} = قَ(٢)$$

م١ × م٢ = -١

صَ × قَ(٢) = - ١

٣× قَ(٢) = - ١

$$قَ(٢) = \frac{- ١}{٣}$$ **ميل المماس**

***** مثال (٣):ص١٥٦**

اذا كان المماس لمنحنى الاقتران ق(س)= س^{٢}+٥س عندما س = س ، يصنع مع محور السينات الموجب زاوية قياسها ٤٥ ° فجد احداثيات نقطة التماس

الحل :

قَ (س) = ظا هـ عند نقطة التماس

٢ س + ٥ = ظا ٤٥

٢س + ٥ = ١

٢ س = -٤

س = - ٢ ومنها ص = ق(- ٢) = ٤ – ١٠ =-٦

اذن نقطة التماس هي (- ٢ ، -٦)

***** مثال (٤):**

جد النقط التي يكون عندها المماس لمنحنى الاقتران ق(س)= س^{٣} – ٢ س + ٥ ، يعامد المستقيم هـ (س) = س + ١

الحل :

م١ × م٢ = -١

هـَ(س) × قَ(س) = - ١

١× (٣ س^{٢} - ٢) = - ١

٣ س^{٢} = ١

$$س^{٢} = \frac{١}{٣}$$

س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنها النقطة الاولى ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ق($\frac{١}{\sqrt{٣}}$))

س = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ومنها النقطة الاولى ($\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ، ق($\frac{- ١}{\sqrt{٣}}$))

مثال (٥):

جد جميع النقط الواقعة علي منحنى الاقتران ق(س)= س^{٣} – ٣ س^{٢} التي يكون المماس عندها موازياً لمحور السينات

الحل :

موازياً لمحور السينات يعنى ان له مماس افقي

قَ(س) = صفر عند نقطة التماس

قَ (س) = ٣س^{٢} – ٦ س

٣س^{٢} – ٦ س = ٠ ومنها س(٣ س – ٦) = ٠

اذن س= ٠ ومنها ص = ق(٠)= ٠

او س = ٢ ومنها ص = ق(٢) = - ٤

النقاط هي (٠ ، ٠) ، (٢ ، - ٤)

مثال (٦): مهم جداً ص١٥٧

جد النقط التي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة

٩ س^{٢} + ١٦ص^{٢} = ٥٢

موازي المستقيم ٩ س – ٨ ص = ١

الحل :

المستقيم // المماس

م$_{١}$ = م$_{٢}$

نشتق المعادلة الاولى لنجد ميل المماس

١٨ س + ٣٢ ص صَ = ٠

$$\text{صَ} = \frac{-١٨\ \text{س}}{٣٢\ \text{ص}}$$

نشتق المعادلة الثانية لنجد ميل المستقيم

٩ – ٨ صَ = ٠

$$\text{صَ} = \frac{٩}{٨}$$

بما ان المستقيم // المماس

$$\frac{-١٨\ \text{س}}{٣٢\ \text{ص}} = \frac{٩}{٨}$$

ومنها س = - ٢ ص ....(١)

وبالتعويض في المعادلة الاصلية

٣٦ ص^{٢} + ١٦ ص^{٢} = ٥٢ ← ص = ± ١

وبالتعويض في (١) ستكون س = ± ٢

مثال (٧):ص١٥٨

بين ان لمنحنى ق(س)= س^{٤} مماسين مرسومين من النقطة أ (٣ / ٤ ، ٠)الخارجة عنه

الحل :

نفرض نقطة تماس ولتكن (س ، ص)

$$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$$

$$٤\ \text{س}^{٣} = \frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ٣/٤}$$

$$٤\ \text{س}^{٣} = \frac{\text{س}^{٤}}{\text{س} - ٣/٤}$$

٤ س^{٤} – ٣ س^{٣} = س^{٤}

٣ س^{٤} – ٣ س^{٣} = ٠

س^{٣}(٣س – ٣) = ٠

ومنها س = ٠ ← ص= صفر

س = ١ ← ص= ١ ومنها م= قَ(١)= ٤

اذن للمنحنى مماسين عند النقطتين

(٠ ، ٠) ومنها م= قَ(٠)= ٠

ص-٠=٠(س-٠) ومنها ص = ٠

(١ ، ١) ومنها م= قَ(١)= ٤

ص- ١ = ٤ (س – ١

مثال (٨):

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س)= س^{٣}+ س عند النقطة التي يكون ميل المماس عندها يساوي ٤ .

الحل :

نجد نقطة التماس

ميل المماس = قَ (س)

قَ(س) = ٣ س^{٢} + ١

٣ س^{٢} + ١ =٤

٣ س^{٢} = ٣

س = ١ ومنها ص = ٢ ← (١ ، ٢)

معادلة المماس ص- ص$_{١}$ = م (س -س$_{١}$)

ص - ٢ = ٤ (س- ١)

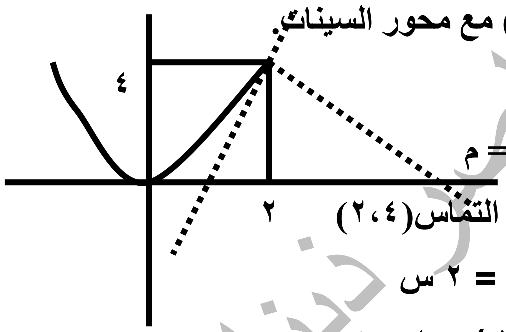
او س = - ١ ومنها ص= ق(- ١)= -٢ ← (-١ ، -٢)

معادلة المماس ص- ص$_{١}$ = م (س- س$_{١}$)

ص + ٢ = ٤ (س+ ١)

مثال (٩): مهم جداً جداً

اوجد مساحة المثلث الذي يتكون من المماس والعمودي لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^{٢}$ عند النقطة (٢ ، ٤) مع محور السينات.



الحل :

قَ (س) = م

عند نقطة التماس(٢،٤)

قَ (س) = ٢ س

م= قَ (٢) = ٤

مساحة ∆ = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

نجد القاعدة

نجد معادلة المماس لنجد نقطة تقاطعها مع محور السينات

معادلة المماس ص- $ص_{١}$ = م (س- $س_{١}$)

ص - ٤ = ٤ (س- ٢)

ص = ٠ ومنها س = ١

نجد معادلة العمودي لنجد نقطة تقاطعها مع محور السينات

معادلة العمودي

ص- $ص_{١}$ = $\frac{-١}{م}$ (س – س ${}_{١}$)

ص - ٤ = $\frac{-١}{٤}$ (س – ٢)

ص = ٠ ومنها س = ١٨

طول القاعدة = ١٨ – ١ = ١٧

الارتفاع = ص = ٤

مساحة ∆ = $\frac{١}{٢}$ × ١٧ × ٤

= ٣٤

مثال (١٠): مهم جداً جداً

جد معادلة المماس والعمودي لمنحنى

ص= $\frac{١}{س}$: س>٠ ، والذي يمر بالنقطة(١،٠)

الحل :

(٠ ، ١) ليست نقطة تماس

نفرض نقطة تماس ولتكن (س ${}_{١}$ ، ص ${}_{١}$)

قَ (س) = $\frac{ص_{١} – ١}{س_{١} – ٠}$ = $\frac{-١}{(س_{١})^{٢}}$

- س ${}_{١}$ = ($ص_{١}$ – ١)(س ${}_{١}$) ^{٢}

- س ${}_{١}$ = ($\frac{١}{س_{١}}$ – ١)(س ${}_{١}$) ^{٢}

$س_{١}$ – $س_{١}^{٢}$ = - $س_{١}$

$س_{١}^{٢}$ - ٢$س_{١}$ = صفر

$س_{١}$($س_{١}$ – ٢) = صفر

ومنها س ${}_{١}$ = صفر مرفوظة ؟؟؟ او $س_{١}$ = ٢

$ص_{١}$ = $\frac{١}{٢}$ اذن نقطة التماس (٢ ، $\frac{١}{٢}$)

ميل المماس = $\frac{-١}{(٢)^{٢}}$ = $\frac{-١}{٤}$

معادلة المماس ص- $ص_{١}$ = م (س- $س_{١}$)

ص – ٠,٥ = - ٠,٢٥ (س – ٢)

معادلة العمودي

ص- $ص_{١}$ = $\frac{-١}{م}$ (س – س ${}_{١}$)

ص – ٠,٥ = ٤ (س – ٢)

مثال (١١

جد نقاط تعامد منحنى الاقترانين

ق(س)= س^{٢} ، هـ (س) = س^{٢} + ٢ س + ١

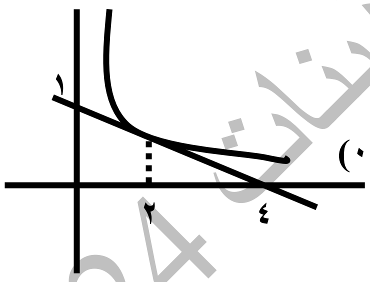
مثال (١٢

اوجد مساحة المثلث المحصور بين محوري

الإحداثيات ومماس المنحنى ص = $\frac{\text{١}}{\text{س}}$: س > ٠

عند النقطة (٢ ، ٠,٥)٠

الحل :



قَ (س) = م

عند نقطة التماس(٢،٠,٥)

قَ (س) = $\frac{\text{١-}}{\text{س}^{٢}}$

م = قَ (٢) = $\frac{\text{١-}}{\text{٤}}$

نجد القاعدة

نجد معادلة المماس لنجد نقطة تقاطعها مع محور السينات ومحور الصادات

معادلة المماس ص- ص$_{١}$ = م (س- س$_{١}$)

ص - $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ = $\frac{\text{١-}}{\text{٤}}$ (س- ٢)

ص = ٠ ومنها س = ٤

س = ٠ ومنها ص = ١

طول القاعدة = س = ٤

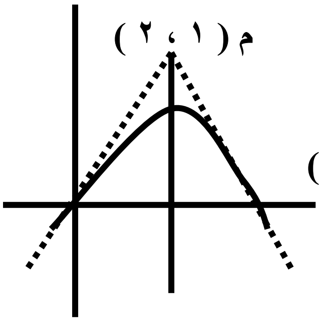
الارتفاع = ص = ١

مساحة ∆ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × القاعدة × الارتفاع

مساحة ∆ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٤ × ١ = ٢

مثال (١٣

من النقطة م (١ ، ٢) ، رسم مماسان لمنحنى الاقتران ص = ٢س – س ^{٢} فمساه في النقطتين ك ، هـ ، جد مساحة المثلث م ك هـ ٠



الحل :

نفرض نقطة تماس (س ،ص)

قَ (س) = $\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

٢ – ٢ س = $\frac{\text{ص – ٢}}{\text{س – ١}}$

٢ – ٢ س = $\frac{\text{٢س – س}^{٢}\text{ – ٢}}{\text{س – ١}}$

٢ س – ٢ – ٢س ^{٢} + ٢ س = ٢ س – س ^{٢} – ٢

س ^{٢} – ٢ س = ٠

س(س – ٢) = ٠

معادلة المماس١ ص- ص$_{١}$ = م (س- س$_{١}$)

س= ٠ ومنها ص = ٠ ← م = ٢

ص – ٠ = ٢ (س – ٠)

ص= ٢ س عندما ص = ٠ ← س = ٠

نقطة تقاطعها مع محور السينات هي (٠ ، ٠)

معادلة المماس١ ص- ص$_{١}$ = م (س- س$_{١}$)

س = ٢ ومنها ص = ٠ ← م= - ٢

ص – ٠ = -٢ (س – ٢)

عندما ص = ٠ ← س = ٢

نقطة تقاطعها مع محور السينات هي (٢ ، ٠)

الارتفاع هو ص = ٢

القاعدة = س$_{٢}$ - س$_{١}$ = ٢ - ٠ = ٢

مساحة ∆ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٤ × ١ = ٢

مثال (١٤):

جد معادلة المماس والعمودي لمنحنى

س^{٢} + ١,٥ س ص = ص^{٢}، عند س= ـ٢

الحل :

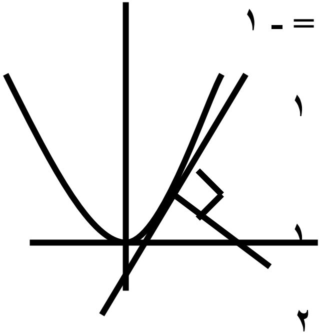
عندما س = ـ ٢ فان
ص^{٢}+٣ص ـ٤=٠ ⟵ (ص+ ٤)(ص-١)= ٠ومنها
ص= ـ٤ او ص = ١
لايجاد الميل
٢ س + ١,٥س صَ + ص × ١,٥ = ٢ص صَ
الميل الاول عند (ـ ٢ ، ـ ٤)
ـ٤ ـ٣ صَ ـ ٦ = ـ ٨ صَ ⟵ صَ = ٢ = م$_{١}$
معادلة المماس
ص + ٤ = ٢ (س + ٢)
معادلة العمودي
ص+ ٤ = ـ٠,٥ (س + ٢)
الميل الثاني عند (ـ ٢ ، ١) تمرين للطالب

مثال (١٥

اوجد معادلة المماس الذي يمر بالنقطة (٢ ، ٠,٥)

ويكون عمودياً على منحنى ص = س^{٢}

الحل :
نفرض نقطة تماس (س ، ص)
عمودي ⟵ م$_{١}$ × م$_{٢}$ = ـ ١



$$٢س \times \frac{ص - ٠,٥}{س - ٢} = -١$$

$$٢س \times \frac{س^{٢} - ٠,٥}{س - ٢} = -١$$

٢ س^{٣} ـ س = ـ س + ٢
٢س^{٣} = ٢ ومنها س = ١
عندما س = ١ ⟵ص=١ومنها (١،١)نقطة تماس
اذن ميل المستقيم هو م = ـ ٠,٥
معادلة المستقيم العمودي على المماس
ص ـ ١ =ـ ٠,٥ (س ـ ١)

مثال (١٦

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى

الاقتران ق(س)= س+٢ $\sqrt{س}$ ، س > ٠ عند س=٤

الحل :
نجد نقطة التماس عند س = ٤ ⟵ ص = ٨

$$قَ(س) = ١ + ٢ \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

قَ(٤) = ١,٥
معادلة المماس
ص ـ ٨ = ١,٥ (س ـ ٤)
معادلة العمودي
ص ـ ٨ = ـ٢/٣ (س ـ٤)

تمرين للطالب ص ١٥٦
اوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران

ق(س)= ٢ س + جا س عند النقطة (π، ٢π)

مثال (١٧)

اذا كان منحنى ق(س)= أ س ^{٢} + ب س + جـ يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٣) وله مماسان ، المماس الاول عند نقطة س = ـ ١ ويصنع زاوية٤٥ ° ، مع الاتجاه الموجب لمحور السينات والمماس الثاني عند النقطة س = ٢ ويصنع زاوية مقدارها ١٣٥ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات جد قيم أ ، ب ، جـ

الحل :

النقطة (٠ ، ٣) تحقق
ق(٠)= أ (٠) ^{٢} + ب (٠) + جـ ومنها جـ = ٣
له مماس عند س= ـ ١ ويصنع زاوية قياسها ٤٥
قَ(ـ ١) = ظا ٤٥
٢ أ س + ب = ١ ومنها ـ ٢ أ + ب = ١ ...(١)
له مماس عند س= ٢ ويصنع زاوية قياسها ١٣٥
قَ(٢) = ظا ١٣٥
٢ أ س + ب = ١ ومنها ٤ أ + ب = ـ١ ...(٢)
من (١) ، (٢)
ـ ٦ أ = ٢ ومنها أ = ـ ١ /٣
وبالتعويض في (١) ب = ١/٣
ق(س) = ـ١/٣ س^{٢} + ١/٣ س + ٣

مثال (١٨):

ق(س)= أ س^{٢} ـ ٤س + ٥ فما قيمة الثابت أ التي تجعل المماس لمنحنى ق(س) عندما س= ١ عمودياً على المستقيم ٢ص + ٣س ـ٤ = ٠

الحل :

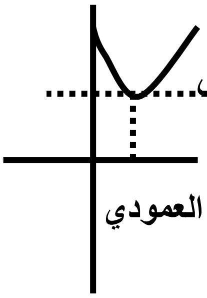
ميل الاول قَ(١) = ٢ أ ـ ٤
ميل الثاني ٢صَ+٣=٠ ومنها صَ =ـ١,٥
م$_{١}$ × م$_{٢}$ = ـ ١
(٢ أ ـ ٤) (ـ١,٥) = ـ ١
ـ٣ أ + ٦ = ـ ١ ومنها أ = ٣/٧

مثال (١٩)

إذا كان المماس لمنحنى الاقتران ق(س) مماساً أفقياً عند النقطة (١ ، ٣) اوجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند تلك النقطة

الحل :

للاقتران مماس افقي قَ(س) = صفر= م



ص ـ ص$_{١}$ = م (س ـ س$_{١}$)
ص- ٣ = ٠ ومنها ص = ٣ المماس

ص ـ ص$_{١}$ = $\frac{-١}{م}$ (س ـ س$_{١}$) العمودي

ومنها معادلة العمودي س = ١

مثال (٢٠):

إذا كانت زاوية ميل المماس للاقتران

ق(س)= $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + س^{٢} ـ٧س ـ٣

هي π/٤ اوجد احداثيات التماس؟

الحل :

قَ(س) = س ^{٢} + ٢ س ـ ٧

قَ (س) = ظا ٤٥

س ^{٢} + ٢ س ـ ٧ = ١

س ^{٢} + ٢ س ـ ٨ = ٠

(س ـ ٤)(س + ٢) = ٠

ومنها س = ٤ ، (٤ ، ق(٤))
او س = ـ ٢ ، (ـ٢ ، ق(ـ٢))

مثال (٢١

اذا كان ق (س) = $\sqrt{\text{س}}$ وكان المماس عند س = ٤ موازياً للوتر الواصل بين النقطتين (١ ، ق(١)، (أ ، ق(أ)) : أ > ١ جد قيمة أ .

الحل :

المماس موازي للوتر

$$\frac{\text{ق}(\text{أ}) - \text{ق}(١)}{\text{أ} - ١} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

$$\frac{\sqrt{\text{أ}} - ١}{\text{أ} - ١} = \frac{١}{٢\sqrt{٤}}$$

$$\frac{\sqrt{\text{أ}} - ١}{\text{أ} - ١} = \frac{١}{٤}$$

$$\frac{\cancel{(\sqrt{\text{أ}} - ١)}}{\cancel{(\sqrt{\text{أ}} - ١)}(\sqrt{\text{أ}} + ١)} = \frac{١}{٤}$$

$\sqrt{\text{أ}} + ١ = ٤$ ومنها أ = ٩

مثال (٢٢

اوجد معادلة كل من المماس والعمودي على المماس لمنحنى العلاقة $\text{س}^٢ - \text{ص}^٢ = ١٦$ عند النقطة (٥ ، -٣)

الحل :

٢ س – ٢ ص صَ = ٠

$$\text{صَ} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{م}$$ عند النقطة (٥ ، -٣)

عند النقطة (٥ ، - ٣)

$$\text{م} = \frac{٥}{-٣}$$

معادلة المماس ص- ص١ = م (س- س١)

$$\text{ص} + ٣ = \frac{-٥}{٣}(\text{س} - ٥)$$

معادلة العمودي

$$\text{ص} - \text{ص}_١ = \frac{-١}{\text{م}}(\text{س} - \text{س}_١)$$

$$\text{ص} - \text{ص}_١ = \frac{-١}{\text{م}}(\text{س} - \text{س}_١)$$

$$\text{ص} + ٣ = \frac{٣}{٥}(\text{س} - ٥)$$

مثال (٢٣

إذا كان م(س) ×هـ(س) = ق٢(س) + س وكان لمنحنيي ق(س) ، هـ (س) مماساً مشتركاً أفقيا عند النقطة (٣ ، ٤) اوجد مَ (٣)٠

الحل :

م(س)×هـَ(س)+هـ(س)×مَ(س)=٢ق(س)×قَ(س)+١

بما ان

ق(س)،هـ(س) مماساً مشتركاً أفقيا عند النقطة (٣،٤)

اذن

ق(٣)= ٤ ، هـ (٣)= ٤، قَ(٣)= ٠ ، هـَ (٣)= ٠

م(٣)×هـَ(٣)+هـ(٣)×مَ(٣)=٢ق(٣)×قَ(٣)+١

م(٣)×صفر+٤×مَ(٣)=٢× ٤×صفر + ١

٤×مَ(٣)= ١ ومنها $\text{مَ}(٣) = \frac{١}{٤}$

مثال (٢٤):

إذا كان المماس لمنحنى ق(س)= أ $\text{س}^٢$ + ١ عندما س=١ ويصنع زاوية مقدارها π/٤ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، ما قيمة الثابت أ ؟

الحل :

قَ(س) = ٢ أ س لكن قَ (١) = ظا ٤٥

٢ أ = ١ ومنها أ = ٠,٥

مثال (٢٥):

لدينا الاقتران ق (س) معرف على ح- {١}

$$\text{ق(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - \text{ك س} + ١}{\text{س} - ١}$$

فإذا كان المماس للمنحنى عند النقطة التي احداثيها السيني س= ٣ يوازي المستقيم الذي معادلته ٣ س +٤ص = ٥ فاوجد قيمة ك

الحل :

$$\text{قَ(س)} = \frac{(\text{س}-١)(٢\text{س}-\text{ك}) - (\text{س}^{٢}-\text{ك س}+١)}{(\text{س}-١)^{٢}}$$

كذلك ٣ + ٤ صَ = صفر

$$\text{صَ} = \frac{-٣}{٤}$$

لكن قَ(٣)= صَ

$$\frac{-٣}{٤} = \frac{(٣-١)(٦-\text{ك}) - (٩-٣\text{ك}+١)}{(٣-١)^{٢}}$$

$$\frac{-٣}{٤} = \frac{٢(٦-\text{ك}) - (١٠-٣\text{ك})}{٤}$$

- ٣ = ١٢ – ٢ ك – ١٠ + ٣ك ومنها ك = - ٥

مثال (٢٦):

اوجد ميل المماس للمنحنى س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ٤ عند النقطة ($\sqrt{٢}$ ، $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$)

الحل :

م = صَ ومنها ٢ س + ٢ ص صَ = ٠

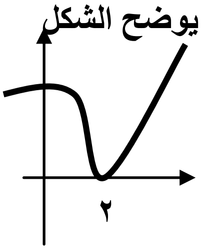
٢× $\sqrt{٢}$ + ٢ × $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ × صَ =

٠ ومنها صَ = ٠,٥ = م

مثال (٢٧):

لدينا الاقتران ق (س) معرف على ح

، ق(س) = س^{٣}+ أ س^{٢}+ ب وكما يوضح الشكل المجاور والذي فيه يبين ان المنحنى يمس محمور السينات عند النقطة س= ٢ اوجد أ ، ب



الحل :

يمس محمور السينات قَ(٢)= صفر

قَ(س) = ٣س^{٢} + ٢أس

١٢ + ٤ أ = صفر ومنها أ = -٣

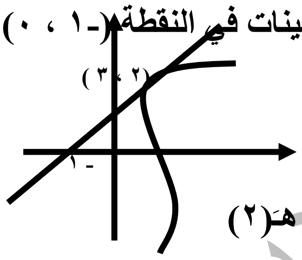
كذلك ق(س) يمر بالنقطة (٢ ، ٠)

٨ + ٤أ + ب = صفر

٨ - ١٢ + ب = صفر ومنها ب = ٤

مثال (٢٨):

في الشكل المجاور يبين منحنص = ق(س) والمماس لهذا المنحنى يقطع محور السينات في النقطة(-١ ، ٠) ونقطة التماس م(٢ ، ٣) وعلى اعتبار ان الاقتران هـ(س)= س^{٢}. ق(س) اوجد هـَ(٢)



الحل :

هـَ(س)= س^{٢}. قَ(س) + ق(س) × ٢ س

هـَ(٢)= ٤× قَ(٢) + ق(٢) × ٤

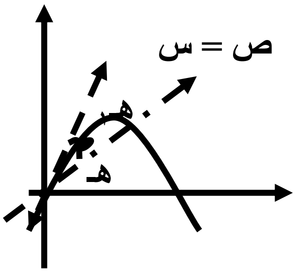
$$\text{لكن قَ(٢)} = \frac{\text{ق(- ١)} - \text{ق(٢)}}{-١ - ٢}$$ ، ق(٢)= ٣

$$\text{لكن قَ(٢)} = \frac{\text{صفر} - ٣}{-٣} = ١$$

هـَ(٢)= ٤× ١ + ٣× ٤ = ١٦

مثال (٢٩

من الشكل المجاور اوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم ص = س ومماس الاقتران ق(س) = $\sqrt{٣}$ س – س^{٢} عند النقطة (٠ ، ٠)



الحل :

الزاوية الذي يصنعها المستقيم مع محور السينات هي هـ

صَ = ١ = ظا هـ ومنها هـ = ٤٥

الزاوية الذي يصنعها المماس مع محور السينات هي هـ$_{١}$

قَ(س) = $\sqrt{٣}$ – ٢ س

قَ(٠) = $\sqrt{٣}$ = ظا هـ$_{١}$ ومنها هـ$_{١}$ = ٦٠

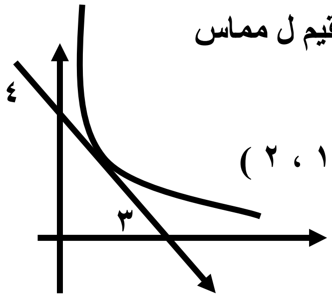
الزاوية بين المماس والمستقيم هي هـ$_{٢}$

ومنها هـ$_{٢}$ = هـ$_{١}$ – هـ

هـ$_{٢}$ = ٦٠ – ٤٥ = ١٥

مثال (٣٠):

في الشكل المجاور المستقيم ل مماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (١ ، ٢) فما قيمة قَ (١)



الحل :

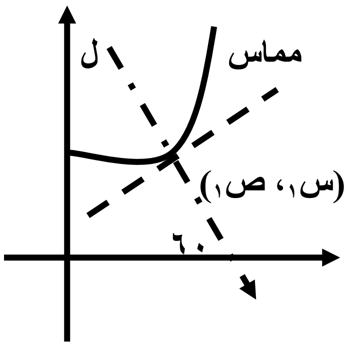
قَ(س) = ميل المماس المار بالنقطتين

(٠،٣)،(٤،٠)

$$قَ(١) = \frac{ق(٠) – ق(٣)}{٠ - ٣} = \frac{٤ – ٠}{- ٣} = \frac{- ٤}{٣}$$

مثال (٣١):

في الشكل المجاور المستقيم ل عمودياً على المماس لمنحنى الاقتران ق(س)



عند النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$) فما قيمة قَ (١)

الحل :

ميل المماس = قَ(- ١)

ميل العمودي = ظا٦٠ = - $\sqrt{٣}$

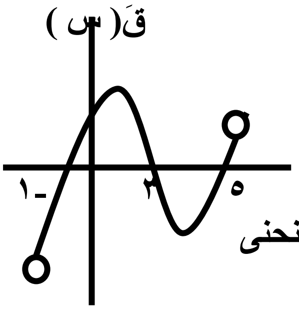
ميل المماس × ميل العمودي = - ١

قَ(- ١) × - $\sqrt{٣}$ = - ١

$$قَ(- ١) = \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

مثال (٣٢

في الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران ق في الفترة (- ٢ ، ٦) ، ما مجموعة قيم س التي يكون عندها لمنحنى ق(س) مماساً افقياً



الحل :

يكون لمنحنى ق(س) مماس افقي

قَ(س)= ٠

س = { - ١ ، ٣ ، ٥ }

مثال (٣٣):

إذا كان المماس لمنحنى ق(س) = أس^{٢} – ٩ يوازي المستقيم هـ (س) = س + ٣ عندما س = ١ فان قيمة أ تساوي

أ)٢ ب) ١ جـ) – ٠,٥ د)√ ٠,٥

<u>مثال (٣٤):</u>

اوجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران الذي معادلته $س^{٢} + ٣س ص + ص^{٢} = ٥$ <u>عند</u> النقطة (١، ١)٠

<u>الحل</u> :

$م = صَ$

$٢ س + ٣س × صَ + ص × ٣ + ٢ ص صَ = ٠$

<u>عند</u> النقطة (١، ١)٠

$٢ + ٣صَ + ٣ + ٢ صَ = ٠$ ومنها $صَ = -١ = م$

<u>معادلة العمودي</u>

$ص - ص_{١} = \frac{-١}{م} (س – س_{١})$

$ص – ١ = ١× (س – ١)$ ومنها $ص = س$

<u>مثال (٣٥):</u>

اوجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران الذي معادلته $٧ص^{٢} - س^{٢} ص + س + ٥٣ = ٠$.

عند النقطة (١، ٤)٠

<u>الحل</u> : تمرين للطالب

<u>مثال (٣٦):</u>

اذا كان $هـ (س) = \frac{-١}{٢} ق(س)$ وكان

$هـ (١) = \frac{-٣}{٢}$ ، $قَ(١) = ٨$ ، $ق (١) = ٣$

اكتب معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران هـ (س) <u>عند</u> النقطة $س = ١$.

<u>الحل</u> :

نقطة التماس (١ ، هـ (١))

معادلة المماس

$ص – ص_{١} = م (س – س_{١})$ يكمل الطالب

<u>مثال (٣٧)</u>

جد جميع النقط الواقعة على منحنى الاقتران $ق(س) = ٢ س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٥ س + ٧$ والتي يكون المماس لمنحنى ق(س) عندها يعامد المستقيم $س + ٥ ص + ٢ = صفر$

الحل :

$قَ(س) = ٦ س^{٢} – ٦ س + ٥$

كذلك $١ + ٥ صَ = ٠$

بما انهما متعامدان $م_{١} × م_{٢} = -١$

$(٦ س^{٢} – ٦ س + ٥) × \frac{-١}{٥} = -١$

$٦ س^{٢} – ٦ س + ٥ = ٥$

$٦ س^{٢} – ٦ س = ٠$

$س = ٠$ ومنها $ق(٠) = ٧$ ، (٠ ، ٧)

او $س = ١$ ومنها $ق(١) = ١١$ ، (١ ، ١١)

<u>مثال (٣٨):</u>

اذا كان المستقيم $ص = ٣ س – ١$ مماساً لمنحنى الاقتران ق <u>عند</u> النقطة (٢ ، ٥) فان

$\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{ق(٢ + هـ) – ٥}{هـ}$

الحل :

$\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{ق(٢ + هـ) – ٥}{هـ} = قَ (٢) = ٣$

<u>ويمكن حلها</u>

$\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{٣(٢ + هـ) -١ – ٥}{هـ}$

$\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{٦ + ٣ هـ - ٦}{هـ} = ٣$

مثال (٣٩

جد جميع النقط الواقعة على منحنى العلاقة

$$٢\,س^{٢} - ٤\,س + ص^{٢} - ١٠ = \text{صفر}$$

التي يمر المماس المرسوم لمنحنى العلاقة عند كل منها بالنقطة (٤ ، ٠) .

الحل :

نفرض ان نقطة التماس هي (س ، ص)

$$م = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = صَ$$

$$٤\,س - ٤ + ٢\,ص\,صَ = ٠$$

$$صَ = \frac{٤ - ٤\,س}{٢\,ص}$$

لكن م = ص

$$\frac{ص - ٠}{س - ٤} = \frac{٤ - ٤\,س}{٢\,ص}$$

$$٢\,ص^{٢} = ٤\,س - ١٦ - ٤\,س^{٢} + ١٦\,س$$ **لكن**

$$ص^{٢} = ١٠ + ٤\,س - ٢\,س^{٢}$$ **ومنها**

$$٢٠ + ٨\,س \cancel{- ٤س^{٢}} = ٤س - ١٦ \cancel{- ٤س^{٢}} + ١٦س$$

ومنها س = ٣ ، ص = ± ٢

مثال (٤٠):

اثبت ان المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢}$

عند النقطة $(أ ، أ^{٢})$ يقطع محور السينات في النقطة

$$(\frac{أ}{٢} ، ٠)$$

الحل :

م= قَ(أ)   ومنها قَ(س) = ٢ س

م = ٢ أ

$$ص - أ^{٢} = ٢\,أ\,(س - أ)$$

$$\text{عندما } س = \frac{أ}{٢}$$

$$ص - أ^{٢} = ٢\,أ\,(\frac{أ}{٢} - أ) \quad \text{ومنها } ص = ٠$$

مثال (٤١):

اذا كان المستقيم ٣ س – ص – جـ = صفر يمس منحنى الاقتران

$$ق(س) = \frac{-٣}{(س + ١)^{٢}}$$

عند النقطة (س ₁ ، ص ₁) الواقعة على منحناه اوجد

1. **احداثيي نقطة التماس (س ، ص)**
2. **قيمة الثابت جـ**

الحل : ميل المستقيم = صَ

$$٣ - صَ = ٠ \quad \text{ومنها } صَ = ٣ = م_{\text{المستقيم}}$$

$$\text{ميل المماس} = قَ(س) = \frac{-(-٣)(٢)(س + ١)}{(س + ١)^{٤}}$$

ميل المستقيم = ميل المماس

$$٣ = \frac{٦}{(س + ١)^{٣}}$$

$$(س + ١)^{٣} = ٢ \quad \text{ومنها } س = \sqrt[٣]{٢} - ١$$

لكن ص = ق(س)

$$٣ (\sqrt[٣]{٢} - ١) - جـ = \frac{-٣}{(\sqrt[٣]{٢} - ١ + ١)^{٢}}$$

مثال (٤٢

اذا كان المستقيم ٨ س – ٤ص + جـ = صفر يمس منحنى الاقتران

$$ق(س) = \frac{٣}{٢}\,س - \frac{٨}{\sqrt{س}}$$ **فجد قيمة الثابت جـ**

الحل : تمرين للطالب

مثال (٤٣):ص١٥٦**

عين الثابت م في الاقتران $ق(س) = م\,س^{٢}$ اذا كان قياس زاوية ميل المماس لمنحنى ق عند س=١ هي ٤٥°

الحل :

قَ(س) = ٢ م س

٢ م = ظا ٤٥ = ١   ومنها م = ٠,٥

مثال (٤٣):

اوجد معادلة المماس المرسوم من النقطة (ـ ٥ ، ٠) لمحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢٠}$

الحل :

(ـ ٥ ، ٠) ليست نقطة تماس ولذلك نفرض نقطة تماس ولتكن (س ، ص)

$$\text{قَ (س)} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$$

$$\frac{٢\,\text{س}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢٠}} = \frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} + ٥}$$

$$\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢٠}} = \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢٠}}{\text{س} + ٥}$$

س ^{٢} + ٥ س = س ^{٢} + ٢٠

٥ س = ٢٠ ومنها س = ٤ ، ص = ± ٦

$$\text{م} = \text{قَ} (٤) = \frac{٤}{٦}$$

$$\text{ص} - ٦ = \frac{٤}{٦} (\text{س} - ٤)$$

$$\text{ص} - ٦ = \frac{-٤}{٦} (\text{س} - ٤)$$

$$\text{ص} + ٦ = \frac{٤}{٦} (\text{س} - ٤)$$

$$\text{ص} + ٦ = \frac{-٤}{٦} (\text{س} - ٤)$$

مثال (٤٤):

بين لمنحنى الاقتران ق (س)= ٤ جا ٢ س مماسا افقياً في الفترة [٠ ، π]

الحل :

م = قَ(س)= ٨ جتا ٢س

٨ جتا ٢س = ٠ ومنها جتا ٢ س = ٠

٢س = π/٢ ، ٣π/٢

ومنها س = π/٤ ، ٣π /٤

اذن لمنحنى ق مماسان افقيان يحدثان عند س = π/٤ ، ٣π /٤

مثال (٤٥):

اذا كان ص = قا س فبين منحنى ق عند س = ٠ مماساً يوازي محور السينات

الحل :

مماس يوازي محور السينات عند س = ٠

قَ(٠) = ٠

صَ = قا س ظا س = قا ٠ ظا ٠ = صفر

مثال (٤٦):

اكتب معادلة المماس والعمودي على المماس في نقطة التماس لمنحنى ق(س)=٢ظا $\frac{\pi}{٤}$ س عندما س= ١

الحل :

$$\text{قَ(س)} = ٢\,\text{قا}^{٢}\,\frac{\pi}{٤}\,\text{س} \times \frac{\pi}{٤}$$

م = قَ (١) = π

عندما س= ١ تكون ص = ٢

ص – ٢ = π (س – ١) معادلة مماس

ص – ٢ = -١/π (س – ١) معادلة مماس

مثال (٤٧):

اوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى العلاقة

س^{٣} + ٣ س ص ^{٢} = ٥ س + ٨ عند النقطة (١ ، ٢)

الحل :

م = صَ عند النقطة (١ ، ٢)

٣ س ^{٢} + ٣ س × ٢ ص صَ + ص^{٢} × ٣ = ٥

عند النقطة (١ ، ٢)

٣ + ١٢ صَ + ١٢ = ٥ ومنها صَ = $\frac{-١٠}{١٢}$ = م

معادلة المماس ص – ص$_{١}$ = م (س – س$_{١}$)

ص - ٢ = $\frac{-١٠}{١٢}$ (س - ١)

ص - ٢ = $\frac{١٢}{١٠}$ (س - ١)

مثال (٤٨):

اذا كان ميل المماس لمنحنى عند النقطة

(٢ ، ٠) يساوي ١١ فما قيمة قَ(٢)؟

الحل :

(٢ ، ٠) نقطة تماس

ميل المماس = قَ(٢) = ١١

مثال (٤٩):

اوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى الذي يربط س مع ص

س = ن ^{٢} + ٣ ن – ٢

ص = ن ^{٣} + ٤ ن + ١ عندما ن = ١

الحل : تمرين للطالب

مثال (٥٠):

اوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة

س جا ٢ ص = ص جتا ٢س عند النقطة (π/٤، π/٢)

الحل : تمرين للطالب

مثال (٥١):

اوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الاقتران

ق(س)= ٣ س – س ظتا س عندما س = π/٢

الحل :

قَ(س) = ٣ – (- س قتا^{٢} س + ظتا س)

قَ(π/٢) = ٣ – (- π/٢قتا^{٢} π/٢+ ظتا π/٢)

= ٣ + π/٢ = م

لكن عندما س = π/٢ فان ص = ٣ π/٢

معادلة المماس

ص-٣ π/٢ = (٣+π/٢)(س- π/٢)

معادلة العمودي

ص-٣ π/٢ = -١/(٣+π/٢)(س- π/٢)

مثال (٥٢):

عين قيم أ ، ب ، جـ في الاقترانين

ق(س)= أ س ^{٢} + ب س + جـ ،

هـ (س) = جـ س – س ^{٢} بحيث

يكون لكل من منحنيي الاقترانين مماس مشترك

عند النقطة (٢ ، ٠) الواقعة على منحنيها

الحل : تمرين للطالب

مثال (٥٣):

جد ميل المماس لمنحنى

ق(س) = (٤س – ٢ س ^{٢}) (س – ١)عند نقطة

تقاطع منحنى ق مع محور السينات

الحل : تمرين للطالب

مثال (٥٤):

اذا كانت

$$\underset{\text{ع} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ق(ع) – ق(١)}}{\text{ع - ١}} = -١$$

فجد قياس زاوية ميل المماس لمنحنى ق عند النقطة (١،ق(١))

الحل :

قَ (س) = ظا هـ

لكن

$$\underset{\text{ع} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ق(ع) – ق(١)}}{\text{ع - ١}} = \text{قَ (١)}$$

اذن قَ (١) = ظا هـ = - ١ ومنها هـ = ١٣٥

مثال (٥٥): مهم جداً**

اذا كان

$$\text{ق(س)} = \frac{\text{ل(س) + ٨ س}}{\text{هـ (س)}} \quad : \text{هـ (س)} \neq ٠$$

وكان لمنحنى كل من ل (س) ، هـ (س) مماس افقي عند النقطة (١ ، ٤) فما قيمة قَ(١)

الحل :

$$\text{قَ(س)} = \frac{\text{هـ (س)(لَ (س)+٨)–(ل(س)+٨) هـَ (س)}}{\text{(هـ (س))}^{٢}}$$

$$\text{قَ(١)} = \frac{\text{هـ (١)(لَ (١)+٨)–(ل(١)+٨) هـَ (١)}}{\text{(هـ (١))}^{٢}}$$

لكن هـ(١) = ٤ ؟؟؟ ، هـَ (١) = ٠ ؟؟؟

ل(١) = ٤ ؟؟؟؟ ، لَ(١) = ٠ ؟؟؟

$$\text{قَ(١)} = \frac{\text{٤(٠+٨) –(٤+٨) (٠)}}{\text{(٤)}^{٢}} = \frac{٣٢}{١٦} = ٢$$

مثال (٥٦):

رسم مماس لمنحنى ق(س)= س^{٢} + جـ من النقطة (١ ، ب) الواقعة على منحناه فقطع محور السينات في النقطة س = -١ جد قيم كل من ب ، جـ

الحل :

ق (١) = ب ← ١+ جـ = ب ....(١)

نجد معادلة المماس ، (١ ، ب) نقطة تماس

قَ(س) = ٢ س ، قَ(١) = ٢ = م

ص – ب = ٢ (س – ١)

المماس قطع محورالسينات في س = -١ ومنها ص= ٠

- ب = ٢(- ١ – ١) ومنها ب = ٤

١ + جـ = ٤ ومنها جـ = ٣

مثال (٥٧):

اثبت ان المماس لمنحنى ق(س) = س^{٢} عند النقطة (أ ، ق(أ)) ، يقطع محور السينات عند س = أ / ٢

الحل :

قَ (س) = ٢ س

(أ ، أ^{٢}) نقطة تماس ومنها م = قَ(أ) = ٢ أ

ص – أ^{٢} = ٢ أ (س – أ) ومنها ص = ٢ أ س – أ^{٢}

ليقطع محور السينات تكون ص = ٠

عندما س = أ / ٢

ص = ٢ أ (أ / ٢) – أ^{٢} ومنها ص = ٠

اذن يقطع محور السينات عند س = أ / ٢

مثال (٥٨):

إذا كان لمنحنى الاقتران ق(س)مماساً أفقيا عند النقطة (١ ، ٣) ، فان معادلة العمودي على المماس عند تلك النقطة هي :

أ) س=١ ب) ص = ٣ جـ) ص= ٠ د) س=٠

مثال (٥٩

إذا كان هـ(س) = ٤ س^{٣} – ١٢ س^{٢}+ ١٠س – ٣ فان ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ(س) عند النقطة التي تكون فيها قيمة المشتقة الثانية مساوية للعدد ٢٤ يساوي

أ) -٢ √ب) ١٠ جـ) ٢٤ د) ٤٦

التفسير الفيزيائى

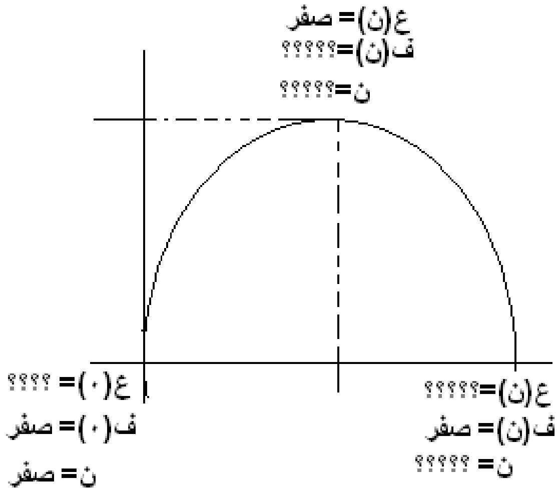
المسافة
السرعة = ــــــــــ
الزمن

Δ ف
السرعة المتوسطة = ــــــــــ
Δ ن

Δ ف
نهـــا ـــــــ = المشتقة الاولى
Δ ن ← ٠ Δ ن

وفي هذه الحالة تسمى السرعة اللحظية
ع(ن) = فَ (ن)
واذا كان ف (ن) قابلاً للاشتقاق في ن
فان فً(ن) = عَ (ن) = ت (ن) تسارع الجسيم في اللحظة ن

المقذوفات



: ف المسافة ، ع السرعة ، ن الزمن

ملاحظات

١) اذا كان مقذوف من اعلى بناية نضيف للعلاقة ارتفاع البنايةاذا كانت غير مضافة
٢) اذا كان المقذوف من عمق نطرح مقدار العمق اذا كانت غير مطروحة
٣) زمن الصعود = ٢/١ (الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يعود الى سطح الارض)
٤) اقصى ارتفاع = ف
٥) زمن الصعود= زمن الهبوط
٦) السرعة نازل سالب صاعد موجب

٧) هناك فرق بين السرعة اللحظية والسرعة المتوسطة كما هو وارد في بداية التعريف وكذلك التسارع

مثال (٦٠):
. يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الأصل يعطى وفق ف(ن) = ٣ ن ^{٣} + ٩ ما سرعة الجسيم بعد ٢ث ؟

√أ)٣٦م/ث ب) ٤٥م/ث جـ) ٣٣م/ث د) ٢٧م/ث

مثال (٦١):
يتحرك جسيم حسب العلاقة التالية ف =٢ن^{٢}-٤ن+٣٢ جد المسافة عندما تكون سرعة الجسيم تساوي تسارعه ؟

الحل :
ع= فَ = ٤ن – ٤ ومنها ت = عَ = ٤
المسافة عندما تكون سرعة الجسيم تساوي تسارعه
ع = ت ← ٤ ن – ٤ = ٤ ومنها ن = ٢
ف(٢) = ٢(٢)^{٢}-٤(٢)+٣٢= ٣٢ م

مثال (٦٢):ص١٦٣
. قذف جسم رأسياً الى الأعلى من سطح الأرض حسب العلاقة ف(ن) = ٢٤,٥ ن – ٤,٩ ن ^{٢} ،جد

١. الزمن اللازم بالثواني حتى يعود الجسم الى سطح الارض
٢. السرعة التي قذف بها
٣. اللحظة التي يكون عندها سرعة الجسم١٤,٧م/ ث
٤. تسارع الجسم في كل لحظة.

الحل :

١) حتى يعود الجسم الى سطح الارض ف(ن) = ٠
٢٤,٥ ن – ٤,٩ ن ^{٢} = ٠
ن(٢٤,٥ – ٤,٩ ن) = ٠ ومنها ن= ٠ ~~او~~ن= ٥
٢) السرعة التي قذف بها تكون ن = ٠
ع(٠) = ؟ ؟
ع(ن)= ٢٤,٥ – ٩,٨ ن
ع(٠)= ٢٤,٥
٣) ن | =
ع = ١٤,٧
٢٤,٥ – ٩,٨ ن = ١٤,٧ ومنه ن =
٤) ت = عَ(ن)= - ٩,٨ م / ث ^{٢}

مثال (٦٣):

يتحرك جسيم بحيث أن سرعته ع(ن) = $\sqrt{٢ن^{٢} + ٧}$
جد التسارع المتوسط للجسيم في الفترة الزمنية[٣،١]
وسرعته عندما تسارعه $\frac{٦}{٥}$ م/ث^{٢}

الحل :

١. التسارع المتوسط على الفترة الزمنية [٣،١]

$$\frac{\Delta ع}{\Delta ن} = \frac{ع(٣) - ع(١)}{٣ - ١} = \frac{٥ - ٣}{٢} = ١$$

٢ . ع = ؟؟؟؟؟

$$ت = عَ = \frac{٤ن}{٢\sqrt{٢ن^{٢} + ٧}} = \frac{٦}{٥} \text{ ومنها ن= ٣}$$

ع(٣) = ٥ م / ث

مثال (٦٤

قذفت كرة رأسياً الى أعلى من قمة برج ارتفاعه ١٦٠ قدماً اذا كانت المسافة المقطوعة تتعين حسب العلاقة

ف(ن) = - ١٦ ن^{٢} + ٤٨ ن + ١٦٠ : ف المسافة بالاقدام ، ن الزمن بالثواني اوجد

١. اقصى ارتفاع تصل اليه الكرة
٢. سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالارض

الحل :

١) اقصى ارتفاع تصل اليه الكرة ع(ن) = ٠
ع(ن) = - ٣٢ ن + ٤٨
- ٣٢ ن + ٤٨ = ٠ ومنها ن = ١,٥
ف(١,٥) = - ١٦(١,٥)^{٢}+ ٤٨ (١,٥)+ ١٦٠
= ١٩٦

٢) لحظة اصطدامها بالارض ف(ن) = ٠
- ١٦ ن^{٢} + ٤٨ ن + ١٦٠ = ٠
ن^{٢} - ٣ ن - ١٠ = ٠
(ن – ٥) (ن + ٢) = ٠ ومنها ن = ٥ ، $\xcancel{-٢}$
ع(٥) = فَ (٥)
ع(ن) = فَ (ن) = -٣٢ ن + ٤٨
ع (ن) = فَ (ن) = -٣٢ ن + ٤٨
ع (٥) = -٣٢ × ٥ + ٤٨ = -١١٢ م / ث ساقط

مثال (٦٥):

يتحرك جسيم حسب العلاقة ع^{٢}= ١- ف^{٢} :ع السرعة ، ف المسافة ، احسب التسارع عندما تنعدم السرعة

الحل :

لا تنسى $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ع$ ، $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ت$

$$٢ ع \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = -٢ ف \times \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$$

٢ ع × ت = - ٢ ف × ع
ت = - ف
لكن عندما تنعدم السرعة ع(ن) = ٠
١ – ف^{٢} = ٠ ومنها ف = ± ١اذن ت = ± ١

مثال (٦٦):ص١٦٣**

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن)=٦ن^{٢}–١/٣ ن^{٣} : ف المسافة المقطوعة بالاقدام بعد ن ثانية ، احسب

١. سرعة الجسم عندما ن = ٥ ث
٢. التسارع عندما تنعدم السرعة

الحل :

١) ع(ن) = ١٢ ن – ن^{٢}
ع(٥) = ١٢×٥ – (٥)^{٢} = ٦٠-٢٥= ٣٥م/ث
٢) عندما تنعدم السرعة ع(ن) = ٠
١٢ن – ن^{٢} = ٠
ن(١٢ – ن) = ٠ ومنها ن= ٠ ، ن = ١٢
ت(ن) = عَ (ن) = ١٢ – ٢ ن
ت(٠) = ١٢ م / ث^{٢}
ت(١٢) = ١٢ – ٢ × ١٢ = - ١٢ م / ث^{٢}

مثال (٦٧):

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف= جا٥ن +جتا٥ن اثبت ان ت + ٢٥ف =٠

الحل :

ت(ن) = فً (ن)
فَ (ن) = ٥ جتا ٥ ن – ٥ جا ٥ ن
فً (ن) = - ٢٥ جا ٥ ن – ٢٥ جتا ٥ ن = ت
بالتعويض
=-٢٥جا٥ن–٢٥جتا٥ن+٢٥(جا٥ن +جتا٥ن)
=-٢٥$\cancel{\text{جا٥ن}}$–٢٥$\cancel{\text{جتا٥ن}}$+٢٥$\cancel{\text{جا٥ن}}$+٢٥$\cancel{\text{جتا٥ن}}$ = ٠

مثال (٦٨

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة

ف(ن)= ن^{٣} – ٣ ن ^{٢} + ٣ ن + ٣

: ف المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني

اثبت ان الجسيم يتوقف مرة واحدة دون ان يغير من اتجاه حركنه

الحل :

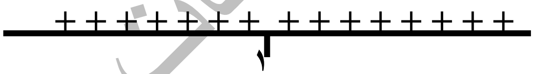
يتوقف الجسم عندما ع(ن) = ٠

لكن ع(ن) = فَ(ن) = ٣ ن ^{٢} – ٦ ن + ٣

٣ ن ^{٢} – ٦ ن + ٣ = ٠

ن ^{٢} – ٢ ن + ١ = ٠

(ن – ١) (ن – ١) = ٠ ومنها ن = ١



بما ان السرعة حافظة على اشارتها

اذن الجسم لا يغير اتجاه حركته

مثال (٦٩

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة

ف(ن)= ٢ ن^{٣} – ١٧ ن ^{٢} + ٤٤ ن + ١٠

: ف المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني

جد السرعة والتسارع عندما ف(ن) = ٤٦ م

الحل :

عندما ف(ن) = ٤٦ م

٢ ن^{٣} – ١٧ ن ^{٢} + ٤٤ ن + ١٠ = ٤٦

٢ ن^{٣} – ١٧ ن ^{٢} + ٤٤ ن – ٣٦ = ٠

تحلل بلقسمة التركيبية

(ن – ٢) (٢ ن ^{٢} – ١٣ ن + ١٨) = ٠

(ن – ٢) (٢ ن - ٩) (ن – ٢) = ٠

ومنها ن= ٢ ، ٤,٥

السرعة = ع(ن) = ٦ن ^{٢} – ٣٤ ن + ٤٤

ع(٢) = ٦(٢) ^{٢} – ٣٤ (٢) + ٤٤

ع(٤,٥) = ٦(٤,٥) ^{٢} – ٣٤ (٤,٥) + ٤٤

التسارع = ت(ن) = عَ(ن) = ١٢ ن – ٣٤

ت(٢) = ١٢ × ٢ – ٣٤

ت(٤,٥) = ١٢ × ٤,٥ – ٣٤

مثال (٧٠

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة

ف(ن)= ن^{٣} – ٧ ن ^{٢} + ٩ ن + ١

: ف المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني

اوجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ١ م / ث

الحل :

ع(ن) = ٣ ن ^{٢} – ١٤ ن + ٩

عندما تكون سرعته ١ م / ث

٣ ن ^{٢} – ١٤ ن + ٩ = ١

٣ ن ^{٢} – ١٤ ن + ٨ = ٠

(٣ ن – ٢)(ن – ٤) = ٠ ومنها ن= ٢/٣ ، ٤

ت(ن) = عَ(ن)= ٦ ن – ١٤

ت(٢/٣)= ٦ × ٢/٣ – ١٤ = - ١٠ م / ث ^{٢}

ت(٤)= ٦ × ٤ – ١٤ = ١٠ م / ث ^{٢}

مثال (٧١):

. قذف جسم رأسياً الى الأعلى من سطح الأرض حسب العلاقة ف(ن) = ٣٦ ن - ٨ ن ^{٢} ، ما الزمن اللازم بالثواني الذي يحتاجه الجسم وهو صاعد حتى تبلغ سرعته ثلث السرعة التي قذف بها ؟

أ) ٤ √ب) ١,٥ جـ) ٣٦ د) ٨

مثال (٧٢):

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة

ف(ن)= ٦ ن ^{٢} - ن ^{٣}

: ف المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني

اوجد المسافة التي يقطعها الجسيم بالامتار حتى يصبح تسارعه صفراً

الحل :

عندما ت(ن) = ٠ ، فَ(ن) = ١٢ ن – ٣ ن ^{٢}

فً(ن) = ت(ن) = ١٢ – ٦ ن

١٢ – ٦ ن = ٠ ومنها ن = ٢

ف(٢) = ٦ (٢) ^{٢} – (٢) ^{٣}

= ٢٤ – ٨ = ١٦ م

مثال (٧٣

. يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن المسافة ف(ن) = ٦ ن ^{٢} – ن^{٣} فما المسافة التي يقطعها الجسيم حتى يصبح تسارعه صفر ؟

أ) ١٢ √ب) ١٦ جـ) ٢٤ د) ٣٢

مثال (٧٤

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته ع بعد ن ثانية بدلالة ف هي ع (ن)= $\frac{ن}{ف(ن)}$

احسب تسارع الجسم عندما ن = ٣ ث علماً بان سرعته عندئذ تساوي ٠,٥ م / ث٠

الحل :

لا تنسى ت(ن) = عَ(ن) ، ع(ن) = فَ(ن)

لكن ع(٣) = ٠,٥ ومنها ف(٣) = ٣ /٠,٥ = ٦

ع(ن)× فَ (ن) + ف(ن)× عَ (ن) = ١

ع(ن)× ع(ن) + ف(ن)× ت(ن) = ١

ع(٣)× ع(٣) + ف(٣)× ت(٣) = ١

٠,٥ × ٠,٥ + ٦ + ت (٣) = ١

ومنها ت(٣) = $\frac{١}{٨}$ م / ث^{٢}

مثال (٧٥):ص١٦٤

اسقط جسم من ارتفاع (١٠٠) م عن سطح الارض : ف المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني حسب العلاقة ف$_{١}$ (ن)=٥ن^{٢} وفي نفس الوقت اطلق جسم من سطح الارض للاعلى حيث المسافة التي يقطعها الجسم هي ف$_{٢}$(ن) = ٥٠ ن – ٥ ن^{٢}جد سرعة كل من الجسمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الارض

الحل :

ف$_{١}$ (ن)=٥ن^{٢}

ف$_{٢}$(ن) = ٥٠ ن – ٥ ن^{٢}

عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الارض

ف$_{١}$ + ف $_{٢}$ = ١٠٠

٥ن^{٢} + ٥٠ ن – ٥ ن^{٢} = ١٠٠

٥٠ ن = ١٠٠ ومنها ن = ٢

ع$_{١}$ (ن) = ١٠ ن ومنها ع$_{١}$ (٢) = ٢٠ م / ث

ع$_{٢}$(ن) = ٥٠ – ١٠ن ومنها ع$_{١}$ (٢) = ٣٠ م / ث

مثال (٧٦

اسقط جسم من ارتفاع (٢٠٠) م عن سطح الارض : ف المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني حسب العلاقة ف(ن)= ٥ ن^{٢} جد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع (١٢٠) م عن سطح الارض

الحل :

المسافة = ١٢٠ م عن سطح الارض

المسافة = ٢٠٠ – ١٢٠ = ٨٠ م من السقوط

اذن ٥ ن ^{٢} = ٨٠ ومنها ن = ٤

ع (ن) = فَ (ن) = ١٠ ن

ع (٤) = ١٠ × ٤ = ٤٠ م / ث

مثال (٧٧):

تتحرك نقطة ماديه في خط مستقيم حسب العلاقة

ع^{٢}= أ + $\frac{ب}{ف}$: ع السرعة ،ف المسافة ،ا،ب ثوابت ٠ اثبت ان التسارع يتناسب عكسياً مع مربع المسافة ٠

الحل :

ع^{٢}= أ + $\frac{ب}{ف}$

٢ع عَ = $\frac{- ب فَ}{ف ^{٢}}$

٢ع عَ = $\frac{- ب عَ}{ف ^{٢}}$

٢ ع ◌َ = $\frac{- ب}{ف ^{٢}}$

اذن ت α $\frac{١}{ف ^{٢}}$

مثال (٧٨

. قذف جسم رأسياً الى الأعلى من سطح الأرض حسب العلاقة ف(ن) = ١٢٨ ن - ١٦ ن ^{٢} ، ما الزمن اللازم بالثواني الذي يحتاجه الجسم وهو صاعد حتى تبلغ سرعته نصف السرعة التي قذف بها ؟

أ) ٤ √ب) ٢ جـ) ٦٤ د) ١٢٨

مثال (٧٩):

قذف جسم عمودياً للأعلى: المساقة ف= أ ن–١٦ن^{٢} فإذا كان أقصى ارتفاع وصله الجسم=٤٩ م جد قيمة أ ؟

الحل :

أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم ← ع = صفر

ع = فَ = أ – ٣٢ ن   ومنها   أ – ٣٢ ن = ٠

ومنها ن = $\frac{\text{أ}}{\text{٣٢}}$

لكن ف = ٤٩

أ ($\frac{\text{أ}}{\text{٣٢}}$) – ١٦ ($\frac{\text{أ}}{\text{٣٢}}$)^{٢} = ٤٩

٣٢ أ^{٢} – ١٦ أ^{٢} = ٤٩ (٣٢)^{٢}

١٦ أ^{٢} = ٤٩ (٣٢)^{٢}

أ = ± ٥٦

مثال (٨٠):

قذف جسم عمودياً للأعلى: المسافة ف= أ ن -٥ن^{٢} ، جد سرعة الجسم وهو على ارتفاع (٦٠) م علماً بان أقصى ارتفاع وصله الجسم = ٨٠ م

الحل :

اقصى ارتفاع   ع = ٠ = فَ

أ – ١٠ ن = صفر

ومنها   أ = ١٠ ن ....(١)

أقصى ارتفاع وصله الجسم = ٨٠ م

أ ن -٥ن^{٢} = ٨٠ ....(٢)

من (١) ، (٢)

٩ن^{٢} – ٥ ن^{٢} = ٨٠ ومنها ن = ٤

من (١) .... أ = ١٠ × ٤ ومنها أ = ٤٠

اذن .... ف= ٤٠ ن -٥ن^{٢}

عندما يكون ف = ٦٠

٥ ن^{٢} – ٤٠ ن + ٦٠ = ٠بالقسمة على ٥

(ن – ٢)(ن – ٦) = ٠ ومنها ن= ٢ ، ٦

ع = فَ = ٤٠ – ١٠ ن

ع(٢) = ٢٠ م/ ث

ع(٦) = - ٢٠ م/ ث   ساقط

مثال (٨١):

اذا كان مربع السرعة علاقة خطية في المسافة اثبت ان التسارع يكون ثابتاً.

الحل :

ع^{٢} = أ ف ÷ ب   ومنها ٢ ع عَ = أ فَ

٢ ع تَ = أ ع

ومنها ت = $\frac{\text{أ}}{\text{٢}}$ ثابت

مثال (٨٢):

يتحرك جسيم بحيث ان سرعته ع بعد ن ثانية بدلالة ف هي ع= ٦ $\sqrt{\text{ف}}$ احسب تسارع الجسم.

الحل :

ع= ٦ $\sqrt{\text{ف}}$

عَ = ٦ × $\frac{\text{فَ}}{\text{٢}\sqrt{\text{ف}}}$

ت = ٣ × $\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ف}}}$

ت = ٣ × $\frac{\text{٦}\cancel{\sqrt{\text{ف}}}}{\cancel{\sqrt{\text{ف}}}}$ ومنها ت = ١٨ م/ ث^{٢}

مثال (٨٣):

يتحرك جسيم بحيث ان سرعته ف هي ع= أ $\sqrt{\text{ف}}$: أ > ٠ وكان تسارعه ٨م/ث٢ جد قيمة أ.

الحل :

ع= أ $\sqrt{\text{ف}}$

عَ = أ × $\frac{\text{فَ}}{\text{٢}\sqrt{\text{ف}}}$

ت = أ × $\frac{\text{ع}}{\text{٢}\sqrt{\text{ف}}}$

ت = أ × $\frac{\text{أ}\cancel{\sqrt{\text{ف}}}}{\text{٢}\cancel{\sqrt{\text{ف}}}}$

٢ × ٨ = أ^{٢} ومنها أ = ٤ ، - ٤مرفوضه

المعـــــدلات المرتبطـــــــة بـــــالزمن

افرض ان س ، ص ، ع اقترانات في الزمن اجتمعت هذه الاقترانات على سبيل المثال في العلاقة التالية

$$\text{س}^{٣} + ٥\,\text{ص}^{٢} - ٩\,\text{ع} = ١$$

اشتق بالنسبة للزمن

$$٣\,\text{س}^{٢}\,\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ١٠\,\text{ص}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} - ٩\,\text{ع}\,\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ٠$$

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} \text{ ، } \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \text{ ، } \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

هي مشتقات س ، ص ، ع بالنسبة للزمن

وهي معدلات تغير س ، ص ، ع بالنسبة للزمن هذه المعدلات ارتبطت مع بعضها تسمى معدلات مرتبطة (المعدلات مرتبطة هي مشتقات بالنسبة للزمن)

لحل أي سؤال اتبع ما يلي

١. افهم السؤال جيداً
٢. ارسم السؤال
٣. حدد المتغيرات والثوابت(الثوابت نضع عليها قيمتها)
٤. كون علاقة بين المعطيات والمطلوب
٥. اشتق بالنسبة للزمن ثم عوض تجد المطلوب

ملاحظة

- تقترب او تنقص -
- تبعد او تزداد +
- لا يجوز التعويض لقيمة متغيرة في لحظة معينة الا بعد الاشتقاق

يلزم لحل هذا النوع من الاسئلة الالمام ببعض القوانين المهمة

١. مساحة المثلث
= ٢/١ القاعدة × الارتفاع
= ٢/١ حاصل ضرب ضلعين × جا هـ
٢. مساحة المربع = مربع الضلع
٣. مساحة المستطيل = الطول × العرض
٤. مساحة متوازي الاضلاع = القاعدة × الارتفاع
٥. مساحة شبه المنحرف
= ٢/١ مجموع الضلعين المتوازيين× البعد العمودي بينهما
٦. مساحة الدائرة = نق^{٢} × π
٧. محيط الدائرة = ٢ نق × π
٨. حجم المكعب = مكعب الضلع
٩. حجم متوازي المستطيلات
= الطول× العرض × الارتفاع
١٠. حجم المنشور(الموشور) = مساحة القاعدة × الارتفاع
١١. حجم الهرم = ٣/١ × مساحة القاعدة × الارتفاع
١٢. حجم الكرة = ٣/٤ نق^{٣} × π
١٣. مساحة سطح الكرة = ٤ × نق^{٢} × π
١٤. حجم الاسطوانة = نق^{٢} × π × ع
١٥. المساحة الجانبية للاسطوانة = ٢ نق× π × ع
١٦. المساحة الكلية للاسطوانة
= (٢ نق× π ×ع) + (٢ × نق^{٢} × π)
١٧. حجم المخروط الدائري القائم
= ٣/١ نق^{٢}× π ×ع

١٨. المساحة الجانبية للمخروط

$$= \text{نق} \times \pi \times \sqrt{\text{نق}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$$

١٩. حجم المخروط الدائري القائم الناقص المتوازي القاعدتين

$$= ١/٣ \ \text{ع} \times \pi \left(\text{نق}_{١}{}^{٢} + \text{نق}_{٢}{}^{٢} + \text{نق}_{١}{}^{٢} \times \text{نق}_{٢}{}^{٢}\right)$$

٢٠. نظرية فيثاغورس

$$(\text{الوتر})^{٢} = (\text{الضلع}_{١})^{٢} + (\text{الضلع}_{٢})^{٢}$$

٢١. قانون جيب التمام

$$(\text{أَ})^{٢} = (\text{بَ})^{٢} + (\text{جـَ})^{٢} - ٢\text{بَ جـَ جتا أ}$$

أَ المقابل للزاوية أ ، بَ المقابل للزاوية ب

جـَ المقابل للزاوية جـ

٢٢. المسافة بين نقطتين

$$\text{ف}^{٢} = (\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}$$

٢٣. طول القوس = نق × هـ : هـ مركزية

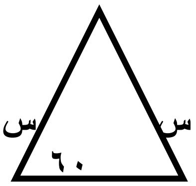
٢٤. قطر متوازي الاضلاع

$$(\text{القطر})^{٢} = (\text{الطول})^{٢} + (\text{العرض})^{٢} + (\text{الارتفاع})^{٢}$$

٢٥. تشابه المثلثات

مثال (٨٤):

يزداد طول كل ضلع من أضلاع مثلث متساوي الاضلاع بمعدل ٠,١ سم / د جد المعدل الذي تزداد به مساحته عندما يكون طول ضلعه ٢٠ سم



الحل :

$$\text{م} = ١/٢ \ \text{س}^{٢} \times \text{جا } ٦٠$$

$$= \frac{\sqrt{٣}}{٤} \text{س}^{٢}$$

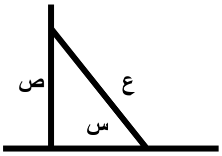
$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٠,١$$

عوض

مثال (٨٥):

بدأت سفينتان بالحركة معاً من مكان واحد فاتجهت الاولى نحو الشمال بسرعة ١٥ ميل / ساعة والثانية نحو الشرق بسرعة ٢٠ميل / ساعة جد معدل ابتعادهما بعد ساعتين من بدء الحركة



الحل :

$$\text{ع}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$$

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ؟؟ \quad \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٢٠ \ ، \quad \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ١٥$$

عندما ن = ٢ فان س = ٢ × ٢٠ = ٤٠

ص = ٢ × ١٥ = ٣٠

$$\text{ع}^{٢} = (٤٠)^{٢} + (٣٠)^{٢}$$

$$= ٥٠$$

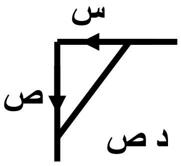
$$٢\text{ع} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ٢\text{س} \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\text{ص} \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$$

$$٢ \times ٥٠ \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ٢ \times ٤٠ \times ٢٠ + ٢ \times ٣٠ \times ١٥$$

$$= \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

مثال (٨٦):

أ ، ب ميناءان البعد بينهما ٤٠ ميل ويقع أ شرق ب اذا اقلعت سفينة من أ قاصدة ب بسرعة ١٠ ميل / ساعة وفي نفس الوقت أقلعت سفينة اخرى من ب بسرعة ٧,٥ ميل / ساعة متجه جنوباً جد معدل اقترابهما او ابتعادهما بعد ساعتين من بدء الحركة



الحل :

ع^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}

$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = ؟؟ $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ١٠ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = ٧,٥

عندما ن = ٢ فان س = ٢ × ١٠ = ٢٠

ص = ٢ × ٧,٥ = ١٥

ع^{٢} = (٢٠)^{٢} + (١٥)^{٢}

= ٢٥

٢ع × $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = ٢ س $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ + ٢ ص $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$

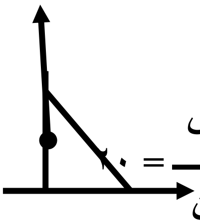
٢×٢٥ × $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = ٢×٢٠×-١٠+٢×١٥×٧,٥

$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ =

مثال (٨٧):

بالون على ارتفاع ١٠٠ قدم عن سطح الارض بدأ بالارتفاع الى الاعلى بسرعة ٢٠ قدم / ث وفي نفس الوقت مرت سيارة من تحته بسرعة ٥٠ قدم / ث جد معدل تغير المسافة بين السيارة والبالون بعد ١ ث من بدء الحركة

الحل :



ع^{٢} = س^{٢} + (١٠٠+ ص)^{٢}

$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = ؟؟ $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ٥٠ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = ٢٠

عندما ن = ١ فان س = ١ × ٥٠ = ٥٠

ص = ١ × ٢٠ = ٢٠

ع^{٢} = (٥٠)^{٢} + (١٢٠)^{٢}

= ١٣٠

٢ع× $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ =٢س $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ + ٢(١٠٠+ ص)× $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$

٢×١٣٠ × $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = ٢×٥٠×٥٠+٢×١٣٠×٢٠

مثال (٨٨ ٢٠٠٧ صيفي

يرتفع بالون راسياً للاعلى بسرعة ثابته ويتم رصده من مشاهد على الارض يبعد ١٦٠ م عن المسقط الراسي للبالون على الارض اذا كانت هـ هي زاوية ارتفاع نظر المشاهد للبالون ، وكان معدل تغير هـ يساوي ١/١٠ راديان /د في اللحظة التي كان فيها ارتفاع البالون عن سطح الارض ٢٠٠ م فجد سرعة البالون

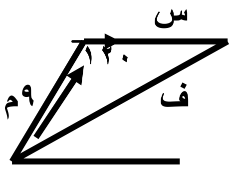
الحل :

مثال (٨٩):

طار طير باتجاه الافق يصنع ٦٠ مع الافق وبعد ان قطع مسافة مقدارها ٩م اتجه افقياً بسرعة ٢ م / ث جد معدل ابتعاده عن نقطة انطلاقه بعد ٣ ث بعد طيرانه الافقي

ف^{٢} = (٩)^{٢} + س^{٢} -٢×٩×س×جتا١٢٠

ف^{٢} = ٨١ + س^{٢} + ٩ س



$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ؟؟ $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ٢ ،

عندما ن = ٣ فان س = ٢ × ٣ = ٦

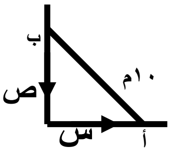
ف^{٢} = ٨١ + ٣٦+ ٥٤ = $\sqrt{١٧٠}$

٢ف× $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ =٢س $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ + ٩× $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

٢× $\sqrt{١٧٠}$ × $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ٢×٦×٢ +٩×٢

مثال (٩٠):

قضيب طوله ١٠م ترك بحيث يبقى طرفاه أ ، ب على محوري السينات والصادات على الترتيب واذا كانت أ تتحرك مبتعدة عن نقطة الاصل بمعدل ٢ م / ث جد معدل تغير مساحة المثلث المكون من القضيب عندما س = ٨ م



الحل :

م = ٢/١ س × ص

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ؟؟$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٢$ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ؟؟؟؟$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٢/١ \text{ س } \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} + \text{ص} \times ٢/١ \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

لكن $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١٠٠$

$(٨)^٢ + \text{ص}^٢ = ١٠٠$ ومنها ص= ٦

$٢ \text{ س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢ \text{ ص} \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$

$٨ \times ٢ + ٦ \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$

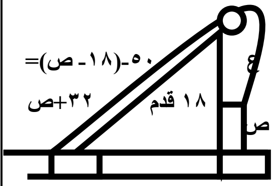
$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = -١/١٦$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٢/١ \text{ س } \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} + \text{ص} \times ٢/١ \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢} (٨) \times \frac{-١٦}{٦} + ٦ \times \frac{١}{٢} \times ٢ = \frac{-١٤}{٣}$

مثال (٩١):

ربط جسم بطرف حبل طوله ٥٠ قدم ويمر على بكرة ملساء ترتفع عن سطح الارض ٢٠ قدم كما ربط الطرف الاخر للحبل بسيارة عند نقطة ترتفع بمقدار قدمين عن سطح الارض فاذا تحركت السيارة بمعدل ٩ قدم / ث جد معدل ارتفاع الجسم عن سطح الأرض عندما يكون هذا الارتفاع ٦ قدم



الحل :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ؟؟$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٩$ ،

$(٣٢ + \text{ص})^٢ = \text{س}^٢ + (\text{ص} + \text{ع})^٢$

لكن ص+ ع = ١٨

$(٣٢ + \text{ص})^٢ = \text{س}^٢ + (١٨)^٢$

عندما ص = ٤ فان س = $١٨\sqrt{٣}$

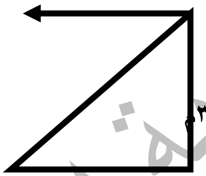
$٢(٣٢ + \text{ص}) \times \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٢\text{س} \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

$٢(٣٢ + ٤) \times \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٢ (١٨\sqrt{٣} \times ٩)$

مثال (٩٢):

يمسك معتصم بيده خيط طائرة ورقية تطير أفقيا على ارتفاع ٣٠ م من سطح الأرض إذا كانت السرعة التي <u>يسحب</u> معتصم فيها خيط الطائرة ٤ م / د فجد السرعة الأفقية للطائرة عندما يكون طول الخيط الممتد إليها ٥٠ م

الحل :



$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ؟؟$ ، $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ٤$

عندما ف = ٥٠ فان س = ٤٠

$\text{ف}^٢ = \text{س}^٢ + (٣٠)^٢$

ملاحظة : <u>يسحب</u> يعني -

$٢\text{ف} \times \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ٢\text{س} \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

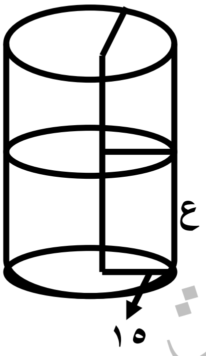
$٥٠ \times ٤ = -٤٠ \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ ومنها $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = -٥$ م/ث

مثال (٩٣):

خزان ماء اسطواني الشكل قطر قاعدته ٣٠ م يخرج منه الماء بمعدل ٢ م ٣ / د جد سرعة <u>انخفاض</u> الماء في الخزان

الحل :

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ؟؟ \qquad \frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = -\,٢\text{م}$$



$$\text{ح} = \text{نق}^{٢}\,\pi\,\text{ع}$$

$$\text{ح} = ٢٢٥\,\pi\,\text{ع}$$

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٢٢٥\,\pi\,\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

$$-٢ = ٢٢٥\,\pi\,\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{د ن}} = \frac{-\,٢}{٢٢٥\,\pi}$$

مثال (٩٤):

اسطوانة دائرية قائمة مصنوعة من المعدن ارتفاعها ٦/٧ طول قطر قاعدتها دائماً ، فإذا كان ارتفاعها يزداد بمعدل ٠,٠١ سم / ث، فجد معدل التغير في حجم هذه الاسطوانة عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها ٦ سم

الحل :

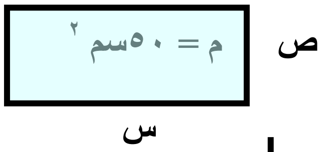
مثال (٩٥):

مستطيل مساحته ٥٠ سم^{٢} إذا ازداد طولا ضلعين متوازيين فيه بمعدل ٢ سم / ث وتتناقص طولا الضلعين الآخرين بحيث تظل مساحته ثابتة فجد بعدي المستطيل في اللحظة التي يتوقف فيها محيط المستطيل عن التناقص

الحل :

$$\text{س} = ؟؟؟؟؟ \qquad \frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = \text{صغر} \quad ، \quad \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٢$$

$$\text{ص} = ؟؟؟؟؟ \qquad \frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = \text{صغر}$$



$$\text{ل} = ٢\text{س} + ٢\,\text{ص} \qquad \text{لكن} \quad \text{م} = \text{س} \times \text{ص}$$

$$\text{ل} = ٢\text{س} + ٢\,\frac{٥٠}{\text{س}} \qquad ٥٠ = \text{س ص}$$

$$\text{ص} = ٥٠ /\, \text{س}$$

$$\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = ٢\,\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} - \frac{١٠٠}{\text{س}^{٢}} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\text{صفر} = ٢ \times ٢ - \frac{١٠٠}{\text{س}^{٢}} \times ٢$$

$$٤\text{س}^{٢} = ٢٠٠ \quad \text{ومنها س} = \sqrt{٥٠} \quad \text{ومنها ص} = ؟؟$$

مثال (٩٦):ص١٦٩

استخدم معلم الكيمياء في إحدى تجاربه قمعا على شكل مخروط قطر قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ١٢ سم وقاعدته أفقية ورأسه إلى أسفل إذا صب سائل فيه بمعدل ٧ سم ³ / ث وفي اللحظة نفسها يخرج منه السائل بمعدل ٧ سم ³/ ث فجد سرعة ارتفاع سطح السائل في القمع عندما يكون عمق السائل فيه ٦ سم

الحل :

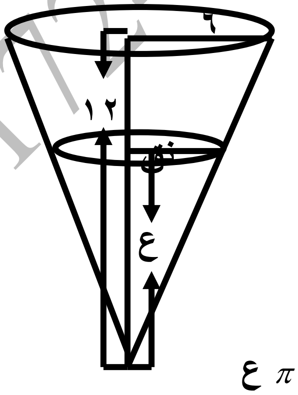
$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} - \frac{\text{دخ}}{\text{د ن}} = ١٦ - ٧ = ٩$$

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ؟؟؟؟؟؟؟؟$$

$$\text{ع} = ٦$$

ح = ٣/١ مساحة القاعدة × الارتفاع

$$= ٣/١ \text{ نق}^{٢} \pi \text{ ع}$$



لكن من تشابه المثلثات

$$\frac{١٢}{\text{ع}} = \frac{٦}{\text{نق}}$$

$$\text{نق} = \frac{\text{ع}}{٢}$$

$$\text{اذن ح} = \frac{١}{٣} \times \frac{\text{ع}^{٢}}{٢} \pi \text{ ع}$$

$$\text{ح} = \frac{\pi}{٦} \times \text{ع}^{٣}$$

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{\pi}{١٨} \times \text{ع}^{٢} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

$$٩ = \frac{\pi}{١٨} \times (٦)^{٢} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

$$٩ = \pi \times ٢ \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

$$٩/ ٢ \pi = \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

ملاحظة : يمكن ان يكون المطلوب

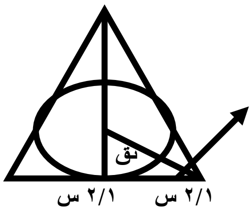
اوجد معدل التغير في نصف قطر الماء نق= ٢/ ع

او اوجد معدل التغير في مساحة سطح الماء م= نق² π

مثال (٩٧):

يتمدد أضلاع مثلث متساوي الأضلاع بمعدل ٤سم/د، رسمت دائرة داخل المثلث تمس الأضلاع تتمدد مع المثلث، جد معدل تمدد مساحة المنطقة المحصورة بين المثلث والدائرة، عندما يكون طول ضلع المثلث ١٨سم

الحل :



$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ؟؟ \qquad \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٤ \qquad ٣٠$$

$$\text{م} = \text{م}_{\Delta} - \text{م}_{\circ}$$

$$= ٢/١ \text{ س}^{٢} \times \text{جا } ٦٠ - \text{نق}^{٢} \pi$$

$$= \frac{١}{٢} \text{س}^{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\pi \text{س}^{٢}}{١٢}$$

$$\text{ظا}٣٠ = \frac{\text{نق}}{٢/١\text{س}}$$

$$\text{نق} = ؟؟؟$$

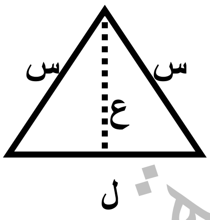
$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} - \frac{\pi \text{ س}}{٦} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ١٨ \times ٤ - \frac{\pi \times ١٨}{٦} \times ٤$$

مثال (٩٨

مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ثابت يساوي ل، إذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم / د جد معدل تناقص مساحة المثلث عند اللحظة التي يكون فيها طول كل من الساقين مساوياً لطول القاعدة

الحل :



$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ؟؟ \qquad \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = -٣$$

$$\text{م} = ٢/١ \text{ ل} \times \text{ع}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٢/١ \text{ ل} \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

$$\text{لكن س}^{٢} = (٢/١\text{ل})^{٢} + \text{ع}^{٢} \leftarrow \text{لكن} \qquad \boxed{\text{ل}^{٢} = ٤/١\text{ل}^{٢} + \text{ع}^{٢}}$$

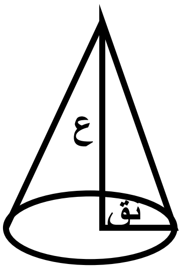
$$٢ \text{ س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٢ \text{ ع} \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

$$\text{ل} \times -٣ = \text{ع} \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

مثال (٩٩):ص ١٧٠

يتساقط الرمل بمعدل ٣ قدم ^{٣} / د ليصنع كومة على شكل مخروط نصف قطر قاعدته يساوي ضعفي ارتفاعه دائماً جد معدل تغير الارتفاع في اللحظة التي يكون فيها الارتفاع ١٠ قدم

الحل :



$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٣$ ، نق = ٢ ع

$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ؟؟؟؟؟؟؟؟$ | ع = ١٠

ح = ٣/١ مساحة القاعدة × الارتفاع

= ٣/١ نق ^{٢} π ع

اذن ح = $\frac{١}{٣} \times (٢ \text{ ع})^{٢} \pi \text{ ع}$

$\text{ح} = \frac{٤\pi}{٣} \times \text{ع}^{٣}$

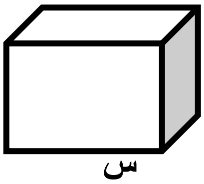
$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٤\pi \times \text{ع}^{٢} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

$٣ = ٤\pi \times (١٠)^{٢} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

مثال (١٠٠):

متوازي مستطيلات ارتفاعه مثلي طوله وعرضه ٣/١ ارتفاعه اوجد معدل تغير حجمه بالنسبة إلى تغير ارتفاعه عندما يكون ارتفاعه ٤ سم

الحل :



$\frac{\text{د ح}}{\text{د ع}} = ؟؟؟؟؟؟؟؟$ | ع = ٤

ح = الطول × العرض × الارتفاع

= س × ص × ع

اذن ح = $\frac{\text{ع}}{٢} \times \frac{١}{٣} \text{ع} \times \text{ع}$

$\text{ح} = \frac{١}{٦} \times \text{ع}^{٣}$

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢} \text{ع}^{٢}$

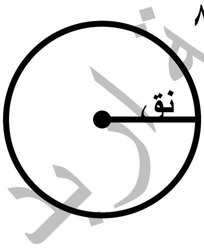
$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢} (٤)^{٢} = ٨$

مثال (١٠١):

قرص دائري يتمدد بالحرارة فتزداد مساحته بمقدار ٨ سم ^{٢} /ث جد معدل التغير في نصف قطر القرص عندما يصبح نصف قطره ٤ سم

الحل :

$\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = ؟؟؟$ ، $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٨$ | نق = ٤



م = نق ^{٢} π

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٢ \text{ نق } \pi \times \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$

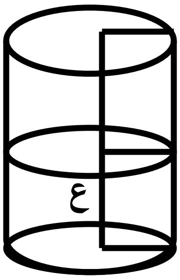
$٨ = ٢ \times ٤ \times \pi \times \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$

مثال (١٠٢):

خزان ماء على شكل اسطوانة يخرج الماء بمعدل ٠,٠٠٣ م^{٣} / د جد سرعة انخفاض مستوى سطح الماء في الخزان

الحل :

$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = ؟؟؟ ، $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ =- ٠,٠٠٣ م^{٣} / د



ح = نق^{٢} π ع

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = نق^{٢} π × $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = $\frac{-٣}{\text{١٠٠٠نق}^{٢}\ \pi}$

مثال (١٠٣): من الكتاب ص١٧٢

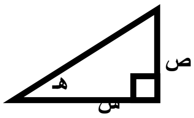
في مثلث قائم الزاوية إذا كان طولا الضلعين المقابل والمجاور للزاوية الحادة في هـ في اللحظة ن هما ص، س على التوالي وإذا كان معدل تزايد س هو ١سم/ث ومعدل تناقص ص = ١/٤ سم / ث فجد سرعة تغير الزاوية هـ في اللحظة التي يتساوى فيها الضلعان س، ص = ٢سم

الحل :

$\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$ = ؟؟؟ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = -١/٤ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ١

ص= س=٢ سم ومنها ∆ متساوي الساقين هـ = π / ٤

ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$



قا^{٢}هـ $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$ = $\frac{\text{س} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} - \text{ص} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}}{\text{س}^{٢}}$

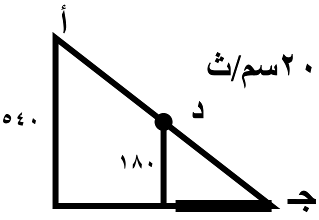
٢ $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$ = $\frac{٢ \times \frac{-١}{٤} - ٢ \times ١}{٤}$ = $\frac{-٥}{١٦}$

مثال (١٠٤):

رجل طوله ١٨٠ سم يقف أمام مصباح كهربائي يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٥٤٠ سم إذا اخذ الرجل بالابتعاد من المصباح بمعدل ٣م / د فاحسب معدل ازدياد طول ظله

الحل :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = ؟؟ $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = -٢٠٠سم/ث



∆ أ ب جـ ، ∆د هـ جـ متشابهان

$\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}}$ = $\frac{\text{جـ ب}}{\text{هـ جـ}}$

$\frac{٥٤٠}{١٨٠}$ = $\frac{\text{س + ص}}{\text{ص}}$

٥٤٠ ص = ١٨٠ س + ١٨٠ ص

٥٤٠ $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = ١٨٠ $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ + ١٨٠ $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$

٥٤٠ $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = ١٨٠ ×٣ + ١٨٠ $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = $\frac{٢}{٣}$

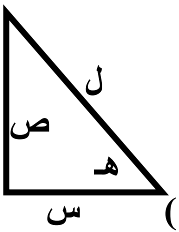
تدريب

انطلق صاروخ رأسياً الى اعلى حيث تم رصده بواسطة رادار على سطح الارض يبعد ٢ كم عن قاعدة الصاروخ ، فاذا كانت سرعة الصاروخ ٥٤٠ م في/ ث فجد معدل التغير في زاوية ارتفاع الصاروخ لكي يبقى ضاهر على شاشة الرادار وهو على ارتفاع ١٢٠٠ م عن سطح الارض .

مثال (١٠٥):

يرتكز سلم طوله ل م بأحد طرفيه على ارض أفقية وبطرفه الأخر على حائط راسي إذا انزلق الطرف الملامس للأرض مبتعدا عن الحائط بمعدل ١/٥ م/ث فاحسب معدل هبوط الطرف المرتكز على الحائط عندما يكون السلم مائلاً بزاوية ٦٠

الحل :



$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ؟؟$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٥}$

عندما هـ = ٦٠

$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{ل}^{٢}$ ……….(١)

$٢\text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\,\text{ص} \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$

لكن

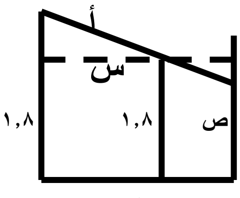
$\text{جتا هـ} = \frac{\text{س}}{\text{ل}}$

$\text{جتا } ٦٠ = \frac{\text{س}}{\text{ل}}$ ومنها $\text{س} = \frac{\text{ل}}{٢}$

من (١) $\text{ص}^{٢} = ٣/٤ \ \text{ل}^{٢}$

$\frac{\text{ل}}{٢} \times \frac{١}{٥} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ل} \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$

مثال (١٠٦



يقع مصباح كهربائي على بعد (١٠) أمتار من حائط راسي وعلى ارتفاع (٥) أمتار عن سطح ممر أفقي يعا مد الحائط سار رجل طوله (١,٨) م على هذا الممر بسرعة ٠,٥ م/ ث مبتعدا عن المصباح جد سرعة تحرك ظل رأس الرجل على الحائط عندما يكون الرجل على بعد (١,٥) م عن الحائط

الحل :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ؟؟$ $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢}$ م/ث

عندما س = ١,٥

∆ أ ب جـ ، ∆د هـ جـ متشابهان

$\frac{١,٨ - \text{ص}}{١٠ - \text{س}} = \frac{٣,٢}{\text{س}}$

$\text{ص} = ٥ - \frac{٣٢}{\text{س}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{٣٢}{\text{س}^{٢}} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

عندما يكون الرجل على بعد (١,٥) م عن الحائط

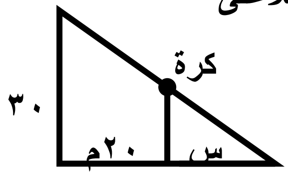
تكون س = ٨,٥

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{٣٢}{(٨,٥)^{٢}} \times \frac{١}{٢}$

مثال (١٠٧):

يقع مصباح كهربائي في قمة عمود ارتفاعه ٣٠ م قذفت كرة راسيا إلى أعلى من نقطة على الأرض تبعد ٢٠ م عن قاعدة العمود بحيث أن ارتفاع الكرة تعطى في العلاقة التالية ف= ٢٠ ن – ٥$\text{ن}^{٢}$ اوجد سرعة ظل الكرة على الأرض في اللحظة التي تكون الكرة فيها قد قطعت مسافة ١٥ م وهي صاعدة للأعلى

الحل :



$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ؟؟$

ف = ١٥

$\frac{٣٠}{\text{ف}} = \frac{\text{س} + ٢٠}{\text{س}}$

ف س + ٢٠ ف = ٣٠ س

$\text{ف} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + \text{س} \times \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} + ٢٠ \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ٣٠ \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

عندما ف = ١٥

$٢٠\text{ن} - ٥\,\text{ن}^{٢} = ١٥$

$\text{ن}^{٢} - ٤\,\text{ن} + ٣ = ٠$

(ن – ٣)(ن – ١)=٠ ومنها ن = ٣ ، ١ لكن

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ٢٠ - ١٠$ ن عندما ن = ١

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ٢٠ - ١٠ = ١٠ \quad \text{عندما ن} = ٣$$

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ٢٠ - ٣٠ = -١٠$$

عندما ف = ١٥ تكون س = ٢٠

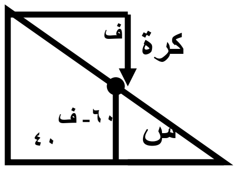
$$١٥ \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢٠ \times ١٠ + ٢٠ \times ١٠ = ٣٠ \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{٨٠}{٣}$$

مثال (١٠٨):
مصباح كهربائي في قمة برج ارتفاعه ٦٠ قدم أسقطت كرة من السكون من نقطة تبعد ٤٠ قدم عن المصباح وعلى نفس الارتفاع الكرة اوجد سرعة تحرك ظل الكرة على الأرض بعد ١ ث واحدة عن سقوطها إذا علمت أن تسارع الجاذبية الأرضية ٣٢ قدم /ث

ملاحظة
في نفس المثال إذا علمت أن المسافة التي يقطعها جسم ساقط هي ف (ن)= ١٦ ن ^{٢}

الحل :



$$\left.\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}\right|_{\text{ن} = ١\text{ث}} = ؟؟$$

$$\frac{\text{ف}}{٤٠} = \frac{٦٠ - \text{ف}}{\text{س}}$$

$$\frac{١٦\ \text{ن}^٢}{٤٠} = \frac{٦٠ - ١٦\ \text{ن}^٢}{\text{س}}$$

ف=ع.ن+١/٢ت ن^٢
ف= ٠+١/٢×٣٢ ن^٢
ف = ١٦ ن^٢

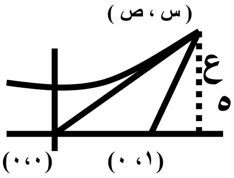
$$\text{س} = \frac{١٥٠}{\text{ن}^٢} - ٤٠$$

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{-١٥٠ \times ٢ \times \text{ن}}{\text{ن}^٤}$$

$$\left.\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}\right|_{\text{ن} = ١\text{ث}} = -٣٠٠$$

مثال (١٠٩):
تتحرك نقطة مادية على على المنحنى
ق(س)= $\sqrt{\text{س}^٢ + ٩}$ ، فإذا كان معدل تزايد الاحداثي السيني للنقطة المتحركة = ٥وحدات /ث ٠ اوجد معدل تغير مساحة المثلث الذي رؤوسه نقطة الأصل (٠ ، ٠) والنقطة الثابتة (١ ، ٠) والنقطة المتحركة

الحل :



$$\frac{\text{د م}}{\text{دن}} = ؟؟ \qquad \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٥$$

م = ١/٢ القاعدة × الارتفاع

م = ١/٢ × ١ × ع لكن ع = ص
م = ١/٢ ص

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$$

لكن ص = $\sqrt{\text{س}^٢ + ٩}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{٢\ \text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{\text{س}^٢ + ٩}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{٢ \times ٤ \times ٥}{٢\sqrt{١٦ + ٩}} = ٤$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢} \times ٤ = ٢$$

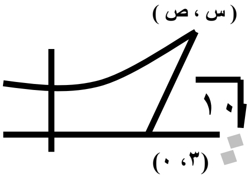
مثال (١١٠): من الكتاب ص ١٧١

تتحرك نقطة مادية على على المنحنى

ق(س)= $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}$ ، فإذا كان معدل تزايد الاحداثي السيني للنقطة المتحركة = ٣ $\sqrt{١٠}$ /ث ٠ اوجد معدل تغير المسافة بين النقطة والنقطة (٠،٣)عندما س=٢سم

(٠ ، ٠) والنقطة الثابتة (١ ، ٠) والنقطة المتحركة

الحل :

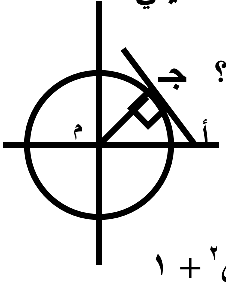


$$\frac{\text{د ف}}{\text{دن}} = ؟؟ \quad \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٣\sqrt{١٠}$$

$$\text{ف} = \sqrt{(\text{س}-٣)^{٢} + (\text{ص}-٠)^{٢}}$$ **يكمل تمرين للطالب**

مثال (١١١):

يتحرك مستقيم في الربع الاول بحيث يبقى ملامسا للدائرة التي معادلتها س^{٢} + ص^{٢} = ١ فإذا كان معدل تغير الاحداثي السيني لنقطة التماس ٣ سم / ث جد معدل تغير الاحداثي السيني لنقطة تقاطع المماس مع محور السينات عندما يكون الاحداثي السيني لنقطة التقاطع يساوي ٢ سم



<u>الحل</u> : دس/دن = ٣، دأ/دن =؟؟

نق ⊥ المماس

(م ب)^{٢} = (ب جـ)^{٢} + (جـ م)^{٢}

أ^{٢} = (س – أ)^{٢} + ص^{٢} + ١

أ^{٢} = س^{٢} – ٢ أ س + أ^{٢} + ص^{٢} + ١

لكن س^{٢} + ص^{٢}=١ ومنها ٢ أ س = ٢ ← س=١/أ

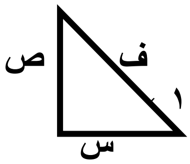
$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{-١}{\text{أ}^{٢}} \times \frac{\text{د أ}}{\text{د ن}}$$

$$٣ = \frac{-١}{٤} \times \frac{\text{د أ}}{\text{د ن}} \leftarrow \frac{\text{د أ}}{\text{د ن}} = \frac{-١}{١٢}$$

مثال (١١٢):

تحرك رجل من النقطة أ واتجه شمالاً بسرعة ١٠ قدم/ ث وبعد ثانية من تحركه تحرك ابنه من النقطة أ واتجه شرقاً بسرعة ٨ قدم / ث جد معدل تغير المسافة بين الرجل وابنه بعد ٢ ث بعد تحرك الرجل .

الحل :



$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ؟، \quad \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٨ ، \quad \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ١٠$$

عندما ن = ٢من تحرك الرجل ،١ث من تحرك الابن

عندما ن = ٢من تحرك الرجل ←ص= ١٠× ٢ = ٢٠

عندما ن = ١ من تحرك الابن ←س= ٨× ١ = ٨

$$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$$

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢\text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\,\text{ص}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}}$$

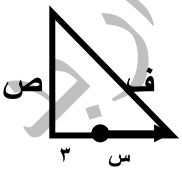
$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{١٠\times٢٠\times٢+٨\times٨\times٢}{\sqrt{٤٠٠ + ٦٤}}$$

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{١٠\times٢٠\times٢+٨\times٨\times٢}{\sqrt{٤٠٠ + ٦٤}} = \frac{٥٢٨}{؟؟؟؟؟؟}$$

مثال (١١٣):

بدات النقطة الحركة من نقطة الاصل في الاتجاه الموجب لمحور الصادات بسرعة ٤ سم / ث وبعد مضي ٢ ث بدأت نقطة اخرى الحركة من نقطة (٣ ، ٠) في الاتجاه الموجب لمحور السينات بسرعة ٢ سم / ث جد معدل البعد بينهما بعد مضي ١ ثانية واحدة من حركة النقطة الثانية

الحل :



$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ؟، \quad \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٢ ، \quad \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٤ ،$$

بعد مضي ١ ثانية واحدة من حركة النقطة الثانية

النقطة الثانية ن = ١

النقطة الاولى ن = ٣

← ص عندما ن = ٣ تكون ص = ٤ × ٣ = ١٢

← س عندما ن = ١ تكون س = ٢ × ١ = ٢

$$ف = \sqrt{(س + ٣)^{٢} + ص^{٢}}$$

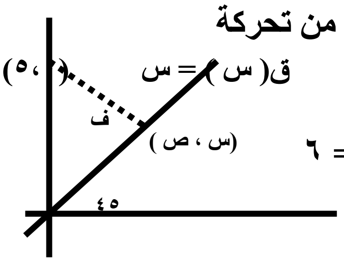
$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢(س + ٣) \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\,ص\,\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{(س + ٣)^{٢} + ص^{٢}}}$$

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢(٢ + ٣) \times ٢ + ٢ \times ١٢ \times ٤}{٢\sqrt{(٢ + ٣)^{٢} + (١٢)^{٢}}}$$

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢٠ + ٩٦}{٢\sqrt{٢٥ + ١٤٤}} = \frac{١١٦}{٢ \times ١٣}$$

مثال (١١٤):

بدأت نقطة الحركة من نقطة الاصل على منحنى ق(س) = س في الربع الاول ومبتعده عنها بسرعة ٦ سم / ث جد معدل ابتعادهما او اقترابهما عن النقطة (٠ ، ٥) بعد ٢ ثانية من تحركة



الحل :

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ؟ \quad ، \quad \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٦$$

ن = ٢

عندما ن = ٢ تكون س = ٢ × ٦ = ١٢

$$ف = \sqrt{(س - ٠)^{٢} + (ص - ٥)^{٢}} \quad \text{لكن ص = س}$$

$$ف = \sqrt{س^{٢} + (س - ٥)^{٢}}$$

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢(س - ٥) \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\,س\,\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{(س - ٥)^{٢} + س^{٢}}}$$

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢(١٢ - ٥) \times ٦ + ٢ \times ١٢ \times ٦}{٢\sqrt{(١٢ - ٥)^{٢} + (١٢)^{٢}}}$$

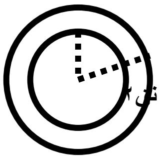
طريقة ثانية

$$ف^{٢} = س^{٢} + ٢٥ - ٢\,س \times ٥\ \text{جتا}\ ٤٥$$

مثال (١١٥

دائرتان متحدتان في المركز، نصفا قطريهما٣سم،١٨سم . ابتدات الدائرة الصغرى تتسع بحيث يزداد نصف قطرها بمعدل ٢سم / د ٠ وفي نفس اللحظة اخذت الدائرة الكبرى تصغر بحيث يتناقص نصف قطرها بمعدل٣سم/ د ٠ اوجد معدل التغير في المساحة المحصورة بين الدائرتين في اللحظة التي تصبح هذه المساحة تساوي صفراً٠

الحل :



$$نق_{١} = ٣ + ٢\,ن$$

$$نق_{٢} = ١٨ - ٣\,ن$$

م = مساحة الكبرى – مساحة الصغرى

$$= (١٨ - ٣\,ن)^{٢} \times \pi - (٣ + ٢\,ن)^{٢} \times \pi$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = -٣ \times ٢(١٨ - ٣ن) \times \pi - ٢ \times ٢(٣ + ٢ن) \times \pi$$

لكن عندما م = ٠ يكون نق $_{١}$ = نق $_{٢}$

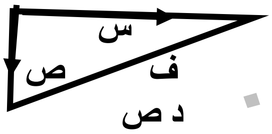
٣ + ٢ ن = ١٨ - ٣ ن ومنها ن = ٣

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = -٦(١٨ - ٣ \times ٣) \times \pi - ٤(٣ + ٢ \times ٣) \times \pi$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = -٥٤\,\pi - ٣٦\,\pi = -٩٠\,\pi$$

مثال (١١٦):

أقلعت إحدى الطائرات من إحدى المطارات في الساعة السابعة صباحا متجهه نحو الشرق بسرعة ٤٠٠كم /ساعة ، وبعد ساعة واحدة من إقلاعها ، أقلعة طائرة أخرى من نفس المطار متجهه نحو الجنوب بسرعة ٦٠٠كم /ساعة ، اوجد معدل تغير المسافة بين الطائرتين بعد ساعة واحدة من إقلاع الطائرة الثانية



الحل :

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}\Big| = ؟$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٤٠٠$ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٦٠٠$

بعد ١ ساعة من إقلاع الطائرة الثانية
زمن الطائرة الثانية ن = ١ ساعة
زمن الطائرة الاولى ن = ٢ ساعة

← ص عندما $\text{ن}_٢$=١ تكون ص = ٦٠٠× ١ = ٦٠٠
← س عندما $\text{ن}_١$ =١تكون س = ٤٠٠× ٢ = ٨٠٠

$$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}$$

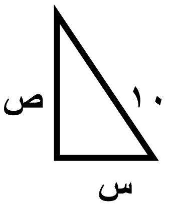
$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢\text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\,\text{ص} \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}}$$

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢\times٨٠٠\times٤٠٠+٢\times٦٠٠\times٦٠٠}{٢\sqrt{٦٤٠٠٠+٣٦٠٠٠}} = ٦٨٠$$

مثال (١١٧):

سلم طوله ١٠م يستند على حائط راسي ، بدا بالانزلاق وكانت سرعة انزلاقه على الحائط ٢م/ث اوجد سرعة انزلاقه على الأرض عندما يكون رأسه على ارتفاع ٨ م عن الأرض

الحل :



$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٢$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}\Big| = ؟؟$

ص = ٨

$$١٠٠ = \text{س}^٢ + \text{ص}^٢$$

$$\text{صفر} = ٢\text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\,\text{ص} \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$$

عندما ص = ٨ فان س = ٦

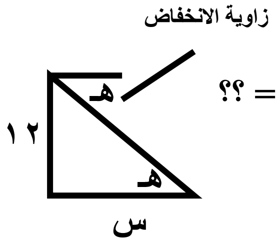
$$\text{صفر} = ٢ \times ٦ \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢ \times ٨ \times ٢$$

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = -\frac{١٦}{٦}$ تعني تتناقص

مثال (١١٨):

من قمة برج يرتفع عن سطح بحيرة بمقدار ١٢ م اذا رصد فراس زورقاً يسير بسرعة ١,٥ م/ ث مبتعداً عن قاعدة البرج فجد سرعة تغير زاوية انخفاض خط نظر فراس عندما يكون الزورق على بعد ٩ م من قاعدة البرج

الحل :



$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ١,٥$ ، $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = ؟؟$

س = ٩

$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{١٢}{\text{س}}$$

$$\text{قا}^٢\,\text{هـ} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{-١٢}{\text{س}^٢} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

عندما س = ٩ فان

$\text{ف}^٢=(٩)^٢+(١٢)^٢$ ومنها ف = ١٥ ، جتا هـ = ؟؟

$$\frac{١}{\text{جتا}^٢\,\text{هـ}} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{-١٢}{٨١} \times ١,٥$$

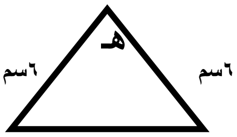
مثال (١١٩):

مثلث متساوي الساقين طول كل من ضلعيه المتساويين ٦ سم اذا كانت سرعة تغير الزاوية هـ المحصورة بين الضلعين المتساويين للمثلث = ٢ ° / د فجد سرعة تغير مساحة المثلث عندما تصبح

هـ = π/٦ راديان

الحل :

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\Big| = \text{؟؟} \text{ ، } \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \text{٢}^\circ$$



هـ = π/٦

م = ١/٢ × ٦ × ٦ × جا هـ

م = ١٨ جا هـ

اذن م = س ^{٣}

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{١٨ جتا هـ } \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{١٨ جتا } (\pi/\text{٦}) \times \text{٢}^\circ$$

لكن ٢ ° = π / ٩٠

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \sqrt{\text{٣}}\,\pi/\text{١٠}$$

مثال (١٢٠): مهم

جـ ، أ ، ب ثلاثة مدن يصل بين جـ ، أ طريق مستقيم طوله ٣٥ كم ، ويصل بين أ ، ب طريق مستقيم أخر طوله ٤٠كم ممتد على استقامته في اتجاه أ ب وكانت زاوية جـ أ ب = ٩٠ ° وفي الساعة السابعة صباحا قام راكب دراجة من (جـ) متجها نحو (أ) بسرعة ١٥كم/ساعة ، وفي نفس اللحظة قام راكب دراجة من (ب) في الاتجاه (أ ب) بسرعة ٦ كم/ساعة ، اوجد معدل تغير البعد بينهما في التاسعة صباحا ٠

الحل :

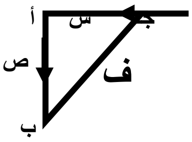
$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}\Big| = \text{؟، } \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{-١٥ ، } \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \text{٦}$$

في التاسعة صباحا يكون كلاً منهما قطعا مسافة ن=٢

← ص عندما ن=٢ تكون ص = ٦× ٢ = ١٢

← س عندما ن=٢تكون س = (٣٥- ٢×١٥) = ٥

$$\text{ف}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$$



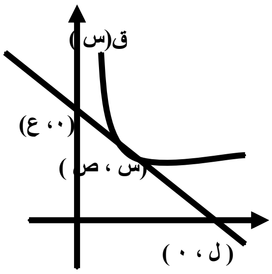
$$\text{ف}^{٢} = \text{١٤٤} + \text{٢٥}$$

ومنها ف = ١٣

$$\text{٢ف } \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \text{٢س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + \text{٢ ص } \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$$

$$\text{١٣} \times \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \text{١٢} \times \text{-١٥} + \text{٥} \times \text{٦}$$

مثال (١٢١



رسم مماس لمنحنى الاقتران ق(س)= ٨/ س في الربع الاول كما في الشكل المجاور فكان مقطعاه السيني والصادي ل ، ع على الترتيب ، فاذا كان المقطع السيني يزيد بمعدل (٢) وحدة /ث جد معدل تغير المقطع الصادي عندما يكون المقطع السيني (١٠) وحدات .

الحل :

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}\Big| = \text{؟، } \frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = \text{٢ وحدة}$$

ل = ١٠

$$\text{قَ(س)} = \frac{\text{ع} - \text{٠}}{\text{٠ - ل}} = \frac{\text{- ٨}}{\text{س}^{٢}} \text{.........(١)}$$

$$\text{لكن قَ(س)} = \frac{\text{ع} - \text{ص}}{\text{٠ - س}} = \frac{\text{- ٨}}{\text{س}^{٢}}$$

$$\frac{\text{ع} - (\text{٨/ س})}{\text{- س}} = \frac{\text{- ٨}}{\text{س}^{٢}}$$

$$\text{ومنها س} = \frac{\text{١٦}}{\text{ع}} \text{..............(٢)}$$

من (١) ، (٢)

$$\text{ع} = \frac{\text{٣٢}}{\text{ل}}$$

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{\text{- ٣٢}}{\text{ل}^{٢}} \times \frac{\text{دل}}{\text{د ن}} = \frac{\text{- ٣٢}}{\text{١٠٠}} \times \text{٢} = \frac{\text{- ١٦}}{\text{٢٥}}$$

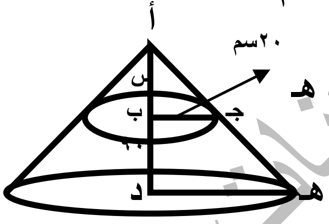
مثال (١٢٢):

مصباح معلق فوق مركز منضدة دائرية أفقية ارتفاعها عن الأرض = ٩٠سم ونق = ٢٠سم تحرك المصباح راسيا الى أسفل نحو المنضدة بسرعة ثابتة = ٦سم/ث اوجد معدل تغير نصف قطر دائرة ظل المنضدة على الأرض عندما يكون ارتفاع المصباح عن المنضدة = ٦٠سم .

الحل :

$\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = ؟ ، \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = -٦$ سم/ث

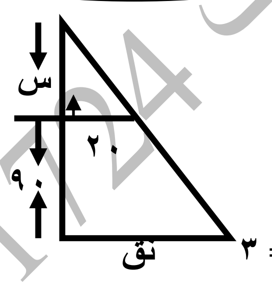
س = ٦٠



من تشابه ∆ أ ب جـ ، ∆ أ د هـ

$$\frac{٢٠}{\text{نق}} = \frac{\text{س}}{\text{س} + ٩٠}$$

$$\text{نق} = ٢٠ + \frac{١٨٠٠}{\text{س}}$$



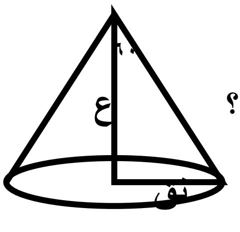
$$\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = \frac{-١٨٠٠}{\text{س}^٢} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = \frac{-١٨٠٠}{٣٦٠٠} \times -٦ = ٣$$

مثال (١٢٣):

تتساقط الرمال على مستوى أفقي معدل ٠,٠٩م³ /د مكونة مخروطا دائريا قائما يتزايد كل من نصف قطر قاعدته وارتفاعه ، فإذا علم أن نصف زاوية رأس المخروط هي دائما (٦٠ °)اوجد معدل تزايد ارتفاع المخروط عندما يكون الارتفاع (١م)

الحل :



$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٠,٠٩ ، \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ؟؟$

ع = ١

حجم المخروط = ٣/١ نق² π ع

$\text{ظا } ٦٠ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{نق}}{\text{ع}}$ ومنها $\text{نق} = \frac{١}{\sqrt{٣}} \text{ع}$

اذن ح = ٩/١ ع² × π ع = π/٩ ع³

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{\pi \text{ ع}^٢}{٣} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ بالتعويض

د ع/ د ن = ٠,٢٧ / π

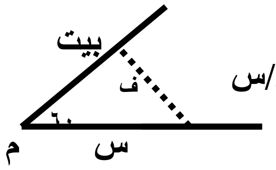
مثال (١٢٤):

طريقان مستقيمان يميل احدهما عن الأخر بزاوية قياسها (٦٠ °) ويلتقيان في أ ، ويوجد بيت على احد الطريقين ويبعد ٢كم عن أ ، فإذا سار رجل على الطريق الأخر بسرعة ٤كم /ساعة باتجاه أ اوجد معدل تغير بعده عن البيت التي يبعد عنها ١,٥ كم عن النقطة أ .

الحل :

المقطع الصادي عندما يكون المقطع السيني (١٠) وحدات .

الحل :



$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ؟، \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = -٤$ كم/س

س = ١,٥

ف² = س² + ٤ – ٢ س × ٢ × جتا ٦٠

ف² = س² – ٢ س + ٤

$$٢\text{ف} \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ٢\text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢ \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

← عندما س = ١,٥

ف² = ٢,٢٥ – ٣ + ٤ ومنها ف= $\sqrt{٣,٢٥}$

$$\sqrt{٣,٢٥} \times \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ١,٥ \times -٤ - (-٤)$$

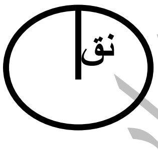
مثال (١٢٥):

يزداد حجم بالون بمعدل ١٠٠سم³ / د . اوجد معدل الزيادة في نصف قطره ومعدل الزيادة في مساحة سطحه في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر البالون ١٠سم.

الحل : ١.

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ١٠٠ ، \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = ؟؟$

نق = ١



حجم البالون = ٣/٤ نق³ π

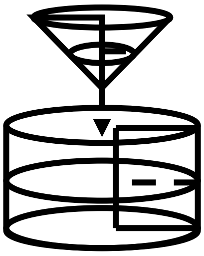
$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{١٢ \pi \text{ نق}^٢}{٣} \times \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$ بالتعويض

١٠٠ = ٤ π × د نق/ دن ومنها د نق/د ن = ٢٥/π

٢. م = ٤نق² π يكمل الحل

مثال (١٢٦):

خزان ماء على شكل مخروط قائم رأسه الى أسفل نصف قطر قاعدته =٥سم وارتفاعه ١٢سم يتسرب الماء من ثقب في رأسه الى حوض اسطواني دائري قائم نصف قطر قاعدته ٢سم وارتفاعه ٤سم٠ اوجد ارتفاع الماء في المخروط عندما يكون معدل ارتفاع الماء في الاسطوانة مساويا لمعدل انخفاض الماء في المخروط.



الحل :

$\text{ع} = ؟؟؟$

$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

حجم المخروط = ٣/١ نق^{٢} π ع

لكن $\frac{٥}{\text{نق}} = \frac{١٢}{\text{ع}}$ ومنها نق = $\frac{٥\text{ع}}{١٢}$

$\text{ح} = \frac{١}{٣} \times \frac{٢٥\,\text{ع}^{٢}}{١٤٤} \times \pi\,\text{ع} = \frac{٢٥\,\pi\,\text{ع}^{٣}}{٤٣٢}$

كذلك حجم الاسطوانة = نق^{٢} π ع = ٤ π ع

عندما ح $_{\text{الماء في المخروط}}$ = ح $_{\text{الماء في الاسطوانة}}$

$٤\,\pi\,\text{ع} = \frac{٢٥\,\pi\,\text{ع}^{٣}}{٤٣٢}$

$٤\,\pi\,\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{٧٥\,\pi\,\text{ع}^{٢}}{٤٣٢} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

$٤ = \frac{٧٥\,\text{ع}^{٢}}{٤٣٢}$ ومنها ع = $\frac{١٢}{٥}$

مثال (١٢٧):

نقطة تتحرك على المنحنى ص = س ^{٢} – ٦ فاذا كان معدل التغير في الاحداثي السيني ١/٤٠سم / ث ومعدل التغير في الاحداثي الصادي لنفس النقطة٣/١٠ سم / ث اوجد موضع هذه النقطة على المنحنى

الحل :

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٤٠}$ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{١٠}$

ص = س ^{٢} – ٦

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٢\,\text{س}\,\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

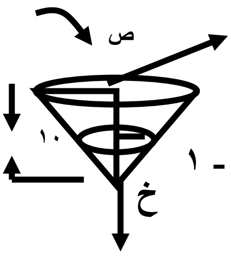
$\frac{١}{٤٠} = ٢\,\text{س}\,\frac{٣}{١٠}$ ومنها س = ٦

لكن ص = س ^{٢} – ٦ ومنها ص = ٣٦-٣=٣٠

مثال (١٢٨

خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم رأسه الى أسفل نصف قطر قاعدته =١٥قدم وارتفاعه ١٠قدم اذا كان الماء يتسرب من الخزان بمعدل ١ قدم ^{٣} / د وكانت حنفية تصب الماء في الخزان بمعدل ثابت قدره جـ جد قيمة جـ بحيث يكون معدل ارتفاع الماء ٤ قدم / ث في اللحظة التي يكون فيها عمق الماء ٢ قدم

الحل :



$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \text{جـ}$ ، $\frac{\text{د خ}}{\text{د ن}} = ١$

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = ما يصب – ما يخرج = جـ - ١

ح $_{\text{الماء}}$ = ٣/١ نق^{٢} π ع

لكن $\frac{١٥}{\text{نق}} = \frac{١٠}{\text{ع}}$ ومنها نق = $\frac{٣\,\text{ع}}{٢}$

$\text{ح} = \frac{١}{٣} \times \frac{٩\,\text{ع}^{٢}}{٤} \times \pi\,\text{ع} = \frac{٣\,\pi\,\text{ع}^{٣}}{٤}$

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{٩\,\pi\,\text{ع}^{٢}}{٤} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

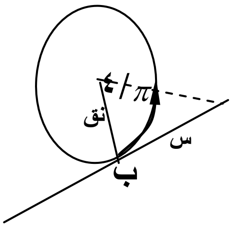
جـ - ١ = $\frac{٩\,\pi}{٤}$×٤×٤ ومنها جـ =٣٦π+١

مثال (*):**

طريق دائري نصف قطره نق، مصدر ضوء يقع في مركز الدائرة ، سيارة تسير على الطريق الد\ائري بسرعة ١٥٠كم/ساعة من نقطة تماس ب ،الطريق الدائري يمس جدار مستقيم ، اوجد سرعة ظل السيارة على الجدار عندما تقطع ٨/١ دورة

الحل:

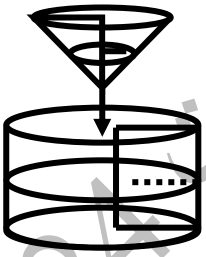
٢π/٨ = π/٤



مثال (١٢٩):

يرشح محلول من وعاء مخروطي الشكل نصف قطر قاعدته = ٢٠ سم وارتفاعه ٦٠ سم اذا علمت ان هذا المحلول يصب في وعاء اسطواني الشكل نصف قطر قاعدته ١٥ سم ما معدل ارتفاع المحلول في الاسطوانة اذا علمت ان معدل هبوط المحلول في المخروط ٢,٥/د عندما يكون ارتفاع المحلول في المخروط ٣٠ سم وارتفاعه ٤سم٠ اوجد ارتفاع الماء في المخروط عندما يكون معدل ارتفاع الماء في الاسطوانة مساويا لمعدل انخفاض الماء في المخروط٠

الحل :



$$\frac{\text{د ع}_{\text{س}}}{\text{د ن}} = ??$$

$$\frac{\text{د ع}_{\text{م}}}{\text{د ن}} = -٢,٥ \text{سم/د}$$

$$\text{ع}_{\text{م}} = ٣٠$$

معدل الزيادة في الاسطوانة = معدل النقصان في المخروط٠

حجم المخروط = ٣/١ نق^{٢} π ع

لكن $\frac{٢٠}{\text{نق}} = \frac{٦٠}{\text{ع}}$ **ومنها نق =** $\frac{\text{ع}}{٣}$

$$\text{ح} = \frac{١}{٣} \times \frac{١ \text{ ع}^{٢}}{٩} \times \pi \text{ ع} = \frac{\pi \text{ ع}^{٣}}{٢٧}$$

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{\pi \text{ ع}^{٢}}{٩} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \pi \times ١٠٠ \times -٢,٥ = -٢٥٠ \pi$$

كذلك حجم الاسطوانة = نق^{٢} π ع

$$\text{ح}_{\text{س}} = ٢٢٥ \pi \text{ ع}$$

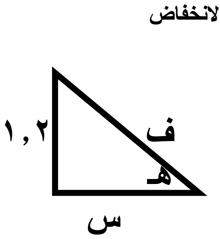
$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٢٢٥ \pi \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

$$-٢٥٠ \pi = ٢٢٥ \pi \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

مثال (١٣٠)

يقف رجل على رصيف حوض للسفن ، ويسحب حبلاً احد طرفيه متصلا بقارب وطرفه الاخر يمر ببكرة ترتفع ١,٢ م عن خط سير القارب ، فاذا كانت سرعة تزايد الزاوية بين خط سير القارب والحبل تساوي٢٠/٣ راديان / ث عندما كان القارب على بعد (١,٦) م عن الرصيف ، فما السرعة التي يسحب بها الرجل الحبل

الحل :



$$\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{٢٠} \text{ ، } \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ??$$

$$\text{س} = ١,٦$$

$$\text{جا هـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{١,٢}{\text{ف}}$$

$$\text{جتا هـ} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{-١,٢}{\text{ف}^{٢}} \times \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$$

عندما س = ١,٦ فان

ف^{٢}=(١,٦)^{٢}+(١,٢)^{٢} ومنها ف = ٢ ، جتا هـ = ؟؟

$$\frac{١,٦}{٢} \times \frac{٣}{٢٠} = \frac{-١,٢}{٤} \times \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$$

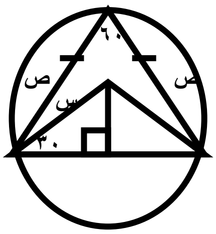
مثال (١٣١)

خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم رأسه الى أسفل نصف قطر قاعدته = ٨ دسم وارتفاعه ٢٤ دسم يتسرب الماء من ثقب في رأسه الى حوض اسطواني دائري قائم وقطر قاعدته ١٢دسم وارتفاعه ٤سم٠ اوجد معدل ارتفاع الماء في الاسطوانة عندما يكون ارتفاع الماء في الخزان المخروطي ١٢ دسم ، و معدل انخفاض الماء في الخزان المخروطي ١ دسم / د.

الحل : تمرين للطالب

مثال (١٣٢):ص١٧٣**

الشكل المجاور يمثل مثلثا متساوي الاضلاع مرسوما داخل دائرة ، تتمدد الدائرة والمثلث معا مع بقائها على نفس الهيئة المبينة في الشكل .



اذا علمت ان نصف قطر الدائرة يزيد بمعدل٢ , ٠سم/داحسب معدل تغير مساحة المنطقة المظللة عندما يكون طول نصف قطرالدائرة(١٠سم)

الحل :

$$\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right| = \text{؟؟}$$

نق = ١٠سم

$$\text{م}_{\circ} = \text{نق}^{\text{٢}}\,\pi = \text{س}^{\text{٢}}\,\pi$$

$$\text{م}_{\triangle} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ص}^{\text{٢}}\ \text{جا ٦٠} = \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}}\,\text{ص}^{\text{٢}}$$

$$\text{لكن جتا ٣٠} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} = \frac{\text{٢/١ ص}}{\text{س}} \quad \text{ومنها ص} = \sqrt{\text{٣}}\ \text{س}$$

$$\text{م المنطقة المظللة} = \text{م}_{\circ} \text{ -- } \text{م}_{\triangle}$$

$$= \text{س}^{\text{٢}}\,\pi - \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}}\left(\sqrt{\text{٣}}\ \text{س}\right)^{\text{٢}}$$

$$= \text{س}^{\text{٢}}\,\pi - \frac{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}} \times \text{س}^{\text{٢}}$$

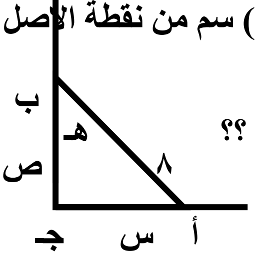
$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{٢}\,\pi\,\text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} - \frac{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}} \times \text{٢ س}\,\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{٢}\,\pi \times \text{١٠} \times \text{٠,٢} - \frac{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}} \times \text{٢} \times \text{١٠} \times \text{٠,٢}$$

مثال (١٣٣

أ ب قطعة مستقيمة طولها (٨) سم ، يتحرك طرفها أ على محور السينات الموجب بينما يتحرك طرفها ب على محور الصادات الموجب بحيث تزيد الزاوية أ ب جـ بسرعة ٢٠/١ راد / ث احسب معدل تغير مساحة المثلث أ ب م عندما تكون أ على بعد (٤) سم من نقطة الاصل م

الحل :



$$\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{\text{١}}{\text{٢٠}}\ \text{،}\ \left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س} = \text{٤}} = \text{؟؟}$$

م = ٢/١ القاعدة × الارتفاع

= ٢/١ س × ص

$$\text{جا هـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{س}}{\text{٨}}$$

$$\text{جتا هـ} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{\text{١}}{\text{٨}} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢٠}} = \frac{\text{١}}{\text{٨}} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{\text{٨}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤٠}}$$

$$\text{كذلك جتا هـ} = \frac{\text{ص}}{\text{٨}}$$

$$-\text{جا هـ} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{\text{١}}{\text{٨}} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{-\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢٠}} = \frac{\text{١}}{\text{٨}} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{-\text{٨}}{\text{٤٠}}$$

لكن م= ٢/١ س × ص

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{س} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} + \text{ص} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

بالتعويض

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{٠,٨}$$

مثال (١٣٤

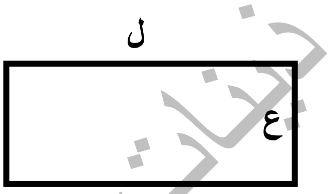
صفيحة معدنية مستطيلة الشكل تتمدد بانتظام بحيث يبقى طولها يساوي ثلاثة امثال عرضها . اوجد معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة الى طولها عندما يكون طولها ١٥ سم .

الحل :

$$\left.\frac{دم}{دل}\right|_{ل=١٥} = ????$$

م = ع × ل

لكن ل = ٣ ع



$$ع = \frac{ل}{٣}$$

$$م = \frac{ل^٢}{٣}$$

$$\frac{دم}{دن} = \frac{٢}{٣} ل \times \frac{دل}{دن}$$

$$\frac{دم}{دن} = \frac{٢}{٣} \times ١٥ \times \frac{دل}{دن}$$

$$\frac{دم}{دل} = ١٠$$

مثال (١٣٥):

مستطيل يزيد طوله بمعدل ٣ سم / ث ويتناقص عرضه بمعدل ٢ سم /ث جد معدل التغير في مساحة المستطيل عندما يكون طوله ١٠ سم وعرضه ٦ سم

الحل : مباشر تمرين للطالب

مثال (١٣٦

إذا كانت المقاومة الكلية (م) لمقاومتين موصولتين على التوازي (م١، م٢)تعطى بالعلاقة

$$\frac{١}{م} = \frac{١}{م_١} + \frac{١}{م_٢}$$

(م ، م١ ، م٢) مقاسه بالاوم

فإذا كانت م١ ، م٢ تزدادان بمعدل ١اوم/ث٢، ١,٥ اوم/ث٢ على الترتيب جد معدل الزيادة في المقاومة م عندما يكون م١ = ٥٠اوم ، م٢ = ٧٥اوم

الحل :

$$\frac{١}{م} = \frac{١}{م_١} + \frac{١}{م_٢}$$

$$\frac{-١}{م^٢} \times \frac{دم}{دن} = \frac{-١}{(م_١)^٢} \times \frac{دم}{دن} + \frac{-١}{(م_٢)^٢} \times \frac{دم}{دن}$$

لكن

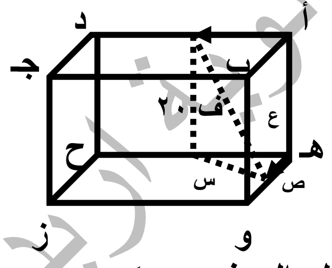
$$\frac{١}{م} = \frac{١}{٥٠} + \frac{١}{٧٥} \text{ ومنها } م = ٣٠$$

$$\frac{-١}{٩٠٠} \times \frac{دم}{دن} = \frac{-١}{٢٥٠٠} \times ١ + \frac{-١}{٥٦٢٥} \times ١,٥$$

$$\frac{دم}{دن} = \frac{٦}{١٠}$$

مثال (١٣٧

في الشكل المجاور يمثل مكعب خشبي طول ضلعه ٢٠ سم اطلقت عليه نملتان



في نفس اللحظة الاولى من الراس أ (وعلى الحرف أ د) وباتجاه الراس د ، وبسرعة ٤سم / ث والثانية من الراس هـ (وعلى الحرف هـ و) باتجاه الراس ، وبسرعة ٣ سم / ث اوجد معدل ابتعاد النملتين من بعضهما البعض بعد مرور ٤ ث من لحظة انطلاقهما

الحل:

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}\Bigg|_{\text{ن} = ٤\text{ ث}} = ؟،\quad \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ٣،\quad \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٤$$

بعد ن=٤ ث

فان ص = ٤ × ٤ = ١٦

← ع = ٤ × ٣ = ١٢

$$\text{ف} = \sqrt{\text{ع}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٤٠٠}$$

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢\text{ع} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} + ٢\text{ ص}\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{\text{ع}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٤٠٠}}$$

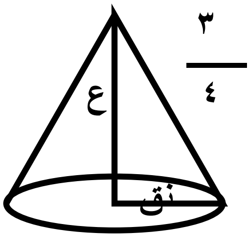
$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢\times١٢\times٣ + ٢\times١٦\times٤}{٢\sqrt{١٤٤ + ٢٥٦ + ٤٠٠}}$$

مثال (١٣٨):

مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي نصف قطر قاعدته ويتمدد بالحرارة، جد طول نف قطر قاعدة المخروط، عندما يكون معدل زيادة نصف القطر يساوي ٣/٤ سم/ث ومعدل زيادة الحجم يساوي ١٢ π سم^{٣}/ث

المخروط هي دائما (٦٠°)اوجد معدل تزايد ارتفاع المخروط عندما يكون الارتفاع (١م)

الحل :



نق = ؟؟؟

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ١٢\,\pi ،\quad \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}\Bigg| = \frac{٣}{٤}$$

$$\text{حجم المخروط} = \frac{١}{٣}\text{نق}^{٢}\,\pi\,\text{ع}$$

لكن نق = ع

$$\text{ح} = \frac{١}{٣}\text{نق}^{٣}\,\pi$$

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \pi\,\text{نق}^{٢} \times \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$$

$$١٢\,\pi = \pi\,\text{نق}^{٢} \times \frac{٣}{٤}$$

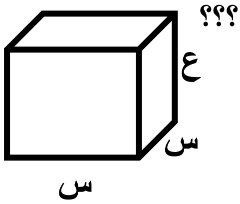
نق ^{٢} = ١٦ ومنها نق = ٤

مثال (١٣٩):

صندوق قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه يساوي ثلاثة امثال طول ضلع قاعدته فاذا كان طول ضلع القاعده يتمدد بمعدل ٠,٢٥ سم /ث احسب

1. **معدل التغير في حجم الصندوق عندما يكون طول ضلعه ٨ سم**
2. **معدل التغير في المساحة الكلية لسطحه عندما يكون طول الضلع ٨ سم**

الحل: ١.



$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٠,٢٥ ،\quad \frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}\Bigg|_{\text{س} = ٨} = ؟؟؟؟؟$$

ح = س ^{٢} × ع

لكن ع = ٣ س

اذن ح = س ^{٢} × ٣ س = ٣س ^{٣}

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٩\text{ س}^{٢} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٩ \times ٦٤ \times \frac{٢٥}{١٠٠} = ١٤٤$$

٢.

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٠,٢٥ ،\quad \frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\Bigg|_{\text{س} = ٨} = ؟؟؟؟؟$$

م = ٢س ^{٢} + ٤س ع

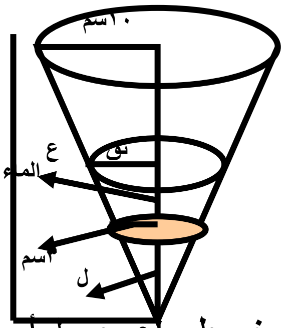
لكن ع = ٣ س

اذن م = ٢س ^{٢} + ١٢ س ^{٢} = ١٤س ^{٢}

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٢٨\text{ س}\times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٢٨ \times ٨ \times \frac{٢٥}{١٠٠} = ٥٦$$

مثال (١٤٠



يمثل الشكل المجاور اناء على شكل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته (١٠) سم وارتفاعه (٣٠) سم اغلق جزء منه بقرص معدني دائري رقيق طول نصف قطره (٣) سم يوازي قاعدة المخروط يمنع وصول أي مادة للجزء السفلي من الاناء فاذا صب سائل في هذا الاناء بمعدل ثابت قدره (٥π) سم^{٣} /ث جد سرعة ارتفاع الاناء عندما يكون حجم السائل في الاناء (٣٧π)سم^{٣}

الحل :

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٥\pi \text{ ،} \quad \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} \Big| = ؟؟$$

$$\text{ح} = ٣٧\pi$$

حجم الماء = حجم المخروط الاكبر - حجم المخروط الاصغر

$$\text{ح} = \frac{١}{٣}\pi \times \text{نق}^{٢}(\text{ع}+\text{ل}) - \frac{١}{٣}\pi \times \text{نق}^{٢} \times \text{ل}$$

لايجاد ل

$$\frac{١٠}{٣} = \frac{٣٠}{\text{ل}} \quad \text{ومنها ل} = ٩$$

$$\text{ح} = \frac{١}{٣}\pi \times \text{نق}^{٢}(\text{ع}+٩) - \frac{١}{٣}\pi \times ٩ \times ٩$$

لايجاد نق بدلالة ع

$$\frac{\text{نق}}{٣} = \frac{\text{ع}+٩}{٩} \quad \text{ومنها نق} = \frac{١}{٣}\text{ع} + ٣$$

$$\text{ح} = \frac{\pi}{٣} \times \left(\frac{١}{٣}\text{ع}+٣\right)^{٢}(\text{ع}+٩) - \frac{\pi}{٣} \times ٨١$$

$$\text{ح} = \frac{\pi}{٢٧}(\text{ع}+٩)^{٣} - ٢٧\pi$$

$$\frac{\text{د ح}}{\text{دن}} = \frac{\pi}{٩}(\text{ع}+٩)^{٢} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

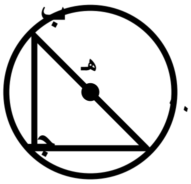
لايجاد ع

$$٣٧\pi = \frac{\pi}{٢٧}(\text{ع}+٩)^{٣} - ٢٧\pi \quad \text{ومنها ع} = ٣$$

بالتعويض

$$٥\pi = \frac{\pi}{٩}(٣+٩)^{٢} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} \quad \text{ومنها} \quad \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{٥}{١٦}$$

مثال (١٤١



في الشكل المجاور أ ب قطر في الدائرة طوله (٢٠) سم تتحرك النقطة جـ على القوس أ ب بحيث يزيد قياس الزاوية جـ ب أ بمعدل ٣ / د احسب معدل تغير مساحة المثلث أ ب جـ عندما يكون قياس< جـ ب أ = π/٣

الحل :

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٣°/\text{ د} = ٣ \times \frac{\pi}{١٨٠} \text{ ،} \quad \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} \Big| = ؟؟$$

$$\text{هـ} = \pi/٣ = ٦٠°$$

$$\text{م} = \frac{١}{٢} \text{س} \times ٢٠ \times \text{جا هـ}$$

$$\text{لكن جتا هـ} = \frac{\text{س}}{٢٠} \quad \text{ومنها س} = ٢٠ \text{ جتا هـ}$$

$$\text{م} = ١٠ \times ٢٠ \times \text{جاهـ} \times \text{جتاهـ}$$

$$\text{م} = ١٠٠ \times ٢ \times \text{جاهـ} \times \text{جتاهـ} = ١٠٠ \text{جا٢هـ}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{دن}} = ٢٠٠ \text{جتا ٢ هـ} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{دن}} = ٢٠٠ \text{جتا ١٢٠} \times \frac{\pi}{٦٠}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{دن}} = ٢٠٠ \times \frac{-١}{٢} \times \frac{\pi}{٦٠} = \frac{-٥\pi}{٣}$$

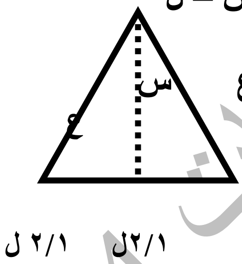
مثال (١٤٢):

مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ثابت ويساوي ل اذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم / د جد معدل تناقص مساحة المثلث عند اللحظة التي يكون فيها طول كل من الساقين مساوياً لطول القاعدة

الحل :

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{٣ سم / د ،} \quad \left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right| = ؟؟$$

$$\text{س} = \text{ل}$$



$$\text{م} = \frac{١}{٢}\ \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$\text{م} = \frac{١}{٢}\ \text{ل} \times \text{ع}$$

$$\text{لكن س}^{٢} = \frac{١}{٤}\text{ل}^{٢} + \text{ع}^{٢}$$

$$\text{ومنها ع} = \sqrt{\text{س}^{٢} - ١/٤\ \text{ل}^{٢}}$$

$$\text{اذن م} = ١/٢\ \text{ل}\sqrt{\text{س}^{٢} - ١/٤\ \text{ل}^{٢}}$$

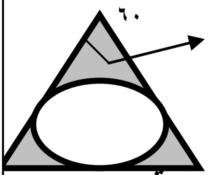
$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{١/٢\ \text{ل} \times ٢\ \text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} - ١/٤\ \text{ل}^{٢}}}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{١/٢\ \text{ل} \times ٢ \times \text{ل} \times ٣}{٢\sqrt{\text{ل}^{٢} - ١/٤\ \text{ل}^{٢}}}$$

مثال (١٤٣): من الكتاب ص ١٧٢

يتمدد اضلاع مثلث متساوي الاضلاع بمعدل ٢ سم / د رسمت دائرة داخل المثلث واخذت تتمدد مع المثلث جد معدل تمدد مساحة المنطقة المحصورة بين المثلث والدائرة عندما يكون طول ضلع المثلث ١٢ سم

الحل :



$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{٢ سم / د ،} \quad \left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right| = ؟؟$$

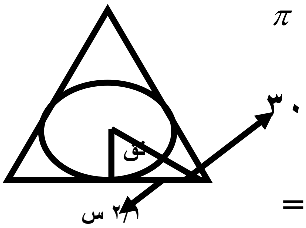
$$\text{س} = ١٢$$

١

مساحة المنطقة المظللة = مساحة$_{\Delta}$ - مساحة$_{\circ}$

$$\text{م} = ١/٢\ \text{س}^{٢}\ \text{جا}\ ٦٠ - \text{نق}^{٢}\ \pi$$

لكن



$$\text{ظا}\ ٣٠ = \frac{\text{نق}}{١/٢\ \text{س}}$$

$$\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\text{نق}}{١/٢\ \text{س}} \quad \text{ومنها نق} =$$

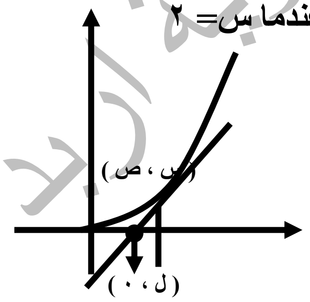
$$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \left(\frac{\text{س}}{٢\sqrt{٣}}\right)^{٢}\pi$$

$$\text{م} = \frac{\sqrt{٣}}{٤}\text{س}^{٢} - \frac{\pi\ \text{س}^{٢}}{١٢} \quad \text{اكمل الحل}$$

مثال (١٤٤):

نقطة ابتدأت الحركة من نقطة الاصل على جزء لمنحنى ص = س ^{٢} الواقعة في الربع الاول اوجد معدل تغير مساحة المثلث المكون من المماس للمنحنى ومحور السينات والعمود النازل من نقطة التماس على محور السينات اذا كان

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{٤سم / ث عندما س} = ٢$$



الحل :

$$\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right| = ؟\ ؟$$

$$\text{س} = ٢$$

$$\text{م} = ٢/١\ (\text{س} - \text{ل}) \times \text{ص}$$

لكن

$$٢\ \text{س} = \frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - \text{ل}}$$

لكن ص = س^{٢} ومنها

$$٢\,\text{س} = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - \text{ل}}$$

ومنها ل = ١/٢ س

$$= ١/٢\ (\text{س}_{\text{م}} - ١/٢\ \text{س})\times \text{س}^{٢}$$

$$\text{م} = ١/٤\ \text{س}^{٣}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{دن}} = \frac{٣}{٤}\ \text{س}^{٢} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{دن}} = \frac{٣}{٤} \times ٤ \times ٤ = ١٢$$

مثال (١٤٥):

حلبة سباق دائرية الشكل نصف قطر ها ٢٠٠قدم يجلس شخص عند احد اطرافها يتحرك جسم على الحلبة مبتعداً عن الشخص بمعدل ٥٠ قدم / ث جد معدل تغير المسافة بين الشخص والجسم عندما يكون الجسم على بعد ٢٠٠ قدم عن الشخص

الحل:

ل ف هـ أ ٢٠٠ م

$$\frac{\text{د ف}}{\text{دن}}\Big|_{(٠،٠)} = ؟،\ \frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = ٥٠\ \text{قدم}$$

ف = ٢٠٠

$$\text{ف}^{٢} = \text{نق}^{٢} + \text{نق}^{٢} - ٢\ \text{نق نق جتا هـ}$$

$$\text{ف} = \sqrt{٢\,(٢٠٠)^{٢} - ٢\,(٢٠٠)^{٢}\ \text{جتا هـ}}$$

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢(٢٠٠)^{٢}\ \text{جا هـ} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{٢\,(٢٠٠)^{٢} - ٢\,(٢٠٠)^{٢}\ \text{جتا هـ}}} \quad ....(١)$$

عندما ف = ٢٠٠ فان هـ = ٦٠°

لكن ل = نق × هـ

$$\frac{\text{د ل}}{\text{دن}} = \text{نق}\ \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} \quad \text{ومنها} \quad \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{٥٠}{\text{نق}}$$

بالتعويض في (١)

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ...$$

مثال (١٤٦

تطير طائرة أفقيا في خط مستقيم على ارتفاع ثابت مقداره ٢٠٠٠م فوق مستوى نقطة الرصد الثابتة (أ)ومبتعدة عن هذه النقطة، وفي لحظة معينة كانت زاوية ارتفاع الطائرة = ٣٠ ° وكانت سرعة الطائرة تساوي ٤٥٠كم/ساعة:

١) جد معدل التغير في المسافة بين الطائرة ونقطة الرصد(أ) في تلك اللحظة (بالوحدة م/ث)

٢)جد معدل تغير زاوية ارتفاع الطائرة في تلك اللحظة.

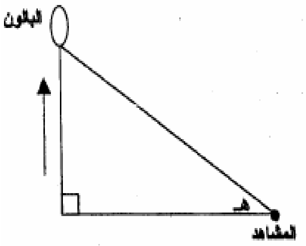
مثال (١٤٧)

مصعدان كهربائيان أ ، ب مستقران في الطابق الارضي من عمارة ، والمسافة الافقية بينهما (٨) م ، بأ المصعد (أ) يرتفع للاعلى بسرعة (٢ م / ث) وبعد ثانيتين بدا المصعد (ب) في الارتفاع للاعلى بسرعة (١ م / ث) . جد معدل تغير المسافة بين المصعدين أ ، ب بعد ٢ ث من بدء حركة المصعد ب .

مثال (١٤٨)

س ص ، س ع طريقان متعامدان في س ، س ص = ٩٠٠ م ، س ع = ٧٠٠ م بدا رجلان الحركة في نفس الوقت باتجاه س ، الاول بدا من ص بسرعة ٦٠م / د ، والاخر من ع بسرعة ٨٠ م / د ، اوجد معدل التغير في مساحة المثلث الناتج من حركتهما مع النقطة س بعد (٨) دقائق من بدء حركتهما

مثال (١٤٩):



يرتفع بالون رأسياً للأعلى بسرعة ثابتة ، ويتم رصده من مشاهد على الأرض يبعد (١٦٠) متراً عن المسقط الرأسي للبالون على الأرض. إذا كانت هـ هي زاوية ارتفاع نظر المشاهد للبالون ، وكان معدل تغير هـ يساوي $\frac{١}{١٠}$ راديان/دقيقة في اللحظة التي كان فيها ارتفاع البالون عن سطح الأرض (٢٠٠) متر، فجد سرعة البالون.

مثال (١٥٠):

يتحرك مستقيم في الربع الاول بحيث يبقى ملامسا للدائرة التي معادلتها $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ فاذا كان معدل تغير الاحداثي السيني لنقطة التماس ٣ سم / ث جد معدل تغير الاحداثي السيني لنقطة تقاطع المماس مع محور السينات عندما يكون الاحداثي السيني لنقطة التقاطع يساوي ٢ سم

التزايد والتناقص

اذا كان ق(س) اقتران معرف على[أ ، ب]وكان
$س_١$، $س_٢$ ∋ [أ ، ب]

☒ متزايد على الفترة [أ ، ب] اذا كان
$س_١$ < $س_٢$ وكان ق($س_٢$) > ق ($س_١$)

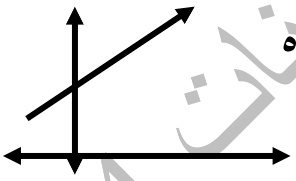
☒ متناقص على الفترة [أ ، ب] اذا كان
$س_١$ < $س_٢$ وكان ق($س_٢$)< ق ($س_١$)

مثال (١٥١):

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران
ق(س) = س + ٢ على الفترة [١ ، ٣]

الحل :

ق(١) = ٣ ، ق(٣) = ٥
ق(٣) > ق(١) متزايد



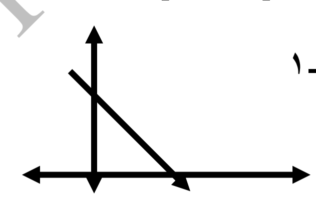
ملاحظة المشتقة +

مثال (١٥٢):

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران
ق(س) = ٢ - س على الفترة [١ ، ٣]

الحل :

ق(١) = ١ ، ق(٣) = -١
ق(٣) < ق(١) متناقص



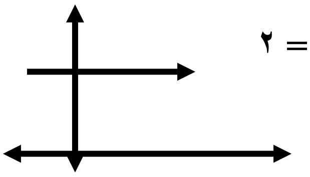
ملاحظة المشتقة -

مثال (١٥٣):

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران
ق(س) = ٢ على الفترة [١ ، ٣]

الحل :

ق(١) = ٢ ، ق(٣) = ٢
ق(٣) = ق(١) ثابت



ملاحظة المشتقة صفر

نظرية

اذا كان ق(س) اقتران معرف على[أ ، ب]وقابل للاشتقاق على الفترة (أ ، ب)

☒ اذا كان قَ (س) > صفر لجميع قيم س ∋ (أ ، ب) فان ق (س) متزايد على الفترة [أ ، ب]

☒ اذا كان قَ (س) < صفر لجميع قيم س ∋ (أ ، ب) فان ق (س) متناقص على الفترة [أ ، ب]

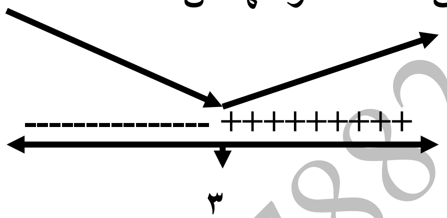
☒ اذا كان قَ (س) = صفر لجميع قيم س ∋ (أ ، ب) فان ق (س) ثابت على الفترة [أ ، ب]

مثال (١٥٤):

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران
ق(س) = $س^{٢}$ - ٦ س + ٣ على ح

الحل :

قَ (س) = ٢ س – ٦
٢س – ٦ = ٠ ومنها س = ٣



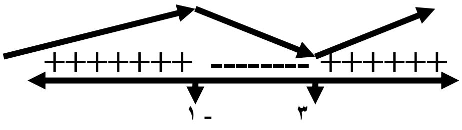
متناقص (- ∞ ، ٣]
متزايد [٣ ، ∞)

مثال (١٥٥

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران
ق(س) = $س^{٣}$ -٣$س^{٢}$ - ٩ س + ١ على ح

الحل :

قَ(س) = ٣ $س^{٢}$ – ٦ س – ٩
٣ $س^{٢}$ – ٦ س – ٩ = ٠
$س^{٢}$ – ٢ س – ٣ = ٠
(س – ٣) (س + ١) = ٠ ومنها س = ٣ ، -١



مثال (١٥٦):

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق(س) = س^{٣} +٢٧ س + ٩ على الفترة ح

الحل :

قَ(س) = ٣ س ^{٢} + ٢٧

٣ س^{٢} + ٢٧ ≠ ٠ لا يحلل المميز سالب

ملاحظة اشارة الاقتران التربيعي الذي مميزه سالب دائماً نفس اشارة س ^{٢}

متزايد على ح

مثال (١٥٧):

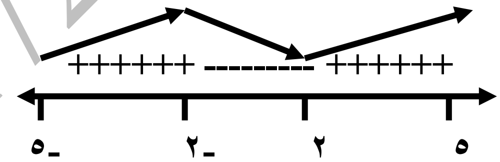
اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق(س) = س ^{٣} − ١٢ س + ٥ ، [-٥ ، ٥]

الحل :

قَ (س) = ٣ س^{٢} - ١٢

٣ س^{٢} − ١٢= ٠ ومنها س = ± ٢



متناقص [-٢ ، ٢]

متزايد [-٥ ، -٢] ، [٢ ، ٥]

مثال (١٥٨):

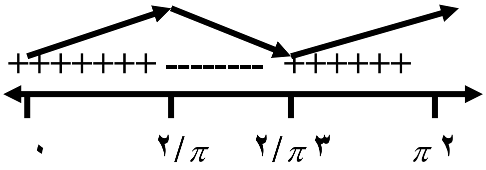
اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق(س) = جا س ، [٠ ، ٢ π]

الحل :

قَ (س) = جتا س

جتا س = ٠ ومنها س = π/٢ ، ٣ π/٢



متناقص [π/٢ ، ٣ π/٢]

متزايد [٠، π/٢]، [٣π/٢ ، ٢ π]

مثال (١٥٩):

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق(س) = جتا ٢س ، [٠ ، ٢ π]

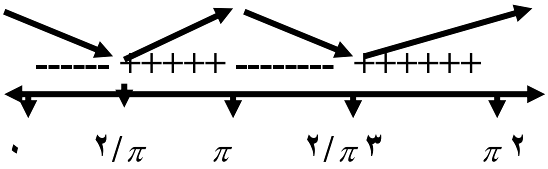
الحل :

قَ (س) = - ٢ جا ٢ س

- ٢ جا ٢ س = ٠ ومنها

٢ س = ٠ ، π ، ٢ π ، ٣ π ، ٤ π

ومنها س = ٠ ، π/٢ ، π ، ٣ π/٢ ، ٢ π



٠

متزايد [π/٢ ، π] ، [٣π/٢ ، ٢ π]

متناقص [٠، π/٢] ، [π ، ٣ π/٢]

مثال (١٦٠):

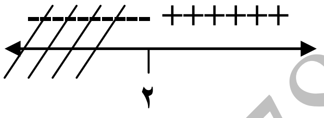
اذا كان ق (س) = $\sqrt{س − ٢}$

١. ما مجال هذا الاقتران

٢. حدد مجالات التزايد والتناقص

الحل :

س − ٢ = ٠ ومنها س = ٢

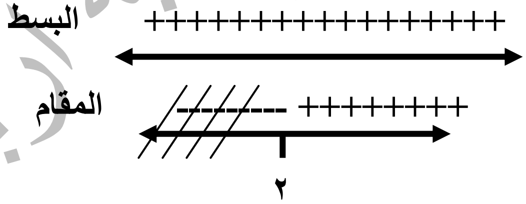


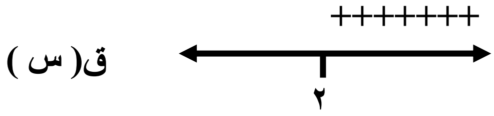
١) المجال [٢ ، ∞)

٢)

$$قَ(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س − ٢}}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{س − ٢}} = ٠$$





اذن متزايد على المجال [٢ ، ∞)

مثال (١٦١):

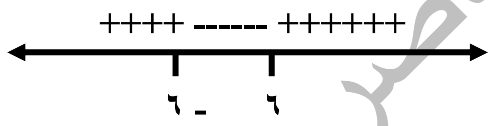
اذا كان $ق (س) = \sqrt{س^{٢} ـ ٣٦}$

١. ما مجال هذا الاقتران

٢. حدد مجالات التزايد والتناقص

الحل :

$س^{٢} ـ ٣٦ = ٠$ ومنها $س = ± ٦$

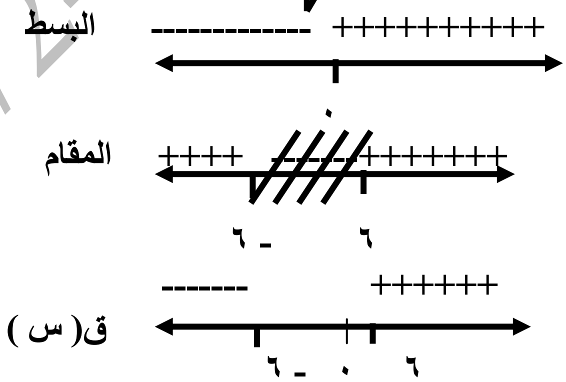


١) المجال (- ∞ ، - ٦] [٦ ، ∞)

٢)

$$قَ(س) = \frac{٢ س}{٢ \sqrt{س^{٢} ـ ٣٦}}$$

$$= \frac{س}{\sqrt{س^{٢} ـ ٣٦}} = ٠$$



اذن متزايد [٦ ، ∞)

متناقص (- ∞ ، - ٦]

مثال (١٦٢):

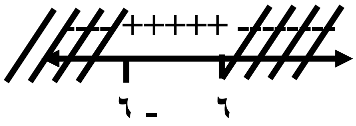
اذا كان $ق (س) = \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$

١. ما مجال هذا الاقتران

٢. حدد مجالات التزايد والتناقص

الحل :

$٣٦ - س^{٢} = ٠$ ومنها $س = ± ٦$

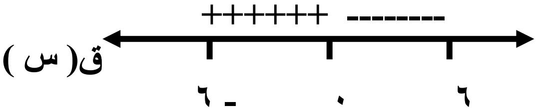


١) المجال [- ٦ ، ٦]

٢)

$$قَ(س) = \frac{- ٢ س}{٢ \sqrt{٣٦ - س^{٢}}}$$

$$= \frac{- س}{\sqrt{س^{٢} ـ ٣٦}} = ٠$$



اذن متزايد [- ٦ ، ٠]

متناقص [٠ ، ٦]

مثال (١٦٣):

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = ١ ـ س ـ س^{٣}$

الحل :

$قَ(س) = -١ ـ ٣ س^{٢}$

$-١ ـ ٣ س^{٢} \neq ٠$ المميز سالب

ملاحظة

اشارة الاقتران التربيعي الذي مميزه سالب

دائماً نفس اشارة $س^{٢}$

اذن متناقص على ح

مثال (١٦٤): مهم جداً

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = س^{٣} (٤ ـ س)$

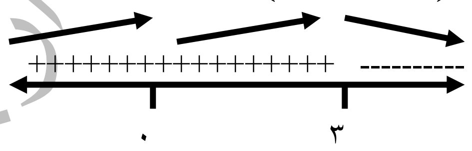
الحل :

$ق(س) = ٤ س^{٣} ـ س^{٤}$

$قَ(س) = ١٢ س^{٢} ـ ٤ س^{٣}$

$١٢ س^{٢} ـ ٤ س^{٣} = ٠$

س٢ (١٢ ـ ٤ س) = ٠ ومنها س = ٠ ، ٣



متزايد (- ∞ ، ٣]

متناقص [٣ ، ∞)

مثال (١٦٥):

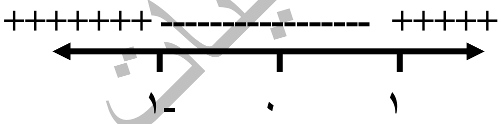
اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \frac{١}{\text{س}} \quad : \text{س} \neq \text{صفر}$$

الحل :

$$\text{قَ}(\text{س}) = ١ - \frac{١}{\text{س}^{٢}}$$

$$\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢}} = ٠ \quad \text{ومنها س} = \pm ١$$



متناقص [- ١ ، ١] – { ٠ }

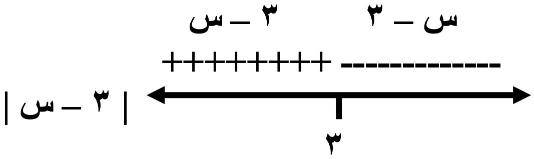
متزايد(- ∞ ، -١] ∪ [١ ، ∞)

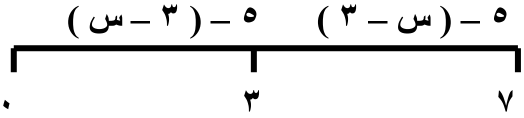
مثال (١٦٦):

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$$\text{ق}(\text{س}) = ٥ - |٣ - \text{س}| \quad ، \quad [٠ ، ٧]$$

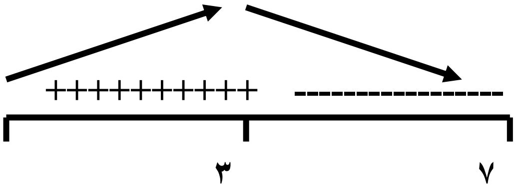
الحل :





$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} ١ & ٠ < \text{س} < ٣ \\ \text{غ . ق} & \text{س} = ٣ \\ -١ & ٣ < \text{س} < ٧ \end{cases}$$

عند ٠ ، ٧ غير قابل للاشتقاق اطراف فترة



متزايد [٠ ، ٣] ، متناقص [٣ ، ٧] why

مثال (١٦٧): مهم جداً

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} & ، ٠ \le \text{س} < ١ \\ |\text{س} - ١| & ، ١ \le \text{س} \le ٢ \end{cases}$$

الحل :

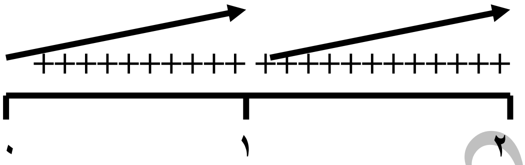
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} & ، ٠ \le \text{س} < ١ \\ \text{س} - ١ & ، ١ \le \text{س} \le ٢ \end{cases}$$

عند س = ١ غير متصل

$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} ١ & ، ٠ < \text{س} < ١ \\ ١ & ، ١ < \text{س} < ٢ \end{cases}$$

عند س = ١ غ . ق why

عند س = صفر ، ٢ غ . ق why



متزايد [٠ ، ١) ، [١ ، ٢]

مثال (١٦٨):

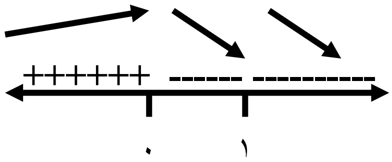
اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} ٣ - \text{س}^{٢} & ، \text{س} \le ١ \\ \frac{٢}{\text{س}} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$$

الحل :

ق متصل على ح

$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} -٢\text{س} & ، \text{س} < ١ \\ \frac{-٢}{\text{س}^{٢}} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$$



متزايد(- ∞ ، ٠] ، متناقص [٠ ، ∞)

مثال (١٦٩):

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

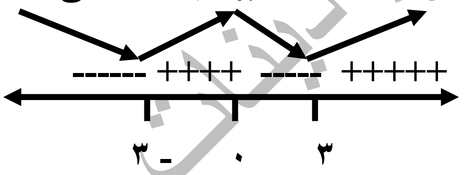
ق(س) = |٩ – س ^{٢} |

الحل : س ^{٢} – ٩ ٩ – س ^{٢} س ^{٢} – ٩

٣ ٣ -

$$\text{قَ (س)} = \begin{cases} \text{٢ س} & \text{، س < - ٣} \\ \text{- ٢ س} & \text{، - ٣ < س < ٣} \\ \text{٢ س} & \text{، س > ٣} \end{cases}$$

عندما س = - ٣ ، ٣ غير قابل للاشتقاق لماذا ؟



متزايد [- ٣، ٠] ، [٣ ، ∞)

متناقص (- ∞، -٣] ، [٠ ، ٣]

مثال (١٧٠):

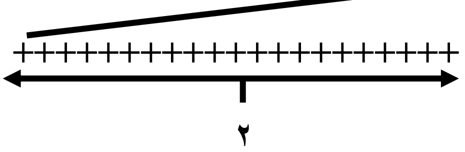
اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$$\text{ق(س)} = \sqrt[٣]{\text{س – ٢}}$$

الحل :

$$\text{قَ (س)} = \frac{١}{٣\sqrt[٣]{(\text{س – ٢})^{٢}}}$$

البسط والمقام دائماً موجب



متزايد على ح

مثال (١٧١):

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق(س) = جا ^{٢} س ، [٠ ، ٢ π]

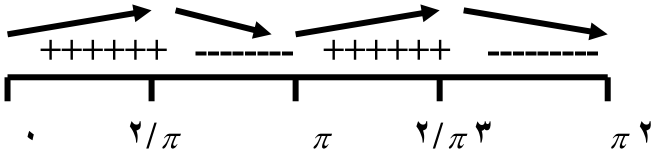
الحل :

قَ(س) = ٢ جا س جتا س = جا ٢ س

جا ٢ س = ٠

٢س = ٠ ، π ، ٢ π ، ٣ π ، ٤ π

اذن س = ٠ ، π /٢ ، π ، ٣ π /٢ ، ٢ π



مثال (١٧٢):

اذا كان ق(س)= ٣ س + جتا س اثبت ان ق متزايد على ح

الحل :

قَ (س) = ٣ – جا س

٣ – جا س = ٠ ومنها جا س = ٣ وهذا مستحيل

ولكن - ١ ≤ جا س ≤ ١

اذن قَ (س) > ٠

اذن ق(س) متزايد على ح

مثال (١٧٣):

اذا كان ق(س) ، هـ (س) كثير حدود معرفان على [١ ، ٤] ويقع كل منهما في الربع الاول فاذا كان ق(س) متزايد في مجاله ٠ هـ (س) متناقص في مجاله ، هـ (س) ≠ صفر

$$\text{اثبت ان } \left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)\text{(س) متزايد في [١ ، ٤]}$$

الحل :

ق(س) ، هـ (س) > ٠ لانهما في الربع الاول

قَ(س) > ٠ لانه متزايد

هـَ (س) < ٠ لانه متناقص

$$\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'\text{(س)} = \frac{\overset{+}{\text{هـ}} \times \overset{+}{\text{قَ}} - \overset{+}{\text{ق}} \times \overset{-}{\text{هـَ}}}{\text{هـ}^{٢}}$$

هـ × قَ > ٠

ق × هـَ< ٠ هذا يعني - ق × هـَ > ٠

هـ ^{٢} > ٠

$$\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'\text{(س)} = \frac{\text{موجب + موجب}}{\text{موجب}} > ٠$$

اذن متزايد في [١ ، ٤]

مثال (١٧٤):

اذا كان ق(س) اقتراناً متزايداً على ح وكان هـ (س) متناقصاً على ح وكان كل من ق ، هـ قابلين للاشتقاق وكان ل(س) = ٤ ق(س) – ٣ هـ(س) متصلاً وقابلاً للاشتقاق على ح ، اثبت ان ل(س) متزايد على ح

الحل :

بما ان ق(س) متزايداً اذن قَ(س) > ٠

ومنها ٤ قَ(س) > ٠

كذلك هـ (س) متناقصاً اذن هـَ (س) < ٠

ومنها - ٣هـَ (س) > ٠

اذن لَ(س) = ٤ قَ(س) – ٣ هـَ (س)> ٠

اذن ل(س) متزايد على ح

مثال (١٧٥):

اذا كان ق(س):[-١ ، ٥] ← ح

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، -١ \le \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} - ١ & ، ١ \le \text{س} \le ٢ \\ ٥ & ، ٢ \le \text{س} \le ٥ \end{cases}$$

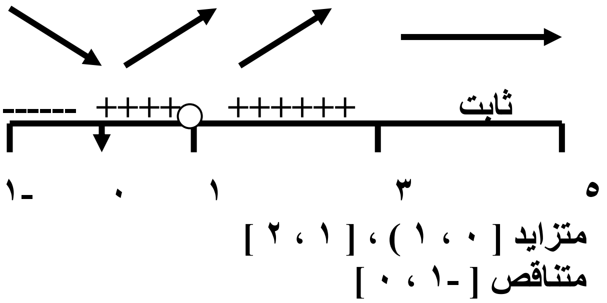
اوجد مجالات التزايد والتناقص

الحل :

غير متصل عند س= ١ ، ٢ ان غير قابل للاشتقاق

كذلك عند س = -١ ، ٥ غير قابل اطراف فترة

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} & ، -١ < \text{س} < ١ \\ ٢ & ، ١ < \text{س} < ٢ \\ ٠ & ، ٢ < \text{س} < ٥ \end{cases}$$



متزايد [٠ ، ١) ، [١ ، ٢]

متناقص [-١ ، ٠]

ثابت [٣ ، ٥]

مثال (١٧٦

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$$\text{ق(س)} = \frac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ٣}$$

الحل:

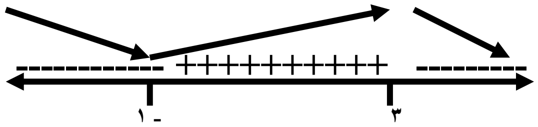
$$\text{قَ(س)} = \frac{(\text{س}^{٢} + ٣)(١) - (\text{س} - ١)(٢\text{س})}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}}$$

البسط

- س^{٢} + ٢ س + ٣ = ٠

س^{٢} – ٢ س – ٣ = ٠ومنها

(س – ٣)(س + ١) = ٠ ومنها س = ٣ ، - ١

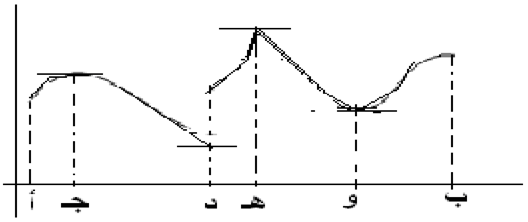


متناقص (- ∞ ، - ١] ، [٣ ، ∞)

متزايد [- ١ ، ٣]

القيم القصوى

افرض ن ق(س)معرف على [أ ، ب]



لاحظ

١)

١. ق(جـ) اكبر من كل القيم المجاوره لها والقريبة جداً منها
٢. ق(هـ) اكبر من كل القيم المجاوره لها والقريبة جداً منها
٣. ق(ب) اكبر من كل القيم المجاوره لها والقريبة جداً منها

☒ هذه القيم تسمى قيم عظمى محلية ما عدا ب

☒ اكبر هذه القيم على الفترة [أ ، ب] هي ق(هـ) وتسمى عظمى مطلقة

ملاحظة : اطراف الفترات فهي ليست محلية

٢)

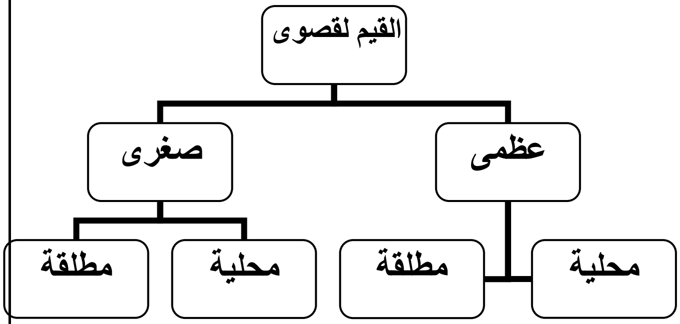
١. ق(أ) اصغر من كل القيم المجاوره لها والقريبة جداً منها
٢. ق(د) اصغر من كل القيم المجاوره لها والقريبة جداً منها
٣. ق(و) اصغر من كل القيم المجاوره لها والقريبة جداً منها

☒ هذه القيم تسمى قيم صغرى محلية ما عدا أ

☒ اصغر هذه القيم على الفترة [أ ، ب] هي ق(د) وتسمى صغرى مطلقة

ملاحظة

القيم العظمى والصغرى تسمى قيم قصوى



كل مطلقة محلية وليس كل محلية مطلقة

تعريف

إذا كان ق(س) اقترانا معرفاً على الفترة ع وكان س ١ ∋ ع وإذا أمكن إيجاد فترة مفتوحة ف تحوي س ١ فعندئذ

١. يكون للاقتران ق قيم عظمى محلية عند س١ هي ق(س١) إذا كان

ق(س ١) ≤ ق(س) ∀ س ∋ف ∩ ع

٢. يكون للاقتران ق قيم عظمى مطلقة عند س١ هي ق(س١) إذا كان

ق(س ١) ≤ ق(س) ∀ س ∋ ع

٣. يكون للاقتران ق قيم صغرى محلية عند س١ هي ق(س١) إذا كان

ق(س ١) ≥ ق(س) ∀ س ∋ف ∩ ع

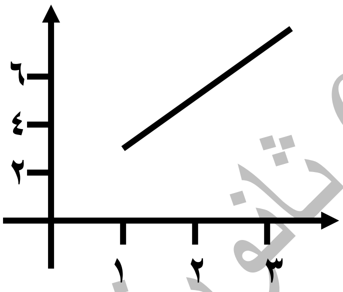
٤. يكون للاقتران ق قيم صغرى مطلقة عند س١ هي ق(س١) إذا كان

ق(س ١) ≥ ق(س) ∀ س ∋ ع

مثال(١٧٧):

إذا كان ق(س)= ٢ س + ١ على [١ ، ٣]جد نقط القيم القصوى ونوعها

الحل :

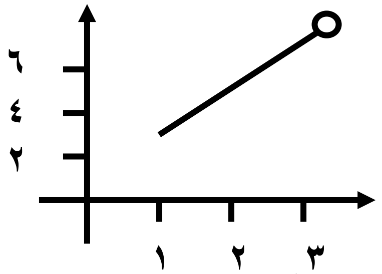


(١ ، ق(١)) صغرى مطلقة

(٣ ، ق(٣)) عظمى مطلقة

مثال(١٧٨):

إذا كان ق(س)= ٢ س + ١ على [١ ، ٣)جد نقط القيم القصوى ونوعها



(١ ، ق(١)) صغرى مطلقة

ملاحظـــة:

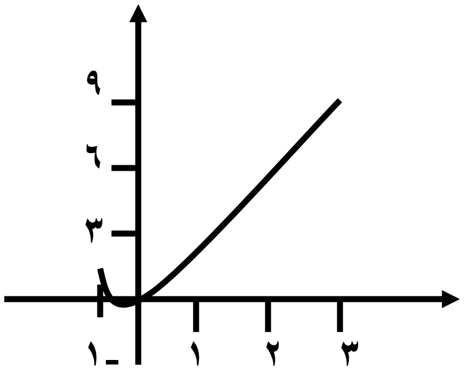
إذا كان الاقتران معرفاً على فترة مغلقة يوجد عند الاطراف قيم قصوى اما اذا كان معرفا على فترة مفتوحة لا تنظر الى الطرف المفتوح على انه قيم قصوى

مثال(١٧٩) :

اذا كان ق(س)= س^{٢} على [-١ ، ٣]جد نقط القيم القصوى ونوعها

الحل :

الحل :



(- ١ ، ق(-١))

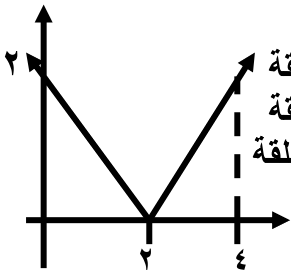
(٣ ، ق(٣)) عظمى مطلقة

(٠ ، ق(٠)) صغرى مطلقة

مثال(١٨٠) :

اذا كان ق(س)= |س – ٢ | على [٠ ، ٤]جد نقط القيم القصوى ونوعها

الحل :



(٠ ، ق (٠)) عظمى مطلقة

(٤ ، ق (٤)) عظمى مطلقة

(٢ ، ق (٢)) صغرى مطلقة

مثال (١٨١

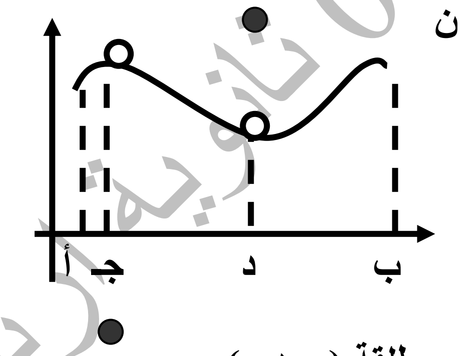
اوجد القيم القصوى المحلية ان وجدت للاقتران للاقتران

ق(س) = جتا س - جا س ، [٠ ، π]

الحل : تمرين للطالب

مثال(١٨٢) :

الرسم التالي يمثل الاقتران ق(س) المعرف على [أ ، ب] لهذا الاقتران



قيمة عظمى مطلقة (د)

قيمة صغرى مطلقة (جـ)

النقطـــــــــــــــة الحرجــــــــــــــــة

يكون للاقتران نقطة عندما س = جـ : جـ ∋ للمجال اذا تحقق الشرطين التاليين

١. قَ(جـ) = صفر
٢. قَ(جـ) غير موجودة

☒ **ملاحظة على التعريف**

١. اطراف الفترة المغلقة نقط حرجة (لانه لايوجد مشتقات عند اطراف الفترة)
٢. اطراف الفترة المفتوحة ليست حرجه (لا تنتمي للمجال)
٣. الرؤوس المدببة نقط حرجة (جذور القيم المطلقة)
٤. نقط الانفصال اذا كان الاقتران معرفاً عندها نقط حرجة
٥. نقط القيم القصوى نقط حرجة
٦. جذور المشتقة الاولى نقط حرجة

☒ **ملاحظة**

الاطراف ونقط تقاطعه مع محور السينات بالنسبة للمشتقة الاولى نقط حرجة

مثال(١٨٣) :

جد النقط الحرجة للاقتران

ق(س)= س ^{٢} – ٦س + ٧ على الفترة [٠ ، ٥]

الحل :

قَ(س) = ٢ س – ٦

٢ س – ٦ = ٠ ومنها س = ٣

النقط الحرجة { ٠ ، ٣ ، ٥ }

مثال(١٨٤) :

جد النقط الحرجة للاقتران

ق(س)= س ^{٢} – ٦س + ٧

الحل :

قَ(س) = ٢ س – ٦

٢ س – ٦ = ٠ ومنها س = ٣

النقط الحرجة { ٣ }

مثال (١٨٥) : مهم جداً جداً

اذا كان

ق (س) = { س ^{٢} – س ، ٠ ≤ س ≤ ١
　　　　　　 س – ١ ، ١ < س ≤ ٣

اوجد النقط الحرجة

الحل :

قَ (س) = { ٢س– ١ ، ٠ < س < ١
　　　　　　 ١ ، ١ < س < ٣

عندما س = ١ متصل قَ (١) = ١

النقط الحرجة { ٠ ، ٠,٥ ، ٣ } اطراف فترة

؟ لماذا ١ ليس حرجة ، ؟ ٠,٥ حرجة

مثال(١٨٦) :

جد جميع النقط الحرجة للاقتران

ق(س)= س ^{٢} +٤س + ٥ على الفترة (٠ ، ٤)

الحل :

قَ(س) = ٢ س + ٤

٢ س + ٤ = ٠ ومنها س = -٢

لا يوجد نقط حرجة ؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟

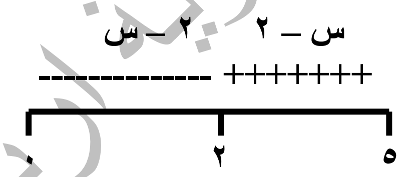
؟ { ٠ ، ٤ } ليس حرجة

مثال(١٨٧) :

جد جميع النقط الحرجة للاقتران

ق(س)=| س – ٢ |على الفترة [٠ ، ٥]

الحل :



اذا كان

قَ (س) = { -١ ، ٠ < س < ٢
　　　　　　 ١ ، ٢ < س < ٥

عندما س = ٢ متصل قَ (٢) = غ . ق ؟؟؟؟؟

النقط الحرجة { ٠ ، ٢ ، ٥ }

مثال(١٨٨) :

جد جميع النقط الحرجة للاقتران

ق(س)= ١٧ على ح

الحل :

قَ (س) = ٠

ح حرجة

ملاحظة : الثابت كل مجاله حرجه

مثال(١٨٩) :

جد جميع النقط الحرجة للاقتران

ق(س)= [س] على ح

الحل :

كل مجاله حرجه ح ؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟

مثال(١٩٠) :

هل س = ٢ حرجة للاقتران

$$\text{ق(س)} = \frac{\text{٤ س + ١}}{\text{س − ٢}} \quad \text{: س} \neq \text{٢}$$

الحل :

ليس له نقط حرجة حيث ٢ فقط هو نقطة انفصال وهو غير معرف عندها

مثال(١٩١) :

جد جميع النقط الحرجة للاقتران

$$\text{ق(س)} = \frac{|\text{س − ٢}|}{\text{س − ٢}} \quad \text{: س} \neq \text{٢}$$

الحل :

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} \text{− ١} & \text{،} \quad \text{٢} > \text{س} \\ \text{١} & \text{،} \quad \text{٢} < \text{س} \end{cases}$$

$$\text{قَ (س)} = \begin{cases} \text{٠} & \text{،} \quad \text{٢} > \text{س} \\ \text{٠} & \text{،} \quad \text{٢} < \text{س} \end{cases}$$

حرجة على ح – { ٢ } ؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟

مثال(١٩٢) : مهم جداً**

اذا كان ق معرف على [٠ ، ٣] وكان

$$\text{قَ(س)} = \frac{\text{س − ٢}}{\text{س + ١}}$$

اوجد النقط الحرجة

الحل :

{ ٠ ، ٣ } حرجة اطراف فترة

٢ حرجة لانه اصفار اقتران

-١ ليس حرجة لانه لاينتمي للفترة

نظريـــــــــــــــــــــــــــــــة

اذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على [أ،ب] وكانت ق(س١) قيمة قصوى للاقتران ق : س١ ∋] أ ، ب [فان قَ(س١)تكون غير موجودة او موجودة وتساوي صفر

ملاحظة على النظرية

1. **القيم القصوى ان وجدت للاقتران فانها توجد عندها نقط حرجة**
2. **النظرية لا تبحث في القيم القصوى الموجودة على الاطراف لعدم وجود مشتقة**
3. **عكس النظرية ليس بالضرورة صحيح ، اذا كان قَ(جـ) = ٠ ليس بالضرورة ان يكون ق(جـ) قصوى**
4. **قد نجد قيم قصوى عند نقطة ليست على الاطراف لكن لا نستطيع تطبيق النظرية عليها لعدم وجود مشتقة**

مثال(١٩٣) :

اذا كانت النقطة س = جـ نقطة حرجة للاقتران ق ، فهل ق(جـ) قيمة قصوى للاقتران ق؟ فسر اجابتك

الحل :

ليس كل حرجة قيم قصوى والمثال التالي يوضح ذلك

مثال(١٩٤) :

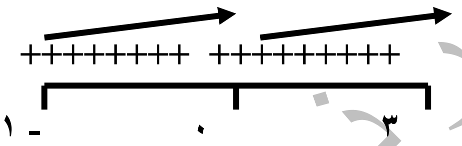
ق(س)= س^{٣} على الفترة [-١ ، ٣]

1. **هل للاقتران قيم قصوى عند الصفر**
2. **هل للاقتران نقطة حرجة عند الصفر**

الحل :

قَ(س) = ٣ س^{٢}

٣ س^{٢} = ٠ ومنها س = ٠



اذن س = { -١ ، ٠ ، ٣ } نقط حرجة لكنه ليس له قيمة قصوى عند س = ٠ حسب النظرية الاحقة

اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى

اذا كان ق(س) اقتران متصلاً على[أ ، ب]وقابل للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) ، وكانت (جـ ، ق(جـ)): جـ ∈ [أ ، ب] عندئذ

☒ **اذا كان قَ (س) ≤ صفر لكل س < جـ وكان قَ(س)≥ ٠ لكل س > جـ فان ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق**

☒ **اذا كان قَ (س) ≥ صفر لكل س < جـ وكان قَ(س) ≤ ٠ لكل س > جـ فان ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق**

طريقة ايجاد القيم القصوى اتبع ما يلي

1. **جد المشتقة الاولى للاقتران ق(س)**
2. **جد اصفار المشتقة الاولى قَ(س) = ٠**
   (أي نجد النقط الحرجة)
3. **ابحث في اشارة المشتقة الاولى لتحديد مجالات التزايد والتناقص**

☒ **اذا تحول الاقتران من متزايد الى متناقص له قيمة عظمى**

☒ **اذا تحول الاقتران من متناقص الى متزايد له قيمة صغرى**

مثال(١٩٥) :

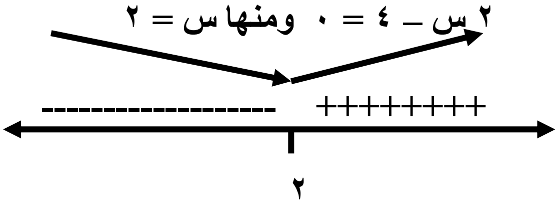
جد نقط القيم القصوى ونوعها للاقتران

ق(س) = س^{٢} - ٤س + ٥

الحل :

قَ(س) = ٢ س – ٤

٢ س – ٤ = ٠ ومنها س = ٢



(٢ ، ق (٢)) قيمة صغرى محلية

مثال(١٩٦) :

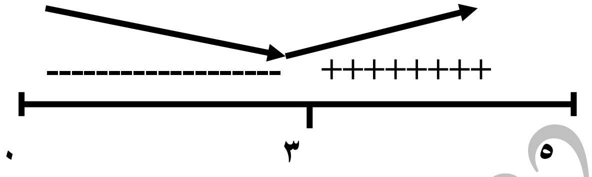
جد نقط القيم القصوى ونوعها للاقتران

ق(س) = س^{٢} - ٦ س + ٥ ، [٠ ، ٥]

الحل :

قَ(س) = ٢ س – ٦

٢ س – ٦ = ٠ ومنها س = ٣



(٠ ، ق (٠)) = (٠ ، ٥) عظمى مطلقة

(٣ ، ق (٣)) = (٣ ، -٤) صغرى محلية مطلقة

(٥ ، ق (٥)) = (٥ ، ٠)

<u>ملاحظة</u> اطراف الفترة ممكن ان تكون مطلقة ولكن ليس محلية

مثال(١٩٧) :

جد نقط القيم القصوى ونوعها للاقتران

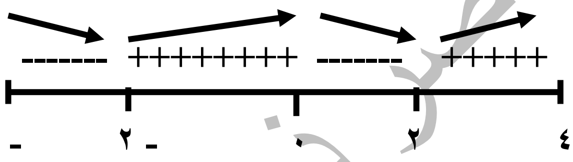
ق(س) = $س^{٤} - ٨ س^{٢} - ١$ ، [-٣ ، ٤]

الحل :

قَ(س) = ٤ $س^{٣}$ – ١٦ س

٤ $س^{٣}$ – ١٦ س = ٠

٤ س($س^{٢}$ - ٤) = ٠ ومنها س = ٠ ، ± ٢



(-٣ ، ١٠)
(-٢ ، -١٥) صغرى محلية مطلقة
(٠ ، ١) عظمى مطلقة
(٢ ، - ١٥) صغرى محلية مطلقة
(٤ ، ١٢٩) عظمى مطلقة

مثال(١٩٨) :

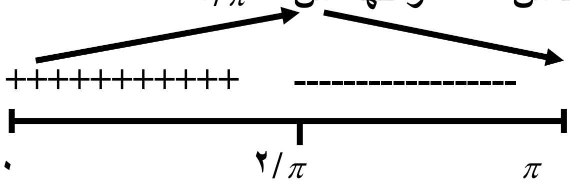
جد نقط القيم القصوى ونوعها للاقتران

ق(س) = جا س ، [٠ ، π]

الحل :

قَ(س) = جتا س

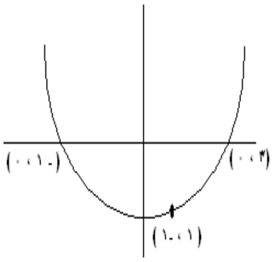
جتا س = ٠ ومنها س = π/٢



(٠ ، ٠) صغرى مطلقة
(π/٢ ، ١) عظمى محلية مطلقة
(π ، ٠) صغرى مطلقة

مثال(١٩٩) :

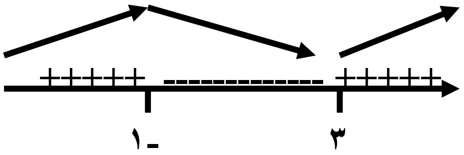
الرسم التالي يمثل المشتقة الاولى للاقتران اعتماداً علية اجب عما يلي



1. **مجالات التزايد والتناقص للاقتران**
2. **نقط القيم القصوى للاقتران**
3. **نقط القيم القصوى للمشتقة الاولى ونوعها**

٤. النقط الحرجة للاقتران

الحل :



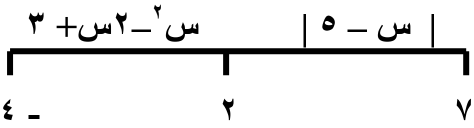
1. **(- ∞ ، -١] ، [٣ ، ∞) متزايد**
   [- ١ ، ٣] متناقص
2. **(- ١ ، ق (- ١)) عظمى محلية مطلقة**
   (٣ ، ق(٣)) صغرى محلية مطلقة
3. **(١ ، -١) صغرى محلية مطلقة**
4. **(- ١ ، ق (- ١)) ، (٣ ، ق(٣))**

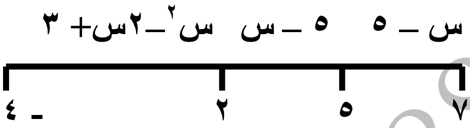
مثال(٢٠٠) :

جد نقط القيم القصوى ونوعها للاقتران

$$ق (س) = \begin{cases} س^{٢} - ٢س + ٣ & ، \ - ٤ \leq س < ٢ \\ | س - ٥ | & ، \ ٢ \leq س \leq ٧ \end{cases}$$

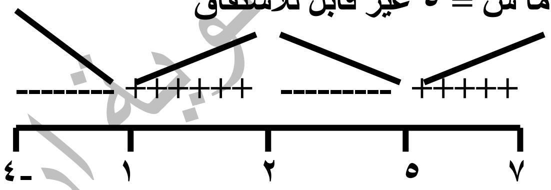
الحل :





$$قَ (س) = \begin{cases} ٢س - ٢ & ، \ - ٤ < س < ٢ \\ - ١ & ، \ ٢ < س < ٥ \\ ١ & ، \ ٥ < س < ٧ \end{cases}$$

عندما س = - ٤ ، ٧ غير قابل للاشتقاق اطراف فتره
عندما س= ٢ غير قابل للاشتقاق
عندما س = ٥ غير قابل للاشتقاق



(- ٤ ، ٢٧)
(١ ، ٢) صغرى محلية
(٢ ، ٣) عظمى محلية
(٥ ، ٠) صغرى محلية مطلقة
(٧ ، ٣٨) عظمى مطلقة

مثال(٢٠١) :

اذا كان

ق (س) = $\sqrt[٣]{س^{٣} - ٩ س}$: س ∋ ح

1. **اوجد قيم س التي يكون عندها نقط حرجة**
2. **فترات التزايد والتناقص**
3. **القيم القصوى**

الحل :

قَ (س) = $\frac{٣ س^{٢} - ٩}{٣ \sqrt[٣]{(س^{٣} - ٩ س)^{٢}}}$ تمرين للطالب

مثال (٢٠٢

كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة هو قَ(س)= ٢(س- ٣)^{٢}(س-١)^{٣}(س-٥)^{٤} فما جميع قيم س التي يوجد عنده قيم صغرى محلية لمنحنى الاقتران ق(س)؟

أ) {٥}   ب) { ٣، ٥}   جـ) {٢ ، ١ }   د√) { ١ }

مثال(٢٠٣) :

جد نقط القيم القصوى ونوعها للاقتران

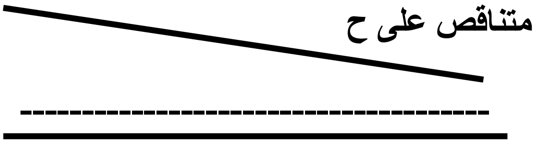
ق(س) = ٧ – ٣ س – س^{٣}

الحل :

قَ(س) = - ٣ – ٣ س^{٢}

- ٣ – ٣ س^{٢} ≠ ٠ لا تحلل

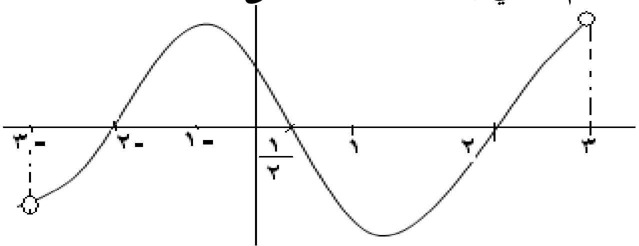
متناقص على ح



لا يوجد قيم قصوى

مثال(٢٠٤) :

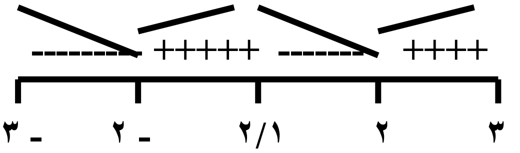
الرسم التالي يمثل المشتقة الاولى للاقتران



اعتماداً علية اجب عما يلي

1. **النقط الحرجة**
2. **القيم القصوى المحلية للاقتران**
3. **نقط القيم القصوى للمشتقة الاولى ونوعها**

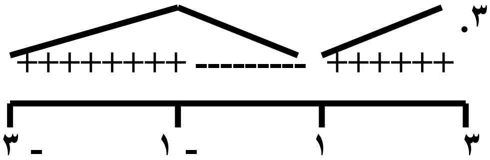
الحل

1. **ملاحظة : النقط الحرجة هي اطراف الفترة بالإضافة الى نقط تقاطعه مع محور السينات**
   س = { - ٣ ، - ٢ ، ٠,٥ ، ٢ ، ٣ }
2. 

(- ٢ ، ق (- ٢)) صغرى محلية

(٢/١ ، ق (٢/١)) عظمى محلية

(٢ ، ق (٢)) صغرى محلية

3. 

مثال(٢٠٥) :

اذا كان ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ٩س + ١

اوجد قيم أ ، ب اذا علمت ان للاقتران قيمة عظمى عندما س = ١ وقيمة صغرى عندما س = ٣

الحل :

قَ(س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + ٩

له قيمة عظمى عند س= ١ ، قَ(١) = ٠

٣ أ + ٢ ب + ٩ = ٠ ....(١)

له قيمة صغرى عند س= ٣ ، قَ(٣) = ٠

٢٧ أ + ٦ ب + ٩ = ٠ ....(٢)

من (١) ، (٢)

-٣(٣ أ + ٢ ب + ٩ = ٠)

٢٧ أ + ٦ ب + ٩ = ٠

- ٩ أ – ~~٦ ب~~ – ٢٧ = ٠

٢٧ أ + ~~٦ ب~~ + ٩ = ٠

١٨ أ – ١٨ = ٠ ومنها أ = ١

وبالتعويض في (١) تكون ب = - ٦

مثال(٢٠٦) :

ما هو الاقتران التربيعي الذي يمر بالنقطتين
(٠ ، ٠) ، (٢ ، - ١٢)
وله نقطة حرجة عندما س = ٢

الحل :

قاعدة الاقتران التربيعي
ق(س) = أ $س^{٢}$ + ب س + جـ
(٠ ، ٠) تحقق المعادلة ومنها ← جـ = ٠
(٢ ، - ١٢) تحقق المعادلة ومنها
أ $(٢)^{٢}$ + ب (٢) + ٠ = -١٢
ومنها ٤ أ + ٢ ب = - ١٢ ....(١)
له نقطة حرجة ← قَ(٢) = ٠
قَ(س) = ٢ أ س + ب
قَ(٢) = ٠ ← ٤ أ + ب = ٠ ....(٢)
من (١) ، (٢)
$\cancel{٤}$ أ + ٢ ب = - ١٢
- ($\cancel{٤}$ أ + ب = ٠)

ب = - ١٢ وبالتعويض في (٢) ← أ = ٣

مثال(٢٠٧) :

جد نقط القيم القصوى ونوعها للاقتران

ق(س)= ٣ $\sqrt[٣]{س}$ - س

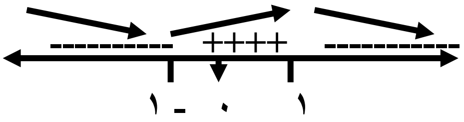
الحل :

$$قَ (س) = ٣ \frac{١}{٣ \sqrt[٣]{س^{٢}}} - ١$$

قَ (٠) = غ . م

$$\frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}} - ١ = ٠$$

النقط الحرجة { -١ ، ٠ ، ١ }
بتكعيب الطرفين $س^{٢}$ = ١ ومنها س = ± ١



مثال(٢٠٨) :

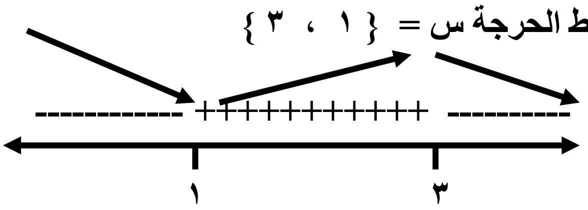
جد نقط القيم القصوى ونوعها للاقتران

$$ق (س) = \begin{cases} س^{٢} - ٢ س + ٢ & ، س < ٣ \\ \frac{١٥}{س} & ، س \geq ٣ \end{cases}$$

الحل :

$$قَ (س) = \begin{cases} ٢س - ٢ & ، س < ٣ \\ \frac{-١٥}{س^{٢}} & ، س \geq ٣ \end{cases}$$

عندما س = ٣ متصل لكنه غير قابل للاشتقاق
النقط الحرجة ٢ س – ٢ = ٠ ومنها س = ١
النقط الحرجة س = { ١ ، ٣ }



(١ ، ق(١)) = (١ ، ١) صغرى محلية

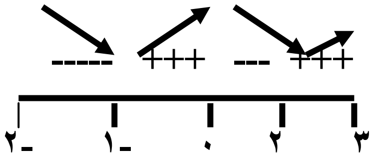
(٣ ، ق(٣)) = (٣ ، ٥) عظمى محلية

مثال(٢٠٩) : **

ليكن ق(س)= ٢ $س^{٣}$ – ٣ $س^{٢}$ – ١٢ س، [-٢ ، ٣]
١. اوجد جميع النقط الحرجة للاقتران ق
٢. جد القيم القصوى المحلية والمطلقة

الحل :

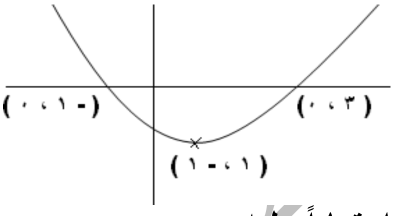
١. اطراف الفترة + اصفار المشتقة الاولى حرجة
قَ(س) = ٦ $س^{٢}$ – ٦ س - ١٢
٦ $س^{٢}$ – ٦ س – ١٢ = ٠ بالقسمة على ٦
$س^{٢}$ – س – ٢ = ٠
(س – ٢)(س + ١) =٠ ← س = ٢ ، -١
اذن الحرجة س = {-٢ ، -١ ، ٠ ، ٢ ، ٣ }



تمرين للطالب حدد القيم القصوى

مثال(٢١٠) :

الرسم التالي يمثل المشتقة الاولى للاقتران ق كثير الحدود من الدرجة الثالثة

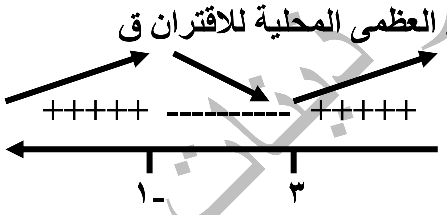


اعتماداً عليه

1. **جد مجالات التزايد التناقص**
2. **نقاط القيم العظمى المحلية للاقتران ق**

الحل :

١.



متزايد (- ∞ ، - ١] ، [٣ ، ∞)

متناقص [-١ ، ٣]

٢. **(-١ ، ق(- ١)) عظمى محلية**

(٣ ، ق(٣)) صغرى محلية

مثال(٢١١) :

اذا كان

ق(س) = { س^{٢} – ١ ، س < ٢
٥ – س ، س ≥ ٢

اوجد

1. **قيم س التي يكون عندها للاقتران ق نقطاً حرجة**
2. **القيم العظمى والصغرى**

الحل :

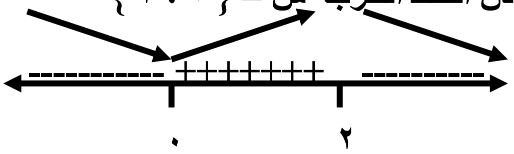
١.

قَ(س) = { ٢س ، س < ٢
-١ ، س > ٢

عندما س = ٢ متصل ولكن غير قابل للاشتقاق ؟؟؟

ومنها ٢ س = ٠ ومنها س = ٠

اذن النقط الحرجة س = { ٠ ، ٢ }



٢. **تمرين للطالب حدد القيم القصوى**

مثال (٢١٢

اذا كان ق(س) = س ^{٣} + س^{٢} – ٥ س + ١

س ∍ [-٢ ، ٢] جد

1. **فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)**
2. **نقط القيم العظمى والصغرى**

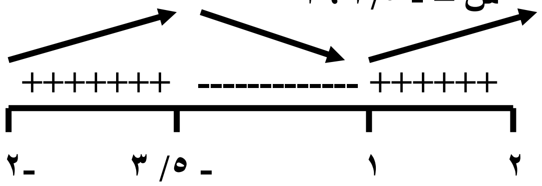
الحل :

١. **قَ(س) = ٣ س ^{٢} + ٢ س – ٥**

٣ س ^{٢} + ٢ س – ٥ = ٠

(٣ س + ٥)(س – ١) = ٠ ومنها

س = - ٥/٣ ، ١



متزايد [- ٢ ، - ٥/٣] ، [١ ، ٢]

متناقص [- ٥/٣ ، ١]

٢.

(- ٢ ، ق(-٢)) = (-٢، -٥) صغرى مطلقة

(-٥/٣ ، ق(-٥/٣)) = (-٥/٣، -٢٤)عظمى محلية

(١ ، ق(١)) = (١ ، -٢) صغرى محلية

(٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ٣) عظمى مطلقة

مثال (٢١٣):

اذا كان ق(س) = س ^{٣} – س ^{٢} – س + ٥

س ∍ [-١ ، ٤] اوجد

1. **الفترات التي يكون فيها الاقتران ق(س) متناقصاً**
2. **القيم القصوى المحلية**

الحل :

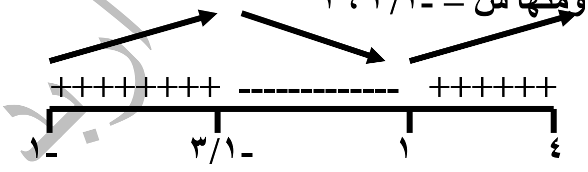
١.

قَ(س) = ٣ س ^{٢} – ٢ س – ١

٣ س ^{٢} – ٢ س – ١ = ٠ ومنها

(٣ س + ١) (س – ١) = ٠

ومنها س = -١/٣ ، ١



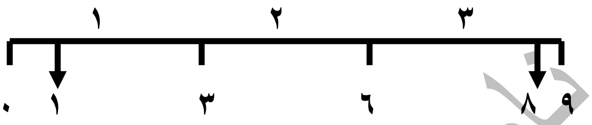
اكمل الحل

مثال (٢١٤):

اوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة

ق( ) = [١/٣ س + ١] ، [١ ، ٨]

الحل :



الحل :

ق َ(س) = { صفر ، ١ > س > ٣
صفر ، ٣ > س > ٦
صفر ، ٦ > س > ٨

عند س = ١ ، ٨ اطراف الفترة غير قابل للاشتقاق

عند س = ٣ غير قابل لانه غير متصل

عند س= ٦ غير قابل لانه غير متصل

س ∍للفترات (١ ، ٣) ، (٣ ، ٦) ، (٦ ، ٨)

صغرى وعظمى محلية

عظمى مطلقة [٦ ، ٨]

صغرى مطلقة [١ ، ٣]

اطراف الفترات الداخلية ليست مطلقة

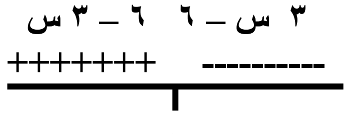
مثال (٢١٥):

اوجد النقط الحرجة والقيم القصوى المحلية

١. ق(س) = | ٦ – ٣ س |

٢. ق(س) = $\sqrt[٣]{س + ٢}$

الحل :

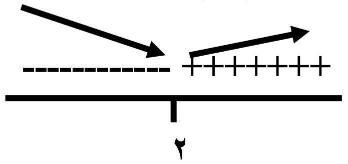


١.

ق َ (س) = { ٣- ، س > ٢
٣ ، س < ٢

عندما س = ٢ متصل لكنه غير قابل للاشتقاق

النقط الحرجة س= { ٢ }



(٢ ، ق(٢)) قيمة صغرى محلية

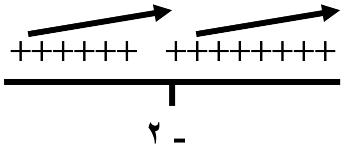
٢.

$$ق َ(س) = \frac{١}{٣ \sqrt[٣]{(س + ٢)^{٢}}}$$

غير قابل للاشتقاق عند س = ـ٢

وبما ان ق َ(س) ≠ ٠

اذن النقط الحرجة س = { ـ ٢ }



لا يوجد قيم قصوى

مثال (٢١٦):

.إذا كان ق(س) معرفاً على الفترة[٠ ، ٣] وقابلاً للاشتقاق في الفترة (٠ ، ٣) حيث

$$ق َ(س) = \frac{س – ٢}{س + ١}$$

فان جميع قيم س التي يوجد عندها قيم حرجة للاقتران ق (س) هي

أ) {٠ ، ـ١ ، ٢ ، ٣} √ب) {٠ ، ٢ ، ٣ }

جـ) {٠ ،٣} د) { ٢ }

مثال (٢١٧

إذا كان للاقتران ق(س) = م س^٣ – ٣ س^٢ قيمة صغرى محلية عند س = ٢ فان قيمة الثابت م تساوي

أ) ـ١ √ب) ١

جـ) ٢ د) ٣

مثال (٢١٨): مهم جداً

إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة هو $قَ(س) = ٢(س-٣)^{٢}(س-١)^{٣}(س-٥)^{٤}$ فان جميع قيم س التي يوجد عندها قيم صغرى محلية لمنحنى الاقتران ق(س)؟

أ) {٥}　　ب) { ٣، ٥}

جـ) {٢ ، ١ }　　√د) { ١ }

مثال (٢١٩

إذا كان ق اقتراناً معرفاً على [٠ ، ٣] وكان قَ(١) = صفر ، قً(١) = -٣ ، ق(١) = - ٢ ، فان مقدار القيمة العظمى المحلية للاقتران ق هي :

√أ) -٢　　ب) -٣

جـ) صفر　　د) ١

مثال (٢١٩

إذا كان $ق(س) = \sqrt{س^{٢} - ٢س + ٥}$ ، س ∍ ح فان الفترة التي يكون فيها الاقتران ق(س) متزايداً هي :

أ) (١ ، ∞)　　√ب) [١ ، ∞)

جـ) (- ، ١)　　د) [-١ ، ١]

مثال (٢٢٠

مجموعة النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = \sqrt{س^{٢} - ١٦س}$ هي

√أ) {٠ ، ١٦}　　ب) {٠ ، ٨، ١٦}

جـ) {٨}　　د) غير موجودة

مثال (٢٢١

٠اذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على (-٢ ، ٢) وكان قَ(١) = صفر ، قً(١) = -٧ ، ق(١) = -٥ فان مقدار القيمة العظمى المحلية للاقتران ق هي :

√أ) -٥　　ب) -٧

جـ) ١　　د) صفر

مثال (٢٢٢

إذا كان للاقتران $ق(س) = أ س^{٣} - ٩س^{٢}$ وكان لهذا الاقتران نقطة حرجة عند س = ٢ فان قيمة الثابت أ تساوي

أ) -١　　ب) ١

جـ) ٢　　√د) ٣

مثال (٢٢٣

إذا كان $ق(س) = \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$ ، : | س | ≤ ٦ فان ق(س) يكون متزايداً عندما فان الفترة التي يكون فيها الاقتران ق(س) متزايداً هي :

أ) س ≤ صفر　　ب) س≤ -٦

√جـ) -٦ ≤ س≤ ٠　　د) ٠ ≤ س≤ ٦

مثال (٢٢٤

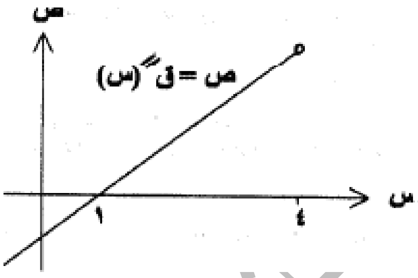
إذا كان $ق(س) = ٢ س^{٢} + أ س + ٥$ وكان للاقتران ق(س) حرجة عند س = ١ فان قيمة أ ؟

أ) -٧　　ب) صفر

√جـ) -٦　　د) -١١

مثال (٢٢٥):

اذا كان ق اقتراناً متصلاً على الفترة [- ١ ، ٤] وكان للمشتقة الثانية الشكل البياني المجاور ، فان قَ يكون متناقصاً في الفترة



أ) [١ ، ٤]

ب) [-١ ، ٤]

√ج) [-١ ، ١]

د) [-١ ، ٠]

ملاحظات مهمة

١. رسم المشتقة الاولى والمشتقة الثانية بالنسبة للاقتران الاصلي
   - فوق محور السينات موجب
   - تحت محور السينات سالب

٢.

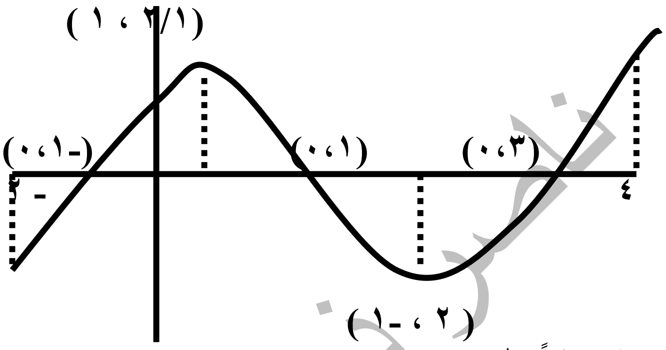
ق(س)	قَ (س)	قً (س)
متزايد	+	
متناقص	-	

متزايد على الواقع + فوق محور السينات

متناقص على الواقع - تحت محور السينات

مثال (٢٢٦):

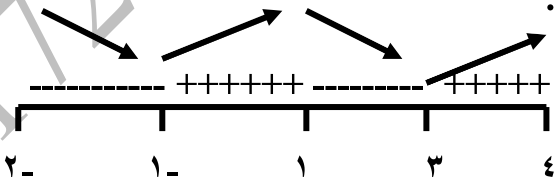
الرسم التالي يمثل المشتقة الاولى للاقتران ق(س) ،[-٢ ، ٤]



اعتماداً عليه حدد

1. **فترات التزايد والتناقص للاقتران**
2. **القيم القصوى للاقتران ونوعها**
3. **فترات التزايد والتناقص للمشتقة الاولى**
4. **القيم القصوى للمشتقة الاولى**
5. **القيم القصوى للمشتقة الاولى**

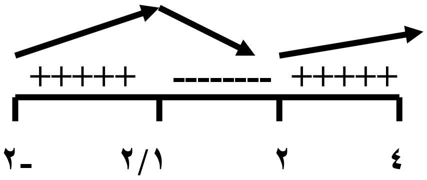
الحل :



١. متزايد [- ١ ، ١] ∪ [٣ ، ٤]
متناقص [- ٢ ، -١] ∪ [١ ، ٣]

٢.
(-١، ق(-١)) ، (٣، ق (٣)) صغرى محلية
(١، ق(١)) عظمى محلية

٣.



٤. تمرين للطالب

اختبار المشتقة الثانية في ايجاد القيم القصوى ونوعها

نظرية اذا كان ق(س) متصلاً على [أ ، ب] ، قَ ، قً موجودتين (أ ، ب) وكانت قَ(س) = صفر ، س ∋ (أ ، ب) فانه

1. **اذا كانت قً(س) > صفر فان ق(س)صغرى**
2. **اذا كانت قً(س) < صفر فان ق(س) عظمى**
3. **اذا كانت قً(س) = صفر تفشل وتعود الى اختبار المشتقة الاولى**

طريقـــــــــــة الاســــــــــــتعمال

نجد المشتقة الاولى ونساويها بالصفر ثم نجد الجذور

١. نجد المشتقة الثانية ونعوض في جذور الاولى

- **☒ اذا كانت القيمة موجبة صغرى**
- **☒ اذا كانت القيمة سالبة عظمى**
- **☒ اذا كانت القيمة صفر تفشل نعود الى المشتقة الاولى**

مثال (٢٢٧):

ق(س) = س^{٤}ـ٤س^{٣} + ٢س ـ٣ ، س ∍ [ـ٥ ، ٥]

اوجد

١. النقط الحرجة أن أمكن
٢. مجالات التزايد والتناقص للاقتران أن أمكن
٣. نقط القيم القصوى المحلية ، والمطلقة أن أمكن

الحل : تمرين للطالب

مثال (٢٢٨):

باستخدام المشتقة الثانية جد نقط القيم القصوى

ق(س) = س ^{٣} ــ ٣ س ^{٢} ــ ٩ س + ٧

الحل :

قَ(س) = ٣ س ^{٢} ــ ٦ س ــ ٩
٣ س ^{٢} ــ ٦ س ــ ٩ = ٠بالقسمة على ٣
س ^{٢} ــ ٢ س ــ ٣ = ٠ومنها
(س ــ ٣)(س+ ١) = ٠ ومنها س= ـ ١ ، ٣
قً(س) = ٦ س ــ ٦
قً(ـ١) = ٦ × ـ١ ــ ٦ = ـ ١٢ له قيمة عظمى محلية عند س= ـ ١ وهي (ـ١ ، ق(ـ ١))
قً(٣) = ٦ × ٣ ــ ٦ = ١٢ له قيمة صغرى محلية عند س=٣ وهي (٣ ، ق(٣))

مثال (٢٢٩):

بين ان اختبار المشتقة الثانية لا تصلح

ق(س) = س ^{٤} + ٣

الحل :

قَ (س) = ٤ س ^{٣}
٤ س ^{٣} = ٠ ومنها س= ٠
قً(س) = ١٢ س ^{٢}
قً(٠) = ١٢ (٠) ^{٢} = ٠ لا تصلح النظرية
لايجاد القيم القصوى تمرين للطالب

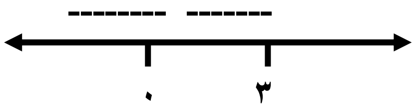
مثال (٢٣٠):

باستخدام المشتقة الثانية جد نقط القيم القصوى

ق(س) = س ^{٤} ــ ٤ س ^{٣}

الحل :

قَ (س) = ٤ س ^{٣} ــ ١٢ س ^{٢}
٤ س ^{٣} ــ ١٢ س ^{٢} =
س ^{٢} (٤ س ــ ١٢) = ٠ ومنها س = ٠ ، ٣
قً(س) = ١٢ س ^{٢} ــ ٢٤ س
قً(٠) = ١٢ (٠) ^{٢} ــ ٢٤ (٠) = ٠ لا تصلح



لا يوجد قيم قصوى عند س = ٠
قً(٣) = ١٢(٣)^{٢} ــ٢٤×٣= + له قيمة صغرى وهي (٣ ، ق(٣))

مثال (٢٣١):

باستخدام المشتقة الثانية جد نقط القيم القصوى

٢ ١
ق(س) = جا ـــ س – جتا س [٠ ، ٢ π]
٢

الحل :

١ ١
قَ (س) = جا ـــ س جتا ـــ + جا س
٢ ٢

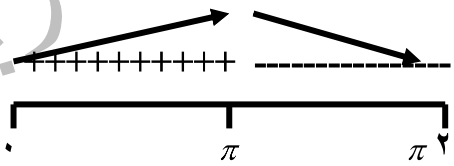
١ ٣
= ـــ جا س + جا س = ـــ جا س
٢ ٢

ومنه جا س = ٠ ومنه س = π

٣
قً (س) = ـــ جتا س
٢

٣
قً (π) = ـــ جتا π = -
٢

له قيمة عظمى عند س = π وهي (π ، ق (π))
اما عند الاطراف نستخدم اختبار المشتقة الاولى



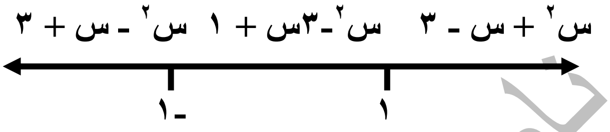
(٠ ، ق (٠)) = (٠ ، ـ١)
(٢ π ، ق (٢ π)) = (٢ π ، ـ١)
اذن صغرى مطلقة عند الاطراف

مثال (٢٣٢):

باستخدام المشتقة الثانية جد نقط القيم القصوى

ق(س) = ٢|س – ١ | - |س + ١ | + س^{٢}

الحل :



$$\text{قَ (س)} = \begin{cases} \text{٢ س – ١ ، س <-١} \\ \text{٢ س - ٣ ، -١< س < ١} \\ \text{٢س + ١ ، س > ١} \end{cases}$$

عندما س = - ١ ، ١ متصل لكنه غير قابل للاشتقاق

قَ(س) = ٠ ومنها

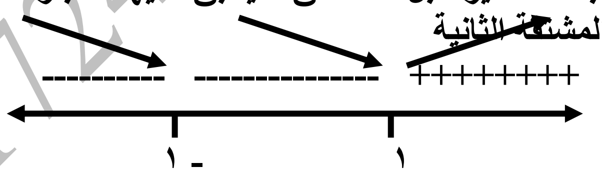
٢ س – ٣ = ٠ ، س = ١,٥ لا تنتمي (-١ ، ١)

٢س + ١ =٠ ، س = -٠,٥ لا تنتمي س >١

٢ س – ١ = ٠ ، س =٠,٥ لا تنتمي س <-١

اذن النقط الحرجة هي س = { -١ ، ١ }

بما انه غير قابل للاشتقاق لا يطبق عليها اختبار المشتقة الثانية



له قيمة صغرى محلية عند س =١ هي ق(١) = -١

مثال (٢٣٣):

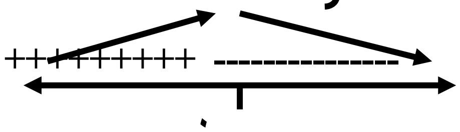
$$\text{ق (س)} = \begin{cases} \text{- س}^{٢} \text{ ، س} \geq \text{٠} \\ \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{٢}} \text{ ، س} < \text{٠} \end{cases}$$

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

الحل :

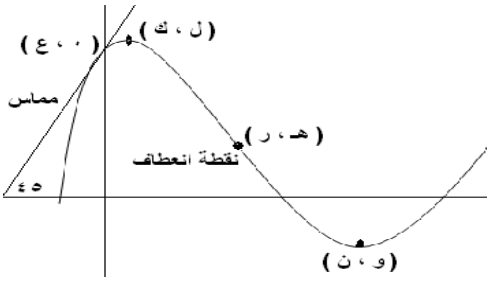
١. عندما س = ٠ متصل

$$\text{قَ (س)} = \begin{cases} \text{- ٢ س ، س > ٠} \\ \text{صفر ، س = ٠} \\ \text{س ، س < ٠} \end{cases}$$



مثال (٢٣٤):

الرسم التالي يمثل منحنى الاقتران ق كثير الحدود من الدرجة الثالثة اعتماداً عليه



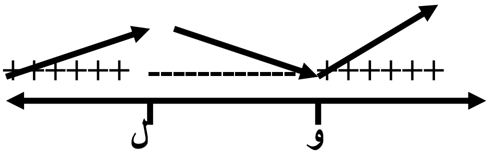
١. جد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق

٢. جد قَ(ل) ، قَ(و) ،قَ(٠)

٣. ارسم منحنى قَ(س)

الحل :

١.



(-∞ ، ل] ∪ [و ، ∞) ق متزايد

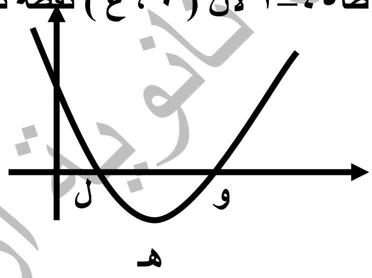
[ل ، و] متناقص

٢. عند القيم القصوى المحلية يكون قَ(س) = ٠

قَ(ل) = ٠ ، قَ(و) = ٠ ،

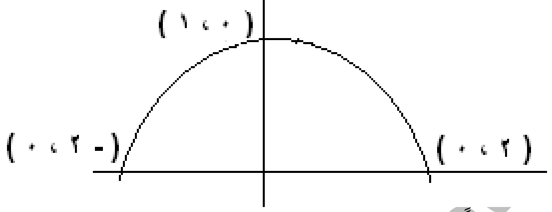
أما قَ(٠) = ظا٤٥ =١ لان (٠ ، ع) نقطة تماس

٣.



مثال (٢٣٥):

الرسم التالي يمثل المشتقة الاولى للاقتران ق(س)

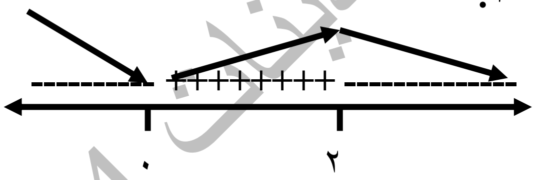


اعتماداً عليه حدد

١. فترات التزايد والتناقص للاقتران ق
٢. القيم القصوى للاقتران ق

الحل :

١.



٢.

(٠ ، ق(٠)) صغرى محلية

(٢ ، ق(٢)) عظمى محلية

مثال (٢٣٦):

اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على مجموعة الاعداد الحقيقية ح وكانت المشتقة الاولى للاقتران ق(س) هي قَ(س) = ٦ س – ٣ س ^{٢} فجد

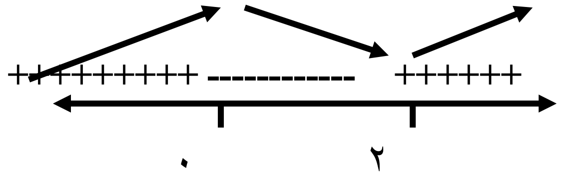
١. مجالات التناقص والتزايد ان وجدت
٢. النقط الحرجة للاقتران

الحل :

١. ٦ س – ٣ س ^{٢} = ٠

س (٦ – ٣ س) = ٠ ومنها

س = ٠ ، س = ٢



٢. الحرجة س = { ٠ ، ٢ }

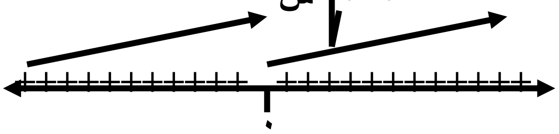
مثال(٢٣٧) :**

ليكن ق(س) = $\sqrt[٥]{س^{٣}}$

جد مجالات التناقص والتزايد ان وجدت

الحل :

$$قَ (س) = \frac{٣}{٥ \sqrt[٥]{س^{٢}}}$$



متزايد على ح

مثال(٢٣٨) : **

اذا كان

ق(س) = { س ^{٢} – ٤ ، س < ٣
 { ٨ - س ، س ≥ ٣

اوجد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

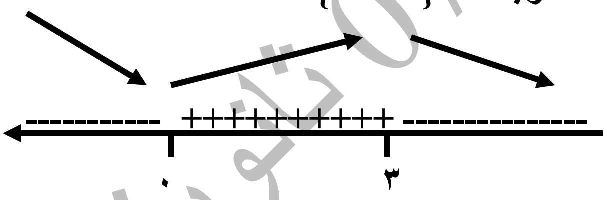
الحل :

قَ(س) = { ٢س ، س < ٣
 { - ١ ، س > ٣

عندما س = ٣ متصل لكنه غير قابل للاشتقاق

٢ س = ٠ ومنها س = ٠

الحرجة { ٠ ، ٣ }



مثال (٢٣٩

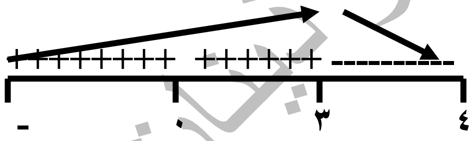
اذا كان ق(س)= س^{٣} ــ ١/٤ س^{٤} ،
س ∋ [-١ ، ٤]

اوجد

١. فترات التزايد والتناقص للاقتران ق
٢. القيم القصوى المحلية والمطلقة منها

الحل :

١. قَ(س) = ٣ س^{٢} ــ س^{٣}
٣ س^{٢} ــ س^{٣} = ٠ ومنها س^{٢}(٣ ــ س) = ٠
ومنها س= ٠ ، ٣



[- ١ ، ٣] متزايد ، [٣ ، ٤] متناقص
٢. ق(- ١) = - ٥/٤ صغرى مطلقة
ق (٣) = ٢٧/٤ عظمى محلية مطلقة
ق(٤) = صفر

مثال (٢٤٠):

اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^{\frac{٢}{٥}} & ، \quad س < ١ \\ س + \frac{٤}{س} & ، \quad س \geq ١ \end{cases}$$

اوجد

١. فترات التزايد والتناقص للاقتران
٢. القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

الحل : تمرين للطالب

مثال (٢٤١

اذا كان

ق(س) = ٣ س$^{\frac{١}{٣}}$ - س

فجد

١. الفترات التي يكون فيها الاقتران متزايداً
٢. القيمة العظمى المحلية للاقتران

الحل : تمرين للطالب

مثال (٢٤٢):

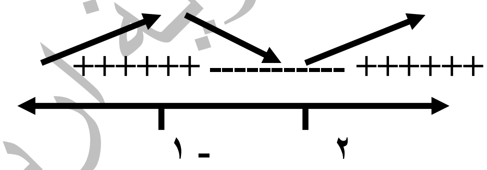
اذا كان ق(س)= ٢ س^{٣} ــ ٣ س^{٢} ــ ١٢ س + ٥

اوجد

١. فترات التزايد والتناقص ان وجدت
٢. نقط القيم العظمىالمحلية للاقتران ق(س)

الحل :

قَ(س) = ٦س^{٢} ــ ٦س ــ ١٢
٦س^{٢} ــ ٦س ــ ١٢ = ٠
س^{٢} ــ س ــ ٢ = ٠
(س ــ ٢)(س + ١) = ٠ ومنها س = -١ ، ٢



يكمل الحل

مثال (٢٤٣):

اذا كان ق(س)=٤– س + جا س ، [- π ، π]

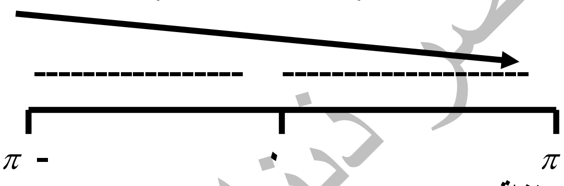
اوجد

1. **فترات التناقص ان وجدت**
2. **نقط القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)**

الحل :

قَ(س) = - ١ + جتا س

-١+ جتا س = ٠ ومنها جتاس=١ ومنها س = ٠



متناقص [- π ، π]

(- π ، ق(- π)) عظمى مطلقة

(π ، ق(π)) صغرى مطلقة

مثال (٢٤٤):

اذا كان ق(س)= -٢س^{٣}–٣س^{٢}+٣٦ س + ١٠

اوجد نقط القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

الحل : تمرين للطالب

مثال (٢٤٥):

اذا كان ق(س) = س (٢ – س)^{٣} ، س ∍ [-١ ، ٤]

اوجد

1. **الفترات التي يكون فيها الاقتران ق(س) متزايد**
2. **القيم القصوى المطلقة**

الحل :

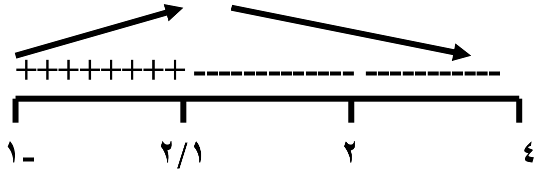
قَ(س) = س×٣(٢ – س)^{٢}(-١) + (٢ – س)^{٣} (١)

- ٣ س (٢ – س)^{٢} + (٢ – س)^{٣} = ٠

(٢ – س)^{٢}(- ٣ س + (٢ – س)) = ٠

(٢ – س)^{٢}(- ٤ س + ٢) = ٠

ومنها س = ٢ ، ٢/١



يكمل

مثال (***): اذا كان

$$ق (س) = \begin{cases} \text{أ س}^{٢} + \text{ب س - ٦ ، س} < ٢ \\ \text{أ س + ٢ب ، س} \geq ٢ \end{cases}$$

متصل عند س= ٢ ، وكان قَ(٣)=١٦ جد ما يلي

1. **قيمة كل من الثابتين أ ، ب**
2. **القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س)**

مثال (***): اذا كان

$$ق (س) = \begin{cases} \text{(س+١)}^{٢} \text{ ، س} < ٠ \\ \text{أ + ٣س}^{٢} \text{ – س}^{٣} \text{ ، س} \geq ٢ \end{cases}$$

وكانت نهـــــا ق(س)موجودة جد ما يلي
س←٠

1. **قيمة أ**
2. **القيم العظمى والصغرى المطلقة للاقتران ق(س) في الفترة [-٣ ، ٤]**

مسائل عملية على القيم القصوى

هذا النوع من المسائل يشبه في اهميته اسئلة المعدلات المرتبطة بالزمن وحتى نميز بينه وبين المعدلات المرتبطة بالزمن نلاحظ في كل سؤال اكبر من ، اصغر من ، اقل حجم ، اكبر مساحة

لحل هذا النوع من المسائل نتبع ما يلي

١. افهم السؤال وارسمه ان كان بحاجة لرسم
٢. كون علاقة ويجب ان تكون هذه العلاقة اقتران فيه مجهول واحد ويمكنك التخلص من باقي المجاهيل من خلال اشياء معلومة في السؤال
٣. بعد ان تكون الاقتران اشتق واجعل المشتقة = صفر ثم اختبر الجواب الذي حصلت عليه اما باستخدام المشتقة الاولى او المشتقة الثانية

مثال (٢٤٦):

جد العددين اللذين مجموعهما ٩٠ وحاصل ضرب أحداهما في مربع الأخر اكبر ما يمكن

الحل :

نفرض ان العدد الاول س
الثاني ص

س+ ص = ٩٠ ومنها ص = ٩٠ – س

ق(س) = س^{٢} × ص

ق(س) = س^{٢} (٩٠ – س)= ٩٠س^{٢} – س^{٣}

قَ(س) = ١٨٠ س – ٣ س^{٢}

١٨٠س–٣س^{٢} = ٠ ومنها س(١٨٠–٣س)= ٠

ومنها س = ٠ ، ٦٠

قً (س) = ١٨٠ – ٦ س

قً (٠) = ١٨٠ – ٦ (٠) = + له قيمة صغرى

قً (٦٠) = ١٨٠ – ٦(٦٠) = - له قيمة عظمى

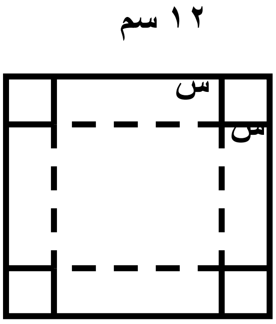
اكبر ما يمكن عندما س = ٦٠

اذن ص = ٣٠

مثال (٢٤٧)

يراد صنع صندوق مفتوح من الاعلى من قطعة مربعة الشكل طول ضلعها ١٢ سم وذلك بقطع اربع مربعات متساوية من أطوال إضلاعها الأربعة ثم ثني الأجزاء البارزة للأعلى اوجد اكبر حجم يمكن صنعه بهذه الطريقة

الحل :



ح= الطول×العرض × الارتفاع

ح = (١٢-٢س)(١٢-٢س)(س)

= ١١٤س – ٤٨س^{٢} + ٤ س^{٣}

حَ = ١٤٤ – ٩٦س + ١٢ س^{٢}

١٢ – ٨ س + س^{٢} = ٠

(٦ – س)(٢ – س) = ٠ ومنها س = ٦ ، ٢

حً = - ٩٦ + ٢٤ س

عندما س = ٢ حً = - له قيمة عظمى

عندما س = ٦ حً = + له قيمة صغرى

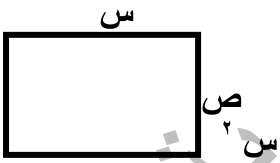
اذن يكون اكبر حجم عندما س = ٢

ح = ٨ × ٨ × ٢ = ١٢٨ سم^{٣}

مثال (٢٤٨):

اذا كان لديك سلك طوله ٨٠ م اوجد مساحة اكبر قطعة ارض مستطيلة يمكن سياجها

الحل :



٢ س + ٢ ص = ٨٠

ومنها ص = ٤٠ – س

م= س × ص

= س (٤٠ – س) = ٤٠ س – س^{٢}

مَ= ٤٠ - ٢ س ومنها ٤٠- ٢ س = ٠

ومنها س = ٢٠

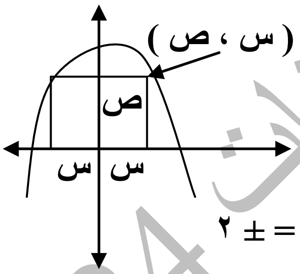
مً = - ٢ له قيمة عظمى عند س = ٢٠

م = ٢٠ × ٢٠ = ٤٠٠ سم^{٢}

مثال (٢٤٩):

اوجد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث يقع احد بعديه منطبقاً على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى القطع ص = ١٢ ــ س^{٢}

الحل :



م = الطول × العرض

= ٢ س (١٢ ــ س^{٢})

= ٢٤ س ــ ٢ س^{٣}

مَ = ٢٤ ــ ٦ س^{٢}

٢٤ ــ ٦ س^{٢} = ٠ ومنها س = ± ٢

مً = ـ١٢ س

مً(٢) = ـ١٢ (٢) = ـ له قيم عظمى

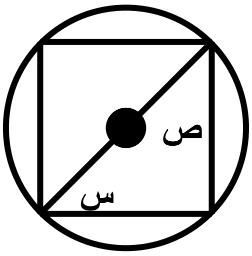
مً(ـ٢) = ـ١٢ (ـ ٢) = + له قيم صغرى

م = ٢٤ × ٢ ـ ٢ × ٨ = ٣٢م^{٢}

مثال (٢٥٠):

اوجد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سم

الحل :



م = س × ص

لكن (٢٠)^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}

ص = $\sqrt{٤٠٠ - س^{٢}}$

م = (س) $\sqrt{٤٠٠ - س^{٢}}$

م = $\sqrt{٤٠٠ س^{٢} - س^{٤}}$

مَ = $\dfrac{٨٠٠ س - ٤ س^{٣}}{٢ \sqrt{٤٠٠ س^{٢} - س^{٤}}}$ = ٠

ومنها س = ٠ ، ± $\sqrt{٢٠٠}$ اكمل الحل

مثال (٢٥١):

يريد رجل اقامة سياج حول قطعة مستطيلة الشكل تقع على ضفة نهر مستقيم فاذا لم يسيج طرف النهر اوجد ابعاد القطعة ليكون طول السياج اقل ما يمكن علماً بان مساحته ٨٠٠ م^{٢}

الحل :

المحيط = ح = ٢ س + ص

لكن م = س × ص = ٨٠٠

ومنها ص = $\dfrac{٨٠٠}{س}$

ح = ٢ س + $\dfrac{٨٠٠}{س}$

حَ = ٢ - $\dfrac{٨٠٠}{س^{٢}}$ ومنها س = ±٢٠

حً = $\dfrac{١٦٠٠}{س^{٣}}$

عندما س = ٢٠ ، حً = + له قيمة صغرى

عندما س = ـ ٢٠ ، حً = ـ له قيمة عظمى

ومنها ح = ٤٠ +٤٠ = ٨٠

مثال (٢٥٢):

نريد صنع صندوق بلا غطاء قاعدته مربعة الشكل حجمه ٣٢ سم^{٣} اوجد ابعاد الصندوق لتكون كمية المادة المستخدمة اصغر ما يمكن

الحل :

ح = س^{٢} × ص = ٣٢

ص = $\dfrac{٣٢}{س^{٢}}$

المادة المستخدمة = م الجانبية + م القاعدة

ك = ٤ س ص + س^{٢}

ك = ٤ $\cancel{س}$ $\dfrac{٣٢}{س^{\cancel{٢}}}$ + س^{٢}

ك = $\frac{١٢٨}{س}$ + $س^{٢}$

كَ = $\frac{-١٢٨}{س^{٢}}$ + ٢س = ٠

$\frac{-١٢٨ + ٢ س^{٣}}{س^{٢}}$ = ٠ ومنها س = ٤

كً = $\frac{١٢٨ \times ٢ س}{س^{٤}}$ + ٢

عندما س = ٤ تكون كً = + اقل ما يمكن

ك = ٣٢ + ١٦ = ٤٨

مثال (٢٥٣):

ما هو العدد الموجب الذي مجموعه مع مقلوبه اقل ما يمكن

الحل :

نفرض ان العدد س

ق(س) = س + $\frac{١}{س}$

قَ(س) = ١ - $\frac{١}{س^{٢}}$ = ٠ ومنها س =± ١

قً(س) = $\frac{٢ س}{س^{٤}}$ = ٠ ومنها س =± ١

قً(١) = + اقل ما يمكن

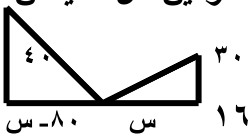
قً(-١) = - اكبر ما يمكن

اذن س = ١

مثال (٢٥٤):

عمودان ارتفاعهما ٣٠م ، ٤٠ م والبعد بينهما ٨٠ م جد النقطة على المستقيم الواصل بين قاعدتيهما بحيث يكون مجموع مربعي بعديهما عن قمتي العمودين اقل ما يمكن

الحل :



ف = $س^{٢}$+٩٠٠+$(٨٠-س)^{٢}$+١٦٠٠

فَ = ٢س+٢(٨٠ - س)(-١)

= ٢ س -١٦٠ + ٢س =٤س -١٦٠

٤ س - ١٦٠ = ٠ ومنها س = ٤٠

فً= ٤ له قيمة صغرى أي يكون اقل ما يمكن عندما س = ٤٠

مثال (٢٥٥):

يبيع مصنع للألعاب س من القطع من إنتاجه أسبوعيا بسعر القطعة الواحدة (٢٠٠ - ٠,٠١ س) فلساً إذا كانت كلفة إنتاج س من القطع هي (٥٠ س + ٢٠٠٠) فلساً ما عدد القطع التي يجب أن ينتجها المصنع ليحقق أعظم ربح

الحل :

الربح = الايراد - التكلفة

ر = س (٢٠٠-٠,٠١س)- (٥٠ س +٢٠٠٠)

= ٢٠٠ س - ٠,٠١$س^{٢}$ - ٥٠ س - ٢٠٠

= ١٥٠ س - ٠,٠١$س^{٢}$ - ٢٠٠

رَ = ١٥٠ - ٠,٢ س = ٠ ومنها س = ٧٥٠٠

رً = - له قيمة عظمى اذن يحقق اعظم ربح عندما

س = ٧٥٠٠

مثال (٢٥٦):

يتحرك جسيم على خط مستقيم فيقطع مسافة مقدارها س في زمن قدره ن حسب العلاقة

س = ن^{٤} – ١٠ ن^{٣} + ٣٦ ن^{٢} + ٢ ن + ١

ما أقصى سرعة يصل اليها الجسم

الحل :

س = ن^{٤} – ١٠ ن^{٣} + ٣٦ ن^{٢} + ٢ ن + ١
ع = سَ = ٤ ن^{٣} – ٣٠ ن^{٢} + ٧٢ن + ٢
عَ = ١٢ن^{٢} – ٦٠ ن + ٧٢ بالقسمة على ١٢
ن^{٢} – ٥ ن + ٦ = ٠ ومنها
(ن – ٣)(ن – ٢) = ٠ ومنها ن= ٣ ، ٢
عً = ٢ ن - ٥
عً (٣) = ٢ (٣) - ٥ = + صغرى
عً (٢) = ٢ (٢) - ٥ = - عظمى
أقصى سرعة يصل اليها الجسم عندما ن = ٢
ع (٢) = ٤ (٢)^{٣} – ٣٠ (٢)^{٢} + ٧٢(٢)+ ٢
= ٣٢-١٢٠ + ١٤٤+ ٢

مثال (٢٥٧):

يتحرك جسيم على خط مستقيم فيقطع مسافة مقدارها س في زمن قدره ن حسب العلاقة

س = ٣ن^{٤} – ٢ن^{٣} + ن^{٢} - ن + ١

ما اقل تسارع يصل اليها الجسم

الحل:

س = ٣ن^{٤} – ٢ن^{٣} + ن^{٢} - ن + ١

ع= سَ = ١٢ن^{٣} – ٦ ن^{٢} + ٢ ن - ١

ت = عَ = ٣٦ ن^{٢} – ١٢ ن + ٢

تَ = ٧٢ ن – ١٢

٧٢ ن – ١٢ = ٠ ومنها ن = ٦/١

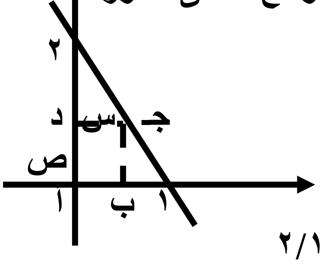
تً = ٧٢

تً (٦/١) = + اقل ما يمكن

ت (٦/١) = ٣٦ (٦/١)^{٢} – ١٢ (٦/١) + ٢= ١

مثال (٢٥٨):

جد اكبر مساحة ممكنة لمستطيل أ ب جـ د إذا علمت أن أ هي نقطة الأصل وتقع ب على محور السينات وتقع جـ على المستقيم ص=٢–٢س وتقع د على محور الصادات



الحل :

م = س × ص
= س ×(٢ – ٢س)
= ٢ س – ٢ س^{٢}
مَ = ٢ – ٤ س ومنها س = ٢/١
مً = -٤ س
مً (٢/١)= -٤ (٢/١) = - عظمى
اكبر ما يمكن عندما س = ٢/١
م = = ٢/١(٢-١)=٢/١

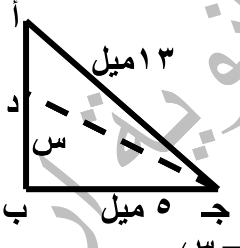
مثال (٢٥٩):

شخص في غابة يبعد ٥ أميال عن طريق مستقيم معبد و١٣ ميل عن بيت يقع على الطريق إذا كان باستطاعة هذا الشخص أن يسير ٣ ميل / ساعة في الغابة وبسرعة ٥ ميل / ساعة على الطريق جد اقصر وقت يحتاجه الشخص للوصول الى البيت علما بأنه يسير في الغابة بخط مستقيم

الحل :

افرض ان الشخص سينزل عند د والتي تبعد س عن ب

المسافة في الغابة جـ د = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢٥}$



$$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$$

$$\text{ن}_{١} = \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢٥}}{٣}$$

المسافة على الارض أ د = ١٢ – س

$$\text{ن}_{٢} = \frac{١٢ - \text{س}}{٥}$$

الزمن الكلي = ن$_{١}$ + ن$_{٢}$

ن$_{ك}$ = ٣/١ $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢٥}$ + ٥/١(١٢ – س)

نَ ك = $\frac{٢ س}{٦ \sqrt{س^{٢} + ٢٥}} - \frac{١}{٥}$ = ٠ومنها س = ٣,٧٥

نشتق مشتقة ثانية ونعوض قيمة س تكون +

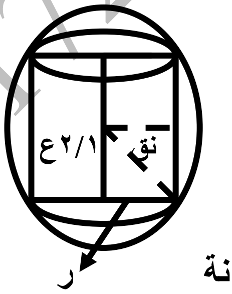
اذن عند س = ٣,٧٥تكون اصغر ما يمكن

ومنها أ ب =

مثال (٢٦٠):

كرة نصف قطرها نق حيث نق ثابت ، جد بدلالة نق كلاً من نصف قطر قاعدة وارتفاع الاسطوانة الدائرية القائمة ذات اكبر حجم التي يمكن رسمها داخل هذه الكرة

الحل :



ح الاسطوانه = م القاعدة × الارتفاع

= ر^{٢}× π × ع

= (نق^{٢}- ١/٤ ع^{٢})× π × ع

= (نق^{٢} ع- ١/٤ ع^{٣})× π

حَ = (نق^{٢} - ٣/٤ ع^{٢})× π = ٠

ع = $\sqrt{٣/٤ \text{ نق}^{٢}}$ ارتفاع الاسطوانة

حً = π × -٦/٤ ع

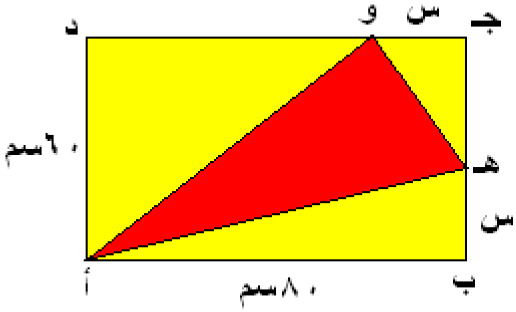
حً = π × -٦/٤ ($\sqrt{٣/٤ \text{ نق}^{٢}}$)= - اذن له اكبر حجم عند ع

لايجاد نق القاعدة

نق^{٢} = ر^{٢}×١/٤ × ٣/٤ نق^{٢} ومنها ر= $\sqrt{٣/٢}$ نق

مثال (٢٦١)

اراد احد الاندية تصميم راية له مستطيلة الشكل صفراء اللون وبداخلها مثلث احمر اللون بحيث يكون ب هـ = جـ و = س كما في الشكل



جد اقل مساحة ممكنة للمثلث أ هـ و

الحل :

م$_{\Delta}$ و هـ أ = م $_{\square}$أ ب جـ د– (م$_{\Delta}$هـ جـ و+ م$_{\Delta}$ ب هـ أ + م$_{\Delta}$ و د أ)

= ٨٠×٦٠ – (٢/١س (٦٠-س) + ٢/١ س × ٨٠ + ٢/١ × ٦٠ ×(٨٠-س))

م =٤٨٠٠+ ٢/١ س^{٢} – ٤٠ س - ٢٤٠٠

مَ = س – ٤٠ =٠ ومنها س = ٤٠

مً = + اصغر ما يمكن

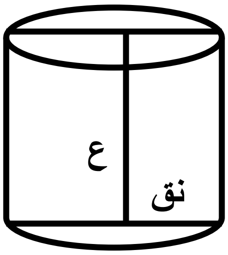
م = ٤٨٠٠ + ٨٠٠ - ١٦٠٠ - ٢٤٠٠

مثال (٢٦٢):

يراد صنع وعاء اسطواني الشكل قاعدته دائرية ومفتوحة من الأعلى ، لتكون سعته ٥٤πسم٣ فإذا كانت تكاليف صنع سم^{٢} من الجوانب قرشين ومن القاعدة ٤قروش . اوجد أبعاد هذا الوعاء لتكون تكلفة صناعته اقل ما يمكن .

الحل :

المساحة الكلية بدون غطاء = م الجانبية + م القاعده



$\text{م}_{\text{ك}} = ٢\,\text{نق}\,\pi\,\text{ع} + \text{نق}^{٢}\,\pi$

$\text{لكن ح} = ٥٤\,\pi = \text{نق}^{٢}\,\pi\,\text{ع}$

$\text{ومنها ع} = \frac{٥٤}{\text{نق}^{٢}}$

$\text{م}_{\text{ك}} = ٢\,\cancel{\text{نق}}\,\pi\,\frac{٥٤}{\text{نق}^{\cancel{٢}}} + \text{نق}^{٢}\,\pi$

$\text{م}_{\text{ك}} = \frac{١٠٨\,\pi}{\text{نق}} + \text{نق}^{٢}\,\pi$

$\text{ت م}_{\text{ك}} = \frac{٢١٦\,\pi}{\text{نق}} + ٤\text{نق}^{٢}\,\pi$

$\text{تَ م}_{\text{ك}} = \frac{-\ ٢١٦\,\pi}{\text{نق}^{٢}} + ٨\,\pi\,\text{نق} = ٠$

$\frac{-\ ٢١٦\,\pi}{\text{نق}^{٢}} = -\ ٨\,\pi\,\text{نق}$

$\text{ومنها نق} = ٣$

$\text{تً م}_{\text{ك}} = \frac{-\ ٢١٦\,\pi \times ٢\,\text{نق}}{\text{نق}^{٤}} + ٨\,\pi$

$\text{تً م}_{\text{ك}}(٣) = \frac{-\ ٢١٦\,\pi \times ٢\,\text{نق}}{\text{نق}^{٤}} + ٨\,\pi =+$

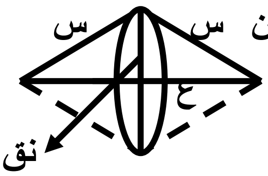
$\text{ومنها ع} = ٦$

مثال (٢٦٣):

اذا دارت صفيحة على شكل مثلث متساوي الساقين محيطه ٤٠ سم دوره كاملة حول قاعدته فما اكبر حجم ممكن للجسم الناتج عن هذا الدوران

الحل :

الشكل الناتج مخروطين متماثلين



$\text{ح المخروط} = ٣/١\ \text{نق}^{٢}\,\pi\,\text{ع}$

$\text{ح}_{\text{ك}} = ٣/٢\ \text{نق}^{٢}\,\pi\,\text{ع}$

$= ٣/٢\,\pi\,\text{ع}\ (\ ٤٠٠ - ٤٠\ \text{ع}\ )$	$٢\ \text{س} + ٢\ \text{ع} = ٤٠$
$= ٣/٢\,\pi\ (\ ٤٠٠\ \text{ع} - ٤٠\ \text{ع}^{٢}\ )$	$\text{لكن س}^{٢} = \text{ع}^{٢} + \text{نق}^{٢}$
$\text{حَ} = ٣/٢\,\pi\ (\ ٤٠٠ - ٨٠\ \text{ع}\ )$	$\text{نق}^{٢} = ٤٠٠ - ٤٠\text{ع}$

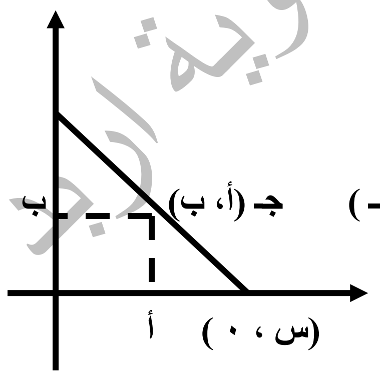
$٣/٢\,\pi\ (\ ٤٠٠ - ٨٠\ \text{ع}\ ) = ٠\ \text{ومنها ع} = ٥$

$\text{حً} = ٣/٢\,\pi\ (-\ ٨٠\ ) = -\ \text{اكبر ما يمكن}$

$\text{اكبر حجم} = ٣/٢\,\pi \times ٥(٤٠٠ - ٠ \times ٥) = ٣/٢\,\pi \times ١٠٠٠$

مثال (٢٦٤

اذا كانت النقطة جـ (أ ، ب) تقع في الربع الاول من المستوى الديكارتي فجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة جـ (أ ، ب) ويصنع مع المحورين الموجبين السيني والصادي ونقطة الاصل مثلثاً مساحته اقل ما يمكن



الحل :

$\text{م} = ٢/١\ \text{س} \times \text{ص}$

$= \frac{١}{٢}\ \text{س}\ \left(\frac{\text{ب س}}{\text{س} - \text{أ}} \right)$

$= \frac{\text{ب س}^{٢}}{٢\ \text{س} - ٢\text{أ}}$

$$\text{مَ} = \frac{(\text{٢س} - \text{٢أ})(\text{٢ب س}) - (\text{ب س}^{٢})(\text{٢})}{(\text{٢س} - \text{٢أ})^{٢}}$$

٢ ب س^{٢} – ٤ أ ب س = ٠

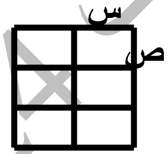
ومنها س = ٢ أ ، $\cancel{٠}$ ومنها ب = ٢ ب

ميل المماس = ب/ أ

ص – ٠ = ب/أ(س – ٢ أ)

مثال (٢٦٥

صاحب مزرعة اغنام لديه (٣٦٩) م من السلك الشائك يريد عمل ٦ حظائر مستطيلة الشكل ومتساوية المساحة كما في الشكل



اوجد اكبر مساحة للحظائر يمكن عملها

الحل :

م = ٣ س × ٢ ص

$$= \text{٣}\left(\frac{\text{٣٦٩} - \text{٨ ص}}{\text{٩}}\right) \times \text{٢ص}$$

$$= \frac{\text{٧٣٨ص} - \text{١٦ ص}^{٢}}{\text{٣}}$$

٨ص + ٩ص = ٣٦٩

$$\boxed{\text{س} = \frac{\text{٣٦٩} - \text{٨ ص}}{\text{٩}}}$$

$$\text{مَ} = \frac{\text{٧٣٨} - \text{٣٢ ص}}{\text{٣}} = \text{٠ ومنها ص} = \frac{\text{٣٦٩}}{\text{١٦}}$$

مً = ـ له قيمة عظمى

م = ...

مثال (٢٦٦

كرة مصمته نصف قطر ها ١٠ سم حفر بداخلها متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ع

اثبت ان حجم متوازي المستطيلات يعطى بالعلاقة الاتية

ح = ٢٠٠ ع – ١/٢ ع^{٣}

جد ابعاد متوازي المستطيلات لتعطي اكبر حجم ممكن له

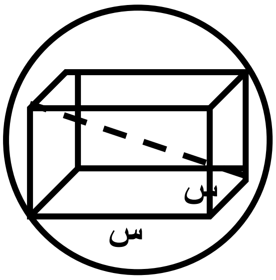
الحل :

ملاحظة قطر متوازي الاضلاع = قطر الكرة

ح = س^{٢} × ع

القطر = س^{٢} + س^{٢} + ع^{٢} = ٤٠٠

٢ س^{٢} + ع^{٢} = ٤٠٠



$$\text{س}^{٢} = \frac{\text{٤٠٠} - \text{ع}^{٢}}{\text{٢}}$$

$$\text{ح} = \frac{\text{٤٠٠ع} - \text{ع}^{٣}}{\text{٢}}$$

$$\text{حَ} = \frac{\text{٤٠٠} - \text{٣ع}^{٢}}{\text{٢}} = \text{٠ ومنه ع} = \frac{\text{٢٠}}{\sqrt{\text{٣}}}$$

٢

حً = ـ٣ع = ـ له اكبر حجم

ح = ...

مثال (٢٦٧

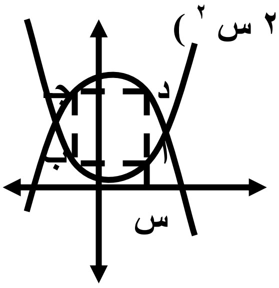
أ ب جـ د مستطيل يقع داخل المنحنيين

ق(س)= ٢ س^{٢} ،هـ (س) = ٣٦ – س^{٢} بحيث ان راسية أ ، ب يقعان على المنحنى ق(س) وراسية جـ ، د يقعان على المنحنى هـ (س) جد بعد المستطيل أ ب جـ د والتي يمكن رسمها لتكون مساحته اكبر ما يمكن

الحل :

م = الطول × العرض

= ٢ س (ص$_{٢}$ – ص$_{١}$)



= (٢ س) (٣٦ – س^{٢} – ٢ س^{٢})

= ٧٢ س – ٦ س^{٣}

مَ= ٧٢ – ١٨ س^{٢}

٧٢ – ١٨ س^{٢} = ٠ ومنها

س = ٢ ، - ٢ مرفوضة

مً= - ٣٦ س

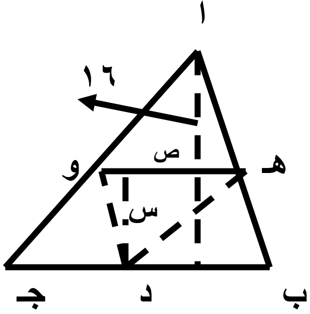
مً(٢)= - اكبر ما يمكن عندما س = ٢

م = ٧٢×٢ – ٦ (٢)^{٣} = ٩٦

مثال (٢٦٨

أ ب جـ مثلث طول قاعدته ب جـ يساوي ١٢ سم وطول ارتفاعه النازل من الراس أ يساوي ١٦ سم فرضت نقطة د على ب جـ ثم رسم مستقيم يوازي ب جـ ويقطع أ ب ، أ جـ في النقطتين هـ ، و احسب طول العمود النازل من د على هـ و لتكون مساحة المثلث هـ د و اكبر ما يمكن

الحل :



م = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ ص × س

= $\frac{١}{٢}$ ($\frac{٩٦ – ٦ س}{٨}$) × س

= $\frac{١}{١٦}$ (٩٦س – ٦ س^{٢})

س

مَ = ٦ – ٤/٣ س

م∆أ ب جـ = م∆أ ب و + م◊ هـ و جـ ب

٦× ١٦ = ٢/١ ص(١٦ – س) +٢/١(ص+١٢)

ص= ١/٨(٩٦–٦س)

٦ – ٤/٣ س = ٠ ومنها س = ٨

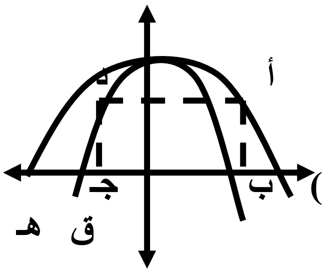
مً = -٤/٣ اكبر ما يمكن ومنها م(٨)= ....

مثال (٢٦٩

أ ب جـ د مستطيل يقع راساه ب ، جـ على محور السينات ويقع الراس أ في الربع الاول على منحنى الاقتران ق (س) = ١٢ – ١/٤ س^{٢} ويقع الراس د في الربع الثاني على منحنى الاقتران

هـ (س) = ١٢ – س^{٢} اوجد اكبر مساحة ممكنة للمستطيل أ ب جـ د

الحل :



م□أ ب جـ د = م□$_{١}$ + م□$_{٢}$

م□$_{١}$ = س × (١٢ – س^{٢})

= ١٢س – س^{٣}

مَ□$_{١}$ = ١٢ – ٣ س^{٢}

١٢ – ٣ س^{٢} = ٠ ومنه س = ٢ ، -٢ مرفوضة

مً□$_{١}$ = – ٦ س

مً□$_{١}$(٢) = – ١٢ اكبر ما يمكن عندما س= ٢

م□$_{٢}$ = س × (١٢ – ١/٤ س^{٢})

= ١٢س – ١/٤س^{٣}

مَ□$_{٢}$ = ١٢ – ٣/٤ س^{٢}

١٢ – ٣/٤ س^{٢}= ٠ ومنه س = ٤ ، -٤ مرفوضة

مً□$_{١}$ =– ٦/٤ س

مً□$_{١}$(٤) = – ٦ اكبر ما يمكن عندما س= ٤

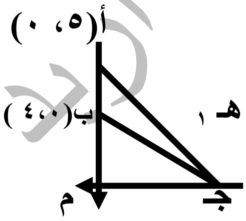
م□أ ب جـ د = م□$_{١}$ + م□$_{٢}$

= (١٢س – س^{٣})+ (١٢س – ١/٤س^{٣})

= (٢٤ – ٨)+ (٤٨ –١٦)=١٦+٣٢= ٤٨

مثال (٢٧٠

أ (٠ ، ٤) ، ب(٠ ، ٩) نقطتان ثابتتان جـ نقطة تتحرك على محور السينات الموجب جد الاحداثي السيني للنقطة جـ الذي يجعل قياس الزاوية أ جـ ب اكبر ما يمكن



الحل :

< أ جـ م= هـ$_{٢}$ ، < ب جـ م = هـ$_{١}$

هـ = < أ جـ ب = هـ$_{٢}$ – هـ$_{١}$

ظا هـ = ظا(هـ$_{٢}$ – هـ$_{١}$)

ظا(هـ$_{٢}$ – هـ$_{١}$) = $\frac{\text{ظاهـ}_{٢} – \text{ظا هـ}_{١}}{١ + \text{ظاهـ}_{٢}\ \text{ظا هـ}_{١}}$

$$\text{ظاهـ} = \frac{\frac{٩}{\text{س}} - \frac{٤}{\text{س}}}{١ + \frac{٩}{\text{س}} \times \frac{٤}{\text{س}}}$$

$$= \frac{٥\,\text{س}}{٣٦ + \text{س}^{٢}}$$

$$\text{قا}^{٢}\,\text{هـ هـَ} = \frac{(٣٦+\text{س}^{٢})(٥) - (٥\,\text{س})(٢\text{س})}{(٣٦+\text{س}^{٢})^{٢}}$$

$$\text{هـَ} = \frac{١٨٠ + ٥\,\text{س}^{٢} - ١٠\,\text{س}^{٢}}{(٣٦+\text{س}^{٢})^{٢}\,\text{قا}^{٢}\,\text{هـ}} = ٠$$

$١٨٠ - ٥\,\text{س}^{٢} = ٠$ ومنها س = ٦

هـً = ـ اكبر ما يمكن

ظا هـ = ٧٢/٣٠

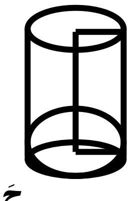
مثال (٢٧١

قطعة خشب على شكل اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٤٠٠ π سم^{٢} حفر في هذه القطعة نصف كرة طول قطرها مساو لطول قطر قاعدة الاسطوانة الذي يجعل حجم الجزء المتبقي من الاسطوانة اكبر ما يمكن

الحل:

المساحة الجانبية= ٤٠٠ π =٢نق π ع ← ع = ٢٠٠/ نق

حجم الجزء المتبقى = حجم الاسطوانة ــ حجم الكرة/٢



$$= \text{نق}^{٢}\,\pi\,\text{ع} - ٣/٢\ \text{نق}^{٣}\,\pi$$

$$\text{ح} = \frac{\text{نق}^{٢}\,\pi \times ٢٠٠}{\text{نق}} - \frac{٢}{٣}\,\text{نق}^{٣}\,\pi$$

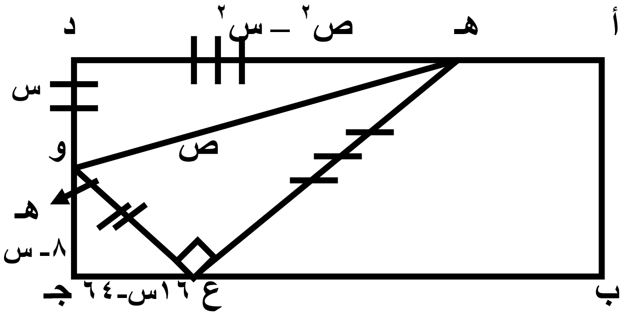
$$\text{حَ} = ٢٠٠\,\pi - ٢\,\pi\,\text{نق}^{٢}$$

$٢٠٠\,\pi - ٢\,\pi\,\text{نق}^{٢} = ٠$ ومنها نق = ± ١٠

حً (١٠) = ـ اكبر ما يمكن عندما نق = ١٠

مثال (٢٧٢

يمثل الشكل المجاور



المستطيل أ ب جـ د فيه طول أ ب = ٨ سم ، طويت الزاوية أ د جـ وفق الخط هـ و حتى انطبق الراس د على المستقيم ب جـ عند النقطة ع فاذا كان طول د و = س سم هـ و = ص سم

١ ـ اثبت ان

$$\text{ص}^{٢} = \frac{\text{س}^{٣}}{\text{س} - ٤}$$

٢ ـ جد قيم س التي تجعل ص اقل ما يمكن

الحل :

$$\text{جتا هـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$$

$$\text{جتا}\,(١٨٠ - ٢\,\text{هـ}) = \frac{٨ - \text{س}}{\text{س}} \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

لكن جتا (١٨٠-٢هـ)=جتا١٨٠جتا٢هـ+ جا١٨٠جا٢هـ

= ـ جتا ٢ هـ = ١ – ٢جتا^{٢} هـ

$$\text{جتا}\,(١٨٠ - ٢\,\text{هـ}) = -\left(٢\,\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢}} - ١\right) \ldots\ldots\ldots (٢)$$

من (١) ، (٢)

$$\frac{٨ - \text{س}}{\text{س}} = -\left(٢\,\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢}} - ١\right)$$

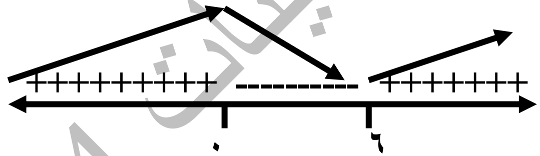
$$\frac{-\text{٢س}^{٢}}{\text{ص}^{٢}} = \frac{\text{٨ – س – س}}{\text{س}}$$

$$\text{ص}^{٢} = \frac{\text{س}^{٣}}{\text{س – ٤}}$$

٢-

$$\text{٢ص ص}' = \frac{(\text{س – ٤})(\text{٣ س}^{٢}) – \text{س}^{٣}}{(\text{س – ٤})^{٢}} = ٠$$

ومنها س = ٦ ، ٠



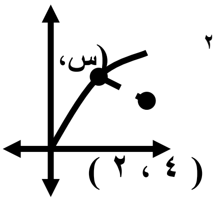
عندما س = ٦ تكون اقل ما يمكن

مثال (٢٧٣

جد النقطة على منحنى الاقتران ق (س) = $\sqrt{\text{٨ س}}$

التي يكون اقرب ما يمكن الى النقطة (٤ ، ٢)

الحل :



ف = $\sqrt{(\text{س – ٤})^{٢} + (\text{ص – ٢})^{٢}}$

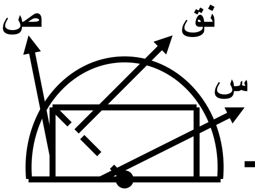
ف = $\sqrt{(\text{س–٤})^{٢} + (\sqrt{\text{٨ س}}\text{–٢})^{٢}}$

فَ = ________

مثال (٢٧٤): مهم

اوجد أبعاد اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها نق على أن يقع رأسان من رؤوسه على قطرها ٠

الحل :



مساحة ☐ = ٢ س × ص

لكن $\text{نق}^{٢} = \text{س}^{٢} – \text{ص}^{٢}$

اذن م = $\text{٢ س}\sqrt{\text{س}^{٢} – \text{نق}^{٢}}$

= $\sqrt{\text{٤ س}^{٤} – \text{٤ نق}^{٢}\text{ س}}$

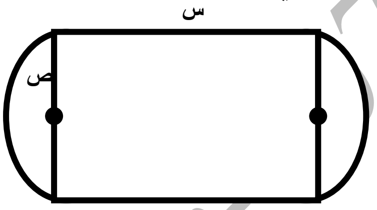
$$\text{م}' = \frac{\text{١٦ س}^{٣} – \text{٨ نق}^{٢}\text{س}}{\text{٢}\sqrt{\text{٤ س}^{٤} – \text{٤ نق}^{٢}\text{ س}^{٢}}} = ٠$$

$\text{١٦س}^{٣} – \text{٨ نق}^{٢}\text{س} = ٠$ ومنها س = ٠ ، $\frac{\text{نق}}{\sqrt{٢}}$

أكمل الحل

مثال (٢٧٥

يراد اقامة سياج حول قطعة ارض على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة كما في الشكل المجاور



فاذا كانت تكلفة تركيب المتر الواحد من السياج على الجانبين المستقيمين (٤) دنانير وعلى الاجزاء المنحنية ٦ دنانير جد اكبر مساحة ممكنة لقطعة الارض التي يمكن احاطتها بسياج تكلفته ٤٠٠ دينار .

الحل :

محيط الشكل = محيط الدائرة + ٢ س

ح = $\text{ص}\pi + \text{٢ س}$

التكلفة = $\text{ص}\pi\times٦ + \text{٢ س}\times٤$

$$\text{س} = \frac{\text{٤٠٠ ـ ص}\,\pi\times\text{٦}}{\text{٨}}$$

المساحة = مساحة الدائرة + مساحة المستطيل

$$\text{م} = \frac{\text{ص}^{\text{٢}}\,\pi}{\text{٤}} + \text{س ص}$$

$$\text{م} = \frac{\text{ص}^{\text{٢}}\,\pi}{\text{٤}} + \frac{\text{٤٠٠ص ـ ٦}\,\pi\times\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{٨}}$$

$$\text{م} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}\left(\text{ـ ٢}\,\pi\times\text{ص}^{\text{٢}} + \text{٢٠٠ص}\right)$$

$$\text{مَ} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}\left(\text{ـ ٤}\,\pi\times\text{ص} + \text{٢٠٠}\right) = \text{٠}$$

$$\text{ص} = \text{٥٠}/\pi$$

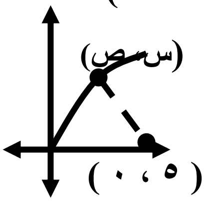
مًَ = ـ π له قيمة عظمى

مثال (٢٧٦):

طريق منحنى معادلته في المستوى الديكارتي هي ص= $\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س} + \text{٥}}$ النقطة (٥ ، ٠) تمثل موقع مستشفى ، اوجد اقصر مسافة بين الطريق والمستشفى٠

التي يكون اقرب ما يمكن الى النقطة (٤ ، ٢)

الحل :

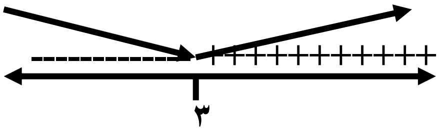


$$\text{ف} = \sqrt{(\text{س} - \text{٥})^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}}}$$

$$\text{ف} = \sqrt{(\text{س}-\text{٥})^{\text{٢}} + \text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س} + \text{٥}}$$

$$\text{ف} = \sqrt{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{١٢س} + \text{٣٠}}$$

$$\text{فَ} = \frac{\text{٤ س} - \text{١٢}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{١٢س} + \text{٣٠}}} = \text{٠ ومنها س} = \text{٣}$$



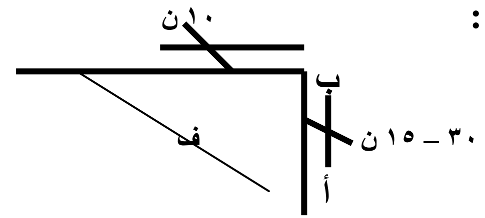
اقصر مسافة عندما س = ٣

$$\text{ف} = \sqrt{\text{١٨} - \text{٣٦} + \text{٣٠}} = \sqrt{\text{١٢}}$$

مثال (٢٧٧):

في الواحدة بعد الظهر كانت الباخرة أ على بعد ٣٠ كم جنوبي الباخرة ب وتسير شمالا بسرعة ١٥كم/ساعة ٠لافاذا كانت ب تسير بسرعة ١٠ كم /ساعة فمتى تكون المسافة بين الباخرتين اقل ما يمكن٠

الحل :

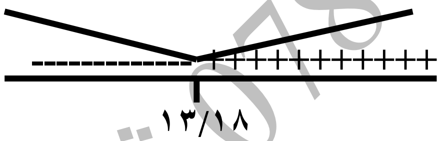


$$\text{ف} = \sqrt{\text{١٠٠ن}^{\text{٢}} + \text{٩٠٠} - \text{٩٠٠ن} + \text{٢٢٥ن}^{\text{٢}}}$$

$$\text{ف} = \sqrt{\text{٣٢٥ن}^{\text{٢}} + \text{٩٠٠} - \text{٩٠٠ن}}$$

$$\text{فَ} = \frac{\text{٣٢٥}\times\text{٢ ن} - \text{٩٠٠}}{\text{٢}\sqrt{\text{٣٢٥ن}^{\text{٢}} + \text{٩٠٠} - \text{٩٠٠ن}}} = \text{٠}$$

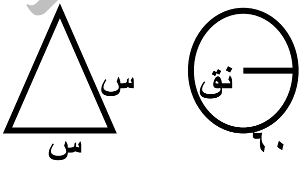
$$\text{٣٢٥}\times\text{٢ ن} - \text{٩٠٠} = \text{٠ ومنها ن} = \text{١٣/١٨}$$



مثال (٢٧٨):

سلك طوله ٦٠ سم يراد قطعه قطعتين تعمل أحداهما دائرة وتعمل الأخرى مثلث متساوي الأضلاع فأين تقطع السلك بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمثلث: أ) اقل مايمكن ب) اكبر ما يمكن

الحل :



م = مساحة ○ + مساحة Δ

= نق$^{\text{٢}}$ π + ٢/١ س×س×جا ٦٠

لكن طول السلك = محيط ○ + محيط Δ

٦٠ = ٢ نق π + ٣ س ومنها نق = ــــــــ

$$= \left(\frac{\text{٦٠ ـ ٣ س}}{\text{٢}\,\pi}\right)^{٢}\pi - \frac{\sqrt{٣}}{٤}\,\text{س}^{٢}$$

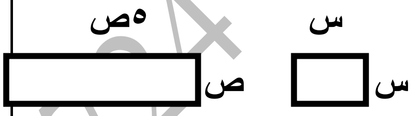
$$= \frac{\text{٣٦٠٠ـ٣٦س+٩س}^{٢}}{\text{٤}\,\pi} - \frac{\sqrt{٣}}{٤}\,\text{س}^{٢}$$

يكمل الحل

مثال (٢٧٩):

سلك طوله ٢٨ سم يراد قطعه قطعتين تعمل أحداهما مربعاً وتعمل الأخرى مستطيلاً طوله ٥ أمثال عرضه اوجد طول كل من القطعتين اذا كان مجموع مساحتي المربع والمستطيل اقل ما يمكن

الحل :



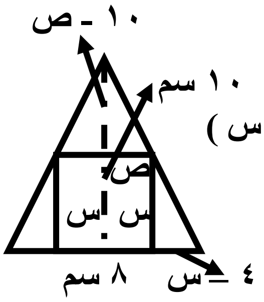
م = س^{٢} + ٥ ص^{٢}

= (٧ ـ ٣ ص)^{٢} + ٥ ص^{٢} | ٤ س + ١٢ ص = ٢٨

مثال (٢٨٠):

مثلث متساوي الساقين قاعدته ٨سم ، وطول ارتفاعه ١٠سم ، يراد قطع مستطيل منه على قاعدة المثلث ويقع كل من الرأسين الآخرين على ساقي المثلث ، اوجد بعدي المستطيل لتكون مساحته اكبر ما يمكن ٠

الحل :



م = ٢ س × ص

$$= \text{٢ س}\left(\frac{١}{٤}\right)\left(\text{٤٠ ـ ١٠ س}\right)$$

= ٢٠ س ـ ٥ س^{٢}

مَ = ٢٠ ـ ١٠ س = ٠

٢٠ ـ ١٠ س = ٠ ومنها س = ٢

مً = ـ اكبر ما يمكن عندما س = ٢

اذن م = ٢٠ × ٢ ـ ٥ (٢)^{٢} = ٢٠

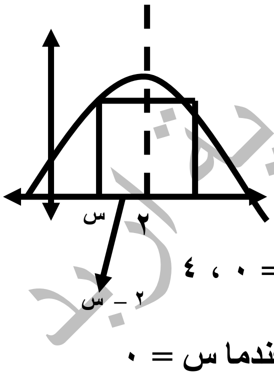
$$\frac{\text{ص}}{١٠} = \frac{\text{٤ ـ س}}{٤}$$

ص = ...

مثال (٢٨١):

اوجد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يكون بعديه منطبقا على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران ق(س) = ٨ +٤س ـ س^{٢}

الحل :



م= ٢(٢- س)ق(س)

= (٤-٢س)(٨+٤س- س^{٢})

= ٢س^{٣} ـ ١٢ س^{٢} + ٣٢

مَ = ٦س^{٢} ـ ٢٤ س

٦س^{٢} ـ ٢٤ س = ٠ ومنه س = ٠ ، ٤

مً= ١٢ س ـ ٢٤

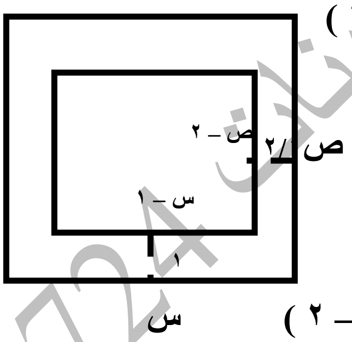
مً(٠) =ـ ٢٤ له اكبر مساحة عندما س = ٠

م(٠)= (٤)(٨) = ٣٢

مثال (٢٨٢):

صحيفة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢سم٢ يراد طباعة إعلان عليها فإذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١سم وفي كل من الجانبين ٠,٥ سم اوجد بعدي الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة اكبر ما يمكن

الحل :



$\text{م} = (\text{س} - ١)(\text{ص} - ٢)$

لكن $\text{س ص} = ٣٢$

اذن $\text{ص} = \frac{٣٢}{\text{س}}$

$\text{م} = (\text{س} - ١)(\frac{٣٢}{\text{س}} - ٢)$

$\text{م} = (٣٢ - ٢\text{س} - \frac{٣٢}{\text{س}} + ٢)$

$\text{مَ} = -٢ + \frac{٣٢}{\text{س}^٢} = ٠$

ومنها $\text{س}^٢ = ١٦$ ومنها س= ٤ ، ـ٤

$\text{مً} = - \frac{٦٤}{\text{س}^٣}$

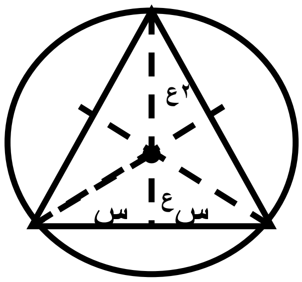
$\text{مً}(٤) = -$ له اكبرمساحة عندما س = ٤

$\text{م} = (٤ - ١)(\frac{٣٢}{٤} - ٢) = ٣ \times ٦ = ١٨$

مثال (٢٨٣):

رسم مثلث متساوي الساقين داخل دائرة وحدة والمطلوب إيجاد ارتفاع المثلث الذي يجعل مساحة المثلث اكبر ما يمكن

الحل :



$\text{م} = \text{س} \times ٣\ \text{ع}$

لكن $\text{نق}^٢ = \text{س}^٢ + \text{ع}^٢$

ومنها $\text{ع} = \sqrt{١ - \text{س}^٢}$

$\text{م} = ٣\text{س}\sqrt{١ - \text{س}^٢}$

$\text{م} = ٣\sqrt{\text{س}^٢ - \text{س}^٤}$

$\text{مَ} = \frac{٣(٢\text{س} - ٤\text{س}^٣)}{٢\sqrt{\text{س}^٢ - \text{س}^٤}} = ٠$

$٦\text{س} - ١٢\text{س}^٣ = ٠$

$\text{س}(٦ - ١٢\text{س}^٢) = ٠$

ومنها س= ٠

$\text{س} = \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$

ابحث في الإشارة

مثال (٢٨٤)

وجد تاجر انه اذا كان سعر الوحدة من سلعة معينة ديناراً واحداً فان بامكانه بيع (٤٠٠) وحدة من هذه السلعة ، ولكن هذا العدد ينقص بمعدل (٢٠) وحدة لكل زيادة قدرها (١٠) قروش في السعر ، جد سعر الوحدة الذي يجعل قيمة المبيعات من هذه السلعة اكبر ما يمكن .

الحل :

ليكن سعر بيع الوحدة = س
الفرق في السعر = س – ١
٠,١ دينار ← ٢٠ وحدة نقص
س – ١ ← ص
٠,١ ص = ٢٠ س – ٢٠
ص = ٢٠٠ س – ٢٠٠
عدد الوحدات المباعة = ٤٠٠ – (٢٠٠ س – ٢٠٠)
= ٦٠٠ – ٢٠٠ س
المبيعات م = (٦٠٠ – ٢٠٠ س)(س)
م = ٦٠٠ س– ٢٠٠ س^{٢}
مَ = ٦٠٠– ٤٠٠ س ومنها س = ١,٥
مً = - اكبر ما يمكن

مثال (٢٨٥):

مثال (٢٦٤):

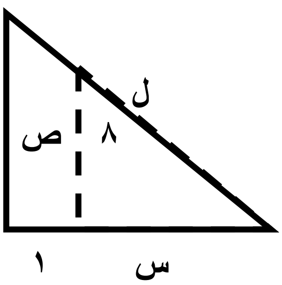
جدار ارتفاعه ٨ م ويبعد ١ م عن بناية عالية اوجد طول اقصر سلم يمكن ان يصل بين الارض والبناية بحيث يرتكز على الجدار

الحل :

ل^{٢} = (١ + س)^{٢} + ص^{٢}

لكن $\frac{\text{ص}}{\text{٨}} = \frac{\text{١ + س}}{\text{س}}$

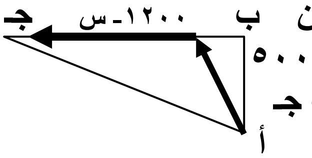
ص= $\frac{\text{٨}}{\text{س}}$ + ٨



ل^{٢} = (١ + س)^{٢} + ($\frac{\text{٨}}{\text{س}}$ + ٨)^{٢}

مثال (٢٨٦):

سرعة طيران عصفور على اليابسة ١٠م/ث بينما سرعته فوق الماء ٩ م/ث ، عصفور على طرف نهر عرضه ٥٠٠ م وعليه ان يطير مسافة ١٣٠٠ م من مكانه الى عشه في الجانتب الاخر من النهر ، ما هو سير العصفور الذي يحتاجه في اقل وقت طيران



الحل :

زمن اقل = زمن أ ب + زمن ب جـ

ن = $\frac{\sqrt{(\text{٥٠٠})^{٢} + \text{س}^{٢}}}{\text{٩}}$ + $\frac{\text{١٢٠٠ – س}}{\text{١٠}}$

تطبيقات هندسية

ت(١) ص ١٥٤

جد معادلة المماس والعمودي لمنحنى

$$\text{ص} = \frac{\text{١}}{\text{س}} \quad \text{عند س} = \text{٢}$$

الحل :

ميل المماس = المشتقة الأولى عند نقطة التماس

$$\text{قَ (س)} = \frac{\text{-١}}{(\text{س})^{\text{٢}}} = \text{م}_{\text{المماس}} \ \text{عند س} = \text{٢}$$

$$\text{ص}_{\text{١}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \quad \text{اذن نقطة التماس } \left(\text{٢ ، } \frac{\text{١}}{\text{٢}} \right)$$

$$\text{ميل المماس} = \frac{\text{-١}}{(\text{٢})^{\text{٢}}} = \frac{\text{-١}}{\text{٤}}$$

معادلة المماس $\text{ص} - \text{ص}_{\text{١}} = \text{م (س} - \text{س}_{\text{١}}\text{)}$

$$\text{ص} - \text{٠,٥} = -\text{٠,٢٥ (س} - \text{٢)}$$

معادلة العمودي

$$\text{ص} - \text{ص}_{\text{١}} = \frac{\text{-١}}{\text{م}} \text{(س} - \text{س}_{\text{١}} \text{)}$$

$$\text{ص} - \text{٠,٥} = \text{٤ (س} - \text{٢)}$$

****

ت ٢ص١٥٥

$$\text{بين ان المماسين ق(س)} = \frac{\text{١}}{\text{س}} \text{ ، هـ (س)} = \text{س}$$

متعامدان

الحل :

نقطة تقاطع المنحنيين

ق(س) = هـ (س)

$$\frac{\text{١}}{\text{س}} = \text{س ومنها س}^{\text{٢}} = \text{١ ومنها س} = \pm \text{١}$$

حتى يكون المماسان متعامدان يجب

$$\text{م}_{\text{١}} \times \text{م}_{\text{٢}} = -\text{١}$$

$$\text{قَ (س)} \times \text{هـَ(س)} = \frac{\text{-١}}{(\text{س})^{\text{٢}}} \times \text{١} \Big|_{\text{س} = \pm \text{١}} = -\text{١}$$

بما ان

$$\text{م}_{\text{١}} \times \text{م}_{\text{٢}} = -\text{١}$$

اذن المماسين متعامدين

ت ٣ ص ١٥٦

عين الثابت جـ ق(س)= جـ س$^{\text{٢}}$ + ١ اذا كان قياس زاوية ميل المماس لمنحنى ق عندما س=١ هو ٤٥°

الحل :

قَ(س) = ٢ أ س لكن قَ (١) = ظا ٤٥ °

٢ أ = ١ ومنها أ = ٠,٥

ت ٤ ص ١٥٨

جد معادلة المماس المرسوم من النقطة (٦ ، ٠) لمنحنى العلاقة س$^{\text{٢}}$ + ص$^{\text{٢}}$ = ١٨

الحل :

(٦ ، ٠) ليست نقطة تماس ولذلك نفرض نقطة تماس ولتكن (س ، ص)

٢س + ٢ص صَ = ٠ ومنها

$$\text{صَ} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}} \qquad \text{لكن}$$

$$\text{صَ} = \frac{\text{ص}_{\text{٢}} - \text{ص}_{\text{١}}}{\text{س}_{\text{٢}} - \text{س}_{\text{١}}}$$

$$\frac{-\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص} - \text{٠}}{\text{س} - \text{٦}}$$

$$-\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦ س} = \text{ص}^{\text{٢}}$$

$$-\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦ س} = \text{١٨} - \text{س}^{\text{٢}}$$

ومنها س = ٣ ، ص = ± ٣

عند النقطة (٣ ، ١)

$$\text{م} = \text{صَ} \Big|_{\text{س} = \text{٣}} = \frac{-\text{٣}}{\text{١}} = -\text{٣}$$

ص – ١ = - ٣ (س – ٣)

عند النقطة (٣ ، - ١)

$$\text{م} = \text{صَ} \Big|_{\text{س} = \text{٣}} = \frac{-\text{٣}}{-\text{١}} = \text{٣}$$

ص + ١ = ٣ (س – ٣

ت (٥) ص ١٥٨

بين لمنحنى الاقتران ق(س)= $\text{س}^{\text{٢}}$ + ٨ مماسين مرسومين من النقطة (١ ، ٥) والتي لا تقع عليه

الحل :

(١ ، ٥) ليست نقطة تماس ولذلك نفرض نقطة تماس ولتكن (س ، ص)

قَ(س)= ٢ س

$$\text{قَ(س)} = \frac{\text{ص}_{\text{٢}} - \text{ص}_{\text{١}}}{\text{س}_{\text{٢}} - \text{س}_{\text{١}}}$$

$$\frac{\text{٢ س}}{\text{١}} = \frac{\text{ص} - \text{٥}}{\text{س} - \text{١}}$$

٢$\text{س}^{\text{٢}}$ ـ ٢ س = ص ـ ٥

٢$\text{س}^{\text{٢}}$ ـ ٢ س = $\text{س}^{\text{٢}}$ + ٨ ـ ٥

$\text{س}^{\text{٢}}$ ـ ٢ س – ٣ = صفر

(س- ٣)(س+ ١) = ٠

ومنها س = ٣ ، ص = ١٧

س= ـ ١، ص = ٩

أي ان هناك نقطتين تماس

(٣ ، ١٧) ، (ـ ١ ، ٩)أي للاقتران مماسين

تمارين ومسائل ص ١٥٩

س ١:

ميل المماس = قَ(س) عند النقطة (١ ، ٠)

قَ(س) = ٢ س – ٤

ميل المماس = ق(١) = ٢×١ ـ ٤ = ـ٢

س ٢:

$\text{م}_{\text{المماس}}$ = قَ(س) عند النقطة (٢، ق(٢)) =(٢، ٩)

قَ(س) = ٣ $\text{س}^{\text{٢}}$

ميل المماس = قَ(٢) = ٣$\text{(٢)}^{\text{٢}}$= ١٢

معادلة المماس

ص – $\text{ص}_{\text{١}}$ = م (س – $\text{س}_{\text{١}}$)

ص – ٩ = ١٢ (س – ٢)

معادلة العمودي

$$\text{ص - ص}_{\text{١}} = \frac{\text{ـ ١}}{\text{م}_{\text{المماس}}}(\text{س - س}_{\text{١}})$$

$$\text{ص - ٩} = \frac{\text{ـ ١}}{\text{١٢}}(\text{س - ٢})$$

س ٣ :.

اوجد معادلة المماس المرسوم <u>من</u> النقطة

(ـ٤ ، ٠) لمنحنى العلاقة $\text{س}^{\text{٢}}$ – $\text{ص}^{\text{٢}}$ = ـ ٨

الحل :

(ـ٤ ، ٠) ليست نقطة تماس ولذلك نفرض نقطة تماس ولتكن (س ، ص)

٢س ـ ٢ص صَ = ٠ ومنها

$$\text{صَ} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} \qquad \text{لكن}$$

$$\text{صَ} = \frac{\text{ص}_{\text{٢}} - \text{ص}_{\text{١}}}{\text{س}_{\text{٢}} - \text{س}_{\text{١}}}$$

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص} - \text{٠}}{\text{س} + \text{٤}}$$

$\text{س}^{\text{٢}}$ + ٤ س = $\text{ص}^{\text{٢}}$

$\text{س}^{\text{٢}}$ + ٤ س = $\text{س}^{\text{٢}}$ + ٨

ومنها س = ٢ ، ص = ± $\sqrt{\text{١٢}}$

معادلة المماس

عند النقطة (٢ ، $\sqrt{\text{١٢}}$)

$$\text{م} = \text{صَ} \Big|_{\text{س} = \text{٢}} = \frac{\text{٢}}{\sqrt{\text{١٢}}} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}$$

$$\text{ص} - \sqrt{\text{١٢}} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}(\text{س} - \text{٢})$$

عند النقطة (٢ ، ـ $\sqrt{\text{١٢}}$)

$$\text{م} = \text{صَ} \Big|_{\text{س} = \text{٢}} = \frac{\text{٢}}{\text{ـ}\sqrt{\text{١٢}}} = \frac{\text{ـ ١}}{\sqrt{\text{٣}}}$$

$$\text{ص} + \sqrt{\text{١٢}} = \frac{\text{ـ ١}}{\sqrt{\text{٣}}}(\text{س} - \text{٢})$$

س ٤ :

جد معادلة المماس لمنحنى ق(س)= س^{٢} ــ ٦س+ ٧

عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص ــ ٣س + ١ = ٠

الحل :

عند نقطة التقاطع يكون ق(س) = ص
س^{٢} ــ ٦س+ ٧ = ٣س - ١
س^{٢} ــ ٩س+ ٨ = ٠
(س ــ ٨)(س - ١) = ٠ ومنها
س = ٨ ومنها ق(٨) = ٦٤ـ ٤٨ + ٧ = ٢٣
س = ١ ومنها ق(١) = ١ـ ٦ + ٧ = ٢
نجد ميل المماس عند نقاط التماس = قَ(س)
م$_{\text{المماس}}$ = قَ(س)= ٢س ــ ٦
عند النقطة (٨ ، ٢٣) يكون م$_{\text{المماس}}$=٢×٨ــ٦=١٠
معادلة المماس
ص ــ ٢٣ = ١٠ (س - ٨)
عند النقطة (١ ، ٢) يكون م$_{\text{المماس}}$=٢×١ــ ٦ = - ٤
معادلة المماس
ص ــ ٢ = -٤ (س - ٢)

س ٥ : مهم جداً

اذا كان المستقيم ٤ س ــ ٢ ص + ٥ = ٠ يمس منحنى ق <u>عند النقطة</u> (٣ ، ٢) وكان المستقيم ٩ص+٣س ــ٤=٠ عمودياً على المماس لمنحنى ل <u>عند النقطة</u> (٣،-١)اوجد (ق×ل)َ(٣)

الحل :

(ق×ل)َ(٣)= ق(٣)×لَ(٣) + ل(٣) × قَ(٣)
لكن ق(٣) = ٢ ، ل(٣) = - ١
<u>المستقيم٤ س ــ ٢ ص + ٥ = ٠ يمس منحنى ق</u>
<u>عند النقطة (٣ ، ٢)</u>
قَ(٣) = صَ عندما س= ٣
٤ ــ ٢ صَ = ٠ ومنها صَ = ٢= قَ(٣)
<u>المستقيم ٩ص+٣س ــ٤=٠ عمودياً على المماس</u>
<u>لمنحنى ل عند النقطة (٣،-١)</u>
$\left.لَ(٣) \times صَ \right|_{س = ٣} = -١$
٩ صَ + ٣ = ٠ ومنها صَ = - ٣/١
اذن لَ(٣) × - ٣/١ = - ١ ومنها لَ (٣) = ٣
(ق×ل)َ(٣)= ق(٣)×لَ(٣) + ل(٣) × قَ(٣)
(ق×ل)َ(٣)=(٢)×(٣)+ (-١)×(٢) = ٤

س ٦ : مهم جداً

جد معادلة المماس لمنحنى س ^{٢} + ص ^{٢} = ٢٥ <u>عند نقطة تقاطعه</u> مع المستقيم س + ص = ١

الحل :

عند نقطة التقاطع يكون ص$_{١}$ = ص$_{٢}$
بالتعويض (٢) في (١)
(١- ص)^{٢} + ص^{٢} = ٢٥
١ ــ ٢ ص + ص^{٢} + ص^{٢} = ٢٥
٢ ص^{٢} - ٢ ص ــ ٢٤ = ٠
بالقسمة على (٢)
ص^{٢} - ص ــ ١٢ = ٠
(ص ــ ٤)(ص + ٣) = ٠ ومنها
ص = ٤ ، -٣
عندما ص = ٤ ← س = -٣
نجد ميل المماس عند تلك النقطة = صَ
٢ س + ٢ ص صَ = ٠ ومنها صَ = ٤/٣
ص ــ ٤ = ٤/٣ (س + ٣)
عندما ص =- ٣ ← س = ٤
م= صَ عند (٤ ، - ٣) ومنها صَ = ٣ / ٤
ص + ٣ = ٤/٣ (س - ٤)

س٧ : **

اذا كان المستقيم أ س + ٣ ص = ١ يمس منحنى الاقتران ق (س) = ٤ س ^{٢} + أ س + ب <u>عند</u> النقطة (١ ، ق(١)) ، فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

<u>الحل</u> :

$$\begin{tikzcd} & \text{ق(س) = ص} \\ \text{يمس} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \text{قَ (س) = صَ} \end{tikzcd}$$

أ س + ٣ ص = ١ نشتقها أ +٣ صَ = ٠
ق (س) = ٤ س ^{٢} + أ س + ب نشتقها
قَ (س) = ٨ س + أ ومنها قَ(١) = ٨ + أ
لكن قَ (س) = صَ
أ+٣صَ= ٠ ومنها أ +٣(٨ + أ) =
ومنها ٤ أ = - ٢٤ ومنها $\boxed{أ = - ٦}$
(١ ، ق(١)) تحقق -٦ س + ٣ ص = ١
ومنها - ٦ + ٣ ص = ١ ومنها ص = $\frac{٧}{٣}$
لكن ق(١) = ص
لكن ق(١)=٤ــ٦+ ب= $\frac{٧}{٣}$ ومنها $\boxed{ب = \frac{٧}{٣} + ٢}$

س ٨

معادلة الدائرة التي مركزها (د ، هـ) هي

(س – د)^{٢} + (ص – هـ) ^{٢} = نق ^{٢}

<u>المطلوب</u> اثبات نق ⊥ المماس

الحل :

حتى يكون نق ⊥ المماس

$م_{\text{المماس}} \times م_{\text{العمودي}} = -١$

$\text{صَ} \times \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = -١$

لاحظ (د ، هـ) ليست نقطة تماس

اذن نفرض نقطة تماس ولتكن (س ، ص)

اذن ميل العمودي $= \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

اذن ميل العمودي $= \frac{\text{ص} - \text{هـ}}{\text{س} - \text{د}}$

ميل المماس = صَ

٢(س – د) + ٢(ص – هـ) صَ = ٠ ومنها

ميل المماس = صَ $= \frac{-\,(\text{س} - \text{د})}{(\text{ص} - \text{هـ})}$

$\text{صَ} \times \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} =$

ص – ٥

$= \frac{-\,(\text{س} - \text{د})}{(\text{ص} - \text{هـ})} \times \frac{\text{ص} - \text{هـ}}{\text{س} - \text{د}} = -١$

اذن نق ⊥ المماس

س ٩ :

جد جميع قيم س التي يكون العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = س – جا ٢ س عندها موازي لمحور الصادات

الحل :

العمودي على المماس موازي لمحور الصادات

هذا يعني ان المماس افقي وبالتالي قَ(س) = ٠

قَ(س) = ١ – ٢جتا ٢ س

١ – ٢جتا ٢ س = ٠ ومنها جتا ٢ س = ٢/١

٢ س = π/٣ + ٢ ن π ، ٥ π/٣ +٢ ن π

ومنها س = π/٦ + ن π ، ٥ π/٦ + ن π

س ١٠:

جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = س^{٢} ،اذا كان العمودي مرسوماً من النقطة (٠ ، ٩/ ٢)

الحل :

العمودي مرسوماً من النقطة (٠ ، ٩/ ٢)

هذا يعني (٠ ، ٩/ ٢) ليست نقطة تماس فالذلك نفرض نفرض نقطة تماس ولتكن (س ، ص)

وان

$م_{\text{المماس}} \times م_{\text{العمودي}} = -١$

$\text{قَ (س)} \times \frac{\text{ص} - ٢/٩}{\text{س} - ٠} = -١$

$٢\,\text{س} \times \frac{\text{ص} - ٢/٩}{\text{س}} = -١$

$٢\,\text{س} \times \frac{\text{س}^{٢} - ٢/٩}{\text{س}} = -١$

٢ س^{٢} - ٩ = - ١ ومنها س^{٢} = ٤

ومنها س = ± ٢ وَ ص = ٤

هناك نقطتي تماس (٢ ، ٤) ، (- ٢ ، ٤)

معادلة العمودي عند (٢ ، ٤)

ص – ص$_{١}$ = -١/ قَ(س) (س – س $_{١}$)

ص – ٤ = -١/٤ (س – ٢)

معادلة العمودي عند (-٢ ، ٤)

ص – ص$_{١}$ = -١/ قَ(س) (س +٢)

ص – ٤ = -١/٤ (س +٢)

س ١١ :**

اثبت ان المماسين المرسومين لمنحنيي العلاقتين

٤ س ^{٢} + ٩ ص ^{٢} = ٤٥

س ^{٢} – ٤ ص ^{٢} = ٥

عند نقطة تقاطع المنحنيين في الربع الاول يكونان متعامدين.

الحل :

متقاطعين ومنها ص $_{١}$ = ص $_{٢}$

٤ س ^{٢} + ٩ ص ^{٢} = ٤٥ ....(١)

- ٤(س ^{٢} – ٤ ص ^{٢} = ٥) ....(٢)

ومنها

٤ س ^{٢} + ٩ ص ^{٢} = ٤٥

- ٤س ^{٢} + ١٦ ص ^{٢} = -٢٠

٢٥ ص ^{٢} = ٢٥ ومنها ص = ± ١

وبالتعويض في (٢) س = ± ٣

با انه في الربع الاول فان نقطة التماس (٣ ، ١)

نجد م $_{١}$

٨ س + ١٨ ص صَ = ٠ ومنها صَ = $\frac{-٨ \text{ س}}{١٨ \text{ ص}}$

نجد م $_{٢}$

٢س - ٨ ص صَ =٠ ومنها صَ = $\frac{٢ \text{ س}}{٨ \text{ ص}}$

متعامدين م $_{١}$ × م $_{٢}$ = - ١ بالتعويض (٣ ، ١)

$\frac{-٨ \text{ س}}{١٨ \text{ ص}} \times \frac{٢\text{س}}{٨ \text{ ص}} =$

$\frac{-٢٤}{١٨} \times \frac{٦}{٨} = -١$ اذن متعامدان

س١٢ :

اذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، - ٢) ، (٢ ، ٦) يمس منحنى ق(س)=أ س ^{٢} + س – ١ ، جد قيمة أ

الحل :

ق(س) = ص

يمس

قَ (س) = صَ

م $_{\text{المماس}}$ عند نقطة التماس (س ، ص)= م $_{\text{المستقيم}}$

نجد معادلة المستقيم

ص – ص $_{١}$ = م (س – س $_{١}$)

م = $\frac{٦ - - ٢}{٢ - ٠}$ = ٤

ص + ٢= ٤ (س – ٠) ومنها ص = ٤ س - ٢

لكن ق(س) = ص

أ س ^{٢} + س – ١ = ٤ س – ٢ ومنها

أ س ^{٢} - ٣ س + ١ = ٠ ....(١)

كذلك

قَ (س) = $\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

٢ أ س + ١ = $\frac{٦ - - ٢}{٢ - ٠}$

ومنها ٢أ س+١=٤ ...ومنها س = $\frac{٣}{٢ \text{ أ}}$.......(٢)

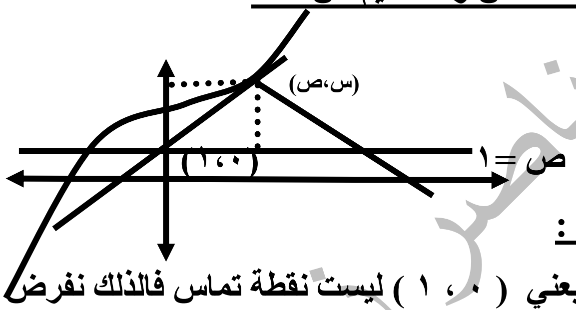
من (١) ، (٢)

أ × $\frac{٩}{٤\text{أ}^{٢}}$ - $\frac{٩}{٢ \text{ أ}}$ + ١ = ٠

$\frac{٩}{٤\text{أ}}$ - $\frac{١٨}{٤ \text{ أ}}$ + ١ = ٠

$\frac{-٩}{٤\text{أ}}$ = -١ ومنها أ = $\frac{٩}{٤}$

<u>**س ١٣ : جد مساحة المثلث المكون من المماس المرسوم من النقطة (٠ ، ١) لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} + ٣ والعمودي على المماس عند نقطة التماس والمسقيم ص = ١**</u>



<u>**الحل :**</u>

هذا يعني (٠ ، ١) ليست نقطة تماس فالذلك نفرض نفرض نقطة تماس ولتكن (س ، ص)

ق َ(س) = $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ٠}$ = م المماس

٣ س^{٢} = $\frac{\text{س}^{٣} + ٣ - ١}{\text{س}}$

٣ س^{٣} = س^{٣} + ٢ ومنها ٢س^{٣} =٢

ومنها س = ١ ، ص = ٤

اذن نقطة التماس (١ ، ٤)

نجد معادلة المماس والعمودي

← معادلة المماس عند (١ ، ٤)

ص – ص$_{١}$ = ق َ(س) (س – س $_{١}$)

ص – ٤ = ٣(س- ١) ومنها

ص = ٣س+ ١

← معادلة العمودي عند (١ ، ٤)

ص – ص$_{١}$ = -١/ ق َ(س) (س – س $_{١}$)

ص–٤=-١/٣(س- ١) ومنها

ص =-١/٣س+ ١٣/٣

لايجاد طول القاعدة

نجد النقطة جـ من معادلة العمودي بتعويض ص= ١

١ =-١/٣س+ ١٣/٣ ومنها س = ١٠

طول القاعدة = (١٠- ٠) = ١٠

الارتفاع = ٤- ١ = ٣

مساحة ∆ = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

مساحة ∆ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٣ = ١٥

<u>تطبيقـــــات فيزيائيـــــة</u>

ت ١ :ص١٦٢

اذا كان ف(ن)= ٣جا ٤ ن – ٥ جتا ٤ ن

: ف المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني

فاحسب المسافة ، السرعة ، التسارع عندما π/٨

<u>**الحل :**</u>

١) ف(ن)= ٣جا ٤ ن – ٥ جتا ٤ ن

ف(π/٨)= ٣جا π/٢– ٥ جتا π/٢ = ٣ م

٢) ع (ن) = ف َ(ن) = ١٢ جتا ٤ ن + ٢٠ جا ٤ن

ع (π/٨) = ١٢ جتا π/٢ + ٢٠ جاπ/٢= ٢٠م/ث

٣) ت(ن)=ف ً(ن)=ع َ(ن)=- ٤٨جا٤ن+٨٠جتا٤ن

ت(π/٨)= ٤٨جاπ/٢+٨٠جتاπ/٢= ٤٨ م/ ث ^{٢}

<u>**ت(٢) : ص ١٦٣**</u>

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة

ف(ن)= ١/٣ن^{٣} – ٣ ن ^{٢} + ٥ ن

: ف المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني

اوجد تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة

الحل :

ع(ن) = ف َ(ن) =ن ^{٢} – ٦ ن + ٥

في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة ع(ن) = ٠

ن ^{٢} – ٦ ن + ٥ = ٠

(ن – ١)(ن – ٥) = ٠ ومنها ن= ١ ، ٥

ت(ن) = ع َ(ن)= ٢ ن – ٦

ت(١)= ٢ × ١ – ٦ = - ٤ م / ث ^{٢}

ت(٥)= ٢ × ٥ – ٦ = ٤ م / ث ^{٢}

ت٣ : ص ١٦٤

قذفت جسم من سطح بنايبة رأسياً الى أعلى بحيث ان ارتفاعه عنها بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالاقتران ف(ن) = ٣٠ ن – ٥ن^{٢} اذا كانت سرعته لحضة وصوله الارض تساوي ٦٠ م/ث جد ارتفاع البناية

الحل :

ف (٠) = ٣(٠)-٥ (٠)^{٢} = ٠ أي ان ارتفاع البناية غير مضاف

نفرض ارتفاع البناية = جـ

ف(ن) = ٣٠ ن – ٥ن^{٢} + جـ
ع(ن) = فَ (ن) = ٣٠ – ١٠ ن
السرعة وهي نازل - ٦٠ م/ ث
٦٠ = ٣٠ – ١٠ ن ومنها ن = ٩
لكن عند وصوله الارض تكون ف(٩) = ٠
صفر = ٣٠ × ٩ – ٥(٩)^{٢} + جـ
صفر = ٢٧٠ - ٤٠٥ + جـ

تمارين ومسائل ص ١٦٥

س١ :أ) الحل :

. يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث كانت سرعته بعد ن ثانية من حركته ع(ن) = ن^{٢} – ٣ن + ٢
اوجد
أ) سرعة الابتدائية ؟
ب) متى يسكن لحظياً وما قيمة تسارعه حينئذ؟

الحل :

ا) السرعة الابتدائية أي ع (٠)
ع(٠) = (٠)^{٢} – ٣× ٠ + ٢ =٢ م / ث
ب) يسكن لحظياً عندما ع(ن) = ٠
ن^{٢} – ٣ن + ٢ = ٠
(ن – ٢) (ن – ١) = ٠ ومنها ن = ١ ، ٢
أما قيمة تسارعه حينئذ؟
ت (ن) = عَ(ن) = ٢ن – ٣
ت (١) =٢ × ١ – ٣ = - ١ م / ث^{٢}
ت (٢) =٢ × ٢ – ٣ = ١ م / ث^{٢}

س٢

يتحرك جسيم بسرعة ابتدائية مقداره ٢م/ث حسب العلاقة ف(ن)= أ ن^{٢} + ب ن : أ ، ب ثوابت ، احسب المسافة للتي يقطعها الجسيم بعد (٣) ث من الحركة علماً بان تسارعه ٨ م / ث.

الحل :

ع(ن) = ٢ أ ن + ب لكن ع(٠) = ٢

ع(٠) = ٢ أ × ٠ + ب = ٢ ومنها ب = ٢

المطلوب ف(٣) | = ؟ ؟ ؟

ت = ٨

ت(ن) =عَ(ن) = ٢ أ = ٨ ومنها أ = ٤
ف(ن)= ٤ ن^{٢} + ٢ ن
ف(٣)= ٤×(٣)^{٢} + ٢ × ٣ = ٣٦ + ٦ = ٤٢ م

س٣ : ص ١٦٥

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة

ف(ن)= جا ن + جتان ،ن تنتمي [٠ ، ٢ π] جد المسافة والتسارع في حالة السكون اللحظي

الحل :

في حالة السكون اللحظي أي عند ع(ن) = صفر
ع(ن) = فَ(ن) = جتا ن – جا ن = ٠
ومنها جتان = جا ن وهذا يكون في الربع الاول والثالث ومنها ن= π/٤ ، ٥ π/٤
١) ف(π/٤)= جا (π/٤) + جتا(π/٤)= √٢
ف(٥ π/٤)= جا (٥ π/٤) + جتا(٥ π/٤) =- √٢

٢) ت(ن) = عَ(ن) = - جا ن – جتا ن

ت (π/٤)= - جا (π/٤) - جتا(π/٤)= - √٢
ت(٥ π/٤)= - جا (٥ π/٤) - جتا(٥ π/٤) = √٢

س ٤:

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة ف(ن)= ن^{٣}

: ف المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني فاذا كانت

سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠ ، أ] تساوي

سرعته اللحظية عندما ن = ٢ ، جد قيمة أ .

الحل :

السرعة المتوسطة = سرعته اللحظية

ف(ن$_{٢}$) – ف (ن$_{١}$)
ــــــــــــــــــ = ع(ن)= فَ (ن)
ن$_{٢}$– ن$_{١}$

ف(أ) – ف (٠)
ــــــــــــــــــ = ٣ ن^{٢} |
أ – ٠ ن = ٢

(أ)^{٣}–(٠)^{٣}
ــــــــــــــــــ = ٣ × ٤
أ – ٠

ومنها أ^{٢} = ١٢ ومنها أ = ± $\sqrt{١٢}$

س ٥ :

يتحرك جسيم حسب العلاقة ع^{٢}= ١ـ ف^{٣}

:ع السرعة ، ف المسافة ، بين ان تسارع الجسيم

يساوي ـ٣/٢في اللحظة التي تنعدم فيها سرعتة

الحل :

د ف د ع
لا تنسى ع = ــــــ ، ت = ــــــ
د ن د ن

د ع د ف
٢ ع × ــــــ = ـ ٣ ف^{٢} × ــــــ
د ن د ن

٢ ع × ت = ـ ٣ ف^{٢} × ع

ت = ـ٣/٢ ف^{٢}

لكن عندما تنعدم السرعة ع(ن) = ٠

١ – ف^{٣} = ٠ ومنها ف = ١ اذن ت = ـ٣/٢

س٦ : ص١٦٥**

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة

ف(ن)= ١/٤(ن + ٢)^{٤} – ٦ ن^{٢}

: ف المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني

اوجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ٨٩ م / ث

الحل :

ع(ن) = (ن + ٢)^{٣} – ١٢ ن = ٨٩

(ن + ٢)^{٣} – ١٢ ن – ٨٩ = ٠

ن^{٣} + ٦ ن^{٢} – ٨١ = ٠

بالقسمة التركيبية

(ن – ٣)(ن^{٢} + ٩ ن + ٢٧) = ٠

ومنها ن= ٣ فقط لان الجزء الاخر لا يحلل ؟؟؟؟

ت(ن) = عَ(ن) = ٣ (ن + ٢)^{٢} - ١٢

ت(٣) = ٣ (٣ + ٢)^{٢} – ١٢= ٦٣ م / ث^{٢}

س ٧ **: قذف جسم رأسياً الى الأعلى من سطح الأرض حسب العلاقة ف(ن) = ٦٤ ن ـ ١٦ ن^{٢} ، بين ان يفقد نصف سرعته الابتدائية على ارتفاع ٤٨ م ؟

الحل :

ع(ن) = ٦٤ – ٣٢ ن

نجد السرعة الابتدائية ع (٠)

ع(٠) = ٦٤ – ٣٢ (٠) = ٦٤ م / ث

نجد ن عند ما ف(ن) = ٤٨

٤٨ = ٦٤ ن ـ ١٦ ن^{٢}

ن^{٢} – ٤ ن + ٣ = ٠ ومنها

(ن – ٣)(ن – ١) = ٠ ومنها ن = ١ ، ٣

ع(٣) = ٦٤ – ٣٢ (٣) = ٦٤ـ٩٦ = ـ ٣٢

وهذا يساوي نصف سرعته الابتدائية وهو نازل

ع(١) = ٦٤ – ٣٢ (١) = ٦٤ـ٣٢ = ٣٢

وهذا يساوي نصف سرعته الابتدائية وهو صاعد

س٨ مهم ص١٦٥ **

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة الاصل بالامتار بعد ن ثانية هو ف(ن)= جا^{٤} ن : ف المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني ، فجد سرعة الجسيم في اللحظة التي ينعدم فيها تسارعه لاول مرة بعد تحركة .

الحل :

ينعدم فيها تسارعه ت(ن) = ٠

ت(ن) = فً(ن)

فَ(ن) = ٤ جا^{٣} ن × جتا ن

فً(ن) =٤جا^{٣}ن×- جا ن+ جتان×١٢جا^{٢}ن×جتان

ت(ن) = – ٤ جا^{٤} ن + ١٢ جا^{٢} ن جتا^{٢} ن

– ٤ جا^{٤} ن + ١٢ جا^{٢} ن جتا^{٢} ن = ٠

- ٤ جا^{٢} ن (جا^{٢} ن – ٣ جتا^{٢} ن) = ٠

اما – ٤ جا^{٢} ن = ٠ ومنها ن = ٠ ، π ، ٢ π

او جا^{٢} ن – ٣ جتا^{٢} ن = ٠ومنها ظا^{٢} ن = ٣

ومنها ن = π/٣ ، ٥ π/٣ ، ....

ينعدم فيها تسارعه لاول مرة بعد تحركة عند π/٣

ع(π/٣) =٤ جا^{٣} (π/٣) جتا (π/٣)

س٩ مهم ص١٦٥

تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن)= √ن (٢٧ – ن)اثبت انهذه النقطة تبدأ في العودة الى النقطة التي بدأت منها الحركة بعد ٩ ث ، ثم جد سرعتها حينئذ .

الحل :

النقطة تبدأ بالعودة عندما ع(ن) = ٠ = فَ(ن)

$$\sqrt{ن}\,(-١) + (٢٧ - ن)\,\frac{١}{٢\sqrt{ن}} = ٠$$

(٢٧ – ن) = ٢ ن ومنها ٣ ن = ٢٧ ومنها ن = ٩

$$ع(ن) = -\sqrt{ن} + \frac{(٢٧ - ن)}{٢\sqrt{ن}}$$

$$ع(٩) = -\sqrt{٩} + \frac{(٢٧ - ٩)}{٢\sqrt{٩}} = -٣+٣ = ٠$$

س ١٠ **:من نقطة على ارتفاع ٨٠ م من سطح الارض ، قذف جسيم راسياً الى الأعلى حسب العلاقة

ف(ن) = ٦٤ن – ١٦ن^{٢} ،جد

5. **اقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم**
6. **الزمن اللازم بالثواني حتى يعود الجسم نقطة القذف**
7. **الزمن اللازم بالثواني حتى يعود الجسم الى سطح الارض**
8. **متى تصبح سرعة الجسيم ٤٠م /ث ا**
9. **مجموعة قيم ن≥ ٠التي تكون عندها ع(ن)> ٠ .**

الحل :

نضيف ارتفاع البناية الى العلاقة

ف(ن) = ٦٤ن – ١٦ن^{٢} + ٨٠

١. ف(ن)| =
ع= ٠

ع(ن) = فَ(ن)= ٦٤ – ٣٢ ن

٦٤ – ٣٢ ن = ٠ ومنها ن = ٢

ف(٢) = ٦٤(٢) – ١٦(٢)^{٢} + ٨٠

= ١٢٨ – ٦٤ + ٨٠ =١٤٤م

٢. ن|=
ف = ٨٠

٨٠ = ٦٤ن – ١٦ن^{٢} + ٨٠

ن(٦٤ – ١٦ ن) = ٠ ومنه ن = ~~٠~~ ، ٤

٣. ن|=
ف = ٠

١٦ن^{٢} - ٦٤ن - ٨٠ = ٠

ن^{٢} – ٤ ن - ٥ = ٠ ومنها

(ن – ٥)(ن + ١) = ٠ ومنها ن = ~~-١~~ ، ٥

٤. ن | =
ع = ٤٠

٦٤ – ٣٢ ن = ٤٠ ومنها ن = ٤/٣

٥. ن | =
ع(ن)> ٠

٦٤ – ٣٢ ن > ٠ ومنها ٠ ≤ن < ٢

س ١١

من سطح بناية ، افلت شخص جسماً من السكون وفق الاقتران ف$_{١}$(ن) = ١٦ ن^{٢} ، وفي اللحظة نفسها رمى شخص ثان جسماً عمودياً الى اسفل بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٠م / ث وفق الاقتران ف$_{٢}$(ن) = ٢٠ ن + ١٦ ن^{٢} ، فإذا ارتطم الجسم الأول بعد ٢/١ ث من ارتطام الجسم الثاني بالأرض اوجد

أ) سرعة كل من الجسم الاول والجسم الثاني لحظة ارتطامها بالأرض .

ب) ارتفاع البناية.

الحل :

نفرض ان زمن الثاني = ن

زمن الاول = ن + ٢/١

لكن ف$_{١}$ = ف$_{٢}$

١٦ (ن + ٢/١)^{٢} = ٢٠ ن + ١٦ ن^{٢}

١٦(ن ^{٢} + ن + ٤/١) = ٢٠ ن + ١٦ ن^{٢}

١٦ن^{٢} + ١٦ ن + ٤ = ٢٠ ن + ١٦ ن^{٢}

١٦ ن + ٤ = ٢٠ ن

٤ ن = ٤ ومنها ن = ١ زمن الثاني

زمن الاول = ن + ٢/١ = ١+ ٢/١ = ١,٥

ع$_{١}$ (ن)= فَ$_{١}$(ن) = ٣٢ ن

ع$_{١}$ (١,٥)= ٣٢ × ١,٥ = ٤٨م/ث

ع$_{٢}$ (ن)= فَ$_{٢}$(ن) = ٢٠ + ٣٢ ن

ع$_{٢}$ (١)= ٢٠+ ٣٢× ١ = ٥٢م/ث

ب) ارتفاع البناية = ف$_{١}$(١,٥)= ١٦ (١,٥)^{٢}

= ٣٦ م

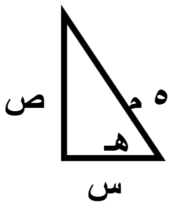
ملاحضة لو حسبت من ف$_{٢}$ (١) لكان نفس الجواب

المعدلات المرتبطة بالزمن

ت (١): ص ١٦٩

سلم طوله ٥ م يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي وبطرفه السفلي على ارض افقية اذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل ٢ م / ث فجد سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض عندما يكون الطرف السفلي للسلم علىبعد ٢,٥ م للحائط عن الأرض

الحل :



$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٢$ ، $\left|\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}\right| = ؟؟$

س = ٢,٥م

جتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{س}}{٥}$

ـ جا هـ× $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٥} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

$\frac{\text{ـ ص}}{٥} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٥} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

عندما س = ٢,٥ فان ص = $\sqrt{١٨,٧٥}$

$\frac{-\sqrt{١٨,٧٥}}{٥} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٥} \times ٢$

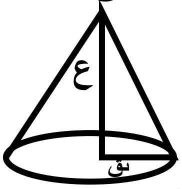
$\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{-٢}{\sqrt{١٨,٧٥}}$

ت (٢): ص ١٧٠

يتساقط الرمل بمعدل ٠,٤٣٢ م ³ / ث ليصنع كومة على شكل مخروط ارتفاعه دائماً يساوي ربع قطر قاعدته جد سرعة تغير الارتفاع في اللحظة التي يكون فيها الارتفاع ١,٢ م

الحل :

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٠,٤٣٢ \text{ م}^{٣} / \text{ث}$ ، ع = ٢/١نق



$\left.\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}\right|_{\text{ع} = ١,٢} = ؟؟؟؟؟؟؟؟؟$

ح = ٣/١ مساحة القاعدة × الارتفاع

= ٣/١ نق ^{٢} π ع

$\text{اذن ح} = \frac{١}{٣} \times (٢ \text{ ع})^{٢} \pi \text{ ع}$

$\text{ح} = \frac{٤\pi}{٣} \times \text{ع}^{٣}$

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٤\pi \times \text{ع}^{٢} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

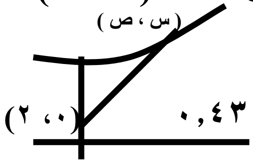
$٠,٤٣٢ = ٤\pi \times (١,٢)^{٢} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

دع/ دن= ٠,٠٧٥ π

ت (٣): ص ١٧١

تتحرك نقطة مادية على على المنحنى ق(س)= س ^{٢} + ٢ ، وفي لحظة ما كان معدل تغير احداثيها السيني ٠,٢٥ سم / ث وكان معدل التغير في احدثيها الصادي ٠,٤٣ سم / ث جد بعد النقطة المتحركة على المنحنى عندئذ من النقطة (٠ ، ٢)

الحل :



$\frac{\text{د ص}}{\text{دن}} = ٠,٢٥ \quad \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٠,٤٣$

ص = س ^{٢} + ٢

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٢ \text{ س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

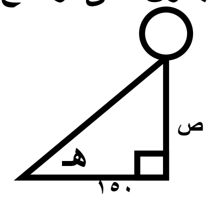
$\frac{٤٣}{١٠٠} = ٢\text{س} \times \frac{٢٥}{١٠٠}$

ومنها س=٠,٨٦ ← ص=(٠,٨٦)^{٢}+٢=٢,٧٤

$\text{ف} = \sqrt{(٢-٠,٨٦)^{٢} + (٠-٢,٧٤)^{٢}}$

ت (٤): ص ١٧٢

يرتفع بالون رأسياً للاعلى بمعدل ثابت قدره ٤٢م / د اذا تم رصد البالون من مشاهد على الارض ويبعد ١٥٠ م عن موقع البالون على الارض كما في الشكل فجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر الشاهد للبالون على ارتفاع ١٥٠ م من سطح الارض



الحل :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٤٢$ ، $\left.\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س} = ١٥٠} = ؟؟$

$\text{ظا هـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{١٥٠}$

$\text{قا}^{٢} \text{ هـ} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{١}{١٥٠} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$

$\frac{١}{\text{جتا}^{٢} \text{ هـ}} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{١}{١٥٠} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$

عندما ص = ١٥٠ فان

ف^{٢} =(١٥٠)^{٢} +(١٥٠)^{٢} ومنها ف = ١٥٠ $\sqrt{٢}$

$\text{جتا هـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{١٥٠}{١٥٠\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{٧}{١٠٠}$

تمارين ومسائل ص ١٧٤

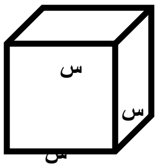
مثال (١٠٨): س١

مكعب من الثلج يتناقص طول ضلع بمعدل ٠,٠٠١سم/ث جد معدل تناقص كلا من حجمه ومساحته الكلية عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم

الحل :

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ؟؟ \quad \left.\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=١٠\text{سم}} = ؟؟؟$ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠,٠٠١-$

$\text{ح} = \text{س}^{٣}$



$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \text{٣ س}^{٢} \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \text{٣ (١٠)}^{٢} \frac{\text{-١}}{\text{١٠٠٠}} = \text{-٠,٣}$$

$\text{م}_{\text{ك}} = \text{٦س}^{٢}$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{١٢ س} \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

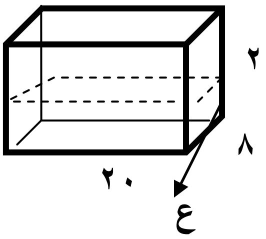
$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{١٢ (١٠)} \frac{\text{-١}}{\text{١٠٠٠}} = \text{-٠,١٢}$$

س٢ :

حوض سباحة على شكل متوازي مستطيلات بعدا قاعدته ٢٠ م ، ٨ م وعمقه ٢ م إذا ضخ الماء في الحوض بمعدل ٥ م ٣ / د فجد سرعة ارتفاع الماء

الحل :

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \text{؟؟} \qquad \frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \text{٥ م}$$



$\text{ح} = \text{٢٠} \times \text{٨} \times \text{ع}$

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \text{١٦٠} \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

$$\text{٥} = \text{١٦٠} \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{د ن}} = \frac{\text{٥}}{\text{١٦٠}}$$

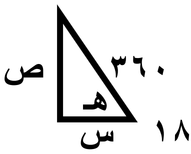
س^{٣} :سلم طوله ٣٦٠ سم يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي وبطرفه السفلي على ارض افقية اذا تحرك الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل ٩٠ سم / ث وفي لحظة ما كان الطرف السفلي للسلم على بعد ١٨٠ سم للحائط جد عند هذه اللحظة

1. **سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلم**
2. **معدل التغير في مساحة المثلث المكون من السلم والارض والحائط**
3. **سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض**

الحل :

١.

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{٩٠سم/د} \text{ ، } \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \text{؟؟}$$



$\text{س} = \text{١٨٠}$

$$\text{(٣٦٠)}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$$

$$\text{صفر} = \text{٢س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + \text{٢ ص} \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$$

عندما س = ١٨٠ فان ص = $\text{١٨٠}\sqrt{\text{٣}}$

$$\text{صفر} = \text{٢} \times \text{١٨٠} \times \text{٩٠} + \text{٢} \times \text{١٨٠}\sqrt{\text{٣}} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{\text{-١٨٠} \times \text{٩٠}}{\text{١٨٠}\sqrt{\text{٣}}} \quad \text{تعني تتناقص}$$

٢.

$\text{م} = \text{٢/١ س} \times \text{ص}$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{٢/١ س} \times \frac{\text{دص}}{\text{د ن}} + \text{ص} \times \text{٢/١} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{٢/١} \times \text{١٨٠} \frac{\text{-٩٠}}{\sqrt{\text{٣}}} + \text{١٨٠}\sqrt{\text{٣}} \times \text{٢/١} \times \text{٩٠}$$

٣.

$$\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \text{؟؟}$$

$$\text{جتا هـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{س}}{\text{٣٦٠}}$$

$$\text{-جا هـ} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{\text{١}}{\text{٣٦٠}} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{-ص}}{\text{٣٦٠}} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{\text{١}}{\text{٣٦٠}} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{-١٨٠}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٣٦٠}} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{\text{١}}{\text{٣٦٠}} \times \text{٩٠}$$

$$\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{\text{-١}}{\text{٢}\sqrt{\text{٣}}}$$

س٤ ص١٧٤

صفيحة معدنية مثلثة الشكل ارتفاعها يساوي نصف طول قاعدتها تتمدد بالحرارة فتزداد مساحتها بمعدل ٠,٥ سم ٢ / ث جد معدل التغير في طول قاعدة الصفيحة عندما يصبح طولها ١٠ سم

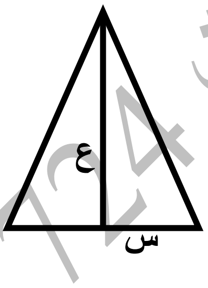
الحل :

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{٠,٥ سم}^{\text{٢}}\text{/ ث} \text{ ، } \left.\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س} = \text{١٠}} = \text{؟؟؟}$$

م = ٢/١ القاعدة × الارتفاع

لكن الارتفاع = ٢/١ طول قاعدتها← ع=٢/١س

م = ٢/١ س × ٢/١ س



$$\text{م} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س}^{\text{٢}}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س} \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{١}}{\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{١٠} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

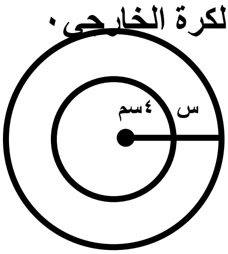
$$\frac{\text{دس}}{\text{د ن}} = \frac{\text{١}}{\text{١٠}}\text{سم}$$

س٥ ص ١٧٤

كرة حديدية قطرها ٨سم مغطاة بطبقة منتظمة من الجليد يذوب بمعدل ١٠سم$^{\text{٣}}$/د٠ جد

1. **سرعة نقصان سمك الجليد عندما يكون سمكه ٢سم**
2. **سرعة نقصان مساحة سطح الكرة الخارجي٠**

الحل:



$$\left.\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}\right| = \text{؟، } \frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \text{- ١٠}$$

السمك س = ٢سم

حجم الجليد = حجم الكرة الكلي – حجم الكرة الحديدية

$$\text{ح} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}\text{(س + ٤)}^{\text{٣}}\pi - \frac{\text{٤}}{\text{٣}}\text{(٤)}^{\text{٣}}\pi$$

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \text{٤ (س + ٤)}^{\text{٢}}\pi \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\text{١٠} = \text{٤ (٢ + ٤)}^{\text{٢}}\pi \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{\text{٥}}{\text{٧٢}\pi}$$

٢) م = ٤ نق$^{\text{٢}}$ π

م = ٤ (س + ٤)$^{\text{٢}}$ π

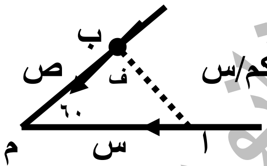
$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{٨ (س + ٤)}\pi \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{\text{١٠}}{\text{٣}}\text{سم}^{\text{٢}}\text{/د٠}$$

س٦ ص ١٧٤**

خطان حديديان يميل احداهما على الاخر بزاوية قياسها π/٣ ويلتقيان في النقطة م يسير القطار أ على احداهما بسرعة ٨٠كم / ساعة مقتربا من النقطة م ، ويسير القطار ب على الخط الاخر وبسرعة ٥٠ كم / س مقتربا من النقطة م. عند الساعة التاسعة صباحا كان القطاران على بعد ٢١٠ كم ، ١٨٠ كم على الترتيب من النقطة م جد معدل اقتراب القطارين من بعضهما البعض عند الساعة الحادية عشرة صباحاً

الحل :



$$\left.\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}\right| = \text{؟، } \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{-٨٠ كم/س}$$

عند الساعة =١١ صباحاً

ف$^{\text{٢}}$ = س$^{\text{٢}}$ + ص$^{\text{٢}}$ – ٢ س × ص × جتا ٦٠

ف$^{\text{٢}}$ = س$^{\text{٢}}$ + ص$^{\text{٢}}$ – س ص

$$\text{٢ف}\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \text{٢س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + \text{٢ص}\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$$

$$\text{- (س}\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} + \text{ص}\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}\text{)}$$

← عند الساعة =١١ صباحاً

س = ٢١٠ – ٨٠× ٢= ٥٠

ص = ١٨٠ ـ ٥٠ × ٢ = ٨٠

ف^{٢} = (٥٠)^{٢} + (٨٠)^{٢} ـ ٥٠ × ٨٠ ومنها ف = ٧٠

$$\text{٢ف}\,\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \text{٢س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + \text{٢ص}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$$

$$-\left(\text{س}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} + \text{ص}\,\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}\right)$$

$$\text{١٤٠} \times \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \text{ـ٨٠٠٠ـ٨٠٠٠ + ٢٥٠٠ + ٦٤٠٠}$$

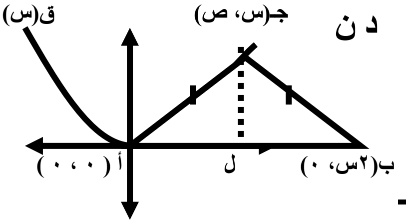
$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{\text{ـ ٧١٠٠}}{\text{١٤٠}}$$

س ٧

بدأت النقطتان ب ، جـ الحركة معاً من نقطة الاصل أ بحيث تتحرك النقطة ب على محور السينات الموجب بسرعة ٤ وحدات / ث وتتحرك النقطة جـ في الربع الاول وعلى منحنى الاقتران ق(س)= س^{٢} بحيث يبقى دائما طول أ جـ يساوي ب جـ جد معدل التغير في مساحة المثلث أ ب جـ بعد ٢ ث من بدء الحركة

الحل :

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\Big|_{\text{ن} = ٢} = \text{؟؟} \quad ، \quad \frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = ٤$$



لكن ل = ٢ س

$$\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = ٢\,\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$٤ = ٢\,\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} \quad \text{ومنها} \quad \frac{\text{دس}}{\text{د ن}} = ٢$$

ومنها س بعد ٢ ث = ٤

م = ٢/١ القاعدة × الارتفاع

= ٢/١ × ٢س × ص لكن ص = س^{٢}

اذن م = س^{٣}

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٣\,\text{س}^{٢}\,\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٣\,(٤)^{٢} \times ٢ = \text{٩٦م/ث}$$

س^{٨} ص١٧٥

اثبت ان معدل التغير في حجم الكرة بالنسبة الى نصف قطرها يساوي مساحة سطح الكرة

الحل :

$$\text{ح}_{\text{الكرة}} = \frac{٤}{٣}\,\text{نق}^{٣}\,\pi$$

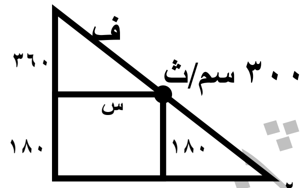
$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٤\,\pi\,\text{نق}^{٢} \times \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د نق}} = ٤\,\pi\,\text{نق}^{٢} = \text{مساحة سطح الكرة}$$

س ^{٩} ص ١٧٥ مع تغير في الأرقام

رجل طوله ١٨٠ سم يقف أمام مصباح كهربائي يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٥٦٠ سم إذا اخذ الرجل بالاقتراب من المصباح بمعدل ٢٠٠سم /د فجد معدل تغير المسافة المحصورة بين المصباح والشعاع الواصل بين المصباح ورأس الرجل ، عندما يكون الرجل على بعد ١٨٠ سم من قاعدة المصباح

الحل :



$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \text{؟؟} \quad \Big| \quad \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{ـ ٣٠٠ سم/ث}$$

عندما س = ١٨٠

ف ^{٢} = س ^{٢} + (٣٦٠)^{٢}

عندما

س=١٨٠ ← ف^{٢}=(١٨٠)^{٢}+(٣٨٠)^{٢} ← ف=١٨٠$\sqrt{٥}$

$$\text{٢ف} \times \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \text{٢س}\,\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

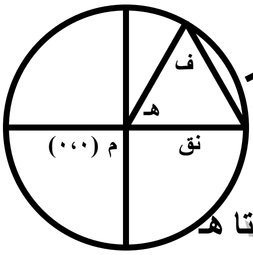
$$١٨٠\sqrt{٥} \times \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ١٨٠\,(\text{ـ}٣٠٠) \leftarrow \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{\text{ـ}٣٠٠}{\sqrt{٥}}$$

ويمكن ان يكون السؤال ما معدل التغير في الزاوية

ظا هـ = ٣٨٠/س ....

س ١٠ :

ابتدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الاصل من النقطة (أ ، ٠) بعكس اتجاه عقارب الساعة بحيث يزداد طول قوس الدائرة الذي ترسمه في اثناء حركتها بمعدل ٨ سم / ث جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقط (أ ، ٠) عندما يقابل القوس الذي ترسمه زاوية مركزية مقدارها $\pi/٣$



الحل:

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ?$ ، $\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = ٨$ سم

$\text{هـ} = \pi/٣$

$\text{ف}^٢ = \text{نق}^٢ + \text{نق}^٢ - ٢\ \text{نق نق جتا هـ}$

$\text{ف} = \sqrt{٢\ \text{نق}^٢ - ٢\text{نق}^٢\ \text{جتا هـ}}$

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢\text{نق}^٢\ \text{جا هـ} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{٢\ \text{نق}^٢ - ٢\text{نق}^٢\ \text{جتا هـ}}} \text{........(١)}$$

لكن $\text{ل} = \text{نق هـ}$

$\frac{\text{د ل}}{\text{دن}} = \text{نق} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$

$\frac{\text{د هـ}}{\text{دن}} = \frac{٨}{\text{نق}}$

بالتعويض في (١)

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢\text{نق}^٢\ (٠,٨٦٦) \times \frac{٨}{\text{نق}}}{٢\sqrt{٢\ \text{نق}^٢ - \text{نق}^٢}}$$

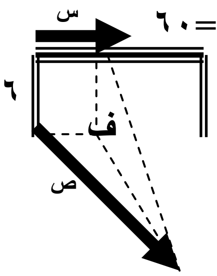
٨

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{\text{نق}\ (٦,٩٢٨)}{\text{نق}} = (٦,٩٢٨)$

س ١١ ص١٧٥

جسر للمشاه يرتفع عن مستوى الشارع ٦ م ، يسير عليه رجل بمعدل ٣ كم / ساعة وفي اللحظة نفسها مرت من تحته سيارة بسرعة ٦٠ كم / ساعة جد معدل ابتعاد السيارة عن الرجل بعد دقيقة واحدة من بدء الحركة

الحل:



$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ?$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٣$ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٦٠$

$\text{ن} = ١/٦٠$ ث

بعد ن=١/٦٠ ث

فان $\text{ص} = ٦٠ \times ١/٦٠ = ١$

← $\text{س} = ٣ \times ١/٦٠ = ١/٢٠$

$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + ٣٦}$

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{٢\text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\ \text{ص} \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + ٣٦}}$$

$$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{١/٢٠ \times ٣ + ١ \times ٦٠}{\sqrt{١/٤٠٠ + ٣٧}}$$

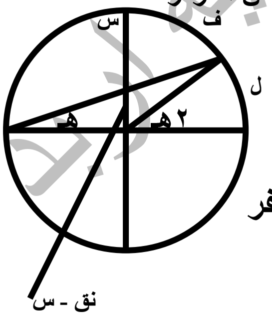
س ١٢ ص١٧٥

مضمار سباق دائري يوجد على طرف قطره مصدر ضوء ، انطلق حصان في نهاية قطر اخر عمودي على القطر الاول مقترباً من المركز بسرعة ٤ كم / د ، جد سرعة تغير ظل الحصان على المظمار عندما يقطع الحصان نصف المسافة عن المركز

الحل:

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = ?$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٤$ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٦٠$

عندما يقطع الحصان نصف المسافة عن المركز



الحل :

ف + ل = ١/٤ المحيط

ف + ٢ هـ نق = ١/٤ المحيط

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} + ٢\ \text{نق} \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \text{صفر}$

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = -\ ٢\ \text{نق} \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$ ....(١)

لكن

$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{نق} - \text{س}}{\text{نق}} = \text{١} - \frac{\text{١}}{\text{نق}}\,\text{س}\ \text{.........(٢)}$$

$$\text{قا}^{\text{٢}}\,\text{هـ}\,\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{-\text{١}}{\text{نق}} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}\ \text{..........(٣)}$$

عندما $\text{س} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{نق}$ ومنها $\text{ظاهـ} = \text{١} - \frac{\text{١}}{\text{نق}} \times \frac{\text{نق}}{\text{٢}}$

ومنها $\text{ظا هـ} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ....(٤)

لكن $\text{قا}^{\text{٢}}\text{هـ} = \text{ظا}^{\text{٢}}\text{هـ} + \text{١} = \frac{\text{١}}{\text{٤}} + \text{١} = \frac{\text{٥}}{\text{٤}}$

بالتعويض في (٣)

$\frac{\text{٥}}{\text{٤}} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{-\text{١}}{\text{نق}} \times \text{٤}$ ومنها $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{-\text{١٦}}{\text{٥ نق}}$

بالتعويض في (١)

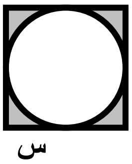
$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{\text{٣٢}}{\text{٥}}$ كم/ د

س$^{\text{١٣}}$

مربع تتمدد اضلاعه بمعدل ٤ سم/ د رسمت دائرة داخل المربع واخذت تتمدد مع المربع بحيث تبقى ملامسه لاضلاعه جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين المربع والدائرة عندما يكون طول ضلع المربع ٢٠سم

الحل :

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{٤}$ سم / د ، $\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س} = \text{٢٠}} = ؟؟$



مساحة المنطقة المظللة = مساحة□ - مساحة○

$\text{م} = \text{س}^{\text{٢}} - \text{نق}^{\text{٢}}\,\pi$ لكن نق = ٢/١ س

$\text{م} = \text{س}^{\text{٢}} - \text{٤/١}\ \text{س}^{\text{٢}} \times \pi$

$$\frac{\text{د م}}{\text{دن}} = \text{٢ س}\,\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} - \frac{\pi}{\text{٤}} \times \text{٢ س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{دن}} = \text{٢} \times \text{٢٠} \times \text{٤} - \frac{\pi}{\text{٤}} \times \text{٢٠} \times \text{٤}$$

التزايد والتناقص

ت (١): ص ١٧٨

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

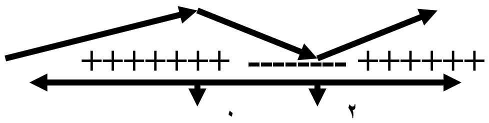
$\text{ق(س)} = \text{س}^{\text{٣}} - \text{٣س}^{\text{٢}} + \text{١}$ على ح

الحل :

$\text{قَ(س)} = \text{٣ س}^{\text{٢}} - \text{٦ س}$

$\text{٣ س}^{\text{٢}} - \text{٦ س} = \text{٠}$

س (٣س - ٦) = ٠ ومنها س = ٠ ، ٢



متناقص [٠ ، ٢]

متزايد (- ∞ ، ٠] ، [٢ ، ∞)

ت (٢): ص ١٧٩

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق(س) = جتا ٢س ، [٠ ، ٢ π]

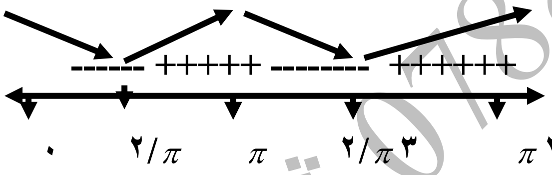
الحل :

قَ (س) = - ٢ جا ٢ س

- ٢ جا ٢ س = ٠ ومنها

٢ س = ٠ ، π ، ٢ π ، ٣ π ، ٤ π

ومنها س = ٠ ، π/٢ ، π ، ٣ π/٢ ، ٢ π



متزايد [π/٢ ، π] ، [٣ π/٢ ، ٢ π]

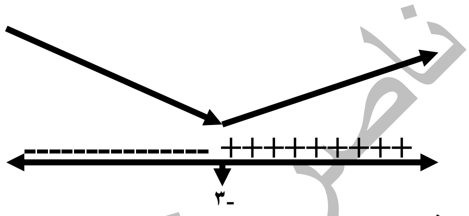
متناقص [٠ ، π/٢] ، [π ، ٣ π/٢]

تمارين ومسائل ص ١٨٠

س (١)

أ) $قَ(س) = ٢س + ٦$

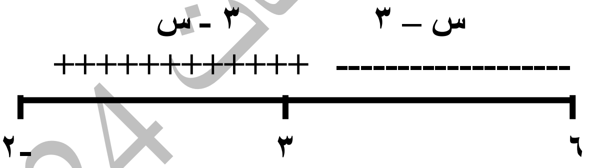
$٢س + ٦ = ٠$ ومنها $س = -٣$

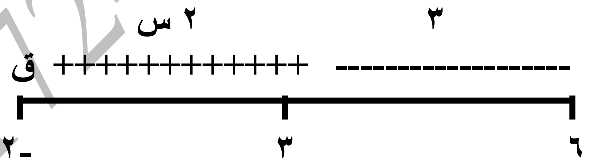


متناقص (- ∞ ، - ٣]

متزايد [- ٣ ، ∞)

ب) $ق(س) = س - |٣ - س|$ ، [-٢ ، ٦]

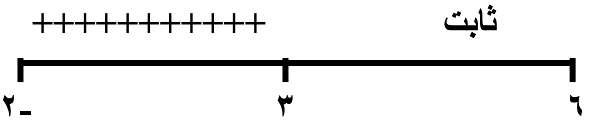




$$قَ(س) = \begin{cases} ٢ & -٢ < س < ٣ \\ غ.ق & س = ٣ \\ صفر & ٣ < س < ٦ \end{cases}$$

عند -٢ ، ٦ غير قابل للاشتقاق اطراف فترة

عند ٣ متصل لكن غير قابل للاشتقاق



متزايد [-٢ ، ٣]

ثابت [٣، ٦]

جـ)

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = جا^{٢} س$ ، [٠ ، ٢ π]

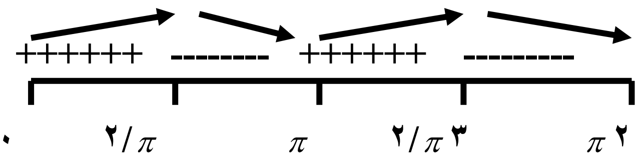
الحل :

$قَ(س) = ٢ جا س جتا س = جا ٢ س$

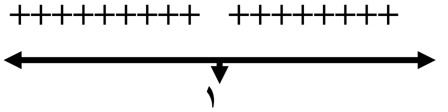
$جا ٢ س = ٠$

$٢س = ٠ ، \pi ، ٢\pi ، ٣\pi ، ٤\pi$

اذن $س = ٠ ، \pi/٢ ، \pi ، ٣\pi/٢ ، ٢\pi$



د) $قَ(س) = ٣(س - ١)^{٢}$



متزايد على ح

هـ)

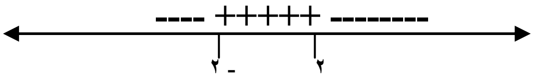
اذا كان $ق(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$

حدد مجالات التزايد والتناقص

الحل :

نبحث في مجال الاقتران

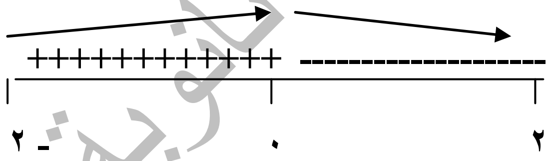
$٤ - س^{٢} = ٠$ ومنها $س = \pm ٢$



١) المجال [- ٢ ، ٢]

٢) $قَ(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^{٢}}}$

$\frac{-س}{\sqrt{٤ - س^{٢}}} = ٠$



اذن متزايد [- ٢ ، ٠]

متناقص [٠ ، ٢]

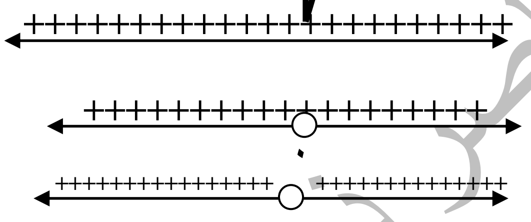
و)

اذا كان $ق(س) = \sqrt[٥]{س^{٣}}$

$قَ(س) = \frac{٣س^{٢}}{٥\sqrt[٥]{س^{١٢}}}$

$$\frac{٣س^{٢}}{٥س^{٢}\,\underset{٣}{\sqrt[٥]{س^{٢}}}} = ٠$$

$$\frac{}{٥\sqrt[٥]{س^{٢}}} = ٠$$



ق َ ٠

الاقتران ق متزايد على ح ....لاحظ غير قابل للاشتقاق عند صفر لكن الاقتران معرف عندها

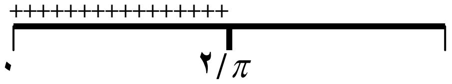
ز) اذا كان ق(س)= س + جا س، [٠ ، π/٢]

الحل :

قَ (س) = ١ + جتا س

١ + جتا س = ٠ ومنها جتا س = -١

ومنها س = π



متزايد [٠ ، π/٢]

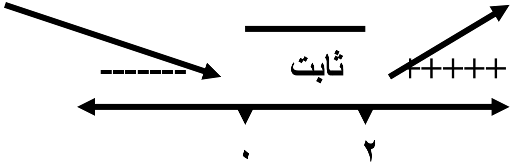
ح)

ق(س)= { س^{٢} + ١ ، س ≤ ٠
١ ، ٠ < س < ٢
$\sqrt{س^{٢} + ١}$ ، س ≥ ٢ }

قَ(س)= { ٢س ، س < ٠
٠ ، ٠ < س < ٢
$\frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢} + ١}}$ ، س > ٢ }

س = ٠ متصل وقابل للاشتقاق قَ(٠) = ٠

س= ٢ منصل غير قابل للاشتقاق



متناقص (- ∞ ، ٠] ، ثابت [٠ ، ٢]

متزايد [٢ ، ∞)

ط)

$$ق(س) = \frac{س - ٣}{س^{٢} + ٩}$$

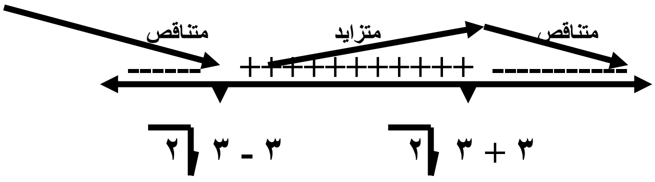
$$قَ(س)= \frac{(س^{٢}+٩)(١)-(س-٣)(٢س)}{(س^{٢} + ٩)^{٢}} = ٠$$

س^{٢}+٩- ٢س^{٢}+ ٦ س = ٠

- س^{٢}+ ٦س + ٩ = ٠

س^{٢}- ٦س - ٩ = ٠

س = ٣ ± ٣ $\sqrt{٢}$



ي)

اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

ق(س) = { ١ - ٢ س ، -٢ ≤ س < ١
|٢ س - ٤ | ، ١ ≤ س ≤ ٤ }

الحل :

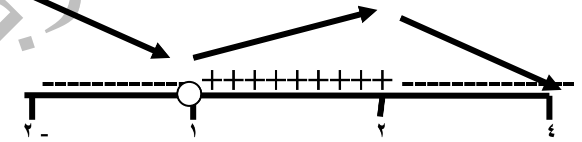
ق(س) = { ١ - ٢ س ، -٢ ≤ س < ١
٢ س - ٤ ، ١ ≤ س ≤ ٢
٤ - ٢ س ، ٢ < س ≤ ٤ }

ق(س) = { -٢ ، -٢ < س < ١
٢ ، ١ < س < ٢
-٢ ، ٢ < س < ٤ }

عند س= -٢ ، ٤ غير قابل لاشتقاق اطراف فترة

عند س = ١ غير متصل وبالتالي غير قابل لاشتقاق

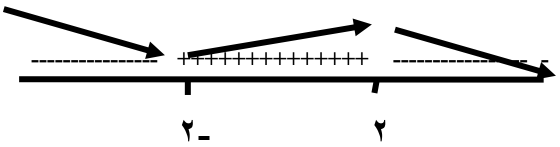
عند س = ٢ متصل لكن غير قابل للاشتقاق



متناقص [-٢ ، ١) ، [٢ ، ٤]

متزايد [١ ، ٢]

س ٢ :



متناقص (- ∞ ، -٢] ، [٢ ، ∞)
متزايد [-٢ ، ٢]

س٣ :
اذا كان قَ(س) = هـَ(س) ∀
س ∍ اثبت ان ق(س) – هـ (س) = ثابت

الحل :
نفرض ان ل(س) = ق(س) – هـ (س)
لَ (س) = قَ(س) – هـَ (س)
بما ان قَ(س) = هـَ (س)
لَ (س) = صفر
اذن ل(س) ثابت

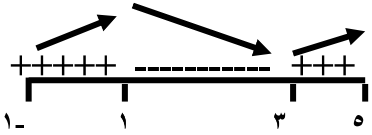
س ٤ :
اذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين متصلين على [أ ، ب] وقابلين للاشتقاق على (أ ، ب) وكان كل من ق(س) ، هـ (س) متزايداً على [أ ، ب] وكان ل(س) = ق(س) + هـ (س) اثبت ان ل (س) متزايد على [أ ، ب]

الحل :
نفرض ان ل(س) = ق(س) + هـ (س)
لَ (س) = قَ(س) + هـَ (س)
بما ان ق(س) ، هـ (س) متزايداً
اذن قَ (س) ، هـَ (س) موجبات
اذن لَ (س) موجبة على [أ ، ب]
اذن ل (س) متزايد على [أ ، ب]

القـــــــيم القـــــــصوى

ت (١): ص ١٨٥
ليكن ق(س)= س^{٣} – ٦ س^{٢}+ ٩ س، [-١ ، ٥]
٣. اوجد جميع النقط الحرجة للاقتران ق
٤. جد القيم القصوى المحلية والمطلقة

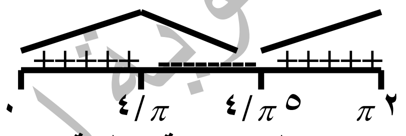
الحل :
٢. اطراف الفترة + اصفار المشتقة الاولى حرجة
قَ(س) = ٣ س ^{٢} – ١٢ س + ٩
٣ س ^{٢} – ١٢ س + ٩ = ٠ بالقسمة على ٣
س ^{٢} – ٤س + ٣ = ٠
(س – ٣)(س - ١) = ٠ ← س = ٣ ، ١
اذن الحرجة س = {-١ ، ١ ، ٣ ، ٥}



القيم القصوى
(-١ ، ق (-١))= (-١ ، -١٦) صغرى مطلقة
(١ ، ق (١))= (١ ، ٤) عظمى محلية
(٣ ، ق (٣))= (٣ ، ٠) صغرى محلية
(٥ ، ق (٥))= (٥ ، ٢٠) عظمى مطلقة

ت (٢): ص ١٨٧
جد نقط القيم القصوى ونوعها للاقتران
ق(س) = جتا س + جا س ، [٠، ٢ π]

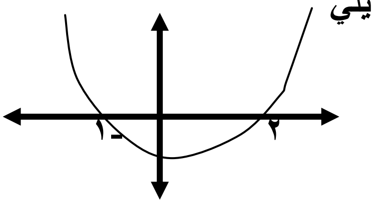
الحل :
قَ(س) = - جا س + جتا س
عند س= ٠ ، ٢ π غير قابل للاشتقاق اطراف فترة
جتا س – جا س = ٠ ومنها جا س = جتا س
اذن س = π/٤ ، ٥ π/٤



(π/٤ ، ق(π/٤)) عظمى محلية مطلقة
(٥ π/٤ ، ق(٥ π/٤)) صغرى محلية مطلقة
ملاحظة المطلوب المحلية فقط

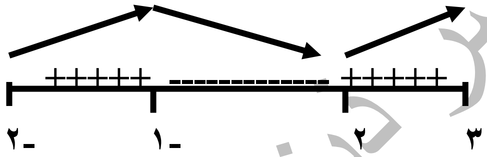
ت (٣): ص ١٨٨

الرسم التالي يمثل المشتقة الاولى للاقتران [-٢ ، ٣]
اعتماداً علية اجب عما يلي



٥. النقط الحرجة
٦. مجالات التزايد والتناقص للاقتران
٧. نقط القيم القصوى للاقتران

الحل :



٥. النقط الحرجة اطراف الفترة بالاضافة الى نقط تقاطع المشتقة مع محور السينات
{ -٢ ، -١ ، ٢ ، ٣ }
٦. [- ٢ ، -١] ، [٢ ، ٣] متزايد
[- ١ ، ٢] متناقص
٧. (- ١ ، ق (- ١)) عظمى محلية
(٢ ، ق(٢)) صغرى محلية

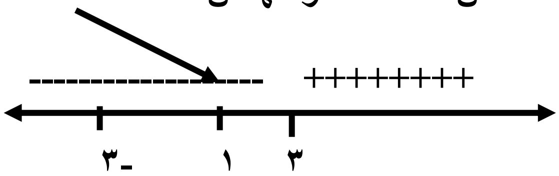
تمارين ومسائل ص ١٨٩

س١ :

جد نقط القيم القصوى ونوعها للاقتران
أ) ق(س) = س^{٢} - ٦ س + ٥ ، [-٣ ، ١]

الحل :

قَ(س) = ٢ س – ٦
٢ س – ٦ = ٠ ومنها س = ٣

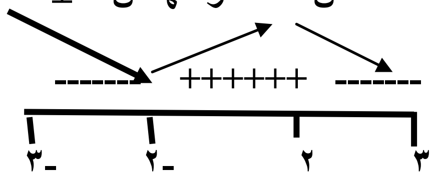


(-٣ ، ق (-٣)) = (٠ ، ٥) عظمى مطلقة
(١ ، ق (١)) = (٣ ، -٤) صغرى مطلقة
ملاحظة اطراف الفترة ممكن ان تكون مطلقة ولكن ليس محلية

ب) ق(س) = ١٢س- س^{٣} ، [-٣ ، ٣]

الحل :

قَ(س) = ١٢ - ٣ س^{٢}
١٢ - ٣ س^{٢} = ٠ ومنها س = ± ٢

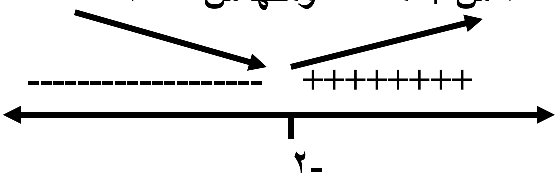


(-٣ ، ق (-٣))=(-٣ ، -٩)
(-٢، ق(-٢))= (-٢،-١٦) صغرى محلية مطلقة
(٢ ، ق (٢))= (٢ ، ١٦)عظمى محلية مطلقة
(٣ ، ق (٣))= (٣ ، ٩)

جـ) ق(س) = س^{٢} + ٤ س - ٥ ، ح

الحل :

قَ(س) = ٢ س + ٤
٢ س + ٤ = ٠ ومنها س = - ٢



(-٢ ، ق (-٢)) صغرى محلية مطلقة

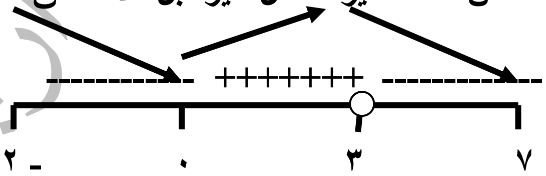
د) ق(س) =
س^{٢} + ٥ ، - ٢ ≤ س < ٣
١٠ – ٢ س ، ٣ < س < ٧

اوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة

الحل :

قَ(س) =
٢س ، - ٢ < س < ٣
– ٢ ، ٣ < س < ٧

عند س = - ٢ ، اطراف الفترة غير قابل للاشتقاق
عند س = ٣ غير متصل غيرقابل للاشتقا ق ؟ ؟ ؟

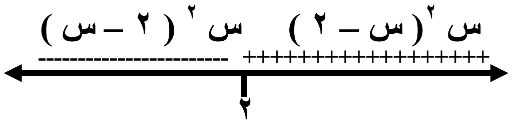


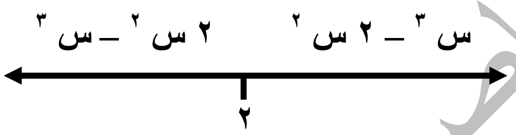
النقط الحرجة {- ٢،٠} ، ٣ ، ٧ ليست حرجة ؟ ؟
(- ٢ ، ق(- ٢)) = (- ٢ ، ٩)
(٠، ق(٠)) = (٠ ، ٥) صغرى محلية
(٧، ق(٧)) = (٧ ، -٤)

هـ)

ق(س) = س^{٢} | س – ٢ |

الحل :





ق َ(س) = { ٣ س^{٢} – ٤ س ، س > ٢
{ ٤ س – ٣ س^{٢} ، س < ٢

عندما س = ٢ متصل ولكن غير قابل للاشتقاق

****** نجد النقط الحرجة**

س = ٢ حرجة لانه غير قابل للاشتقاق

٣ س^{٢} – ٤ س = ٠

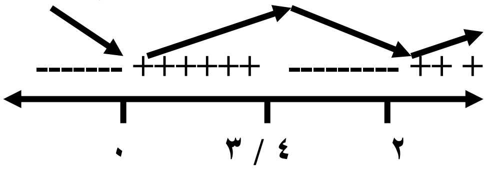
س (٣ س – ٤)= ٠ ومنها س = ٠ ، ٣/٤

ليست حرجة لانهما ليسوا ضمن الفترة

٤ س – ٣ س^{٢} = ٠

س (٤ – ٣ س) = ٠ ومنها س = ٠ ، ٣/٤ حرجة

اذن النقط الحرجة س = { ٠ ، ٣/٤ ، ٢ }



(٠،ق(٠))= (٠، ٠) صغرى محلية مطلقة ؟؟؟؟؟

(٣/٤ ، ق (٣/٤)) عظمى محلية

(٢،ق(٢))= (٠، ٠) صغرى محلية مطلقة ؟؟؟؟؟

د)

ق(س)= س^{٣} – ١/٤ س^{٢} ، [-١ ، ٤]

الحل :

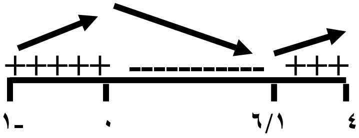
٣. اطراف الفترة + اصفار المشتقة الاولى حرجة

ق َ(س) = ٣ س^{٢} – ١/٢ س

٣ س^{٢} – ١/٢ س = ٠

س (٣ س– ١/٢) = ٠ ← س = ٠ ، ١/٦

اذن الحرجة س = {-١ ، ٠ ، ١/٦ ، ٤}



القيم القصوى

(-١،ق(-١))= (-١،-١,٢٥) صغرى مطلقة

(٠ ، ق (٠))= (٠ ، ٠) عظمى محلية

(١/٦،ق(١/٦))=(١/٦،-١/٤٣٢) صغرى محلية

(٤،ق(٤))= (٤،٦٠) عظمى مطلقة

هـ) ق(س) = $\sqrt{\text{جا س}}$ ، [٠ ، π]

الحل :

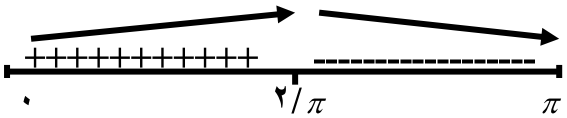
$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{جتا س}}{٢\sqrt{\text{جا س}}}$$

المقام على الفترة موجب

البسط

جتا س = ٠ ومنها س = π/٢

النقط الحرجة { ٠ ، π/٢ ، π }



(٠ ، ٠) صغرى مطلقة

(π/٢ ، ١) عظمى محلية مطلقة

(π ، ٠) صغرى مطلقة

ح) :

ق (س) = $\sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س})^{٢}}$ ، ح

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢(\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س})(٢\,\text{س} - ٤)}{٣\sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س})^{٤}}}$$

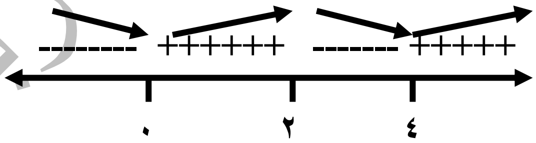
النقط الحرجة

٢ (س^{٢} – ٤ س)(٢ س – ٤)= ٠ ومنها

س = ٠ ، ٢ ، ٤

اصفر المقام س = ٠ ، ٤

اذن النقط الحرجة س= { ٠ ، ٢ ، ٤ }



(٠ ، ق(٠))= (٠ ، ٠) صغرى محلية مطلقة

(٢ ، ق(٢))= (٢ ، ٤) عظمى محلية

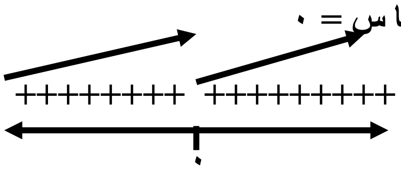
(٤ ، ق(٤)) = (٤ ، ٠) صغرى محلية مطلقة

ط) ق(س)= س^{٣} + ١ ، على ح

الحل :

قَ(س) = ٣ س^{٢}

٣ س^{٢} = ٠ ومنها س = ٠



اذن س = { ٠ } نقط حرجة لكنه ليس له قيمة قصوى عند س = ٠

س ٢ :

جد قيم كل من الثابتين أ ، ب التي تجعل للاقتران ق(س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س ، نقطتين حرجتين عند س = ـ ١ ، س = ٢

الحل : قَ(س) = ٣ س^{٢} + ٢ أ س + ب

، نقطتين حرجتين عند س = ـ ١ ، س = ٢

قَ(ـ١) = ٠ ومنها ٣ – ٢ أ + ب = ٠ ....(١)

قَ(٢) = ٠ ومنها ١٢ + ٤أ + ب = ٠ ....(٢)

من (١) ، (٢)

- (٣ – ٢ أ + $\cancel{ب}$ = ٠)

١٢ + ٤أ + $\cancel{ب}$ = ٠

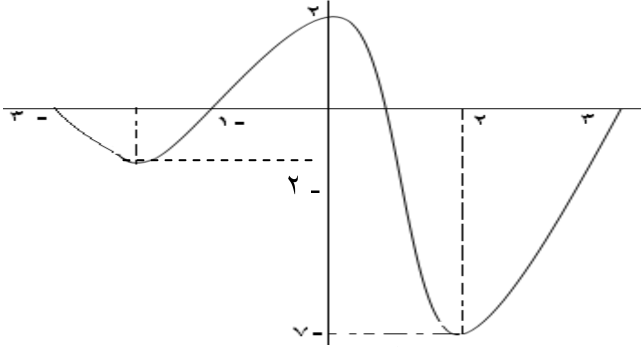
---

٩ + ٦ أ = ٠ ومنها أ = ـ ١,٥

بالتعويض في (١) ب = ـ ٦

س ٣ :

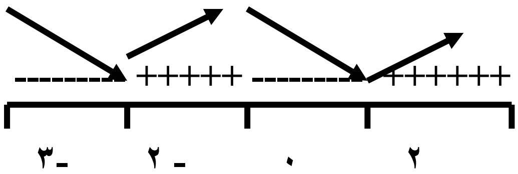
في الشكل المجاور منحنى كثير الحدود ق(س) المعرف على الفترة [ـ ٣ ، ٣] اوجد



١. النقط الحرجة للاقتران ق
٢. مجالات التزايد والتناقص
٣. القيم القصوى للاقتران ق

الحل :

١.



النقط الحرجة اطراف الفترة والرؤوس

س = { ـ٣ ، ـ ٢ ، ٠ ، ٢ ، ٣ }

٢.

متزايد [ـ ٢ ، ٠] ، [٢ ، ٣]

متناقص [ـ ٣ ، ـ ٢] ، [٠ ، ٢]

٣.

(ـ ٣ ، ق(ـ ٣)) = (ـ ٣ ، ٠)

(ـ ٢ ، ق(ـ ٢)) = (ـ ٢ ، ـ١) صغرى محلية

(٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٢) عظمى محلية مطلقة

(٢، ق(٢)) = (٢ ، ـ٧) صغرى محلية مطلقة

(٣ ، ق(٣)) = (٣ ، ٠)

اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى

ت (١): ص ١٩٦

باستخدام المشتقة الثانية جد نقط القيم القصوى

ق (س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^{٣} - ٢٧\,\text{س} + ١}$

الحل :

نجد النقط الحرجة

ق(س) = (س^{٣} – ٢٧ س + ١)$^{٣/١}$

قَ(س) =٣/١ (س^{٣}–٢٧ س+١)$^{-٣/٢}$(٣س^{٢}–٢٧)

= (س^{٣}–٢٧ س+١)$^{-٣/٢}$(س^{٢}–٩)=٠

ومنها س = ـ٣ ، ٣ نقط حرجة

قً(س) = (س^{٣}–٢٧ س+١)$^{-٣/٢}$(٢س)+ (س^{٢}–٩)× ـ٣/٢(س^{٣}–٢٧س+١)$^{-٣/٥}$×(٣س^{٢}–٢٧)

= (س^{٣}–٢٧ س+١)$^{-٣/٢}$(٢س) ـ٢ (س^{٢}–٩) (س^{٣}–٢٧س+١)$^{-٣/٥}$×(س^{٢} – ٩)

ق(ـ٣) = ـ له قيمة عظمى محلية (ـ٣، ق(ـ٣))

ق(٣) = + له قيمة صغرى محلية (٣، ق(٣))

تمارين ومسائل ص ١٩٨

س٣:

باستخدام المشتقة الثانية جد نقط القيم القصوى

أ) ق(س) = جا س – √٣ جتا س [٠ ، ٢ π]

الحل :

قَ (س) = جتا س + √٣ جا س

جتا س + √٣ جا س = ٠

جا س / جتا س = - ١ / √٣

ومنها س = ٥ π/٦ ، ١١ π/٦

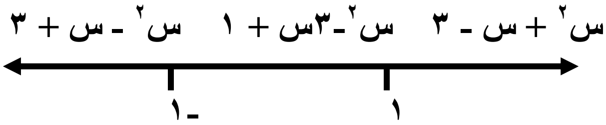
قً (س) = - جا س + √٣ جتا س

قً (٥ π/٦) = - جا (٥ π/٦) + √٣ جتا (٥ π/٦)
= -١/٢ -٣/٢ = - له قيمة عظمى

قً (١١ π/٦)=- جا (١١ π/٦)+ √٣ جتا (١١ π/٦)
= ١/٢ +٣/٢ = + له قيمة صغرى

ب) ق(س) = ٢| س – ١ | - | س + ١ | + س^{٢}

الحل :



قَ (س) = { ٢ س – ١ ، س <-١
٢ س - ٣ ، -١< س < ١
٢س + ١ ، س > ١

عندما س = - ١ ، ١ متصل لكنه غير قابل للاشتقاق

قَ(س) = ٠ ومنها

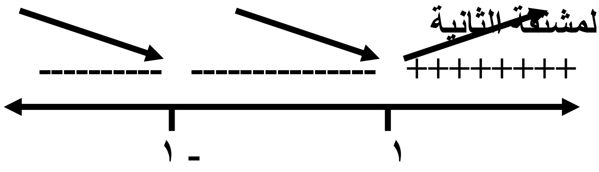
٢ س – ٣ = ٠ ، س = ١,٥ لا تنتمي (-١ ، ١)

٢س + ١ =٠ ، س = -٠,٥ لا تنتمي س >١

٢ س – ١ = ٠ ، س = ٠,٥ لا تنتمي س <-١

اذن النقط الحرجة هي س = { -١ ، ١ }

بما انه غير قابل للاشتقاق لا يطبق عليها اختبار المشتقة الثانية



له قيمة صغرى محلية عند س =١ هي ق(١) = -١

صَ = ٢١س^{٢}- ٥س +١

صً= ٤٢س-٥

تطبيقــات على القـــيم القصوى

ت ١ ص ٢٠١

اذا كان مجموع عدد مع ثلاث امثال عدد اخر يساوي ٦٠ جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما اكبر ما يمكن

الحل :

نفرض ان العدد الاول ص
الثاني س

ص+ ٣ س = ٦٠ ومنها ص = ٦٠ – ٣س

ق(س) = س × ص اكبر ما يمكن

ق(س) = س(٦٠ – ٣س)= ٦٠س – ٣س^{٢}

قَ(س) = ٦٠ – ٦ س

٦٠ – ٦ س = ٠ ومنها س = ١٠

قً (س) = – ٦

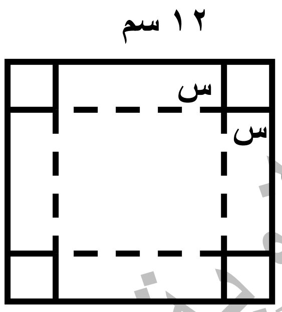
قً (١٠) = - له قيمة عظمى

اكبر ما يمكن عندما س = ١٠

اذن ص = ٦٠-٣×١٠= ٣٠

ت ٢ ص ٢٠٣

الحل :



ح= الطول×العرض × الارتفاع

ح = (١٢-٢س)(١٢-٢س)(س)

= ١٤٤س – ٤٨س^{٢} + ٤ س^{٣}

حَ = ١٤٤ – ٩٦س + ١٢ س^{٢}

١٢ – ٨ س + س^{٢} = ٠

(٦ – س)(٢ – س) = ٠ ومنها س = ٦ ، ٢

حً = - ٩٦ + ٢٤ س

عندما س = ٢ حً = - له قيمة عظمى

عندما س = ٦ حً = + له قيمة صغرى

اذن يكون اكبر حجم عندما س = ٢

ح = ٨ × ٨ × ٢ = ١٢٨ سم^{٣}

ت ٣ ص ٢٠٤

أ ب جـ د مستطيل يقع داخل المنحنيين ق(س)= ٢ س ^{٢} ، هـ (س) = ٣٦ – س ^{٢} بحيث ان راسية أ ، ب يقعان على المنحنى ق(س) وراسية جـ ، د يقعان على المنحنى هـ (س) جد بعد المستطيل أ ب جـ د والتي يمكن رسمها لتكون مساحته اكبر ما يمكن

الحل :

م = الطول × العرض

= ٢ س (ص $_{٢}$ – ص $_{١}$)

= (٢ س) (٣٦ – س ^{٢} – ٢ س ^{٢})

= ٧٢ س – ٦ س ^{٣}

مَ= ٧٢ – ١٨ س ^{٢}

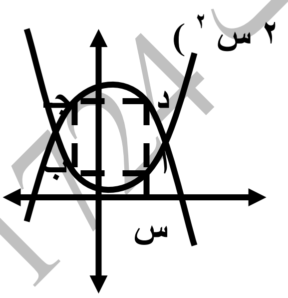
٧٢ – ١٨ س ^{٢} = ٠ ومنها

س = ٢ ، - ٢ مرفوضة

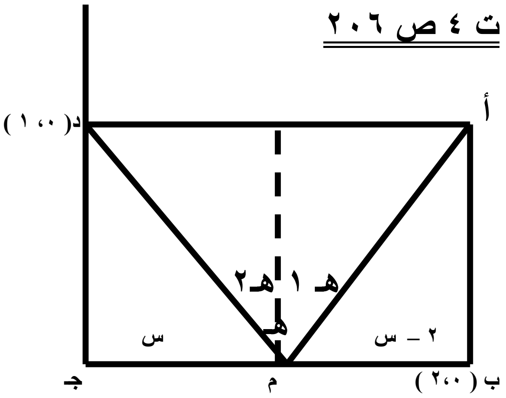
مً = - ٣٦ س

مً(٢)= - اكبر ما يمكن عندما س = ٢

م = ٧٢×٢ – ٦ (٢) ^{٣} = ٩٦



ت ٤ ص ٢٠٦



الحل :

هـ = هـ $_{١}$ + هـ $_{٢}$

ظا هـ = ظا (هـ $_{١}$ + هـ $_{٢}$)

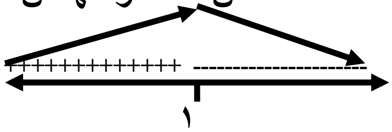
$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{ظا (هـ}_{١}\text{) + ظا (هـ}_{٢}\text{)}}{\text{١ - ظا (هـ}_{١}\text{)ظا (هـ}_{٢}\text{)}}$$

$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{٢ – س + س}}{\text{١ – (٢ – س)(س)}}$$

$$\text{ظا هـ} = \frac{٢}{\text{١ – ٢س + س}^{٢}}$$

$$\text{قا}^{٢}\text{ هـ} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د س}} = \frac{\text{-٢ (-٢+ ٢س)}}{\text{(١ – ٢س + س}^{٢}\text{)}^{٢}}$$

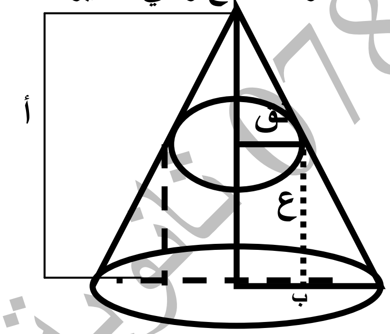
٤ - ٤س = ٠ ومنها س = ١



تكون هـ في نهايتها العظمى عندما س = ١

ت ٥ ص ٢٠٧

نفرض ان ارتفاع المخروط = أ وهي ثابت
نصف قطر المخروط = ب وهي ثابت
نصف قطر الاسطوانه = نق وهي متغير
الارتفاع للاسطوانة = ع وهي متغير



ح الاسطوانة = π نق^{٢} × ع

$$\text{لكن } \frac{\text{نق}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ – ع}}{\text{أ}}$$

$$\text{ومنها ع = أ - } \frac{\text{أ نق}}{\text{ب}}$$

اذن ح للاسطوانة $= \pi$ نق$^{٢} \times ($أ $- \frac{\text{أ نق}}{\text{ب}})$

$= \pi$ أ نق^{٢} $- \frac{\pi \text{ أ نق}^{٣}}{\text{ب}}$

$\frac{\text{د ح}}{\text{د نق}} = ٢ \pi$ أ نق $- \frac{٣ \pi \text{ أ نق}^{٢}}{\text{ب}}$

π أ نق$(٢ - \frac{\text{٣ نق}}{\text{ب}}) = ٠$

ومنها نق= ٠ مرفوضة

او نق= ٢ب/٣ حيث يكون الحجم اكبر ما يمكن

ومنها ع $= \frac{\text{أ}}{٣}$

ح الاسطوانة $= \pi$ (٢ب/٣)$^{٢} \times$ ع

$= ٤ \pi$ ب/٩ × أ/٣

$= \frac{٤}{٩} \times \boxed{\frac{١}{٣} \pi \text{ أ ب}^{٢}}$

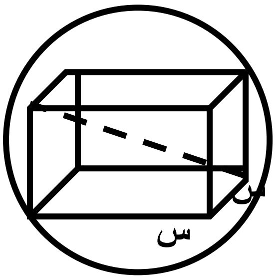
$= \frac{٤}{٩}$ حجم المخروط

ت ٦ ص ٢٠٩

كرة مصمته نصف قطر ها ١٠ سم حفر بداخلها متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ع اثبت ان حجم متوازي المستطيلات يعطى بالعلاقة الاتية ح = ٢٠٠ ع – ١/٢ ع^{٣} جد ابعاد متوازي المستطيلات لتعطي اكبر حجم ممكن له

الحل :

ملاحظة قطر متوازي الاضلاع = قطر الكرة



ح = س^{٢} × ع

القطر = س^{٢} + س^{٢} + ع^{٢} = ٤٠٠

٢ س^{٢} + ع^{٢} = ٤٠٠

س$^{٢} = \frac{٤٠٠ - ع^{٢}}{٢}$

ح $= \frac{٤٠٠ع - ع^{٣}}{٢}$

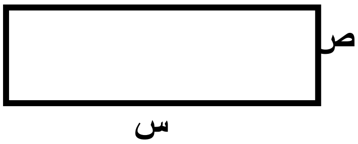
حَ $= \frac{٤٠٠ - ٣ع^{٢}}{٢} = ٠$ ومنه ع $= \frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$

حً = -٣ع = - له اكبر حجم

ح = ...

تمارين ومسائل ص ٢١٠

س١ :



محيطها ٦٠٠ م

المطلوب:

بعدي قطعة الارض لتكون مساحتها اكبر ما يمكن

الحل :

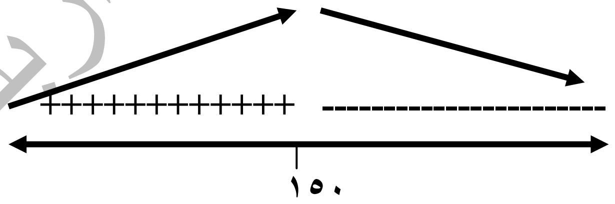
م = س × ص

لكن٢ س +٢ ص = ٦٠٠ ومنها ص = ٣٠٠- س

اذن م = س (٣٠٠ – س) = ٣٠٠ س – س^{٢}

مَ = ٣٠٠ – ٢ س

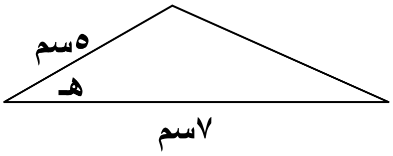
٣٠٠ – ٢ س = ٠ ومنها س = ١٥٠



له قيمة عظمى عند س = ١٥٠

ومنها قيمة ص = ١٥٠

س ٢ :



المطلوب

قيمة هـ التي تجعل مساحة المثلث اكبر ما يمكن

الحل

م = ٢/١ × ٥×٧ × جا هـ

مَ = ١٧,٥ × جتا هـ

١٧,٥ × جتا هـ = ٠ ومنها جتا هـ = ٠

ومنها هـ = ٩٠

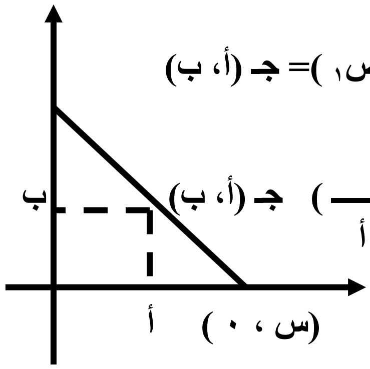
مً = ـ ١٧,٥ × جا هـ

= ـ ١٧,٥ × جا ٩٠ = -١٧,٥

له قيمة عظمى عندما هـ = ٩٠

س٣ :

اذا كانت النقطة أ (س$_{١}$، ص$_{١}$) تقع في الربع الاول من المستوى الديكارتي فجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة أ (س$_{١}$، ص$_{١}$) ويصنع مع المحورين الموجبين السيني والصادي ونقطة الاصل مثلثاً مساحته اقل ما يمكن



الحل : نفرض أ (س$_{١}$، ص$_{١}$)= جـ (أ، ب)

م = ٢/١ س × ص

$$= \frac{١}{٢} س \left(\frac{ب س}{س – أ} \right)$$

$$= \frac{ب س^{٢}}{٢ س – ٢أ}$$

$$مَ = \frac{(٢س – ٢أ)(٢ب س) – (ب س^{٢})(٢)}{(٢س – ٢أ)^{٢}}$$

٢ ب س^{٢} – ٤ أ ب س = ٠

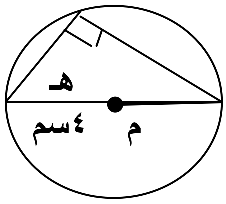
ومنها س = ٢ أ ~~٠~~ ومنها ب = ٢ ب

ميل المماس = ب/ أ

ص – ٠ = ب/أ(س – ٢ أ)

حً (١٠) = ـ اكبر ما يمكن عندما نق = ١٠

س ٤ :



م = ٢/١ × ٤×س × جا هـ

= ٢ س × جا هـ

لكن جتا هـ = س/٤ ومنها س = ٤ جتا هـ

م = ٢×٤ جتا هـ × جا هـ = ٤ جا ٢ هـ

مَ = ٨ جتا ٢ هـ = ٠

ومنها ٢ هـ = ٩٠ ومنها هـ = ٤٥

مً = -٨ جا ٢ هـ ومنها

مً = -٨ جا ٩٠ = -٨

اذن له قيمة عظمى عندما هـ = ٤٥

س ٥ :

الحل :

ح الاسطوانه = م القاعدة × الارتفاع

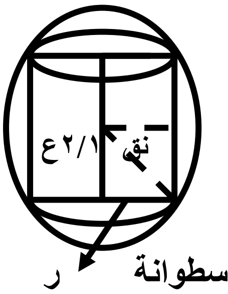
= ر^{٢} × π × ع

= (٢٧ - ١/٤ ع^{٢})× π × ع

= (٢٧ع- ١/٤ ع^{٣})× π

حَ = (٢٧ - ٣/٤ ع^{٢})× π = ٠

ع = ٤/٣ × ٢٧ = ٦ارتفاع الاسطوانة

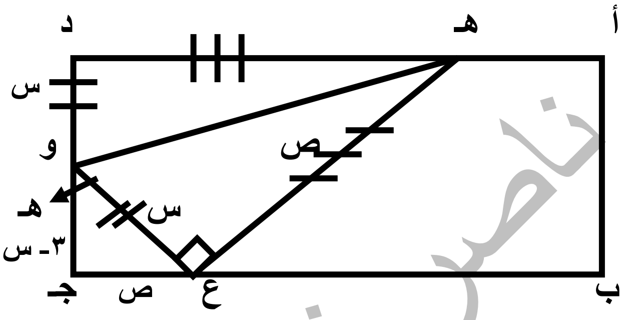


حً = π × -٦/٤ ع

حً = π × -٦/٤ (٦)= - اذن له اكبر حجم عند ع

س٦ :

يمثل الشكل المجاور



المستطيل أ ب جـ د فيه طول أ ب = ٣ سم ، طويت الزاوية أ د جـ وفق الخط هـ و حتى انطبق الراس د على المستقيم ب جـ عند النقطة ع جد اكبرمساحة ممكنة للمثلث و جـ ع

الحل :

م = ٢/١ القاعدة × الارتفاع

= ٢/١ ص(٣- س)

لكن ص^٢ = س^٢ – (٣ – س)^٢

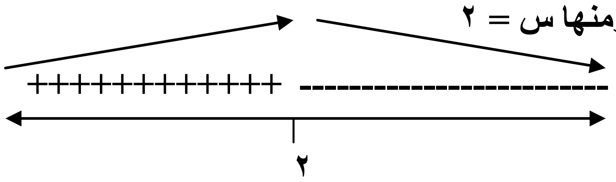
= س^٢ – ٩ + ٦ س – س ^{٢}

= √‾‾‾٦س – ٩

م = ٢/١ √‾‾‾٦س – ٩ × (٣- س)

مَ= ٢/١ √‾‾‾٦س–٩×(-١)+(٣- س)× ٣ / ٢ √‾‾‾٦س–٩ =٠

ومنها س = ٢



له اكبر مساحة عندما س = ٢ ومنها ص = √‾‾‾ ٣

س٧ :

نفرض ان جـ د = جـ ب = ص

مساحة الشكل الرباعي = م ∆ ب م د + م ∆ ب جـ د

م = ٢/١د جـ × ب جـ + ٢/١ × ١×٢× جا < س

= ٢/١ × ص^٢+ جا< س

لكن

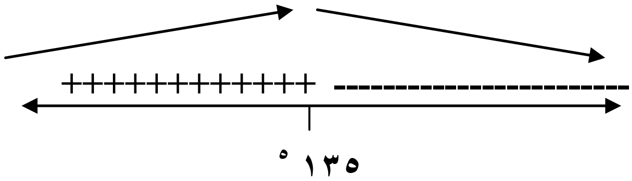
(دجـ)^٢= ص^٢+ص^٢= (١)^٢+(٢)^٢ –٢×١×٢جتا< س

٢ ص^٢ = ٥ – ٤ جتا < س

م = ٤/١ (٥ – ٤ جتا < س) + جا< س

مَ = ٤/١(٤ جا < س) + جتا< س = ٠

جا < س = - جتا< س ومنها س = ١٣٥ °



للشكل الرباعي اكبر مساحة عندما س = ١٣٥ °

س٨ :

نفرض ان عدد المشتركين س

عدد المشتركين ليتم الخصم = ١٠٠ + س

كلفة الشخص = ٦٥ – ٢/١س

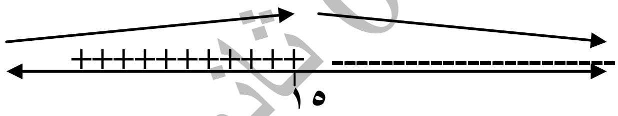
ر(س) = كلفة الشخص × عدد الاشخاص

= (٦٥ – ٢/١س)(١٠٠ + س)

رَ(س)=(٦٥–٢/١س)(١)+(-٢/١)(١٠٠+ س)

= ٦٥ -٢/١س - ٥٠ -٢/١س= ١٥ – س

١٥ – س = ٠ ومنها س = ١٥



يكون ربح الشركة اكبر ما يمكن

١٠٠+ ١٥ = ١١٥ مشترك

س٩ :

م شبه المنحرف = ٢/١ مجموع القاعدتين × البعد بينهما

القاعدة العلوية = ٢ س

لكن ٩ – س ^{٢} = ٠ ومنها س = ± ٣

القاعدة السفلية = ٢ × ٣ = ٦

= ٢/١(٢ س + ٦) × ص

م = (س + ٣) × (٩ – س ^{٢})

مَ = (س+٣)×(–٢س)+(٩– س^٢)(١)

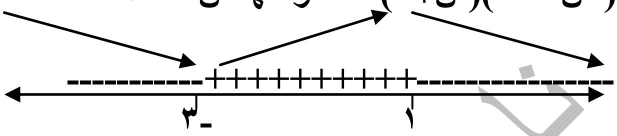
= -٢س^٢-٦س +٩- س^٢

= -٣ س^{٢} – ٦س + ٩

-٣ س^{٢} – ٦س + ٩ = ٠ بالقسمة على -٣

س^{٢} + ٢س - ٣ = ٠

(س – ١)(س+٣) = ٠ ومنها س= ١ ، -٣



له اكبر قيمة عندما س = ١ ، ص = ٨

س ١٠ :

التكلفة الكلية ك(س)= س^{٣} – ٣س^{٢} - ٨٠س+٥٠٠

ثمن غرفة النوم = ٢٨٠٠ دينار

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

ر(س) =٢٨٠٠س–(س^{٣} – ٣س^{٢} - ٨٠س+٥٠٠)

رَ(س)= ٢٨٠٠-٣س^{٢}+٦س + ٨٠

-٣س^{٢}+٦س +٢٨٨٠ = ٠ بالقسمة على – ٣

س^{٢}-٢س - ٩٦٠ = ٠

(س - ٣٢)(س + ٣٠)=٠

ومنها س = ٣٢، -٣٠

رً(س)= -٦س+٦

رً(٣٢)= -٦×٣٢+٦=-

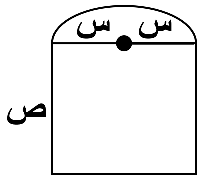
له قيمة عظمى عندما س = ٣٢

رً(س)= -٦س+٦= +

له قيمة صغرى عندما س = -٣٠

س١١ :

محيط النافذة = ٦



٢ ص +٢ س + ١/٢(٢ نق π) =٦

٢ ص + ٢س + ١/٢(٢ س π) =٦

٢ص + ٢س + π س = ٦

٢ص = ٦ - ٢ س - π س

كمية الضوء = م الزجاج الملون + م الزجاج الشفاف

ك (س) = ١/٢ × ١/٢ نق^{٢} π + ٢س × ص

= π /٤ س^{٢} + س (٦ - ٢ س - π س)

= π /٤ س^{٢} + ٦س - ٢ س^{٢} - π س^{٢}

=- ٣ π /٤ س^{٢} + ٦س - ٢ س^{٢}

كَ (س) =- ٣ π /٢ س+ ٦ - ٤ س =٠

- ٣ π /٢ س+ ٦ - ٤ س =٠

٦

س= ———— عندها يسمح بدخول اكبر كمية ضوء

٣ π /٢ + ٤

س ١٢:

نفرض نق = أ ثابت

نفرض ان نقَ= س

ح المخروط = ١/٣نقَ^{٢} π × ع

ح المخروط = π /٣س^{٢} ع

لكن س^{٢} = أ^{٢}- ع^{٢}

ح = π /٣ (أ^{٢} – ع^{٢})ع

πأ^{٢}ع – πع^{٣}

ح = ————————

٣

πأ^{٢} – ٣ πع^{٢}

حَ = ———————— = ٠

٣

أ

πأ^{٢} – ٣ πع^{٢} = ٠ ومنها ع = ————

$\sqrt{٣}$

محيط قاعدة المخروط = طول القوس

٢س π = أ هـ

٢$\sqrt{(أ^{٢} – ع^{٢})}$ π = أ هـ

٢ $\sqrt{٢}$

هـ = ————

$\sqrt{٣}$

عندها يكون اكبر حجم لان حً يكون سالب عند هذه القيمة

مراجعة ص ٢١٣

س ١ : المستقيم ٣ س – ص – جـ = ٠ ،

-٣

يمس منحنى الاقتران ق (س) = ————

س + ١

عند (س ١ ، ص ١)

الحل :

$$\begin{tikzcd} \text{ق(س) = ص} \\ \text{قَ (س) = صَ} \arrow[u, bend right, leftrightarrow, "\text{يمس}"'] \end{tikzcd}$$

٣ - صَ = ٠ ومنها صَ = ٣

٣

قَ (س) = ————

(س + ١)^{٢}

لكن ق َ (س) = صَ

$$\frac{٣}{(س + ١)^{٢}} = ٣$$

(س + ١)^{٢} = ١

ومنها

س = ٠ ومنها ص = -٣

س = -٢ ومنها ص = ٣

نقطتي تماس (٠ ، -٣) ، (-٢ ، ٣)

لايجاد قيمة جـ نعوض نقاط التماس في معادلة المستقيم ٣ س – ص – جـ = ٠ ،

(٠ ، -٣) ← ٣ – جـ = ٠ ومنها جـ = ٣

(-٢ ، -٣) ←-٦ + ٣ – جـ = ٠ ومنها جـ = - ٣

س ٢ :

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ١ – جان ، (٠ ، π)

ت(ن) = فً(ن) = - جتان ، (٠ ، π)

عندما ينعدم السرعة ع(ن) = ٠

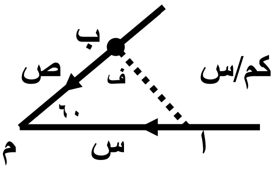
١ – جان = ٠ ومنها جا ن = ١

ومنها ن = π/٢ ضمن (٠ ، π)

ت(π/٢) = - جتا (π/٢) = ٠

س ٣ :

الحل :



$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ | = ؟، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = -٦٠ كم/س

عند الساعة = ١١ صباحاً

ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} – ٢ س × ص × جتا ٦٠

ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} – س ص

٢ف $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ٢س × $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ + ٢ص $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$

- (س $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ + ص $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$)

← عند الساعة = ١١ صباحاً

س = ١٠٠ – ٦٠× ١ = ٤٠

ص = ١٢٠ – ٨٠ × ١ = ٤٠

ف^{٢}=(٤٠)^{٢}+(٤٠)^{٢} – ٤٠ × ٤٠ ومنها ف= ٤٠

٢ف $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ٢س × $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ + ٢ص $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$

- (س $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ + ص $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$)

٨٠× $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = -٤٨٠٠-٦٤٠٠+٣٢٠٠+٢٤٠٠

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = $\frac{-٥٦٠٠}{٨٠}$ = -٧٠

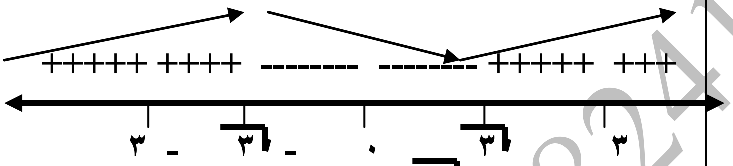
س ٤ : الحل :

$$ق َ (س) = \frac{٣ س^{٢} - ٩}{٣\sqrt[٣]{(س^{٣} – ٩ س)^{٢}}}$$ تمرين للطالب

١. النقط الحرجة اصفار البسط والمقام للمشتقة الاولى

ومنها س = { ± ٣ ، ٠ ، ±$\sqrt{٣}$ }

٢.

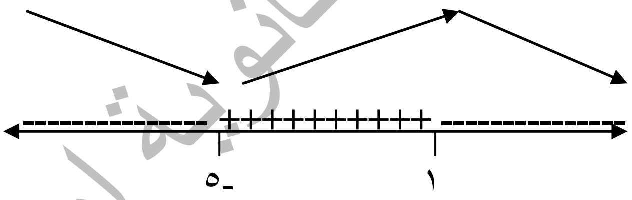


٣. (- $\sqrt{٣}$ ، ق (- $\sqrt{٣}$)) عظمى محلية مطلقة

($\sqrt{٣}$ ، ق ($\sqrt{٣}$)) صغرى محلية مطلقة

س ٥ : محذوف

س ٦:



أ) متزايد [- ٥ ، ١]

متناقص (- ∞ ، -٥] ، [١ ، ∞)

ب)

(- ٥،ق(- ٥)) صغرى مطلقة

(١، ق(١)) عظمى مطلقة

س ٧:

الحل: ب ن = س اذن م ب = ٢ س

مساحة متوازي الاضلاع = مساحة المستطيل – مساحة المثلثات الاربعة

م =٦٠×٨٠ – (٢×$\frac{١}{٢}$×س×٢س+٢×$\frac{١}{٢}$×(٨٠- س)(٦٠- ٢س)

م =٤٨٠٠- (٢س^{٢}+٤٨٠٠ – ١٦٠س- ٦٠س+٢س^{٢})

م = ٤٨٠٠- ٢س^{٢} - ٤٨٠٠ +١٦٠س+٦٠س-٢س^{٢}

م = - ٤ س^{٢} + ٢٢٠ س نشتق

مَ= - ٨ س + ٢٢٠ = ٠ ⟸ ٨ س = ٢٢٠ ومنها

س = $\frac{٢٢٠}{٨}$ = ٢٧,٥ سم نختبرها بالمشتقة الثانية

مً= - ٨ س ⟸ مً(٢٧,٥) = سالبه اذن يوجد قيمة عظمى لمساحة متوازي الاضلاع عندما س = ٢٧,٥ سم

اختبار ذاتي ص ٢١٥

س١ :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٣	١٥
د	أ	ب	ب	أ	ج	ج	أ	ج	أ	ب

ملاحظة : س : ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٤ محذوفه ..

س ٢ :

(٠ ، ٠) ليست نقطة تماس

نفرض نقطة تماس ولتكن (س، ص)

$$\text{قَ (س)} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$$

$$\text{٢ س – ٦} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

$$\text{٢ س – ٦} = \frac{\text{س}^{٢} \text{ – ٦س + ٩}}{\text{س}}$$

٢ س^{٢} – ٦ س = س^{٢} – ٦س + ٩

س^{٢} – ٩= ٠ ومنها

س = ٣ ومنها ص = ٠ ، م = صفر

معادلة المماس

ص – ٠ = ٠ (س – ٣) ومنها ص = ٠

معادلة العمودي س = ٣

س = -٣ ومنها ص= ٣٦ ، م = -١٢

معادلة المماس

ص – ٣٦ = -١٢ (س + ٣)

معادلة العمودي

ص – ٣٦ = ١/١٢ (س + ٣)

س :٣

١ –

ف(٠) = ٦٠(٠) – ٥ (٠)^{٢} = ٠ أي ان ارتفاع العمارة غير مضاف

ف(ن) = ٦٠ ن – ٥ ن^{٢} + ٢٢٥

اقصى ارتفاع يكون عندما ع (ن) = ٠

ع(ن) = ٦٠ – ١٠ ن = ٠ ومنها ن = ٦

ف(٦) = ٦٠ ×٦ – ٥ (٦)^{٢} + ٢٢٥ = ٤٠٥ م عن سطح الارض

اما عن مكان القذف = ٤٠٥ – ٢٢٥ = ١٨٠ م

ب –

عندما يصل الى سطح الارض تكون ف(ن) = ٠

٦٠ ن – ٥ ن^{٢} = ٠

ومنها ن = ٠ مرفوضة أو ن = ١٢

ع(١٢) = ٦٠ – ١٠ × ١٢ =- ٦٠ م هابط

مثال( ) : ** **مهم جداً**

إذا علمت ان ق(س)= [٢س – ١] حيث س معرفاً على الفترة[٠، ١] جميع قيم س التي يوجد عندها قيم حرجة

أ) { ٠ ، ١} **√ب) [٠ ، ١]**

جـ) (٠ ، ٣) **د) { ٠، ٢/١ ، ١ }**

مثال**

اذا كان ق (س)= { س^{٢} – س ، ٠ ≤ س ≤ ١
س - ١ ، ١ < س ≤ ٣

فان جميع قيم س التي يوجد عندها قيم حرجة للاقتران ق (س) في الفترة [٠ ، ٣] هي

أ) { ٠ ، ١/٢ ، ٣} √ب) {٠ ، ١ ، ٣ }

جـ) { ، ١/٢ ، ١ ،٣} د) { ٠ ، ٣ }

في الشكل المجاور قَ (س) تساوي

(٠ ، ٢)

أ) -٣ ب) ١/٣

جـ) ٣ د) -١/٣

(٦ ، ٠)

مثال)

جد جميع النقط الواقعة على منحنى العلاقة
س ^{٢} – ٢ ص + ص ^{٢} – ٦٧ = صفر
التي يكون ميل المماس لهذا المنحنى عند كل منها
يساوي ٤ .

مثال :** اثبت ان المستقيم ٢ ص + س = ٣

عمودي على المنحنى ص = س^{٢} ، عند احدى نقطتي

تقاطعه مع المنحنى دون الاخرى

مثال : ** قذف جسيم راسياً الى الأعلى حسب

العلاقة ف(ن) = ع$_{١}$ن – ٥ن ^{٢} ،فاذا علمت اقصى

ارتفاع وصل اليه الجسيم هو ٢٠ م فما قيمة ع$_{١}$

مثال( ) : ***

اذا كان

ق(س) = { س ^{٢} – -٢س +٢ ، س < ٣
١٥/ س ، س ≤ ٣

اوجد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)