متوسط التغير

١ مقدار التغير في السينات = $\Delta س = س_٢ - س_١$

٢ مقدار التغير في الاقتران = $\Delta ص = ص_٢ - ص_١$
$= ق(س_٢) - ق(س_١)$

٣ متوسط التغير = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

أمثلة :

١ احسب متوسط التغير اذا كان
$ق(س) = س^٢ + ٢$ عندما تتغير س من ١ إلى ٥

متوسط التغير = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{ق(٥) - ق(١)}{٥ - ١} = \frac{(٢٥ + ٢) - (١ + ٢)}{٥ - ١} = \frac{٢٤}{٤}$

٢ $ق(س) = \sqrt{٢س + ١}$ عندما تتغير س من ٤ إلى صفر

الحل

متوسط التغير = $\frac{ق(٠) - ق(٤)}{٠ - ٤} = \frac{\sqrt{١} - \sqrt{٩}}{-٤} = \frac{-٢}{-٤}$

٣ $ق(س) = \begin{cases} |٢س - ١| & ، س \leq ٢ \\ [س + ١] & ، س > ٢ \end{cases}$

احسب متوسط التغير عندما $س_١$ = صفر ، $\Delta س = ٩$

الحل

$س_٢ = \Delta س + س_١$

$س_٢ = ٩ + ٠ \Leftarrow س_٢ = ٩$

متوسط التغير = $\frac{ق(٩) - ق(٠)}{٩ - ٠} = \frac{١٠ - ١}{٩} = \frac{٩}{٩} = ١$

٤ $ق(س) = \frac{٥}{س}$ إحسب متوسط التغير عندما تتغير س من $\frac{١}{٢}$ إلى ٣

الحل متوسط التغير = $\frac{ق(٣) - ق(\frac{١}{٢})}{٣ - \frac{١}{٢}}$

$= \frac{\frac{٥}{٣} - \frac{٥}{\frac{١}{٢}}}{٣ - \frac{١}{٢}} = \frac{\frac{٥}{٣} - \frac{١٠ \times ٣}{١ \times ٢}}{٢,٥}$

$= \frac{\frac{٥}{٣} - \frac{٣٠}{٣}}{٢,٥} = \frac{\frac{-٢٥}{٣}}{٢,٥}$

٥ اذا كان $ق(س) = [٣س]$
$س_١ = ٢$ ، $\Delta س = ٢,٥$ احسب مقدار التغير في الاقتران ق(س)

الحل

$س_٢ = \Delta س + س_١$
$= ٢,٥ + ٢ = ٤,٥$

$\Delta ص = ق(س_٢) - ق(س_١)$
$= ق(٤,٥) - ق(٢) = ١٣ - ٦ = ٧$

٦ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س - ٤ & ، ٠ \leq س < ٢ \\ ٤ & ، ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

احسب متوسط التغير في [٠ ، ٤]

الحل : $\frac{ق(٤) - ق(٠)}{٤ - ٠} = \frac{٤ - (-٤)}{٤ - ٠} = \frac{٨}{٤} = ٢$

٧ اذا زاد طول ضلع مربع من ٤ سم الى ٦ سم احسب الزيادة في مساحة المربع

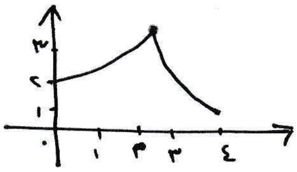
الحل : نعلم ان مساحة المربع $م = س^٢$

$م_١ = س_١^٢ = (٤)^٢ = ١٦$

$م_٢ = س_٢^٢ = (٦)^٢ = ٣٦$

$\Delta م = م_٢ - م_١ = ٣٦ - ١٦ = ٢٠$ سم²

٨ من الرسم المجاور احسب متوسط التغير في [٠ ، ٤]



الحل

$\frac{ق(٤) - ق(٠)}{٤ - ٠} = \frac{١ - ٢}{٤} = \frac{-١}{٤}$

٩ اذا كان متوسط تغير ق(س) = ٤ في [٠ ، ٢] وكان $هـ(س) = س^٣ + ٣ق(س)$
احسب متوسط تغير هـ(س) في [٠ ، ٢]

الحل : متوسط هـ(س) = $\frac{هـ(٢) - هـ(٠)}{٢ - ٠}$

$= \frac{(٨ + ٣ق(٢)) - (٠ + ٣ق(٠))}{٢ - ٠}$

$= \frac{٨ + ٣ق(٢) - ٣ق(٠)}{٢ - ٠}$

$= \frac{٨}{٢} + ٣\left(\frac{ق(٢) - ق(٠)}{٢ - ٠}\right)$

$= ٤ + ٣ \times$ متوسط ق(س)

$= ٤ + ٣ \times ٤ = ١٦$

١٠ اذا كان $هـ(س) = ٢ق(س) - \frac{م}{س + ١}$
وكان متوسط هـ(س) في [٠ ، ١] = ١٦
والتغير في ق(س) = ٥
فما قيمة م

" واجب "

١١ إذا كان ق(س) = $س^{٢} + ٢س + ٤$
احسب متوسط التغير في ق(س) عندما
س = ١

الحل $\frac{Δص}{Δس} = \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ}$

$= \frac{(١+هـ)^{٢} + ٢(١+هـ) + ٤ - (١+٢+٤)}{هـ}$

$= \frac{١ + ٢هـ + هـ^{٢} + ٢ + ٢هـ - ٣}{هـ}$

$= \frac{٤هـ}{هـ} + \frac{هـ^{٢}}{هـ} = ٤ + هـ$

١٢ يتحرك جسم في مستوى بياني
من النقطة أ (س١، ص١) الى النقطة ب (٣، ٣)
بحيث Δس = ٥ ، Δص = ٦ فما احداثيات أ

الحل Δس = س٢ − س١ = ٣ − س١
٥ = ٣ − س١ ← س١ = −٢
Δص = ص٢ − ص١ = ٣ − ص١
٦ = ٣ − ص١ ← ص١ = −٣
أ = (−٢ ، −٣)

١٣ يتحرك جسم حسب الاقتران
ف(ن) = $ن^{٢} + ٣ن$ احسب السرعة المتوسطة [١، ٣]

الحل السرعة المتوسطة $= \frac{ف(٣) - ف(١)}{٣ - ١} = \frac{١٨ - ٤}{٢} = ٧$ م/ث

١٤ إذا كان
ق(س) = (أ هـ(س) + ب) + (جـ س + د)
اثبت أن متوسط التغير ق = أ × (متوسط هـ) + جـ

الحل لتكن الفترة [س١ ، س٢]
متوسط التغير ق $= \frac{ق(س٢) - ق(س١)}{س٢ - س١}$

$= \frac{(أ هـ(س٢) + ب + جـ س٢ + د) - (أ هـ(س١) + ب + جـ س١ + د)}{س٢ - س١}$

$= \frac{أ هـ(س٢) - أ هـ(س١) + جـ س٢ - جـ س١}{س٢ - س١}$

$= \frac{أ (هـ(س٢) - هـ(س١))}{س٢ - س١} + \frac{جـ \cancel{(س٢ - س١)}}{\cancel{س٢ - س١}}$

= أ × متوسط التغير هـ(س) + جـ

١٥ إذا كان ق(س) = $س^{٣} + س^{٢}$ احسب
ميل القاطع الواصل بين النقاط
(١، ق(١)) ، (٣، ق(٣))

الحل : ميل القاطع $= \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = \frac{٣٤}{٢} = ١٧$

١٦ إذا كان متوسط تغير ق(س)
في [١، ٣] يساوي ٨
ومتوسط تغير ق في [٣، ٦] = ١٣
احسب متوسط تغير ق في [١، ٦]

الحل

$\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = ٨$

ق(٣) − ق(١) = ١٦ ← ①

$\frac{ق(٦) - ق(٣)}{٦ - ٣} = ١٣$

ق(٦) − ق(٣) = ٣٩ ← ②

① + ② ⇐ ق(٦) − ق(١) = ٥٥

اقسم الطرفين على ٦ − ١

$\frac{ق(٦) - ق(١)}{٦ - ١} = \frac{٥٥}{٦ - ١}$

متوسط التغير في [١، ٦] = ١١

١٧ إذا كان ق(س) = ظا س اثبت أنه
متوسط التغير عندما تتغير س من
س إلى س + هـ يساوي

$= \frac{قا^{٢}س \, ظا هـ}{هـ(١ - ظا س \, ظا هـ)}$

البرهان: متوسط التغير $= \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

$= \frac{١}{هـ} \left(ظا(س + هـ) - ظا س \right)$

$= \frac{١}{هـ} \left(\frac{ظا س + ظا هـ}{١ - ظا س \, ظا هـ} - \frac{ظا س}{١} \right)$

$= \frac{١}{هـ} \left(\frac{ظا س + ظا هـ - ظا س + ظا^{٢}س \, ظا هـ}{(١ - ظا س \, ظا هـ)} \right)$

$= \frac{١}{هـ} \frac{ظا هـ (١ + ظا^{٢}س)}{١ - ظا هـ \, ظا س}$

$= \frac{١}{هـ} \times \frac{ظا هـ \, قا^{٢}س}{١ - ظا هـ \, ظا س}$

تمارين وتدريبات الكتاب

١ إذا كانت ق = س³ − [½ س]
احسب متوسط التغير إذا كانت س١ = ٢,٤ ، س٢ = ٢,٣

الحل: متوسط التغير = (ق(٢,٣) − ق(٢,٤)) / (٢,٣ − ٢,٤)

= ((١٢,١٦٧ − ١) − (١٣,٨٢٤ − ١)) / (−٠,١) = ١٦,٥٧

---

٢ إذا كان القاطع المار بالنقاط (٢ ، ق(٢)) ، (٣ ، ق(٣)) يصنع زاوية قياسها ١٢٠ْ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات احسب متوسط التغير إذا تغيرت س من س = ٢ إلى س = ٣

الحل متوسط التغير = ميل القاطع

= ظا ١٢٠ = − ظا ٦٠ = − √٣

---

٣ يتحرك جسم حسب العلاقة
ف = ٢ن² − ٢ن + ٢٠ احسب السرعة المتوسطة في [٢ ، ٦]

الحل: (ف(٦) − ف(٢)) / (٦ − ٢) = ((٧٢ − ١٢ + ٢٠) − (٨ − ٤ + ٢٠)) / ٤

= ٥٦ / ٤ = ١٤

---

٤ إذا كان ق = ٢س² + س − ١ وكان متوسط تغير ق يساوي ٤ عندما تتغير س من س١ إلى س١ + ١ فما قيمة س١

الحل: متوسط التغير = (ق(س١ + ١) − ق(س١)) / (س١ + ١ − س١)

٤ = ((٢(س١ + ١)² + (س١ + ١) − ١) − (٢س١² + س١ − ١)) / (~~س١~~ + ١ − ~~س١~~)

٤ = ٢(س١² + ٢س + ١) + س١ + ~~١~~ ~~− ١~~ − ٢س١² − س١ + ١

٤ = ٤س١ + ٢

س١ = ١/٤

---

٥ إذا كان ق(س) = س² − ٢
احسب متوسط التغير ق في
عندما تتغير س من ٣ إلى ٣ + هـ بدلالة هـ

الحل: متوسط التغير = (ق(٣ + هـ) − ق(٣)) / هـ

= ((٣ + هـ)² − ٢ − (٣² − ٢)) / هـ = (~~٩~~ + ٦هـ + هـ² ~~− ٢ − ٩ + ٢~~) / هـ

= ~~هـ~~(٦ + هـ) / ~~هـ~~ = ٦ + هـ

---

٦ ليكن م(س) = أس² − ٣س + ٤
وكان متوسط التغير م في [١ ، ٣] = ٣
فما قيمة أ

الحل: متوسط التغير = (م(٣) − م(١)) / (٣ − ١)

٣ / ١ = ((٩أ − ٩ + ٤) − (أ − ٣ + ٤)) / ٢

٦ = ٨أ − ٦ ← أ = ١٢ / ٨

---

٧ إذا كان متوسط تغير ق في [−١ ، ٣] = −٤
احسب متوسط تغير هـ حيث
هـ(س) = ٢ق(س) − ٣س² كلا [−١ ، ٣]

الحل متوسط هـ(س) = (هـ(٣) − هـ(−١)) / (٣ − −١)

= ((٢ق(٣) − ٣×(٣)²) − ٢(ق(−١) − ٣(−١)²)) / (٣ − −١)

= (٢ق(٣) − ٢ق(−١)) / ٤ − (٢٧ − ٣) / ٤

= ٢((ق(٣) − ق(−١)) / ٤) − ٢٤ / ٤

= ٢ × −٤ − ٦ = −١٤

---

٨ إذا كانت ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن²
احسب السرعة المتوسطة إذا تغيرت ن من صفر إلى Δن (بدلالة Δن)

الحل: السرعة المتوسطة = (ف(Δن) − ف(٠)) / Δن

= (٤٠(Δن) − ٥(Δن)² − صفر) / Δن

= ~~Δن~~(٤٠ − ٥(Δن)) / ~~Δن~~ = ٤٠ − ٥Δن

تعريف المشتقة الأولى

ملاحظات :-

1. يرمز للمشتقة الاولى عند س بالرمز $\text{قَ}(\text{س})$ او $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ أو صَ او $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\text{ق}(\text{س})$
2. لا يوجد مشتقة عند اطراف الفترات لانه عند الطرف نستطيع أن نرسم اكثر من مماس.
3. اذا كانت $\text{قَ}(\text{س})$ موجودة يكون الاقتران ق قابل للاشتقاق عند $\text{س} = \text{أ}$
4. دائماً مجال $\text{قَ}(\text{س})$ عبارة عن فترة مفتوحة
5. $\text{قَ}(\text{س})$ موجودة لكل $\text{س} \in (\text{أ}، \text{ب})$ اذاً ق قابل للاشتقاق على $(\text{أ}، \text{ب})$

المشتقة الاولى باستخدام التعريف

1. $\text{قَ}(\text{س}) = $ نهاية متوسط التغير $= \text{نها} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$
2. $\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$
3. $\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$
4. $\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\Delta\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س} + \Delta\text{س}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$
5. $\text{قَ}(\text{أ}) = \underset{\text{ع} \to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{ع} - \text{أ}}$

أمثلة

١ اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}^2 + 2\text{س} + 5$ احسب $\text{قَ}(\text{س})$ باستخدام التعريف المشتقة

الحل :- $\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$$= \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{(2\text{ع}^2 + 2\text{ع} + 5) - (2\text{س}^2 + 2\text{س} + 5)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{2(\text{ع}^2 - \text{س}^2)}{\text{ع} - \text{س}} + \text{نها} \frac{2\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}$$

$$= \text{نها} \frac{2\cancel{(\text{ع} - \text{س})}(\text{ع} + \text{س})}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} + 2 = 4\text{س} + 2$$

٢ اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + 3}$ احسب $\text{قَ}(1)$ باستخدام التعريف.

الحل: $\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$$\text{قَ}(1) = \underset{\text{ع} \to 1}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(1)}{\text{ع} - 1}$$

$$= \underset{\text{ع} \to 1}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{ع} + 3} - 2}{\text{ع} - 1} \times \frac{\sqrt{\text{ع} + 3} + 2}{\sqrt{\text{ع} + 3} + 2}$$

$$\text{نها} \frac{\text{ع} + 3 - 4}{(\text{ع} - 1)(2 + 2)} = \text{نها} \frac{\cancel{\text{ع} - 1}}{\cancel{(\text{ع} - 1)}(4)} = \frac{1}{4}$$

٣ اذا كانت $\text{ق} = \frac{1}{\text{س} + 1}$ احسب $\text{قَ}(\text{س})$ باستخدام التعريف

الحل :- $\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\frac{1}{\text{ع} - 1} - \frac{1}{\text{س} - 1}}{\text{ع} - \text{س}}$

$$\underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{س} - 1 - 1(\text{ع} - \text{س})}{(\text{ع} - 1)(\text{س} - 1)(\text{ع} - \text{س})}$$

$$\underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{س} - 1 - \text{ع} + 1}{(\text{ع} - 1)(\text{س} - 1)(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= -1 \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{1}{(\text{ع} - 1)(\text{س} - 1)} = \frac{-1}{(\text{س} - 1)^2}$$

٤ اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[3]{5\text{س} + 3}$ احسب $\text{قَ}(1)$ باستخدام التعريف المشتقة "واجب"

٥ $\text{ق} = \begin{cases} \text{س}^2 + 1 & ، \text{س} \leq 1 \\ 2\text{س} & ، \text{س} > 1 \end{cases}$

احسب $\text{قَ}(1)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل لانه $\text{س} = 1$ نقطة تحول نأخذ المشتقة من اليمين واليسار.

$$\text{قَ}_{+}(1) = \underset{\text{ع} \to 1^{+}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(1)}{\text{ع} - 1} = \text{نها} \frac{\text{ع}^2 - 2}{\text{ع} - 1} = 2$$

$$\text{قَ}_{-}(1) = \underset{\text{ع} \to 1^{-}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(1)}{\text{ع} - 1} = \underset{\text{ع} \to 1^{-}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^2 + 1 - 2}{\text{ع} - 1} = 2$$

بما أن $\text{قَ}_{+}(1) = \text{قَ}_{-}(1) = 2$ / موجودة .

٦ اذا كانت $\text{ق} = \begin{cases} 6\text{س}^2 + 5 & ، \text{س} > 2 \\ 9\text{س} - 2 & ، \text{س} \leq 2 \end{cases}$

احسب $\text{قَ}(3)$ باستخدام التعريف

"واجب"

الاستاذ
اياد عماد عباد

٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٧) اذا كانت ق(س) = |س² − ٤| اجد قَ(٢) باستخدام التعريف

الحل: نعيد التعريف |س² − ٤|

س² − ٤ = ٠ ، س = ٢ ، −٢

$$\underset{-2\qquad\quad 2}{+\ \times\ -\ \times\ +}$$

$$\text{ق} = \begin{cases} \text{س}^2-4 & \text{س} < -2 \\ 4-\text{س}^2 & -2 \le \text{س} \le 2 \\ \text{س}^2-4 & \text{س} > 2 \end{cases}$$

$$\text{قَ}_+(2) = \underset{\text{ع}\to 2^+}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^2-4-\text{صفر}}{\text{ع}-2} = \text{نها}\frac{\cancel{(\text{ع}-2)}(\text{ع}+2)}{\cancel{\text{ع}-2}} = 4$$

$$\neq$$

$$\text{قَ}_-(2) = \underset{\text{ع}\to 2^-}{\text{نها}} \frac{4-\text{ع}^2-\text{صفر}}{\text{ع}-2} = \frac{\overset{-1}{\cancel{(2-\text{ع})}}(2+\text{ع})}{\cancel{\text{ع}-2}} = -4$$

قَ₊(٢) ≠ قَ₋(٢) ⟸ قَ(٢) غير موجودة.

---

٨) ق(س) = |س − ١| − |٢س|
اجد قَ(س) عند النقطة (١، ٠)
باستخدام التعريف المشتقة (واجب)

---

٩) ق(س) = [س + ١] باستخدام التعريف المشتقة اجد ① قَ(٣٫٥) ② قَ(٣) .

الحل: نعيد التعريف اكبر عدد صحيح .

[س + ١] = ل ، ١ / ن = −١

$$\underset{-1\quad 0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4}{\overline{\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad|\quad}}$$

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} 3 & 2 \le \text{س} < 3 \\ 4 & 3 \le \text{س} < 4 \end{cases}$$

$$① \ \text{قَ}(3{,}5) = \underset{\text{ع}\to 3{,}5}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(3{,}5)}{\text{ع}-3{,}5} = \text{نها}\frac{4-4}{\text{ع}-3{,}5} = \text{صفر}$$

$$② \ \text{قَ}_+(3) = \underset{\text{ع}\to 3^+}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(3)}{\text{ع}-3} = \text{نها}\frac{4-4}{\text{ع}-3} = \text{صفر}$$

$$\text{قَ}_-(3) = \underset{\text{ع}\to 3^-}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(3)}{\text{ع}-3} = \underset{\text{ع}\to 3^-}{\text{نها}}\frac{3-4}{\text{ع}-3} = \frac{-1}{0} = \text{غ.م}$$

قَ(٣) = غير موجودة .

---

١٠) اذا كانت ق(س) = $[\frac{\text{س}}{2} + 1]$
باستخدام تعريف المشتقة اجد
① قَ(٥) ② قَ(٤) . (واجب)

---

١١) اذا كانت ق(س) = جاس اجد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة

$$\text{الحل: قَ(س)} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جاع} - \text{جاس}}{\text{ع}-\text{س}} \quad (\text{متطابقة})$$

$$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{2\,\text{جا}\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}\ \text{جتا}\frac{\text{ع}+\text{س}}{2}}{\text{ع}-\text{س}} = 2 \times \frac{1}{2}\ \text{جتا}\frac{\text{س}+\text{س}}{2}$$

$$= \text{جتاس}$$

---

١٢) اذا كانت ق(س) = جتاس اجد
قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة . "واجب"

---

١٣) اذا كانت ق(س) = جا²س
باستخدام تعريف المشتقة اجد قَ(س)

$$\text{الحل: قَ(س)} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^2\text{ع} - \text{جا}^2\text{س}}{\text{ع}-\text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{(\text{جاع}-\text{جاس})(\text{جاع}+\text{جاس})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \left(2\,\text{جتا}\frac{\text{ع}+\text{س}}{2}\right) \boxed{\frac{\text{جا}\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}}{\text{ع}-\text{س}}} (\text{جاع}+\text{جاس})$$

$$= \text{نها}\ 2\,\text{جتا}(\text{ع}+\text{س}) \times 1 \times (\text{جاع}+\text{جاس}) =$$

$$= 4\,\text{جتاس}\ \text{جا}2\text{س} .$$

---

١٤) اذا كانت ق(س) = س² + ٣ جتا٢س
اجد قَ(س) باستخدام التعريف .

$$\text{الحل: قَ(س)} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{(\text{ع}^2 + 3\,\text{جتا}2\text{ع}) - (\text{س}^2 + 3\,\text{جتا}2\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^2 - \text{س}^2}{\text{ع}-\text{س}} + \text{نها} \frac{3\,\text{جتا}2\text{ع} - 3\,\text{جتا}2\text{س}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}(\text{ع}+\text{س})}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} + \text{نها}\ 3 \times \frac{\left(-2\,\text{جا}\frac{2\text{ع}+2\text{س}}{2}\right) \boxed{\overset{1}{\text{جا}\frac{2\text{ع}-2\text{س}}{2}}}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}}\ \text{ع}+\text{س} + \text{نها}\ 3 \times (-2)\,\text{جا}(\text{ع}+\text{س})$$

$$= 2\text{س} + 3 \times (-2\,\text{جا}2\text{س})$$

---

١٥) اذا كانت ق(س) = جا٢س
اجد قَ($\frac{\pi}{4}$) باستخدام التعريف

"واجب"

١٦ ق(س) = س جا٢س ، جـ ق'(س) باستخدام التعريف .

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع جا٢ع} - \text{س جا٢س}}{\text{ع} - \text{س}}$

نضيف ونطرح س جا٢ع

$\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع جا٢ع} - \text{س جا٢ع}}{\text{ع} - \text{س}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س جا٢ع} - \text{س جا٢س}}{\text{ع} - \text{س}}$

$\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جا٢ع}\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} + \lim \text{س} \left(\frac{\text{جا٢ع} - \text{جا٢س}}{\text{ع} - \text{س}}\right)$

$\text{جا٢س} + \lim \text{س} \left(\frac{\text{٢ جتا}\frac{\text{٢ع}+\text{٢س}}{٢}\ \text{جا}\frac{\text{٢ع}-\text{٢س}}{٢}}{\text{ع} - \text{س}}\right)$

$= \text{جا٢س} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \text{س} \left(\text{٢جتا}(\text{س}+\text{ع})\right)$

$= \text{جا٢س} + \text{٢س جتا٢س}$

---

١٧ اذا كان ق(س) = $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ ، جـ ق'(س) باستخدام تعريف المشتقة .

الحل $\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{\text{جاع}}{\text{ع}} - \frac{\text{جاس}}{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س جاع} - \text{ع جاس}}{(\text{ع})(\text{س})(\text{ع} - \text{س})}$ نضيف ونطرح $\boxed{\text{س جاس}}$

$\lim \frac{\text{س جاع} - \text{س جاس}}{(\text{ع})(\text{س})(\text{ع} - \text{س})} + \lim \frac{\text{س جاس} - \text{ع جاس}}{(\text{ع})(\text{س})(\text{ع} - \text{س})}$

$\text{س} \lim \frac{\text{جاع} - \text{جاس}}{(\text{ع})(\text{س})(\text{ع} - \text{س})} + \frac{\text{جاس}}{\text{س}^2}$ ؛ $\times -١$

$\text{س} \lim \frac{\text{٢ جا}\frac{\text{ع}-\text{س}}{٢}\ \text{جتا}\frac{\text{ع}+\text{س}}{٢}}{(\text{ع})(\text{س})(\text{ع} - \text{س})} + \frac{-\text{جاس}}{\text{س}^2}$

$= \frac{\text{س جتاس} - \text{جاس}}{\text{س}^2}$

---

١٨ اذا كانت ق(٣) = ٤ ، ق'(٣) = ٥
وكان ل(س) = س² ق(س) ، جـ
ل'(٣) باستخدام التعريف .

الحل: $\text{ل}'(٣) = \lim_{\text{س}\to٣} \frac{\text{ل(س)} - \text{ل(٣)}}{\text{س} - ٣}$

$= \lim_{\text{س}\to٣} \frac{\text{س}^2\text{ق(س)} - ٩\text{ق(٣)}}{\text{س} - ٣}$ نضيف ونطرح ٩ ق(س)

$= \lim \frac{\text{س}^2\text{ق(س)} - ٩\text{ق(س)}}{\text{س} - ٣} + \lim \frac{٩\text{ق(س)} - ٩\text{ق(٣)}}{\text{س} - ٣}$

$= \lim_{\text{س}\to٣} \text{ق(س)}\left(\frac{\text{س}^2 - ٩}{\text{س} - ٣}\right) + ٩ \lim_{\text{س}\to٣} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(٣)}}{\text{س} - ٣}$

$= \lim_{\text{س}\to٣} \text{ق(س)} \frac{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س} + ٣)}{\cancel{\text{س} - ٣}} + ٩ \times \text{ق}'(٣)$

$\text{ق(٣)}\ (٣ + ٣) + ٩ \times \text{ق}'(٣) = ٤ \times ٦ + ٩ \times ٥ = ٦٩$

---

١٩ اذا كانت ق'(٣) = ١٨ ، جـ

$\lim_{\text{هـ}\to٠} \frac{\text{ق}(٣ + \text{هـ}) - \text{ق}(٣ - \text{هـ})}{\text{هـ}}$

الحل : نضيف ونطرح ق(٣)

$\lim_{\text{هـ}\to٠} \frac{\text{ق}(٣ + \text{هـ}) - \text{ق(٣)}}{\text{هـ}} + \lim_{\text{هـ}\to٠} \frac{\text{ق(٣)} - \text{ق}(٣ - \text{هـ})}{\text{هـ}}$

٣ − هـ = ص
هـ + ص = ٣
هـ ← ٠ ، ص ← ٣

$\text{ق}'(٣) +$

$\text{ق}'(٣) + \lim_{\text{ص}\to٣} \frac{\text{ق}(\text{ص} + \text{هـ}) - \text{ق(ص)}}{\text{هـ}}$

$\text{ق}'(٣) + \text{ق}'(٣) = ٢\text{ق}'(٣) = ٢ \times ١٨ = ٣٦$

---

٢٠ اذا كان مقدار التغير في الاقتران ق
يساوي ٥س²هـ + ٨س هـ² ، جـ ق'(٢)

الحل مقدار التغير = ٥س²هـ + ٨س هـ²

ق(س + هـ) − ق(س) = ٥س²هـ + ٨س هـ²
بالقسمة على هـ وبأخذ النهاية للطرفين

$\lim_{\text{هـ}\to٠} \frac{\text{ق(س} + \text{هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to٠} \frac{٥\text{س}^2\text{هـ} + ٨\text{س هـ}^2}{\text{هـ}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to٠} \frac{٥\text{س}^2\cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}} + \frac{٨\text{س هـ}^2}{\cancel{\text{هـ}}}$

ق'(س) = ٥س² + صفر

ق'(٢) = ٥(٢)² = $\boxed{٢٠}$

---

٢١ اذا كان مقدار التغير في ق(س) عندما
تتغير س من ٣ إلى ع هو ع³ − ٢٧ ، جـ ق'(٣)

الحل مقدار التغير = ع³ − ٢٧

ق(ع) − ق(٣) = ع³ − ٢٧
اقسم الطرفين على ع − ٣ ثم نأخذ النهاية

$\lim_{\text{ع}\to٣} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(٣)}}{\text{ع} - ٣} = \lim_{\text{ع}\to٣} \frac{\text{ع}^3 - ٢٧}{\text{ع} - ٣}$

$\text{ق}'(٣) = \lim \frac{\cancel{(\text{ع} - ٣)}(\text{ع}^2 + ٣\text{ع} + ٩)}{\cancel{\text{ع} - ٣}}$

ق'(٣) = ٢٧

ملاحظة :-

او متشعب

اذا كان السؤال مطلقة او أكبر عدد صحيح وطلب السؤال $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام التعريف نتبع الخطوات التالية :-

1 عندما $\text{س} > \text{أ}$ ، $\text{ق}'_{+}(\text{أ})$

2 عندما $\text{س} < \text{أ}$ ، $\text{ق}'_{-}(\text{أ})$

3 عند نقاط التحول $\text{س} = \text{أ}$

4 النتيجة النهائية على شكل اقتران متشعب .

سؤال :-

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٥\text{س} - |٣\text{س}|$ احسب $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام التعريف .

الحل : نعيد التعريف $|٣\text{س}|$

$$\overset{-}{\longleftarrow}\underset{٠}{\times}\overset{+}{\longrightarrow}$$

$$\text{ق} = \begin{cases} ٥\text{س} + (٣\text{س}) \text{ ، } \text{س} < ٠ \\ ٥\text{س} - (٣\text{س}) \text{ ، } \text{س} \geq ٠ \end{cases}$$

$$\text{ق} = \begin{cases} ٨\text{س} \text{ ، } \text{س} < ٠ \\ ٢\text{س} \text{ ، } \text{س} > ٠ \end{cases}$$

① عندما $\text{س} > ٠$

$$\text{ق}'_{+}(٠) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \text{نها} \frac{٢\text{ع} - ٠}{\text{ع}} = ٢$$

② عندما $\text{س} < ٠$

$$\text{ق}'_{-}(٠) = \text{نها}_{\text{ع}\to ٠^{-}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٠)}{\text{ع} - ٠} = \text{نها} \frac{٨\text{ع} - ٠}{\text{ع} - ٠} = ٨$$

③ التحول : $\text{ق}'_{+}(٠) = ٢$ ، $\text{ق}'_{-}(٠) = ٨ \Leftarrow \text{ق}'(٠) =$ غير موجودة

④ النتيجة : $\text{ق}' = \begin{cases} ٢ \text{ ، } \text{س} > ٠ \\ ٨ \text{ ، } \text{س} < ٠ \\ \text{غ.م} \text{ ، } \text{س} = ٠ \end{cases}$

---

٣٢ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظاس}$ استخدم تعريف المشتقة لايجاد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

(متطابقة)

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ظاع} - \text{ظاس}}{\text{ع} - \text{س}} = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ظا}(\text{ع}-\text{س})(١ + \text{ظاع ظاس})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها} \frac{\text{ظا}(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} \times (١ + \text{ظاع ظاس})$$

$$١ \times (١ + \text{ظاس ظاس})$$

$$١ \times (١ + \text{ظا}^٢\text{س})$$

$$= \text{قا}^٢\text{س}$$

---

٣٣ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{قا}٢\text{س}$ أوجد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام التعريف

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$$= \text{نها} \frac{\text{قا}٢\text{ع} - \text{قا}٢\text{س}}{\text{ع} - \text{س}} = \text{نها} \frac{\frac{١}{\text{جتا}٢\text{ع}} - \frac{١}{\text{جتا}٢\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها} \frac{\text{جتا}٢\text{س} - \text{جتا}٢\text{ع}}{(\text{جتا}٢\text{ع})(\text{جتا}٢\text{س})(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \text{نها} \frac{-٢\text{جا}\frac{٢\text{س}+٢\text{ع}}{٢}}{(\text{جتا}٢\text{ع})(\text{جتا}٢\text{س})} \overset{-١}{\boxed{\frac{\text{جا}\frac{٢\text{س}-٢\text{ع}}{٢}}{(\text{ع}-\text{س})}}} =$$

$$= \frac{+٢ \text{ جا}٢\text{س}}{\text{جتا}٢\text{س جتا}٢\text{س}} = ٣ \text{ قا}٢\text{س ظا}٢\text{س}$$

---

٣٤ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س} - \text{أ}) \text{ل}(\text{س})$ اثبت أن $\text{ق}'(\text{أ}) = \text{ل}(\text{أ})$

الحل : $\text{ق}'(\text{أ}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{ع} - \text{أ}}$

$$= \text{نها} \frac{(\text{ع}-\text{أ})\text{ل}(\text{ع}) - (\text{أ}-\text{أ})\text{ل}(\text{أ})}{}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{أ}} \frac{\overset{\text{ع}-\text{أ}}{\cancel{(\text{ع}-\text{أ})}}\text{ل}(\text{ع})}{\cancel{\text{ع}-\text{أ}}} = \text{ل}(\text{أ})$$ وهو المطلوب

---

٣٥ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{ل}(\text{س})}$ استخدم تعريف المشتقة لاثبات أن $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}(\text{س}) - \text{س ل}'(\text{س})}{(\text{ل}(\text{س}))^٢}$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{\text{ع}}{\text{ل}(\text{ع})} - \frac{\text{س}}{\text{ل}(\text{س})}}{\text{ع} - \text{س}} = \text{نها} \frac{\text{ع ل}(\text{س}) - \text{س ل}(\text{ع})}{\text{ل}(\text{ع})\text{ل}(\text{س})(\text{ع} - \text{س})}$$

نضيف ونطرح $\text{س ل}(\text{س})$

$$\text{نها} \frac{\text{ع ل}(\text{س}) - \text{س ل}(\text{س})}{\text{ل}(\text{ع})\text{ل}(\text{س})(\text{ع}-\text{س})} + \text{نها} \frac{\text{س ل}(\text{س}) - \text{س ل}(\text{ع})}{\text{ل}(\text{ع})\text{ل}(\text{س})(\text{ع}-\text{س})}$$

$$\text{نها} \frac{\text{ل}(\text{س})\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\text{ل}(\text{ع})\text{ل}(\text{س})\cancel{(\text{ع}-\text{س})}} + \text{نها}\, \text{س} \frac{\text{ل}(\text{س}) - \text{ل}(\text{ع})}{\text{ل}(\text{ع})\text{ل}(\text{س})(\text{ع}-\text{س})}$$

$$\frac{\text{ل}(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})\text{ل}(\text{س})} + \frac{\text{س} \times -\text{ل}'(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})\text{ل}(\text{س})}$$

$$= \frac{\text{ل}(\text{س}) - \text{س ل}'(\text{س})}{\text{ل}(\text{س}) \times \text{ل}(\text{س})}$$ وهو المطلوب

---

٣٦ اذا كان $\text{ق}(٢) = ٥$ ، $\text{ق}'(٢) = ٧$ ، $\text{ل}(\text{س}) = \text{س}^٣ \text{ق}(\text{س})$ احسب $\text{ل}'(٢)$ باستخدام التعريف .

من تمارين الكتاب

1. اثبت

$$\text{نها}_{ع\to س}\ \frac{ع\,\text{ق}(س)-س\,\text{ق}(ع)}{ع-س}=\text{ق}(س)-س\,\bar{\text{ق}}(س)$$

الحل: نضيف ونطرح س ق(س)

$$=\text{نها}\ \frac{ع\,\text{ق}(س)-س\,\text{ق}(س)}{ع-س}+\text{نها}\ \frac{س\,\text{ق}(س)-س\,\text{ق}(ع)}{ع-س}$$

$$\text{نها}\ \text{ق}(س)\frac{\cancel{(ع-س)}}{\cancel{ع-س}}+\text{نها}\ س\left(\frac{\text{ق}(س)-\text{ق}(ع)}{ع-س}\right)$$

$$\text{ق}(س)+س\times-\bar{\text{ق}}(س)\quad \text{وهو المطلوب}$$

$$=\text{ق}(س)-س\,\bar{\text{ق}}(س)$$

2. اثبت أن

$$\text{نها}_{ع\to س}\ \frac{٣ع\,\text{ق}(ع)-٣س\,\text{ق}(س)}{ع-س}=٣\text{ق}(س)+٣س\,\bar{\text{ق}}(س)$$

الحل: نضيف ونطرح ٣س ق(ع)

$$\text{نها}\ \frac{٣ع\,\text{ق}(ع)-٣س\,\text{ق}(ع)}{ع-س}+\text{نها}_{ع\to س}\ \frac{٣س\,\text{ق}(ع)-٣س\,\text{ق}(س)}{ع-س}$$

$$\text{نها}\ \text{ق}(ع)\left(\frac{\cancel{٣(ع-س)}}{\cancel{ع-س}}\right)+\text{نها}\ ٣س\left(\frac{\text{ق}(ع)-\text{ق}(س)}{ع-س}\right)$$

$$٣\text{ق}(س)+٣س\,\bar{\text{ق}}(س)$$

3. اثبت أن

$$\text{نها}_{هـ\to٠}\ \frac{\text{ق}(س+هـ)-\text{ق}(س-هـ)}{هـ}=٢\bar{\text{ق}}(س)$$

الحل: نضيف ونطرح ق(س)

$$\text{نها}_{هـ\to٠}\ \frac{\text{ق}(س+هـ)-\text{ق}(س)}{هـ}+\text{نها}\ \frac{\text{ق}(س)-\text{ق}(س-هـ)}{هـ}$$

نفرض ص = س − هـ ، س = ص + هـ / هـ ← ٠ ، ص ← س

$$\bar{\text{ق}}(س)+\text{نها}_{هـ\to٠}\ \frac{\text{ق}(ص+هـ)-\text{ق}(ص)}{هـ}$$

$$\bar{\text{ق}}(س)+\bar{\text{ق}}(ص)=٢\bar{\text{ق}}(س)$$

4. اذا كانت ق̅(٤) = ٦ احسب

$$\text{نها}_{هـ\to٠}\ \frac{\text{ق}(٤-٢هـ)-\text{ق}(٤+٥هـ)}{هـ}$$

الحل: نضيف ونطرح ق(٤)

$$=\text{نها}_{هـ\to٠}\ \frac{\text{ق}(٤-٢هـ)-\text{ق}(٤)}{هـ}+\text{نها}_{هـ\to٠}\ \frac{\text{ق}(٤)-\text{ق}(٤+٥هـ)}{هـ}$$

$$=-٢\times\bar{\text{ق}}(٤)+-٥\times\bar{\text{ق}}(٤)$$

$$-٢\times٦+-٥\times٦$$

$$-١٢+-٣٠=-٤٢$$

5. اذا كانت ص = √(س+٢) ، س > −٢
احسب $\frac{دص}{دس}$ باستخدام التعريف

الحل:

$$\bar{\text{ق}}(س)=\text{نها}_{ع\to س}\ \frac{\text{ق}(ع)-\text{ق}(س)}{ع-س}$$

$$=\text{نها}_{ع\to س}\ \frac{\sqrt{ع+٢}-\sqrt{س+٢}}{ع-س}\times\frac{\sqrt{ع+٢}+\sqrt{س+٢}}{\sqrt{ع+٢}+\sqrt{س+٢}}$$

$$=\text{نها}\ \frac{ع+\cancel{٢}-س-\cancel{٢}}{(ع-س)(\sqrt{ع+٢}+\sqrt{س+٢})}$$

$$=\text{نها}\ \frac{\cancel{ع-س}}{\cancel{(ع-س)}(\sqrt{ع+٢}+\sqrt{س+٢})}=$$

$$=\frac{١}{٢\sqrt{س+٢}}$$

6. اذا كانت ل(س) = س² |س³ − ٢|
احسب ق̅(∛٢) باستخدام التعريف

الحل: نعيد التعريف

$$|س^٣-٢|\ \to\ س^٣-٢=\text{صفر}$$

$$س^٣=٢$$

$$س=\sqrt[٣]{٢}$$

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & \sqrt[٣]{٢} & \end{array}$$

$$ل(س)=س^٢\times\begin{cases}س^٣-٢ & ،\ س\geq\sqrt[٣]{٢}\\ -س^٣+٢ & ،\ س<\sqrt[٣]{٢}\end{cases}$$

$$ل(س)=\begin{cases}س^٥-٢س^٢ & ،\ س\geq\sqrt[٣]{٢}\\ -س^٥+٢س^٢ & ،\ س<\sqrt[٣]{٢}\end{cases}$$

$$\bar{ل}(\sqrt[٣]{٢})^-=\text{نها}_{س\to\sqrt[٣]{٢}^-}\ \frac{ل(س)-ل(\sqrt[٣]{٢})}{س-\sqrt[٣]{٢}}$$

$$=\text{نها}_{س\to\sqrt[٣]{٢}^-}\ \frac{-س^٥+٢س^٢-\text{صفر}}{س-\sqrt[٣]{٢}}=-٦\sqrt[٣]{٢}$$

$$\bar{ل}(\sqrt[٣]{٢})^+=\text{نها}_{س\to\sqrt[٣]{٢}^+}\ \frac{ل(س)-ل(\sqrt[٣]{٢})}{س-\sqrt[٣]{٢}}$$

$$=\text{نها}\ \frac{س^٥-٢س^٢-\text{صفر}}{س-\sqrt[٣]{٢}}=٦\sqrt[٣]{٢}$$

$$\Leftarrow\ \bar{ل}(\sqrt[٣]{٢})=\text{غير موجودة}$$

قواعد الاشتقاق

١ مشتقة العدد الثابت = صفر

مثال ق = ١٨ ← قَ(س) = صفر

ق(س) = $\sqrt{٥}$ ← قَ(س) = صفر

ص = π ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = صفر

٢ مشتقة $س^{قوة}$ ⇐ القوة × $س^{قوة-١}$

مثال

ق = $س^{٩}$ ← قَ(س) = ٩ $س^{٨}$

ق = $س^{-٣}$ ← قَ(س) = −٣ $س^{-٣}$

ق = $س^{٥}$ |$س^{٢}$| = احسب قَ(٣)

ق = $س^{٥} \times س^{٢} = س^{٧}$

قَ = ٧ $س^{٦}$ = ٧ $(٣)^{٦}$ = ٥١٠٣

مثال: ق(س) = ٣ $س^{٣}$ − ٤ $س^{٢}$ + ٩س + ١٢ احسب قَ(س)

قَ(س) = ٦ $س^{٢}$ − ٨س + ٩

مثال: هـ(س) = $\frac{٢}{٣}$ $س^{٣}$ − $\frac{٣}{٢}$ $س^{٢}$ + ٩ احسب هـَ(٢)

هـَ = $\frac{٦}{٣}$ $س^{٢}$ − $\frac{٦}{٢}$ س

هـَ = ٢ $س^{٢}$ − ٣س

هـَ(٢) = ٢(٤) − ٣×٢ = ٨ − ٦ = ٢

٣ قاعدة الضرب

ق(س) = (اقترانه) × (اقترانه)

الاول ، الثاني

قَ(س) = (الاول نفسه) (مشتقة الثاني) + (الثاني نفسه) × (مشتقة الاول)

مثال: ق(س) = ($س^{٥}$ + ٣س) (٦ $س^{٢}$ + ٩)

قَ(س) = ($س^{٥}$ + ٣س)(١٢س) + (٦ $س^{٢}$ + ٩)(٥ $س^{٤}$ + ٣)

مثال: ق(س) = ($س^{-٢}$ + ٧ $س^{-٣}$) (٣ $س^{-٩}$ + ٨)

قَ(س) = ($س^{-٢}$ + ٧ $س^{-٣}$) (−٢٧ $س^{-١٠}$) + (٣ $س^{-٩}$ + ٨)(−٢ $س^{-٣}$ −٢١ $س^{-٤}$)

مثال: اثبت أن $\frac{د}{دس}$ (ل(س) . م(س) . هـ(س))

= ل(س) م(س) هـَ(س) + ل(س) هـ(س) . مَ(س) + م(س) × هـ × لَ

الحل = ل . م . هـَ + هـ × (ل . م)َ

= ل . م . هـَ + هـ(ل . مَ + م . لَ)

= ل . م . هـَ + هـ ل . مَ + هـ . م . لَ .

٤ ق(س) = $\frac{بسط}{مقام}$

= $\frac{\text{المقام × مشتقة البسط − البسط × مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

مثال: ق = $\frac{س^{٢} + ٢}{٣س^{٤} - ٥}$

الحل قَ(س) = $\frac{(٣س^{٤} - ٥)(٢س) - (س^{٢} + ٢)(١٢س^{٣})}{(٣س^{٤} - ٥)^{٢}}$

مثال: ق(س) = $\frac{٢س}{٣ - س^{٢}}$ احسب قَ(١)

الحل قَ(س) = $\frac{(٣ - س^{٢})(٢) - (٢س)(-٢س)}{(٣ - س^{٢})^{٢}}$

قَ(١) = $\frac{(٣-١)(٢) - (٢ \times ١)(-٢ \times ١)}{(٣ - ١^{٢})^{٢}} = \frac{٤+٤}{٤} = ٢$

سؤال: ق = $\frac{س^{٢}(٢س^{٤} - ٣)}{٥ - ٣س}$ احسب قَ(١)
واجب

٥ ق = $\frac{عدد}{اقترانه}$ ⇐ $\frac{\text{سالب العدد × مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

مثال:

ق = $\frac{٧}{س^{٥} + ٢}$

قَ(س) = $\frac{-٧ \times ٥س^{٤}}{(س^{٥} + ٢)^{٢}}$

مثال:

ق = $\frac{-٩}{٤س^{٢} + ٨}$

قَ(س) = $\frac{٩(٨س)}{(٤س^{٢} + ٨)^{٢}}$

مثال: ق = ٨ $س^{-٢}$ + $\frac{٩}{س^{٣} + ٨}$

قَ(س) = −١٦ $س^{-٣}$ + $\frac{-٩ \times ٣س^{٢}}{(س^{٣} + ٨)^{٢}}$

المشتقات العليا

١ ق(س) = $س^{٧}$ + ٣ $س^{٥}$ احسب قَ‴(س)

قَ(س) = ٧ $س^{٦}$ + ١٥ $س^{٤}$

قَ″(س) = ٤٢ $س^{٥}$ + ٦٠ $س^{٣}$

قَ‴(س) = ٢١٠ $س^{٤}$ + ١٨٠ $س^{٢}$.

سؤال: ق = $\frac{٢}{٣}$ $س^{٣}$ − $\frac{٧}{٢}$ $س^{٢}$ + ١٦س

احسب قَ(١) (واجب)

٢ $ق = ٢ س^{٤} + \frac{١٦}{س}$ احسب $ق'''(٢)$

الحل:

$ق = ٢ س^{٤} + ١٦ س^{-١}$

$ق' = ٨ س^{٣} - ١٦ س^{-٢}$

$ق'' = ٢٤ س^{٢} + ٣٢ س^{-٣}$

$ق''' = ٤٨ س - ٩٦ س^{-٤} \leftarrow ق'''(٢) = ٤٨ \times ٢ - \frac{٩٦}{١٦} = ٩٠$

---

٣ $ق(س) = \frac{١}{٣} س^{ن}$ وكانت $ق'''(س) = ٤٠ س^{ن-٣}$ فما قيمة ن

الحل

$ق'(س) = \frac{١}{٣} \times ن \times س^{ن-١}$

$ق''(س) = \frac{١}{٣} ن(ن-١) س^{ن-٢}$

$ق'''(س) = \frac{١}{٣} (ن)(ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣}$

$٤٠ \cancel{س^{ن-٣}} = \frac{١}{٣} (ن)(ن-١)(ن-٢) \cancel{س^{ن-٣}}$

$١٢٠ = (ن)(ن-١)(ن-٢) \Leftarrow ٦ \times ٥ \times ٤ = ١٢٠$

$ن = ٦$

---

٤ اذا كانت $ص = أ س^{ن} + \frac{ب}{س^{ن-١}}$

اثبت أنه: $س^{٢} \times ص'' = ن(ن-١) \times ص$

البرهان:

$ص = أ س^{ن} + ب س^{-ن+١}$

$ص' = ن أ س^{ن-١} + ب(-ن+١) س^{-ن}$

$ص'' = ن(ن-١)(أ) س^{ن-٢} + ب(-ن+١)(-ن) س^{-ن-١}$

اضرب الطرفين في $س^{٢}$

$س^{٢} ص'' = ن(ن-١) أ س^{ن-٢} \times س^{٢} + ب(ن-١)(ن) س^{-ن-١} \times س^{٢}$

$= ن(ن-١) أ س^{ن} + ب(ن)(ن-١) س^{-ن+١}$

$= ن(ن-١)(أ س^{ن} + ب س^{-ن+١})$

$= ن(ن-١) \times ص$

---

٥ اذا كانت ل(س) ، ق(س) اقترانين قابلين للاشتقاق وكانت $ل'(٣) = -١$ ، $ل(٢) = ١٠$ ، $ق'(٢) = ٢$ ، $ق(٢) = -٣$ ، احسب $هـ'(٢)$ في الحالات

١ $هـ(س) = ٢ل(س) \times ق(س)$

$هـ'(س) = ٢ل(س) \times ق'(س) + ق(س) \times ٢ل'(س)$

$هـ'(٢) = ٢ \times ل(٢) \times ق'(٢) + ق(٢) \times ٢ \times ل'(٢)$

$= ٢ \times ١٠ \times ٢ + -٣ \times ٢ \times -١ = ٤٦$

٢ $هـ(س) = \frac{ل(س)}{٤ + ق(س)}$

$هـ'(س) = \frac{(٤ + ق(س)) \times ل'(س) - (ل(س))(٠ + ق'(س))}{(٤ + ق(س))^{٢}}$

$هـ'(٢) = \frac{(٤ + ق(٢)) \times ل'(٢) - ل(٢)(٠ + ق'(٢))}{(٤ + ق(٢))^{٢}}$

$= \frac{(٤ + -٣)(-١) - (١٠)(٢)}{(٤ + -٣)^{٢}} = -٢١$

---

٦ اذا كانت $ق(س) = \frac{٥}{س^{٢}}$ ، $هـ(٢) = ٣$ ، $هـ'(٢) = -٢$ احسب ما يلي

١ $(٣ق + هـ)'(٢)$

٢ $(ق . هـ)'(٢)$

٣ $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(٢)$

٤ $\left(\frac{ق(١)}{هـ}\right)'(٢)$

٥ $\left(\frac{ق}{هـ'(١)}\right)'(٢)$

٦ $(س^{٢} + ٢هـ)'(٢)$

٨ $(ق . هـ)(٢) =$

٧ مشتقة $\frac{ق}{هـ + ق}$ عندما $س = ٢$

(واجب)

---

٧ اذا كانت $ق(٢) = ٣$ ، $ق'(٢) = ٤$ وكانت $هـ(س) = س^{٣} . ق(س) + \frac{١٨}{ق(س)}$ احسب $هـ'(٢)$

الحل:

$هـ'(س) = س^{٣} \times ق'(س) + ق(س) \times ٣س^{٢} - \frac{١٨ \times ق'(س)}{(ق(س))^{٢}}$

$هـ'(٢) = ٨ \times ق'(٢) + ق(٢) \times ١٢ - \frac{١٨ \times ق'(٢)}{(ق(٢))^{٢}}$

$= ٨ \times ٤ + ٣ \times ١٢ - \frac{١٨ \times ٤}{٩} = ٦٠$

---

٨ $ق(س) = ل(س) \times (٣س^{٢} + ٤)$ وكانت $ق(١) = ٢$ ، $ق'(١) =$ صفر احسب $ل'(١)$

الحل:

$ق'(س) = ل(س) \times (٦س) + (٣س^{٢} + ٤) \times ل'(س)$

$ق'(١) = ل(١) \times (٦ \times ١) + (٣ \times ١^{٢} + ٤) \times ل'(١)$

صفر $= \frac{ق(١)}{٣ + ٤} \times ٦ + ٧ \times ل'(١)$

صفر $= \frac{٢}{٧} \times ٦ + ٧ \times ل'(١)$

صفر $= \frac{١٢}{٧} + ٧ ل'(١)$

$\frac{-١٢}{٧} = ٧ ل'(١) \Leftarrow ل'(١) = \frac{-١٢}{٤٩}$

---

٩ اذا كانت $ق(٤) = ٥$ ، $ق'(٤) = -١$ فما قيمة $\left(\frac{ق}{ق'}\right)'(٤)$

الحل:

$\left(\frac{ق}{ق'}\right)'(٤) = \frac{ق'(٤) \times ق'(٤) - ق(٤) \times ق''(٤)}{(ق'(٤))^{٢}}$

$= \frac{-١ \times -١ - ٥ \times ٢}{١} = -٩$

---

١٠ اذا كانت $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$ وكانت $ق'(س) \times هـ'(س) = جـ$ (ثابت)

اثبت أنه $\frac{ل''}{ل} = \frac{ق''}{ق} + \frac{هـ''}{هـ}$

(واجب)

النهايات الخاصة

من الممكن أن تكون النهاية على صورة تعريف المشتقة:

١) $قَ(س) = \underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$

٢) $قَ(أ) = \underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{ق(أ+هـ) - ق(أ)}{هـ}$

٣) $قَ(س) = \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

٤) $قَ(أ) = \underset{ع \to أ}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(أ)}{ع - أ}$

٥) $قً(أ) = \underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{قَ(أ+هـ) - قَ(أ)}{هـ}$

٦) $قً(أ) = \underset{ع \to أ}{\text{نها}} \frac{قَ(ع) - قَ(أ)}{ع - أ}$

٧) $\underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{هـ}{ق(س+هـ) - ق(س)} = \frac{1}{قَ(س)}$

٨) $\underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{ق(أس+ب هـ) - ق(أس)}{جـ هـ} = \frac{ب}{أ.جـ} قَ(س)$

---

١) إذا كانت $ق(س) = ٣س^٤ - ٥س^٣$

$قَ(س) = ١٢س^٣ - ١٥س^٢$

$قَ(٢) = ٣٦$

احسب

أ) $\underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ} = قَ(٢) = ٣٦$

ب) $\underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{ق(٢) - ق(٢+هـ)}{هـ} = -قَ(٢) = -٣٦$

جـ) $\underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{قَ(س+هـ) - قَ(س)}{هـ} = قً(س)$

$قً = ٣٦س^٢ - ٣٠س$

د) $\underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{ق(س+٥هـ) - ق(س)}{٦هـ} = \frac{٥}{٦} قَ(س)$

$= \frac{٥}{٦}(١٢س^٣ - ١٥س^٢)$

هـ) $\underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{ق(٢+٧هـ) - ق(٢)}{٩هـ} = \frac{٧}{٩} \times قَ(٢)$

$= \frac{٧}{٩} \times ٣٦$

و) $\underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{قَ(٣+٢هـ) - قَ(٣)}{هـ}$

$= \frac{٢}{١} قً(٣) = \frac{٢}{١}(٣٦ \times (٣)^٢ - ٣٠ \times ٣)$

$= ٢ \times ٢٣٤ = ٤٦٨$

---

٢) إذا كان $ق(س) = أس^٣ + ٧٢ + ١$ وكانت $\underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{قَ(٣+هـ) - قَ(٣)}{هـ} = ٩$ فما قيمة أ.

الحل: $قً(٣) = ٩$

$قَ(س) = ٣أس^٢ + ٤س + ٢$

$قً = ٦أس$

$قً(٣) = ٦أ \times ٣ = ٩ \Leftarrow ١٨أ = ٩$

$أ = \frac{١}{٢}$

---

٣) ما قيمة $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{ق(٢س) - ق(٦)}{س - ٣}$ بحيث $قَ(٣) = ٧$ ، $قَ(٦) = ٩$.

الحل: افرض $ع = ٢س \Leftarrow س = \frac{ع}{٢}$

$س \to ٣ \Leftarrow ع \to ٦$

$\Leftarrow \text{نها} \frac{ق(ع) - ق(٦)}{\frac{ع}{٢} - ٣} = \text{نها} \frac{ق(ع) - ق(٦)}{\frac{١}{٢}(ع - ٦)}$

$= ٢ قَ(٦) = ٢ \times ٩ = ١٨$

---

٤) احسب قيمة $\underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{س^٩ - ع^٩}{ع - س} = -(س^٩)َ$

$= -٩س^٨$

---

٥) ما قيمة $\underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{(س+هـ)^٥ - س^٥}{هـ} = (س^٥)َ = ٥س^٤$

---

٦) $\underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{٨(٣+هـ)^٤ - ٢٢}{هـ} = ٨(س^٤)َ$ عندما $س=٢$

$= ٨(٤س^٣)\Big|_{س=٢} = ٢٥٦$

---

٩) إذا كانت $ق(س) = ق(س+هـ) - ٥س^٢هـ + ٧سهـ$ فما قيمة $قً(٢)$.

الحل: $قَ(س) = \underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{ق(س+هـ) - (ق(س+هـ) - ٥س^٢هـ + ٧سهـ)}{هـ}$

$= \text{نها} \frac{\cancel{ق(س+هـ)} - \cancel{ق(س+هـ)} + ٥س^٢هـ - ٧سهـ}{هـ}$

$\underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{٥س^٢هـ}{هـ} - \frac{٧سهـ}{هـ} = ٥س^٢ - ٧س$

$قَ(س) = ٥س^٢ - ٧س$

$قً(س) = ١٠س - ٧$

$قً(٢) = ١٠ \times ٢ - ٧ = ١٣$

العلاقة بين المشتقة والاتصال

نظرية:

اذا كان ق(س) قابل للاشتقاق عند النقطة س = أ فإنه يكون متصلاً عندما س = أ

البرهان:

نريد ان نثبت أنه $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س) = ق(أ)$

ليكن $ق(س) - ق(أ) = ق(س) - ق(أ)$

اضرب احد الطرفين في $\frac{(س - أ)}{س - أ}$

$$ق(س) - ق(أ) = \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}\,(س - أ)$$

بأخذ النهاية للطرفين

$$\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س) - ق(أ) = \underset{س \to أ}{\text{نها}}\ \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ} \times \underset{س \to أ}{\text{نها}}\ س - أ$$

$$\text{نها}\ ق(س) - ق(أ) = ق'(أ) \times \text{صفر}$$

$$\text{نها}\ ق(س) - ق(أ) = \text{صفر}$$

$\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س) = ق(أ)$ ∴ ق متصل عندما س = أ

ملاحظات:

① اذا كان ق متصل عندما س = أ ليس بالضرورة بأن يكون ق(س) قابل للاشتقاق عندما س = أ

② اذا كان ق غير متصل عندما س = أ فإنه غير قابل للاشتقاق عندما س = أ

③ اذا كان ق(س) قابل للاشتقاق عندما س = أ فإنه ① ق متصل عندما س = أ
② $ق'_{+}(أ) = ق'_{-}(أ)$

④ اذا كانت $ق'_{+}(أ) \neq ق'_{-}(أ) \Leftarrow ق'(أ)$ غير موجودة

مثال: اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س^{٢} + ٥} & ،\ س \le ٢ \\ \frac{٨}{س^{٣}} + ٧س & ،\ س > ٢ \end{cases}$$

هل ق(س) قابل للاشتقاق عندما س = ٢

الحل: نبحث في الاتصال عندما س = ٢

$ق(٢) = \sqrt{٤ + ٥} = \sqrt{٩} = ٣$

$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}}\ ق(س) = \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نها}}\ \sqrt{س^{٢} + ٥} = ٣$

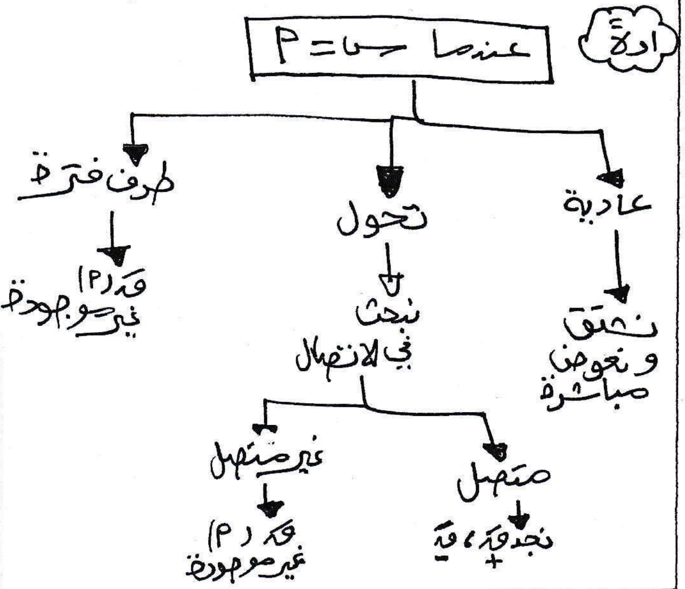
$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نها}}\ ق(س) = \frac{٨}{٨} + ٧ \times ٢ = ١٥$

ق غير متصل عندما س = ٢

بما أن ق غير متصل عندما س = ٢

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عندما س = ٢

مشتقة الاقترانات المتشعبة



$\boxed{١}$

$$ق = \begin{cases} س^{٣} + س^{٢} & ،\ س \le ١ \\ ٣س^{٢} - س & ،\ ١ < س < ٣ \\ ٨س & ،\ س \ge ٣ \end{cases}$$

احسب ق'(−٢) ، ق'(٢) ، ق'(٧) ، ق'(١) ، ق'(٣).

الحل:

$$ق' = \begin{cases} ٣س^{٢} + ٢س & ،\ س < ١ \\ ٦س - ١ & ،\ ١ < س < ٣ \\ ٨ & ،\ س > ٣ \end{cases}$$

$ق'(-٢) = ٣(-٢)^{٢} + ٢ \times -٢ = ٨$

$ق'(٢) = ٦ \times ٢ - ١ = ١١$

$ق'(٧) = ٨$

✱ ق'(١) : س = ١ ← تحول ← اتصال ق

$ق(١) = (١)^{٣} + (١)^{٢} = ٢$

$\underset{س \to ١^{+}}{\text{نها}}\ ٣س^{٢} - س = ٢$ | $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نها}}\ س^{٣} + س^{٢} = ٢$

ق متصل عندما س = ١

$ق'_{+}(١) = ٣(١)^{٢} + ٢(١) = ٥$

$ق'_{-}(١) = ٦ \times ١ - ١ = ٥$

ق'(١) = ٥ موجودة

✱ ق'(٣): س = ٣ ← تحول ← اتصال ق

$ق(٣) = ٨ \times ٣ = ٢٤$

$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نها}}\ ٨س = ٢٤$ | $\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نها}}\ ٣س^{٢} - س = ٢٤$

ق متصل عندما س = ٣

$ق'_{+}(٣) = ٨$ | $ق'_{-}(٣) = ٦ \times ٣ - ١ = ١٧$

ق'(٣) غير موجودة

٢ اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^3-1}{\text{س}-1} & ، \text{س} \neq 1 \\ 3 & ، \text{س} = 1 \end{cases}$

ابحث قابلية الاشتقاق عندما س = ١

الحل $\text{ق} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^3-1}{\text{س}-1} & ، \text{س} > 1 \\ \dfrac{\text{س}^3-1}{\text{س}-1} & ، \text{س} < 1 \\ 3 & ، \text{س} = 1 \end{cases}$

$= \begin{cases} \dfrac{\cancel{(\text{س}-1)}(\text{س}^2+\text{س}+1)}{\cancel{\text{س}-1}} & ، \text{س} > 1 \\ \dfrac{(\text{س}^2+\text{س}+1)\cancel{(\text{س}-1)}}{\cancel{\text{س}-1}} & ، \text{س} < 1 \\ 3 & ، \text{س} = 1 \end{cases}$

$\text{ق} = \begin{cases} \text{س}^2+\text{س}+1 & ، \text{س} > 1 \\ \text{س}^2+\text{س}+1 & ، \text{س} < 1 \\ 3 & ، \text{س} = 1 \end{cases}$

$\text{ق}' = \begin{cases} 2\text{س}+1 & ، \text{س} > 1 \\ 2\text{س}+1 & ، \text{س} < 1 \end{cases}$

س = ١ ← تحول ← الاتصال

$\text{ق}(1) = 3$ | $\lim\limits_{\text{س} \to 1^+} \text{س}^2+\text{س}+1 = 3$ | $\lim\limits_{\text{س} \to 1^-} \text{س}^2+\text{س}+1 = 3$

ق متصل عندما س = ١

$\text{ق}'_+(1) = 3$ / $\text{ق}'_-(1) = 3 \Leftarrow$ ق قابل للاشتقاق عندما س = ١

---

٣ اذا كانت $\text{ق} = \begin{cases} \text{أ}\text{س}^2 + 5\text{س} & ، \text{س} \geq 2 \\ 3\text{س}^2 + \text{ب} & ، \text{س} < 2 \end{cases}$

قابل للاشتقاق عندما س = ٢ فما قيم أ ، ب

الحل ق متصل $\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to 2^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to 2^-} \text{ق}(\text{س})$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to 2^+} \text{أ}\text{س}^2 + 5\text{س} = \lim\limits_{\text{س} \to 2^-} 3\text{س}^2 + \text{ب}$

$4\text{أ} + 10 = 14 + \text{ب}$

$\boxed{\text{ب} - 4\text{أ} = -14}$ — ①

$\text{ق}' = \begin{cases} 2\text{أ}\text{س} + 5 & ، \text{س} > 2 \\ 6\text{س} & ، \text{س} < 2 \end{cases}$

$\text{ق}'_+(2) = \text{ق}'_-(2)$

$4\text{أ} + 5 = 36$

$\boxed{\text{أ} = \dfrac{31}{4}}$

نعوض في المعادلة ①

$\text{ب} - 4\text{أ} = -14$

$\text{ب} - \cancel{4} \times \dfrac{31}{\cancel{4}} = -14$

$\text{ب} = 17$

---

٤ اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} & ، \text{س} \leq 2 \\ \text{س}^3 & ، \text{س} > 2 \end{cases}$

فما قيم أ ، ب ، جـ اذا كانت $\text{ق}''(2)$ موجودة

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{أ}\text{س} + \text{ب} & ، \text{س} < 2 \\ 3\text{س}^2 & ، \text{س} > 2 \end{cases}$

$\text{ق}''(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{أ} & ، \text{س} < 2 \\ 6\text{س} & ، \text{س} > 2 \end{cases}$

$\text{ق}''_+(2) = \text{ق}''_-(2)$

$6 \times 2 = 2\text{أ} \longleftarrow \boxed{\text{أ} = 6}$

وكذلك $\text{ق}'_+(2) = \text{ق}'_-(2)$

$3(2)^2 = 2\underset{6}{\cancel{\text{أ}}} \times 2 + \text{ب} \longleftarrow \boxed{\text{ب} = -12}$

وكذلك ق متصل ← $\lim\limits_{\text{س} \to 2^+} \text{س}^3 = \lim\limits_{\text{س} \to 2^-} \text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{جـ}$

$8 = 6(2)^2 - 12(2) + \text{جـ}$

$\boxed{\text{جـ} = 8}$

ثانياً تحول والمطلوب المشتقة من جهة واحدة $\text{ق}'_+(\text{أ})$ $\text{ق}'_-(\text{أ})$

- متصل ↓ نشتق ونعوض مباشرة
- غير متصل ↓ نرجع لدرس استخدام تعريف المشتقة

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} + 1 & ، \text{س} \geq 1 \\ \text{س}^2 + 1 & ، \text{س} < 1 \end{cases}$

احسب $\text{ق}'_+(1)$ ، $\text{ق}'_-(1)$

الحل: الاتصال: $\text{ق}(1) = 3$ / $\lim\limits_{\text{س} \to 1^+} \text{ق} = 3$ / $\lim\limits_{\text{س} \to 1^-} \text{ق} = 2$

ق غير متصل عندما س = ١

$\Leftarrow$ نلجأ باستخدام تعريف المشتقة

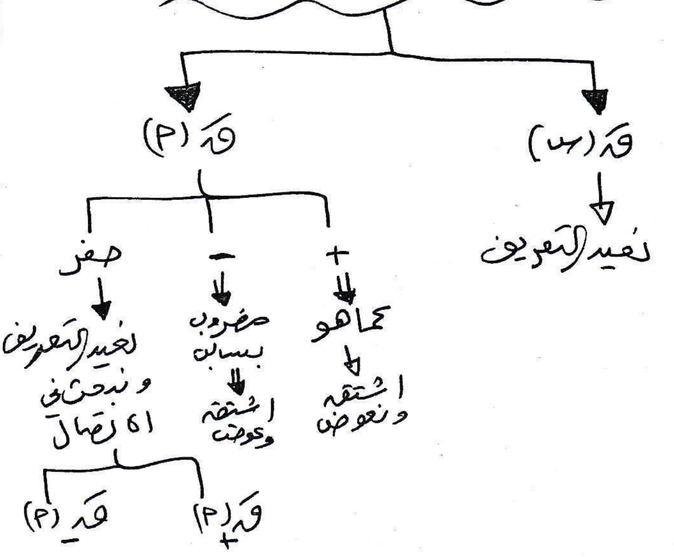
$\text{ق}'_+(1) = \lim\limits_{\text{ع} \to 1^+} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(1)}{\text{ع} - 1} = \lim \dfrac{2\text{ع} + 1 - 3}{\text{ع} - 1} =$

$= \lim\limits_{\text{ع} \to 1} \dfrac{2\cancel{(\text{ع} - 1)}}{\cancel{\text{ع} - 1}} = 2 \Leftarrow \boxed{\text{ق}'_+(1) = 2}$

$\text{ق}'_-(1) = \lim\limits_{\text{ع} \to 1^-} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(1)}{\text{ع} - 1}$ ، $\lim \dfrac{\text{ع}^2 + 1 - 3}{\text{ع} - 1}$

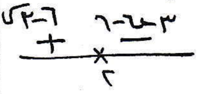
$= \lim\limits_{\text{ع} \to 1^-} \dfrac{\text{ع}^2 - 2}{\text{ع} - 1} = \dfrac{1 - 2}{1 - 1} = \dfrac{-1}{\text{صفر}} = \boxed{\text{غ.م}}$

مشتقة اقتران القيمة المطلقة



[١] اذا كان ق(س) = ٧س + |٦ − ٣س|
احسب قَ(٥) ، قَ(٠) ، قَ(٢)

الحل: ٦ − ٣س = صفر ⟵ س = ٢



ق = { ٤س + ٦ ، س < ٢
١٠س − ٦ ، س ≥ ٢

قَ = { ٤ ، س < ٢
١٠ ، س > ٢
غ.م ، س = ٢

قَ(٥) = ١٠ / قَ(٠) = ٤

س = ٢ ⟵ نحول ← الاتصال

ق(٢) = ٢٠ − ٦ = ١٤

نهــا ق = ١٤ (س ← ٢⁺)

نهــا ق = ١٤ (س ← ٢⁻)

ق متصل عندما س = ٢

قَ₊(٢) = ١٠ / قَ₋(٢) = ٤ ⟸ قَ(٢) = غ.م

[٢] اذا كان ق(س) = ٣س |٢س| إحسب
قَ(٠) ، ق″(٠) ، ق‴(٠)

الحل ٢س = صفر ⟵ س = صفر

ق = { −٦س^{٢} ، س < ٠
٦س^{٢} ، س ≥ ٠

قَ = { −١٢س ، س < صفر
١٢س ، س ≥ صفر
⟸ ق متصل عندما س = صفر
قَ₊(٠) = قَ₋(٠) = صفر

ق″ = { −١٢ ، س < ٠
١٢ ، س > ٠
⟸ قَ متصل عندما س = ٠
ق″₋(٠) ≠ ق″₊(٠)
ق″(٠) = غ.م

ق‴ = { صفر ، س < ٠
صفر ، س > ٠

⇓

ق‴(٠) = غ.م
لانه ق″ غير موجودة

[٣] ق = |س^{٣} − ٥س − ٢|
إحسب قَ(١) ، قَ(٣)

الحل: نعوض مباشرة س = ١ ⟸ سالب .

ق = −س^{٣} + ٥س + ٢

قَ = −٣س^{٢} + ٥ ⟵ قَ(١) = −٣ + ٥ = ٢

عندما س = ٣ ⟵ نعوض مباشرة ⟸ موجب

ق = س^{٣} − ٥س − ٢

قَ = ٣س^{٢} − ٥ ⟸ قَ(٣) = ٢٧ − ٥ = ٢٢

[٤] ق(س) = |س^{٢} − ٥| + |٣س − ٢|
احسب قَ(٢)

الحل عندما س = ٢ ⟸ |٤ − ٥| = سالب
عندما س = ٢ ⟸ |٣ × ٢ − ٢| = موجب

ق = −س^{٢} + ٥ + ٣س − ٢

قَ = −٢س + ٣ ⟵ قَ(٢) = −٤ + ٣ = −١

ملاحظة:

① اذا اعلم احد المشتقات موجودة عند النقطة فكل ما قبلها يكون موجوداً عند تلك النقطة.

② اذا كانت احدى المشتقات غير موجودة عند تلك النقطة فكل ما بعدها غير موجودة عند نفس النقطة.

مشتقة اكبر عدد صحيح

اذا كان اكبر عدد صحيح لوحده فإنه

$\frac{د}{دس}$ [ق] = { غير موجودة ، ق(س) ∉ ص
صفر ، ق(س) ∈ ص

[١] ق(س) = [٥ − $\frac{س}{٣}$] إحسب قَ(٢) ، قَ(٦)

الحل. قَ(٢) = صفر / قَ(٦) = غير موجودة

[٢] ق(س) = [٢س + ٠٫٤] إحسب قَ(٣) / قَ(١٫٣)

الحل قَ(٣) = صفر / قَ(١٫٣) = غير موجودة

[٣] ق(س) = [٢س + ٥] احسب قَ(س)

الحل ق = [٢س] + ٥

قَ = { صفر ، ٢س ∉ ص
غ.م ، ٢س ∈ ص

= { صفر ، س ∉ $\frac{ص}{٢}$
غ.م ، س ∈ $\frac{ص}{٢}$

[٤] ق = $\frac{٤}{س}$ + [$\frac{س}{٣}$] عند قَ(٢)

قَ = $\frac{-٤}{س^{٢}}$ + صفر = $\frac{-٤}{٤}$ = −١

⑤ ق(س) = $\frac{[\frac{س}{٢} + ٢]}{|٢س - ٣|}$ ، احسب قَ(٣)

الحل: |٢س − ٣| موجب عندما س = ٣

[$\frac{٣}{٣}$ + ٢] = ٣ عندما س = ٣

ق = $\frac{٣}{٢س - ٣}$ ⟸ قَ = $\frac{-٣ \times ٢}{(٢س - ٣)^{٢}}$ = قَ(٣) = $\frac{-٦}{٩}$

---

⑥ ق = [س] − |س| ، احسب قَ(−٢,٥)

الحل: [س] = −٣ عندما س = −٢,٥

|س| = سالب عندما س = −٢,٥

ق = −٣ − (−س) = −٣ + س

قَ(س) = ١ ⟸ قَ(−٢,٥) = ١

---

⑦ ق = [٢س + ٢] − [٢س − ٣] ، احسب قَ(س)

الحل: ق = ~~[٢س]~~ + ٢ − ~~[٢س]~~ + ٣

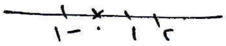
ق = ٥ ⟸ قَ(س) = صفر

---

⑧ ق(س) = $س^{٣}$. [س] ، احسب قَ(٠) ، قَ(١)

الحل: نعيد التعريف.

[س] ⟵ ل = ١ ، ص = ٠



ق = $س^{٣}$ × { −١ ، −١ ≤ س < ٠
٠ ، ٠ ≤ س < ١
١ ، ١ ≤ س < ٢ }

ق = { −$س^{٣}$ ، −١ ≤ س < صفر
صفر ، ٠ ≤ س < ١
$س^{٣}$ ، ١ ≤ س < ٢ }

قَ = { −٣$س^{٢}$ ، −١ < س < ٠
صفر ، ٠ < س < ١
٣$س^{٢}$ ، ١ < س < ٢ }

ق متصل عندما س = صفر / قَ₊(٠) = ٠ / قَ₋(٠) = ٠
قَ(٠) = صفر = موجودة

ق غير متصل عندما س = ١
⟵ قَ(١) = غير موجودة.

---

⑨ ق(س) = $\frac{[٣س + ٠,٣]}{|س^{٢} - ١|}$ ، احسب قَ(٢)
الجواب $(\frac{-٢٤}{٩})$

⑩ ق(س) = [س − ٢] ، احسب قَ(٥)
الجواب = غير قابل

⑪ ق(س) = $\frac{[س] + ٢}{جاس + ٢}$ ، احسب قَ(١)
الجواب = غير قابل للاشتقاق.

⑫ ق(س) = $\frac{[٠,٥ س]}{هـ(س)}$ ، هـ(٣) = ٣ ، هَ(٣) = −٣
احسب قَ(٣) الجواب = $\boxed{\frac{٤}{٩}}$

الحالات التي يكون ق(س) غير قابل للاشتقاق عندها.

① نقاط عدم الاتصال

② عندما قَ₊ ≠ قَ₋

③ المقام = صفر

④ أطراف المجال المغلقة

⑤ في [ ] عندما ق ∈ ص

⑥ الرسم: الأطراف / الرؤوس المدببة
نقاط الانقطاع والفجوات..

٨ اذا كان ق(س) = [س - ٢]
بين فيما اذا كان ق قابل للاشتقاق عندما س = ٥

الحل: [س - ٢] ⇐ ل = ١ ،

[س - ٢] = {
٢ ، ٤ ≤ س < ٥
٣ ، ٥ ≤ س < ٦

الاتصال: -
ق(٥) = ٣ ، نهـا ق(س) = ٣ (س ← ٥⁺)
نهـا ق(س) = ٢ (س ← ٥⁻) ⇐ غير متصل عندما س = ٥

⇐ غير قابل للاشتقاق عندما س = ٥

---

٩ اذا كان ق(س) = |س - ٣|
ابحث في قابلية الاشتقاق عندما س = ٣

الحل:
نعيد التعريف |س - ٣|
⇐ س - ٣ = ٠ ⇐ س = ٣   — ٣ +

ق(س) = {
س - ٣ ، س ≥ ٣
-(س - ٣) ، س < ٣

الاتصال: ق(٣) = ٠ ، نهـا ق(س) = ٠ (س ← ٣⁺)
نهـا ق(س) = ٠ (س ← ٣⁻) ⇐ ق متصل عندما س = ٣

قَ(س) = {
١ ، س > ٣
-١ ، س < ٣

قَ₊(٣) = ١ ، قَ₋(٣) = -١

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عندما س = ٣ لأن ....

---

١٠ ابحث قابلية ق(س) = ([س] + ٢) / (س + ٢) للاشتقاق عندما س = ١ .

الحل:

نعيد تعريف [س] = {
٠ ، ٠ ≤ س < ١
١ ، ١ ≤ س < ٢

⇐ ق(س) = {
٢ / (س + ٢) ، ٠ ≤ س < ١
٣ / (س + ٢) ، ١ ≤ س < ٢

الاتصال: -
ق(١) = ٣/٣ = ١ ، نهـا ق(س) = ١ (س ← ١⁺)
نهـا ق(س) = ٢/٣ (س ← ١⁻) ⇐ ق غير متصل عندما س = ١ لانه ....

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عندما س = ١

---

١١ اذا كان ق(س) = {
|٢س - ٥| ، ٠ ≤ س ≤ ٣
س[٢/٣ س] ، ٣ ≤ س ≤ ٤

اوجد قَ(س) على [٠ ، ٤]

الحل: |٢س - ٥| ⇐ س = ٢،٥   + ٢،٥ —

[٢/٣ س] = { ٢ ، ٣ ≤ س ≤ ٤

⇐ ق(س) = {
٥ - ٢س ، ٠ ≤ س < ٢،٥
٢س - ٥ ، ٢،٥ ≤ س < ٣
٢س ، ٣ ≤ س ≤ ٤

الاتصال:
① فترات مفتوحة ....
② التحول: عندما س = ٢،٥ متصل
عندما س = ٣ غير متصل
③ الاطراف ⇐ مغلقة ⇐ متصل عنده
④ النتيجة
⇐ ق(س) متصل على [٠ ، ٤] - {٣}

قَ(س) = { −٢ ، ٠ < س < ٢,٥
٢ ، ٢,٥ < س < ٣
٢ ، ٣ < س < ٤
غ.م ، س = ٠ ، ٤ ، ٣ ، ٢,٥

قَ$_{+}$(٢,٥) = ٢ ، قَ$_{-}$(٢,٥) = −٢

⇐ قَ(٢,٥) غير موجودة .

---

١٢ اذا كانت ه(س) = $\frac{[٠,٥ س]}{و(س)}$

اذا علمت أن و(٣) = ٣ ، وَ(٣) = −٢

اوجد قَ(٣) .

<u>الحل</u> :

[٠,٥ س] = ١ ، عندما س = ٣

ه(س) = $\frac{١}{و(س)}$ عندما س = ٣

هَ(س) = $\frac{-وَ(س)}{(و(س))^{2}}$ ⇐ قَ(٣) = $\frac{٢}{٩}$

---

١٣ اذا كانت ه(س) = { |٨ س − ٦| ، ٢ ≤ س < ٣
س[٢ س] ، ٣ ≤ س < ٤

اوجد قَ(س) للاقتران في [٢ ، ٤) .

<u>الحل</u> :

ه(س) = { ٨ س − ٦ ، ٢ ≤ س < ٣
٦ س ، ٣ ≤ س < ٣,٥
٧ س ، ٣,٥ ≤ س < ٤

<u>الاتصال</u> : ...

ه(س) غير متصل عند س = ٣,٥

⇐ ه(س) متصل على [٢ ، ٤) − {٣,٥}

⇐ قَ(س) = { ٨ ، ٢ < س < ٣
٦ ، ٣ < س < ٣,٥
٧ ، ٣,٥ < س < ٤
غ.م ، ٢ ، ٣,٥ ، ٣

قَ$_{-}$(٣) = ٨ ، قَ$_{+}$(٣) = ٦

⇐ قَ$_{+}$(٣) ≠ قَ$_{-}$(٣) ⇐ قَ(٣) غير موجودة

---

١٤ اذا كانت ه(س) = { $\frac{١}{س - ١}$ ، س ≥ ٢
م + ب س^{2} ، س < ٢

قابلة للاشتقاق عندما س = ٢ اوجد قيمة الثابتين م ، ب .

<u>الحل</u> :

بما أن ه(س) قابل للاشتقاق عندما س = ٢

⇐ قَ$_{+}$(٢) = قَ$_{-}$(٢)

قَ(س) = { $\frac{-١}{(س - ١)^{2}}$ ، س > ٢
٢ ب س ، س < ٢

−١ = ٤ ب ⇐ ب = $\frac{١}{٤}$

* ه(س) متصل عندما س = ٢

⇐ $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ه(س) = $\lim_{س \to ٢^{-}}$ ه(س)

⇐ ١ = م + $\frac{١}{٤}$ × ٤ ⇐ م = ٢

---

١٥ اذا كانت ه(س) = { س^{3} − ٣ س ، ٠ ≤ س ≤ ١
م س^{2} + ب س ، ١ ≤ س ≤ ٢

قابلة للاشتقاق على (٠ ، ٢) فجد قيم م ، ب

<u>الحل</u> :

بما أن ه(س) قابل للاشتقاق على (٠ ، ٢)

⇐ قَ(س) قابل للاشتقاق عندما س = ١

⇐ قَ$_{+}$(١) = قَ$_{-}$(١)

$\Leftarrow ق'(س) = \begin{cases} 3س^2-3 & ، \ 0<س<1 \\ 2أس+ب & ، \ 1<س<2 \end{cases}$

$ق'_+(1) = ق'_-(1) \Leftarrow 2أ+ب = \text{صفر}$ ـ ①

* ق(س) متصل عندما س = ١

$\Leftarrow \lim\limits_{س\to1^+} ق(س) = \lim\limits_{س\to1^-} ق(س)$

$\Leftarrow أ+ب = -2$ ـ ②

$2أ+ب = 0$ ـ ①

$-أ-ب = 2$ ـ ②

$\Leftarrow أ = 2 \Leftarrow 2+ب = -2$

$\Leftarrow ب = -4$

---

١٦ ٢٠٠٢

اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} أس^2+5س & ، \ س>2 \\ 3س^3+ب & ، \ س<2 \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عندما س = ٢ اوجد قيم أ ، ب .

__الحل :__

*الاتصال عندما س = ٢ ⇐

$\lim\limits_{س\to2^-} ق(س) = \lim\limits_{س\to2^+} ق(س) = ق(2)$

$\Leftarrow 3\times2^3+ب = أ\times2^2+5\times2$

$24+ب = 4أ+10$

$\Leftarrow ب-4أ = -14$ ـ ①

** من شروط الاشتقاق عند س = ٢

$ق'_-(2) = ق'_+(2)$

$ق'(س) = \begin{cases} 2أس+5 & ، \ س>2 \\ 9س^2 & ، \ س<2 \end{cases}$

$\Leftarrow 4أ+5 = 36 \Leftarrow 4أ = 31$

$\Leftarrow \boxed{أ = \frac{31}{4}}$ ـ ②

عوضا ② في ① $\Leftarrow ب-4\times\frac{31}{4} = -14$

$\Leftarrow ب-31 = -14 \Leftarrow \boxed{ب = 17}$

---

١٧ ٢٠٠٢

اذا كانت $ق(س) = \frac{1}{3+أس}$ ، $س \neq \frac{-3}{أ}$

وكانت $ق'(1) = 2$ ، اوجد قيم الثابت أ .

__الحل :__

$ق(س) = \frac{1}{3+أس} \leftarrow ق'(س) = \frac{-أ}{(3+أس)^2}$

$\leftarrow ق'(1) = 2 \Leftarrow 2 = \frac{-أ}{(3+أ)^2}$

$\Leftarrow 2(3+أ)^2 = -أ$

$2(9+6أ+أ^2) = -أ$

$18+12أ+2أ^2 = -أ$

$2أ^2+13أ+18 = 0$

$(2أ+9)(أ+2) = 0$

⇐ __إما__ $أ = -2$ ، __أو__ $أ = \frac{9}{-2}$

---

١٨ ٢٠٠٠

اذا كانت $ق(1) = -3$ ، $ق'(1) = 2$

فجد $(\sqrt{س}\cdot ق(س))'(1)$.

__الحل :__

$(\sqrt{س}\cdot ق(س))'(س) = \frac{1}{2\sqrt{س}} ق(س) + ق'(س)\sqrt{س}$

$\leftarrow (\sqrt{س}\cdot ق(س))'(1) = \frac{1}{2} ق(1) + ق'(1)\times\sqrt{1}$

$= \frac{1}{2}\times(-3) + (2)\times1$

$= \frac{-3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$.

٢٠٠١

١٩ اذا كانت ق(س) = $\frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$ حيث هـ(س) ≠ صفر، وكانت كلاً من ك(س)، هـ(س) قابلاً للاشتقاق عندما س = م، ق'(م) = صفر اثبت أن ق(م) = $\frac{\text{ك}'(\text{م})}{\text{هـ}'(\text{م})}$.

<u>الحل</u>:

ق(س) = $\frac{\text{ك}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$

ق'(س) = $\frac{\text{ك}'(\text{س})\,\text{هـ}(\text{س}) - \text{هـ}'(\text{س})\,\text{ك}(\text{س})}{\text{هـ}^2(\text{س})}$

ق'(م) = $\frac{\text{ك}'(\text{م})\,\text{هـ}(\text{م}) - \text{هـ}'(\text{م})\,\text{ك}(\text{م})}{\text{هـ}^2(\text{م})}$ = صفر

هـ(م) ك'(م) − هـ'(م) ك(م) = صفر

هـ(م) ك'(م) = ك(م) هـ'(م).

بقسمة الطرفين على هـ'(م) ثم على هـ(م)

$\frac{\text{ك}'(\text{م})}{\text{هـ}'(\text{م})}$ = $\frac{\text{ك}(\text{م})}{\text{هـ}(\text{م})}$

لكن ق(م) = $\frac{\text{ك}(\text{م})}{\text{هـ}(\text{م})}$

⇐ $\frac{\text{ك}'(\text{م})}{\text{هـ}'(\text{م})}$ = ق(م)

---

٢٠ اذا كانت ق(س) = ٢س³ − س² + ٦ حيث س ∈]٠، ٢[أوجد جميع قيم س التي تجعل ق'(س) = صفر

<u>الحل</u>:

ق'(س) = ٦س² − ٢س = ٠

س(٦س − ٢) = ٠

⇐ س = ٠ ∉ (٠، ٢)

لاحظ ان س = ٠ طرفه المشتقة غير موجودة.

أو ٦س − ٢ = ٠ ⇐ ٦س = ٢

⇐ س = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$ ∈ (٠، ٢)

---

٢١ اذا كانت ق(س) = س³ − ٤س، س ∈]٠، ٤[، اوجد جميع قيم س التي تجعل ق'(س) = صفر

<u>الحل</u>:

ق'(س) = س² − ٤ = ٠

⇐ س² = ٤ ⇐ س = ± ٢

عندما س = −٢ ∉ (٠، ٤).

عندما س = ٢ ∈ (٠، ٤).

---

٢٢ اذا كانت ص = س³ + س² − س − ١ اوجد جميع النقط على المنحنى بحيث أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = صفر

<u>الحل</u>:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س² + ٢س − ١

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠ ⇐ ٣س² + ٢س − ١ = ٠

⇐ (٣س − ١)(س + ١) = ٠

* عندما س = $\frac{١}{٣}$ ⇐

ص = $(\frac{١}{٣})^3 + (\frac{١}{٣})^2 - \frac{١}{٣} - ١ = \frac{-٣٢}{٢٧}$

* عندما س = −١ ⇐

ص = ٣ × ١ − ٢ − ١ = ٠

⇐ النقاط هي

($\frac{١}{٣}$، $\frac{-٣٢}{٢٧}$)، (−١، ٠)

$\boxed{٢}$ $ق(س) = \begin{cases} س^{٣} - ٤ ، & س \geq ٢ \\ ٣س^{٢} ، & س < ٢ \end{cases}$

اوجد $قَ(٢)$.

الحل :-

الاتصال:

$ق(٢) = ٤ ، \lim_{س \to ٢^{+}} ق(س) = ٤ ، \lim_{س \to ٢^{-}} ق(س) = ١٢$

$\Leftarrow$ ق(س) غير متصل عندما س = ٢

لأنه $ق(٢) \neq \lim_{س \to ٢^{+}} ق(س) \neq \lim_{س \to ٢^{-}} ق(س)$

$\Leftarrow$ قَ(٢) غير موجودة

$\Leftarrow$ قَ(٢) غير موجودة .

$\boxed{٣}$ اذا كانت $ق(س) = (٣س^{٢} + ٢)(س^{٣} - ٢س + ١)$

اثبت أنه $قَ(١) \times ق''(١) = ٢١٠$

الحل :

$قَ(س) = (٦س)(س^{٣} - ٢س + ١)$

$+ (٣س^{٢} + ٢)(٣س^{٢} - ٢)$

$\Leftarrow قَ(١) = (١ - ٢ + ١) \times ٦ + (٣ + ٢)(٣ - ٢)$

$= ٥ \times ١ = ٥$

$ق''(س) = (٦س)(٣س^{٢} - ٢) + (٣س^{٢} + ٢)(٦س)$

$+ (س^{٣} - ٢س + ١) \times ٦ + ٦س(٣س^{٢} - ٢)$

$ق''(١) = (٦)(٣ + ٢) + (٦)(٣ - ٢)$

$+ (٦)(١ - ٢ + ١) + ٦(٣ - ٢)$

$= ٣٠ + ٦ + ٠ + ٦ = ٤٢$

$\Leftarrow قَ(١) \times ق''(١) = ٥ \times ٤٢$

$= ٢١٠$

$\boxed{٤}$ اذا كانت $ق(س) = \frac{٢}{س}$:

اثبت أنه $\frac{قَ(١)}{ق''(٢)} = -٤$.

الحل :

$قَ(س) = \frac{-٢}{س^{٢}} \Leftarrow قَ(١) = \frac{-٢}{١} = -٢$

$ق''(س) = \frac{٢ \times ٢س}{س^{٤}} = \frac{٤س}{س^{٤}} = \frac{٤}{س^{٣}}$

$\Leftarrow ق''(٢) = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

إذاً $\frac{قَ(١)}{ق''(٢)} = \frac{-٢}{\frac{١}{٢}} = -٤$

$\boxed{٥}$: اذا كانت $ص = \frac{١}{٣}م^{٣} + \frac{١}{٢}م^{٢} - ١$

اثبت أن:

$٦ص - ٢م صَ + ٣ص''' = \left(\frac{ص'' - ١}{ص'''}\right)^{٢}$

الحل :-

$صَ = م^{٢} + م ، ص'' = ٢م + ١ ، ص''' = ٢$

$٦ص - ٢م صَ + ٣ص''' =$

$٦(\frac{١}{٣}م^{٣} + \frac{١}{٢}م^{٢} - ١) - ٢م(م^{٢} + م) + ٣(٢)$

$= ٢م^{٣} + ٣م^{٢} - ٦ - ٢م^{٣} - ٢م^{٢} + ٦ = م^{٢}$

$\left(\frac{ص'' - ١}{ص'''}\right)^{٢} = \left(\frac{٢م + ١ - ١}{٢}\right)^{٢} = (م)^{٢} = م^{٢}$

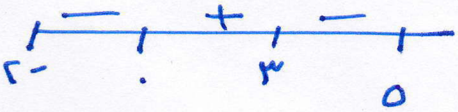
إذاً $٦ص - ٢م صَ + ٣ص''' = \left(\frac{ص'' - ١}{ص'''}\right)^{٢}$

$\boxed{١}$ إذا كانت ق(س) = |٣س − س٢| لكل س ∈ [−٢، ٥] احسب ق̀(س)

الحل: نضع التعريف |٣س − س٢|

٣س − س٢ = ٠

س(٣ − س) = ٠ ⟸ س = ٠، ٣



ق = { س٢ − ٣س ، −٢ ≤ س < ٠
٣س − س٢ ، ٠ < س < ٣
س٢ − ٣س ، ٣ < س ≤ ٥

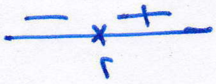
ق̀ = { ٢س − ٣ ، −٢ < س < ٠
٣ − ٢س ، ٠ < س < ٣
٢س − ٣ ، ٣ < س < ٥
غ.م ، س = −٢، ٠، ٣، ٥

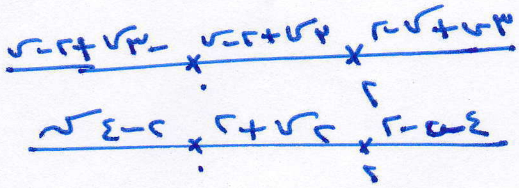
−٢، ٥: أطراف / ق̀₊(٣) ≠ ق̀₋(٣) / ق̀₊(٠) ≠ ق̀₋(٠)

$\boxed{٢}$ ق(س) = |٣س| + |س − ٢| ، احسب ق̀(س)

الحل: |٣س| ⟸ ٣س = ٠ ⟸ س = ٠

|س − ٢| ⟸ س − ٢ = ٠ ⟸ س = ٢





ق̀ = { −٤ ، س < ٠
٢ ، ٠ < س < ٢
٤ ، س > ٢
غ.م ، س = ٠، ٢

السبب: ق̀₊(٠) ≠ ق̀₋(٠)
ق̀₊(٢) ≠ ق̀₋(٢)

$\boxed{٣}$ ق = { س٢ − ٢س + ٢ ، −٢ ≤ س < ١
[س] ، ١ ≤ س < ٣
|٥ − س| ، ٣ ≤ س ≤ ٧

احسب ق̀(س) واحسب قيم س التي يكون ق̀(س) عندها غير موجودة مع ذكر السبب.

واجب

مشتقة الاقترانات الدائرية.

الاقتران	مشتقة
جاس	جتاس
جتاس	−جاس
ظاس	قا٢س
ظتاس	−قتا٢س
قاس	قاس ظاس
قتاس	−قتاس ظتاس

ملاحظة: عند الاشتقاق نضرب في مشتقة الزاوية.

سؤال: احسب مشتقة كلاً مما يلي

① ص = جا٩س + ظتا٨س

② ق = ظا٢πس + ظتا $\frac{\pi}{س}$

③ ص = س٥ ظا٤س

④ ص = س٣ قا $\frac{١}{س}$

$\boxed{٥}$ ص = $\frac{جاس}{٢ + جتاس}$

$\boxed{٦}$ ص = ٥س٢ جتا٢س احسب المشتقة الثانية.

الحل: — "في الصفحة المقابلة" مع الأستاذ.

سؤال: إذا كانت ص = أجاس + ب جتاس
اثبت أن (ص̀)٢ + ص٢ = أ٢ + ب٢