الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

الاقتران الأسي

$ص = هـ^{أس+ب} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = هـ^{أس+ب} \times أ$

مثال: $ص = هـ^{٢س+٩} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢هـ^{٢س+٩}$

بشكل عام: $ص = هـ^{ق(س)} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ق'(س) هـ^{ق(س)}$

① $ص = س^٢ + هـ^{٤س}$

$\frac{دص}{دس} = ٢س + ٤هـ^{٤س}$

② $ص = هـ^{س^٣} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٣س^٢ هـ^{س^٣}$

③ $ص = هـ^{قاس} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = قاس ظاس هـ^{قاس}$

④ $س هـ^{ص} + جاس = ص^٢$

$س هـ^{ص} ص' + هـ^{ص} \times ١ + جتاس = ٢ص ص'$

$هـ^{ص} + جتاس = ٢ص \frac{دص}{دس} - س هـ^{ص} \frac{دص}{دس}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{ص} + جتاس}{٢ص - س هـ^{ص}}$

⑤ $ص = \sqrt{هـ^{٤س^٢}} = (هـ^{٤س^٢})^{\frac{١}{٢}} = هـ^{\frac{٤س^٢}{٢}} = هـ^{٢س^٢}$

$ص' = ٤س هـ^{٢س^٢}$

قاعدة: $(هـ^{٣س^٣})^{\frac{١}{٥}} = هـ^{\frac{٣س^٣}{٥}}$

$(هـ^{س^٥})^٢ = هـ^{٢س^٥}$ وهكذا

⑥ $ص = هـ^{لوس^٢ + جا^٢س}$

$ص = س^٢ + جا^٢س \Leftarrow ص' = ٢س + ٢جاس جتاس$

⑦ $ص = جا هـ^{س^٢}$

$ص' = ٢س هـ^{س^٢} جتا هـ^{س^٢}$

⑧ $ص = أ هـ^{بس}$ وكانت $ص'' = ص$ فما قيم أ، ب

الحل: $ص' = أب هـ^{بس}$

$ص'' = أب^٢ هـ^{بس} =$

لكن $ص'' = ص$

$أب^٢ هـ^{بس} = أ هـ^{بس} \Leftarrow أب^٢ = أ$

$ب^٢ = ١$

$\boxed{ب = ١ ، -١}$

$\Leftarrow$ أ تنتمي للاعداد الحقيقية ماعدا الصفر

$أ \in ح - \{٠\}$

⑨ $ص = هـ^{أس}$ ، وكانت $ص'' - ٣ص' + ٢ص = ٠$ فما قيمة أ

$ص' = أ هـ^{أس}$ / $ص'' = أ^٢ هـ^{أس}$

$\Leftarrow ص'' - ٣ص' + ٢ص = ٠$

$أ^٢ هـ^{أس} - ٣أ هـ^{أس} + ٢هـ^{أس} = صفر$

$هـ^{أس}(أ^٢ - ٣أ + ٢) = ٠$

$هـ^{أس}(أ - ٢)(أ - ١) = صفر \Leftarrow أ = ٢ ، ١$

⑩ $هـ^{ص} = جاس$ اثبت انه $ص'' + (ص')^٢ + ١ = صفر$

⑪ اذا كانت $ق(س) = هـ^{٢س} لوس$

وكان $ق(س) = هـ^{٢س}(\frac{١}{س} + ٢لوس)$ اثبت انه

ق(س) هو بدائي لـ ق(س) ثم احسب $\int_{١}^{٢} ق(س) دس$

الحل: $ق' = هـ^{٢س} \times \frac{١}{س} + لوس \times ٢هـ^{٢س}$

$= هـ^{٢س}(\frac{١}{س} + ٢لوس) = ق(س)$

$\Leftarrow$ ق(س) هو بدائي لـ ق(س).

$\int_{١}^{٢} ق(س) دس = ق(٢) - ق(١) = هـ^{٤} لو٢ - هـ^{٢} لو١$

قاعدة: $\int هـ^{أس+ب} دس = \frac{هـ^{أس+ب}}{أ} + جـ$

① $\int هـ^{٥س+١} دس = \frac{هـ^{٥س+١}}{٥} + جـ$

② $\int \sqrt{هـ^{٤س}} دس = \int (هـ^{٤س})^{\frac{١}{٢}} دس = \int هـ^{٢س} دس$

$= \frac{هـ^{٢س}}{٢} + جـ$

③ $\int_{-١}^{٠} هـ^{-٢} دس = هـ^{-٢}(٠ - -١) = هـ^{-٢}$ / $هـ^{-٢}$: ثابت

قاعدة: $\int أ^{بس+د} دس = \frac{أ^{بس+د}}{ب \times لو أ} + جـ$

① $\int ٣^{٢س+٥} دس = \frac{٣^{٢س+٥}}{٢ \times لو٣} + جـ$

تمارين:

① $\int ٩هـ^{٢س+١} دس$ ② $\int هـ^{س}(هـ^{س} + ١) دس$

③ $\int \sqrt[٣]{هـ^{٦س}} دس$ ④ $\int ٩هـ^{٤ - \frac{١}{٢}س} دس$

⑤ $\int هـ^{٥س} + \frac{١}{\sqrt{هـ^{٢س+٤}}} دس$ ⑥ $\int \frac{٥ + ٢هـ^{٧س}}{هـ^{٤س}} دس$

⑦ $\int هـ^{٣س} \sqrt{هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} + ١} دس$

⑧ $\int_{٠}^{لو٢} هـ^{س}(٣ - ٤هـ^{س}) دس$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١ $\int (\text{س}^2+4)\left(\text{هـ}^{\text{س}^3+12\text{س}}\right)\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^3+12\text{س} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2+12}$

$\int (\cancel{\text{س}^2+4})\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{\cancel{3\text{س}^2+12}} = \int \frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= \int \frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = \frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{س}^3+12\text{س}} + \text{جـ}$

٢ $\int \text{جا}2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

٣ $\int \text{جا}2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{جاس}}\,\text{دس}$

٤ $\int \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$ واجب

٥ $\int \text{هـ}^{\sqrt[3]{\text{س}}}\,\text{دس}$

٦ $\int \text{قا}^2\text{س}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}}\,\text{دس}$

٧ $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}+2\text{هـ}^{\text{س}}+1}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}}+1)(\text{هـ}^{\text{س}}+1)}\,\text{دس} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}}+1)^2}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}+1 \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{ص}^2} \times \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} = \int \text{ص}^{-2}\,\text{دص} = \frac{\text{ص}^{-1}}{-1} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{هـ}^{\text{س}}+1)^{-1}}{-1} + \text{جـ}$

٨ $\int \text{س}^5\,\text{هـ}^{\text{س}^3+9}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^3+9 \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

$\int \text{س}^5\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{3\text{س}^2} = \frac{1}{3}\int \text{س}^3\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\frac{1}{3}\int \underbrace{(\text{ص}-9)}_{\text{ق}}\,\underbrace{\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}}_{\text{دهـ}} \leftarrow$ اجزاء

$\text{ق} = \text{ص}-9 \leftarrow \text{دق} = 1\,\text{دص}$

$\text{دهـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} \leftarrow \text{هـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$\frac{1}{3}\left((\text{ص}-9)(\text{هـ}^{\text{ص}}) - \int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}\right)$

$\frac{1}{3}\left((\text{ص}-9)(\text{هـ}^{\text{ص}}) - (\text{هـ}^{\text{ص}}+\text{جـ})\right)$

$\frac{1}{3}\left((\text{س}^3+9-9)(\text{هـ}^{\text{س}^3+9}) - (\text{هـ}^{\text{س}^3+9})\right) + \text{جـ}$

٩ $\int \text{س}^5\,\text{هـ}^{\text{س}^2}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2 \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$\int \text{س}^5\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{2\text{س}} = \frac{1}{2}\int \text{س}^4\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\frac{1}{2}\int \underbrace{\text{ص}^2}_{\text{ق}}\,\frac{\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}}{\text{دهـ}}$ اجزاء مرتين

$\text{ق} = \text{ص}^2 \leftarrow \text{دق} = 2\text{ص}\,\text{دص}$

$\text{دهـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} \leftarrow \text{هـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$\text{ص}^2\,\text{هـ}^{\text{ص}} - \int \underbrace{2\text{ص}}_{\text{ق}}\,\frac{\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}}{\text{دهـ}}$

$\text{ق} = 2\text{ص} \leftarrow \text{دق} = 2\,\text{دص}$

$\text{دهـ} = \text{هـ}^{\text{ص}} \leftarrow \text{هـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$= 2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - \int 2\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= 2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - 2\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{ص}^2\,\text{هـ}^{\text{ص}} - 2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + 2\,\text{هـ}^{\text{ص}}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{س}^4\,\text{هـ}^{\text{س}^2} - 2\text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}^2} + 2\,\text{هـ}^{\text{س}^2}\right) + \text{جـ}$

١٠ $\int \text{هـ}^{2\text{س}}\,\text{ظتا}^2\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$\int \text{هـ}^{2\text{س}}\,\text{ظتا}^2\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} = \int \text{ص}\,\text{ظتا}^2\text{ص}\,\text{دص}$

$= \int \text{ص}(\text{قتا}^2\text{ص}-1)\,\text{دص} = \int \underbrace{\text{ص}\,\text{قتا}^2\text{ص}}_{\text{اجزاء}} - \text{ص}\,\text{دص}$ ← مباشر

$= -\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ظتا}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{لو}|\text{جا}\,\text{هـ}^{\text{س}}| - \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{2} + \text{جـ}$

١١ $\int \frac{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+1)^2}\,\text{دس}$

$= \int \underbrace{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}_{\text{ق}}\,\frac{(\text{س}+1)^{-2}\,\text{دس}}{\text{دهـ}}$

$\text{ق} = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \text{دق} = (\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = (\text{س}+1)^{-2}\,\text{دس} \leftarrow \text{هـ} = \frac{(\text{س}+1)^{-1}}{-1}$

$\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\frac{(\text{س}+1)^{-1}}{-1} - \int \frac{(\text{س}+1)^{-1}}{-1} \times (\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{دس}$

$= \frac{-\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \int \frac{1}{\cancel{\text{س}+1}} \times \text{هـ}^{\text{س}}\,\cancel{(\text{س}+1)}\,\text{دس}$

$= \frac{-\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١٢) $\int e^{x}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\int e^{x}\ln x+\int e^{x}\times\frac{1}{x}dx$ (أجزاء)

$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$

$dv=e^{x}\Rightarrow v=e^{x}$

$=e^{x}\ln x-\int e^{x}\times\frac{1}{x}dx+\int e^{x}\times\frac{1}{x}$

$=e^{x}\ln x+c$

١٣) $\int e^{x^3+\ln x^4}dx$

$=\int e^{x^3}\times e^{\ln x^4}dx$

$=\int e^{x^3}\times x^4dx=\int x^4e^{x^3}dx$

$u=x^3\Rightarrow dx=\frac{du}{3x^2}$

$\int x^4e^{u}\frac{du}{3x^2}=\frac{1}{3}\int e^{u}du$

$=\frac{1}{3}e^{u}+c=\frac{1}{3}e^{x^3}+c$

١٤) $\int x^{e^x+\ln x}dx$ واجب

الاجزاء الدوري

١) $\int e^{x}\sin x\,dx$

$u=e^{x}\Rightarrow du=e^{x}dx$

$dv=\sin x\,dx\Rightarrow v=-\cos x$

$-e^{x}\cos x+\int e^{x}\cos x\,dx$

(اجزاء مرة اخرى)

$u=e^{x}\Rightarrow du=e^{x}dx$

$dv=\cos x\,dx\Rightarrow v=\sin x$

$\int e^{x}\sin x\,dx=-e^{x}\cos x+e^{x}\sin x-\int e^{x}\sin x\,dx$

$2\int e^{x}\sin x\,dx=e^{x}\sin x-e^{x}\cos x+c$

$\int e^{x}\sin x\,dx=\frac{e^{x}\sin x-e^{x}\cos x}{2}+c$

← السؤال

$\int e^{x}\sin x\,dx=e^{x}\sin x+e^{x}\cos x-\int e^{x}\sin x\,dx$

$\int e^{x}\sin x\,dx=e^{x}\sin x-(-e^{x}\cos x+\int e^{x}\sin x\,dx)$

١) $\int e^{x}\sin x\,dx$ واجب

٢) $\int e^{x}\cos x\,dx$ واجب

٣) $\int \sin(\ln x)\,dx$ واجب

٤) $\int_{0}^{\pi}\sin x\cos x\,dx$ واجب

٥) $\int e^{x}\cos x\,dx$

$u=e^{x}\Rightarrow du=e^{x}dx$

$dv=\cos x\,dx\Rightarrow v=\sin x$

$\int e^{x}\cos x\,dx$ اجزاء.

$=-e^{x}\cos x+\int e^{x}\sin x\,dx+c$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

اقتران اللوغاريتم الطبيعي

* خواص اللوغاريتم :-

① $\text{لو}_{\text{هـ}} ١ = \text{صفر}$ ② $\text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ} = ١$ ③ $\text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ}^{\text{ن}} = \text{ن}$

④ $\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ ⑤ $\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص}$

⑥ $\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص}$

قاعدة :-

اذا كانت $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ل(س)}$ فإن

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ل}'(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})} = \frac{\text{مشتقة ما داخل اللوغاريتم}}{\text{الداخل نفسه بدون لو}}$$

سؤال: احسب مشتقة كلاً مما يلي :-

① $\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{٣} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}}$

② $\text{ق(س)} = \text{لو جتا س} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

③ $\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١}{\text{س}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{\frac{-١}{\text{س}^{٢}}}{\frac{١}{\text{س}}}$

④ $\text{ق(س)} = \underset{①}{\text{س}}\ \underset{②}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لو س} \times ١ = ١ + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

⑤ $\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}^{٢}+١}{\text{س}^{٢}}$

$\text{ق(س)} = \text{لو س}^{٢}+١ - \text{لو س}^{٢}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١} - \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

⑥ $\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{٤} = ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٤ \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{٤}{\text{س}}$

⑦ $\text{ص} = \text{لو جا}^{٢} ٣\text{س} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}} \text{جا ٣س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ \times \frac{٣\text{جتا ٣س}}{\text{جا ٣س}} = ٦\,\text{ظتا ٣س}$

⑧ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{(٣\text{س}-٧)^{٢}}{(\text{س}+٥)^{٥}}$

$= \text{لو}(٣\text{س}-٧)^{٢} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٥)^{٥}$

$= ٢\,\text{لو ٣س} - ٧ - ٥\,\text{لو س} + ٥$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢ \times ٣}{٣\text{س}-٧} - \frac{٥ \times ١}{\text{س}+٥}$

⑨ $\text{ص} = \text{لو س}^{٣} = ٣\,\text{لو س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣ \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{٣}{\text{س}}$

⑩ $\text{ص} = (\text{لو س})^{٣} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣(\text{لو س})^{٢} \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{٣}{\text{س}}(\text{لو س})^{٢}$

⑪ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ظا}^{٢} ٣\text{س} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ظا ٣س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢ \times \text{قا}^{٢} ٣\text{س} \times ٣}{\text{ظا ٣س}} = \frac{٦\,\text{قا}^{٢} ٣\text{س}}{\text{ظا ٣س}}$

⑫ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt[٣]{\text{س}^{٣}+٩\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{٣}+٩\text{س})^{\frac{١}{٣}}$

$\text{ص} = \frac{١}{٣}\,\text{لو}(\text{س}^{٣}+٩\text{س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٣} \times \frac{٣\text{س}^{٢}+٩}{\text{س}^{٣}+٩\text{س}} = \frac{\text{س}^{٢}+٢}{\text{س}^{٣}+٩\text{س}}$

قاعدة :-

$$\int \frac{\text{أ}}{\text{ب س}+\text{د}}\,\text{دس} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ب س}+\text{د}| + \text{جـ}$$

① $\int \frac{٢}{٣\text{س}+٥}\,\text{دس} = \frac{٢}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}} |٣\text{س}+٥| + \text{جـ}$

② $\int \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس} = \frac{١}{١}\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{جـ}$

③ $\int_{٠}^{١} \frac{٢}{٤\text{س}-١}\,\text{دس}$

$= \frac{٢}{٤}\,\text{لو}|٤\text{س}-١|\Big|_{٠}^{١}$

$= \frac{٢}{٤}(\text{لو ٣} - \cancel{\text{لو ١}}) = \frac{٢}{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}} ٣$

④ $\int \frac{١}{٢}\,\text{س}^{-١}\,\text{دس} = \int \frac{١}{٢\text{س}}\,\text{دس} = \frac{١}{٢}\,\text{لو}|٢\text{س}| + \text{جـ}$

⑤ $\int \frac{٣\text{س}+٥}{\text{س}}\,\text{دس} = \int ٣ + \frac{٥}{\text{س}}\,\text{دس} = ٣\text{س} + ٥\,\text{لو س} + \text{جـ}$

⑥ $\int \frac{١}{٣\text{س}-٧}\,\text{دس} =$

⑦ $\int \frac{٥}{٤\text{س}+٣}\,\text{دس} =$

⑧ $\int_{٢}^{٣} \frac{٨}{٣-٢\text{س}}\,\text{دس} =$

⑨ $\int_{١}^{\text{هـ}} \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$

⑩ $\int \frac{١}{\text{أس}+\text{ب}}\,\text{دس} =$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

قاعدة:

$$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ق}(\text{س})| + \text{جـ}$$

١) $\int \frac{3\text{س}^2+4}{\text{س}^3+4\text{س}+1}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^3+4\text{س}+1| + \text{جـ}$

٢) $\int \text{ظتاس}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| + \text{جـ}$

٣) $\int \text{ظاس}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\,\text{دس} = -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}|$

٤) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^2+1}\,\text{دس} = \frac{1}{2}\int \frac{2\text{س}}{\text{س}^2+1}\,\text{دس} = \frac{1}{2}\text{لو}|\text{س}^2+1|$

٥) $\int 2\text{س} - \frac{2}{\text{س}}\,\text{دس} = \frac{\cancel{2}\text{س}^2}{\cancel{2}} - 2\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

٦) $\int \sqrt[3]{\text{س}} - 2\sqrt{\text{س}} + \frac{2}{\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}^{\frac{1}{3}} - 2\text{س}^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\frac{3}{4}\text{س}^{\frac{4}{3}} - 2\times\frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + 2\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

قاعدة: $\int (\text{أس}+\text{ب})^{\text{قوة}}\,\text{دس} = \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{القوة}+1}}{(\text{القوة}+1)\times\text{أ}} + \text{جـ}$

١) $\int (2\text{س}+7)^9\,\text{دس} = \frac{(2\text{س}+7)^{10}}{10\times 2} + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{2}{(2\text{س}+1)^5}\,\text{دس} = \int 2(2\text{س}+1)^{-5}\,\text{دس}$

$= \frac{2(2\text{س}+1)^{-4}}{-4\times 2} + \text{جـ}$

إحسب التكاملات التالية:

١) $\int \frac{3\text{س}^2+5}{\text{س}^3+5\text{س}+19}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^3+5\text{س}+19| + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{2\text{س}-\text{جاس}}{\text{س}^2+\text{جتاس}}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^2+\text{جتاس}| + \text{جـ}$

٣) $\int \frac{\text{جتاس}}{1+\text{جاس}}\,\text{دس} = \text{لو}|1+\text{جاس}| + \text{جـ}$

٤) $\int \text{ظاس} + \text{ظتاس}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\,\text{دس}$

$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| + \text{جـ}$

٥) $\int \frac{\text{س}^2+5}{\text{س}^3+15\text{س}}\,\text{دس} = \frac{1}{3}\int \frac{3(\text{س}^2+5)}{\text{س}^3+15\text{س}}\,\text{دس}$

$= \frac{1}{3}\text{لو}|\text{س}^3+15\text{س}| + \text{جـ}$

٦) $\int \text{ظتا}5\text{س}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتا}5\text{س}}{\text{جا}5\text{س}}\,\text{دس}$

$= \frac{1}{5}\int \frac{5\,\text{جتا}5\text{س}}{\text{جا}5\text{س}}\,\text{دس} = \frac{1}{5}\text{لو}|\text{جا}5\text{س}| + \text{جـ}$

٧) $\int_2^4 \frac{1}{9-2\text{س}}\,\text{دس}$

٨) $\int \frac{2\text{س}}{\text{س}^2+5}\,\text{دس}$

٩) $\int \frac{6}{\text{س}} + \text{ظتاس} + \text{ظاس}\,\text{دس}$

١٠) $\int \frac{\text{س}+1}{\text{س}}\,\text{دس}$

١١) $\int_0^{\text{هـ}} \frac{\text{دس}}{\text{س}+\text{هـ}}$

١٢) $\int \frac{1+\text{ظا}^2\text{س}}{\text{ظاس}}\,\text{دس}$

اذا كان $\text{ق}'(\text{س})\times\text{جاس} - \text{ق}(\text{س})\,\text{جتاس} = \text{صفر}$

وكان $\text{ق}(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$ فما قيمة $\text{ق}(\frac{\pi}{4})$

الحل: $\text{ق}'(\text{س})\times\text{جاس} = \text{ق}(\text{س})\,\text{جتاس}$

$\frac{\text{ق}'(\text{س})\times\text{جاس}}{\text{ق}(\text{س})} = \text{جتاس}$

$\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ نكامل الطرفين

$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\,\text{دس}$

$\text{لو}|\text{ق}(\text{س})| = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| + \text{جـ}$

$\text{ق}(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} \Leftarrow \text{لو}\sqrt{2} = \text{لو}|\text{جا}\frac{\pi}{2}| + \text{جـ}$

$\text{لو}\sqrt{2} = \text{لو}1 + \text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{لو}\sqrt{2} = \text{جـ}}$

$\text{لو}\,\text{ق}(\frac{\pi}{4}) = \text{لو}\,\text{جا}\frac{\pi}{4} + \text{لو}\sqrt{2}$

$= \text{لو}\frac{1}{\sqrt{2}} + \text{لو}\sqrt{2} = \text{لو}1 - \cancel{\text{لو}\sqrt{2}} + \cancel{\text{لو}\sqrt{2}} = \text{صفر}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ق}(\frac{\pi}{4}) = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{ق}(\frac{\pi}{4}) = \text{هـ}^{\text{صفر}} = \boxed{1}$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$= \frac{(\ln x)^2}{2} + c$

٢) $\int \frac{\sin x}{9 - 3\cos x}\,dx$

$u = 9 - 3\cos x$

$du = 3\sin x\,dx$

$= \frac{1}{3}\ln|9 - 3\cos x| + c$

٣) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$

$u = x^2 + 3 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = 2\sqrt{u} + c$

$= 2\sqrt{x^2+3} + c$

٤) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$= \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c$

$= \ln|\ln x| + c$

٥) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2}$

$= \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e)$

$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

٦) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{8 - x\sqrt{x}}}\,dx$

$u = 8 - x\sqrt{x} \Rightarrow x = u^{\frac{2}{3}}$

$dx = \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}du$

$\int \frac{u^{\frac{1}{3}}}{u^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{3}{2}\int \frac{u^{\frac{1}{3}}}{u^{\frac{1}{2}}}\,du$

$= \frac{3}{2}\ln|8 - x\sqrt{x}| + c$

٧) $\int \tan x \ln(\sin x)\,dx$

$u = \ln\sin x \Rightarrow du = \frac{\cos x}{\sin x}dx$

$\int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x \ln(\sin x)\,dx = \int u\,du$

$= \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\ln\sin x)^2}{2} + c$

٨) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$

٩) $\int \frac{2\cos x + \sin x}{\cos x}\,dx$

$= \int \frac{2\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$= \int 2 + \tan x\,dx$ ← تعويض

$= 2x + \ln|\sec x| + c$ ← اجزاء

١٠) $\int \cos^3 x \ln(\sin x)\,dx$

$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\,dx$

$\int \cos^3 x \ln u \frac{du}{\cos x} = \int \cos^2 x \ln u\,du$

$= \int (1 - \sin^2 x)\ln u\,du = \int (1 - u^2)\ln u\,du$ ← اجزاء

١١) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{8 - x\sqrt{x}}}\,dx$

$u = 8 - x\sqrt{x} \Rightarrow x = (8-u)^{\frac{2}{3}}$

$dx = \frac{3}{2}(8-u)^{\frac{1}{2}}du$

$\int \frac{(8-u)^{\frac{1}{3}}}{u^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{3}{2}(8-u)^{\frac{1}{2}}du$

$= \frac{3}{2}\int \frac{8-u}{u^{\frac{1}{2}}}\,du = \frac{3}{2}\int 8u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\,du$

$= \frac{3}{2}\left(16u^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + c$

$= 24\sqrt{8 - x\sqrt{x}} - \sqrt{8 - x\sqrt{x}}^3 + c$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١١ $\int \text{لو}\,\text{س}\ \text{دس}$

الحل $\int \underbrace{\text{لو}\,\text{س}}_{\text{ق}}\ \underbrace{\text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$\text{ق} = \text{لو}\,\text{س} \leftarrow \text{دق} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{دس} \leftarrow \text{هـ} = \text{س}$

$\text{س}\,\text{لو}\,\text{س} - \int \text{س} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{س}\,\text{لو}\,\text{س} - \int 1\,\text{دس} = \text{س}\,\text{لو}\,\text{س} - \text{س} + \text{جـ}$

١٢ $\int \underbrace{(\text{لو}\,\text{س})^2}_{\text{ق}}\ \underbrace{\text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$\text{ق} = (\text{لو}\,\text{س})^2 \leftarrow \text{دق} = 2(\text{لو}\,\text{س})\left(\frac{1}{\text{س}}\right)\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{دس} \leftarrow \text{هـ} = \text{س}$

$= \text{س}(\text{لو}\,\text{س})^2 - \int \text{س} \times 2(\text{لو}\,\text{س})\left(\frac{1}{\text{س}}\right)\text{دس}$

$= \text{س}(\text{لو}\,\text{س})^2 - 2\int \underbrace{\text{لو}\,\text{س}}_{\text{ق}}\ \underbrace{\text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$= \text{س}(\text{لو}\,\text{س})^2 - 2(\text{س}\,\text{لو}\,\text{س} - \text{س}) + \text{جـ}$

١٣ $\int (\text{لو}\,\text{س})^3\,\text{دس}$ واجب

١٤ $\int \text{س}^3\,\text{لو}\,\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ق} = \text{لو}\,\text{س} \leftarrow \text{دق} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{س}^3\,\text{دس} \leftarrow \text{هـ} = \frac{1}{4}\text{س}^4$

$= \frac{1}{4}\text{س}^3\,\text{لو}\,\text{س} - \frac{1}{4}\int \text{س}^4 \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$= \frac{1}{4}\text{س}^3\,\text{لو}\,\text{س} - \frac{1}{4}\int \text{س}^3\,\text{دس}$

$= \frac{1}{4}\text{س}^3\,\text{لو}\,\text{س} - \frac{1}{4}\,\frac{\text{س}^4}{4} + \text{جـ}$

١٥ $\int \text{جتا}\,\text{س}\ \text{لو}\,\text{جا}\,\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ق} = \text{لو}\,\text{جا}\,\text{س} \leftarrow \text{دق} = \frac{\text{جتا}\,\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}}$

$\text{دهـ} = \text{جتا}\,\text{س}\,\text{دس} \leftarrow \text{هـ} = \text{جا}\,\text{س}$

$= \text{لو}\,\text{جا}\,\text{س} \times \text{جا}\,\text{س} - \int \text{جا}\,\text{س} \times \frac{\text{جتا}\,\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}}\,\text{دس}$

$= \text{جا}\,\text{س}\,\text{لو}\,\text{جا}\,\text{س} - \int \text{جتا}\,\text{س}\,\text{دس}$

$= \text{جا}\,\text{س}\,\text{لو}\,\text{جا}\,\text{س} - \text{جا}\,\text{س} + \text{جـ}$

١٦ $\int \text{قا}^2\,\text{س}\ \text{لو}\,\text{ظا}\,\text{س}\ \text{دس}$ واجب

١٧ $\int \text{قا}^4\,\text{س}\ \text{لو}\,\text{ظا}\,\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظا}\,\text{س} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\,\text{س}}$

$\int \text{قا}^4\,\text{س}\ \text{لو}\,\text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\,\text{س}}$

$\int \text{قا}^2\,\text{س}\ \text{لو}\,\text{ص}\ \text{دص} = \int (1 + \text{ظا}^2\,\text{س})\,\text{لو}\,\text{ص}\ \text{دص}$

$\int \underbrace{(1 + \text{ص}^2)}_{\text{دهـ}}\ \underbrace{\text{لو}\,\text{ص}\ \text{دص}}_{\text{ق}}$

$= \text{لو}\,\text{ص} \times \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3}\right) - \int \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3}\right) \times \frac{1}{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3}\right)\text{لو}\,\text{ص} - \int \left(1 + \frac{\text{ص}^2}{3}\right)\text{دص}$

$= \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3}\right)(\text{لو}\,\text{ص}) - \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3 \times 3}\right) + \text{جـ}$

$= \left(\text{ظا}\,\text{س} + \frac{\text{ظا}^3\,\text{س}}{3}\right)(\text{لو}\,\text{ظا}\,\text{س}) - \left(\text{ظا}\,\text{س} + \frac{\text{ظا}^3\,\text{س}}{9}\right) + \text{جـ}$

١٨ $\int \underbrace{\text{جا}\,\text{لو}\,\text{س}}_{\text{ق}}\ \underbrace{\text{دس}}_{\text{دهـ}}$ اجزاء دوري واجب

١٩ $\int \underbrace{\text{س}}_{\text{ق}}\ \underbrace{\text{قتا}^2\,\text{س}\ \text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$\text{ق} = \text{س} \leftarrow \text{دق} = 1\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{قتا}^2\,\text{س}\,\text{دس} \leftarrow \text{هـ} = -\text{ظتا}\,\text{س}$

$\text{س} \times -\text{ظتا}\,\text{س} - \int -\text{ظتا}\,\text{س}\ \text{دس}$

$= -\text{س}\,\text{ظتا}\,\text{س} + \int \frac{\text{جتا}\,\text{س}}{\text{جا}\,\text{س}}\,\text{دس}$

$= -\text{س}\,\text{ظتا}\,\text{س} + \text{لو}|\text{جا}\,\text{س}| + \text{جـ}$

٢٠ $\int 6\,\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{3}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$

$= \int 6\,\text{س}\,(\text{لو}\,3 - \text{لو}\sqrt{\text{س}})\,\text{دس}$

$= \int 6\,\text{س}\left(\text{لو}\,3 - \frac{1}{2}\text{لو}\,\text{س}\right)\text{دس}$

$= \int \text{لو}\,3 \times 6\,\text{س} - \int \underbrace{3\,\text{س}}_{\text{دهـ}}\ \underbrace{\text{لو}\,\text{س}\ \text{دس}}_{\text{ق}}$

$\text{ق} = \text{لو}\,\text{س} \leftarrow \text{دق} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = 3\,\text{س} \leftarrow \text{هـ} = \frac{3\,\text{س}^2}{2}$

$\text{لو}\,3 \times \frac{6\,\text{س}^2}{2} - \left(\text{لو}\,\text{س} \times \frac{3\,\text{س}^2}{2} - \int \frac{3\,\text{س}^2}{2} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}\right)$

$\text{لو}\,3 \times (3\,\text{س}^2) - \left(\text{لو}\,\text{س} \times \frac{3\,\text{س}^2}{2} - \int \frac{3}{2}\,\text{س}\,\text{دس}\right)$

$\text{لو}\,3 \times (3\,\text{س}^2) - \left(\text{لو}\,\text{س} \times \frac{3\,\text{س}^2}{2} - \frac{3}{2}\,\frac{\text{س}^2}{2}\right) + \text{جـ}$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٢١) $\int س \, ظتا^2 أ + س^2 \, د س$

$ص = 1 + س^2 \leftarrow ص^2 = 1 + س^2$

$2ص \, د ص = 2س \, د س$

$د س = \frac{ص \, د ص}{س}$

$= \int س \, ظتا^2 أ \times \frac{ص \, د ص}{س}$

$= \int ظتا^2 أ \, ص \, د ص$

$= \int ص (قتا^2 أ - 1) \, د ص = \int ص قتا^2 أ - ص \, د ص$

(أجزاء) (مباشر)

$ه = ص \leftarrow د ه = 1 \, د ص$

$د ق = قتا^2 أ \leftarrow ق = -ظتا أ$

$= -ص ظتا أ - \int -ظتا أ \times د ص - \frac{ص^2}{2} + ج$

$= -ص ظتا أ + \int ظتا أ \, د ص - \frac{ص^2}{2} + ج$

$= -ص ظتا أ + لو|جا أ| - \frac{(1+س^2)}{2} + ج$

٢٢) $\int \frac{س قا^2 س - ظا س}{س^2} \, د س$

$= \int \frac{س قا^2 س}{س^2} - \frac{ظا س}{س^2} \, د س$

$= \int \frac{1}{س} قا^2 س - \int \frac{ظا س}{س^2} \, د س =$

$ه = \frac{1}{س} \leftarrow د ه = \frac{-1}{س^2} د س$

$د ق = قا^2 س \leftarrow ق = ظا س$

$\frac{1}{س} ظا س + \int \frac{1}{س^2} ظا س \, د س - \int \frac{ظا س}{س^2} د س$

$= \frac{1}{س} ظا س + ج$

٢٣) $\int قا س \, د س$

$= \int قا س \times \frac{(قا س + ظا س)}{قا س + ظا س} = \int \frac{قا^2 س + قا س ظا س}{قا س + ظا س}$

$= لو|قا س + ظا س| + ج$

٢٤) $\int قتا س \, د س$ واجب

٢٥) $\int \frac{ظا س}{1 + قا س} \, د س$

$= \int \frac{\frac{جا س}{جتا س}}{\frac{1}{جتا س} + 1} \, د س = \int \frac{\frac{جا س}{جتا س}}{\frac{جتا س + 1}{جتا س}} \, د س = \int \frac{جا س}{جتا س + 1} \, د س$

$= لو|جتا س + 1| + ج$

٢٦) $\int \frac{د س}{س لو س}$ $ص = لو س$

٢٧) $\int \frac{س (لو س)^2}{ه} \, د س$ واجب

٢٨) $\int جا^3 س \, لو جا س \, د س$

$= \int جا^2 س \, جا س \, لو جا س \, د س$

$= \int (1 - جتا^2 س) \, جا س \, لو جا س \, د س$

$= \int جا س \, لو جا س \, د س - \int جتا^2 س \, جا س \, لو جا س \, د س$

$ص = جا س$

$د ص = جتا س \, د س$

$= \int ص \, لو ص \, د ص - \int ص^2 \, لو ص \, د ص$

$ه = لو ص \leftarrow د ه = \frac{1}{ص} د ص$

$د ق = ص^2 \leftarrow ق = \frac{ص^3}{3}$

$= \frac{ص^3}{3} لو ص - \int \frac{ص^3}{3} \times \frac{1}{ص} د ص$

$= \frac{ص^3}{3} لو ص - \frac{1}{3} \int ص^2 \, د ص$

$= \frac{ص^3}{3} لو ص - \frac{ص^3}{9} + ج = جا^3 س لو جا س - \frac{جا^3 س}{9} + ج$

٢٩) $\int \frac{1 - لو س}{س} \, د س$

$= \int \frac{1}{س} - \int \frac{لو س}{س} \, د س$ $\boxed{ص = لو س}$

$= لو س - \int \frac{ص}{س} \cdot س \, د ص$

$= لو س - \int ص \, د ص = لو س - \frac{(لو س)^2}{2} + ج$

٣٠) $\int \frac{1}{س \sqrt{لو س + 1}} \, د س$

$ص = لو س + 1 \leftarrow د ص = \frac{1}{س} د س$

$= \int \frac{1}{\sqrt{ص}} د ص = \int ص^{-\frac{1}{2}} \, د ص$

$= 2 ص^{\frac{1}{2}} + ج$

$= 2 \sqrt{لو س + 1} + ج$

٣١) $\int \frac{3 س لو|س^2 + 5|}{س^2 + 5} \, د س$

$= \int 3 س \times \frac{1}{س^2 + 5} لو|س^2 + 5| \, د س$

$ص = لو|س^2 + 5| \leftarrow د ص = \frac{2 س}{س^2 + 5} د س$

$= \int \frac{3}{2} ص \, د ص = \frac{3}{2} \times \frac{ص^2}{2} + ج$

$= \frac{3}{4} (لو|س^2 + 5|)^2 + ج$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

الكسور الجزئية

"درجة المقام أكبر من درجة البسط"

١) $\int \frac{1}{(س+1)(س-3)}\,د س$

٢) $\int \frac{٧}{س^2-3س-١٠}\,د س$

٣) $\int \frac{1}{س^2-٤}\,د س$

٤) $\int \frac{س+1}{س^3+3س^2-٤}\,د س$

٥) $\int \frac{1}{س+\sqrt{س+1}}\,د س$

$= \int \frac{1}{(س-1)^{\frac{1}{2}}}\,د س$

$= \frac{(س-1)^{\frac{-1}{2}}}{\frac{-1}{2}} + ج$

٦) $\int \frac{٢}{س^3-س}\,د س$

$= \int \frac{٢}{س(س-1)(س+1)}\,د س$

$٢ = أ(س-1)(س+1) + ب س(س+1) + جـ س(س-1)$

عندما $س=1 \leftarrow ٢ = ٢ب \leftarrow ب=1$

عندما $س=-1 \leftarrow جـ=1$

عندما $س=0 \leftarrow أ=-2$

$= \int \frac{-2}{س} + \frac{1}{س-1} + \frac{1}{س+1}\,د س$

$= -2\ln|س| + \ln|س-1| + \ln|س+1| + ج$

٧) $\int \frac{٢س}{س^2+٤س+٤}\,د س$

٨) $\int \frac{٣س^2+٢}{س-1}\,د س$

٩) $\int \frac{س^2+1}{س^3-1}\,د س$

$\int (٢س)(س+٤)^{-2}\,د س$ اجزاء

اذا كانت درجة البسط أكبر او تساوي درجة المقام نستخدم القسمة الطويلة

فإنه = $\int$ الناتج + $\int \frac{\text{باقي القسمة}}{\text{المقسوم عليه}}$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١ $\int \frac{٩س}{س-٢}\,دس =$

$\int ٩\,دس + \int \frac{-١٨}{س-٢}$

$= ٩س + -١٨\,لو|س-٢| + ج$

٢ $\int \frac{س^٢}{س+١٣}\,دس$

$= \int س-١٣\,دس + \int \frac{١٦٩}{س+١٣}$

$= \frac{س^٢}{٢} - ١٣س + ١٦٩\,لو|س+١٣| + ج$

٣ $\int \frac{س^٣+١٠}{س^٢-س-٢}\,دس$

$= \int س+١ + \int \frac{٣س+١٢}{س^٢-س-٢}\,دس$

مباشر — كسور جزئية

$\frac{٣س+١٢}{س^٢-س-٢} = \frac{أ}{س-٢} + \frac{ب}{س+١}$

$أ(س+١) + ب(س-٢) = ٣س+١٢$

$س=-١ \Leftarrow -٣ب = -٣+١٢ = ٩ \Leftarrow ب=-٣$

$س=٢ \Leftarrow ٣أ + ٠ = ٦+١٢ = ١٨ \Leftarrow أ=٦$

$\Leftarrow \int س+١ + \int \frac{٦}{س-٢} + \int \frac{-٣}{س+١}\,دس$

$= \frac{س^٢}{٢} + س + ٦\,لو|س-٢| - ٣\,لو|س+١| + ج$

٤ $\int \frac{س^٣+س^٢}{س^٢-١}\,دس$ واجب

٥ $\int \frac{س+٧}{س^٢-س-٦}\,دس$ واجب

٦ $\int \frac{٢}{س^٢-٤س+٣}\,دس$

$\frac{٢}{س^٢-٤س+٣} = \frac{٢}{(س-٣)(س-١)}$

$= \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س-١}$

$٢ = أ(س-١) + ب(س-٣)$

$س=١ \Leftarrow \boxed{ب=-١}$ / $س=٣ \Leftarrow \boxed{أ=١}$

$\int \frac{١}{س-٣}\,دس + \int \frac{-١}{س-١}\,دس$

$= لو|س-٣| - لو|س-١| + ج$

٧ $\int \frac{٤س+١}{س^٢-س-٢}\,دس$ واجب

٨ $\int \frac{س^٢-س}{س+١}\,دس$ واجب

٩ $\int \frac{٢س^٣-س^٢+٣س}{س^٢-٣س-٤}\,دس$

$\int ٢س+٥ + \int \frac{٢٦س+٢٠}{س^٢-٣س-٤}\,دس$

مباشر — كسور جزئية

$\frac{٢٦س+٢٠}{س^٢-٣س-٤} = \frac{أ}{س-٤} + \frac{ب}{س+١}$

$أ(س+١) + ب(س-٤) = ٢٦س+٢٠$

$س=-١ \Leftarrow -٥ب = -٢٦+٢٠ = -٦$

$\boxed{ب = \frac{٦}{٥}}$

$س=٤ \Leftarrow ٥أ = ١٠٤+٢٠ = ١٢٤$

$\boxed{أ = \frac{١٢٤}{٥}}$

$\int ٢س+٥ + \int \frac{\frac{١٢٤}{٥}}{س-٤} + \frac{\frac{٦}{٥}}{س+١}\,دس$

$= \frac{س^٢}{٢} + ٥س + \frac{١٢٤}{٥}\,لو|س-٢| + \frac{٦}{٥}\,لو|س+١| + ج$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١٠ $\int \frac{\sqrt[3]{س}-1}{\sqrt[3]{س^2}-4}\, دس$

$ص = \sqrt[3]{س} \leftarrow دس = 3ص^2\, دص$

$\leftarrow س = ص^3 \;/\; ص^2 = \sqrt[3]{س^2}$

$\int \frac{ص-1}{ص^2-4} \times 3ص^2\, دص = \int \frac{3ص^3-3ص^2}{ص^2-4}\, دص$

$$\begin{array}{r|l} 3ص-3 & \\ \hline 3ص^3-3ص^2 & ص^2-4 \\ \mp 3ص^3 \pm 12ص & \\ \hline -3ص^2+12ص & \\ \pm 3ص^2 \mp 12 & \\ \hline 12ص-12 & \end{array}$$

$\int 3ص-3 + \int \frac{12ص-12}{ص^2-4}\, دص$ ← كسور جزئية

مباشر

$\frac{12ص-12}{ص^2-4} = \frac{12ص-12}{(ص-2)(ص+2)} = \frac{أ}{ص-2} + \frac{ب}{ص+2}$

$أ(ص+2) + ب(ص-2) = 12ص - 12$

$ص = -2 \Leftarrow \boxed{ب = 9} \;/\; ص = 2 \Leftarrow أ = 3$

$\Leftarrow \int 3ص-3 + \int \frac{3}{ص-2} + \int \frac{9}{ص+2}\, دص$

$= \frac{3ص^2}{2} - 3ص + 3\,لو_{هـ}|ص-2| + 9\,لو_{هـ}|ص+2| + جـ$

$= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{س})^2 - 3\sqrt[3]{س} + 3\,لو|\sqrt[3]{س}-2| + 9\,لو|\sqrt[3]{س}+2| + جـ$

١١ $\int \frac{قا^2 س}{5ظا^2 س - 3ظا س - 2}\, دس$

$ص = ظا س \leftarrow دس = \frac{دص}{قا^2 س}$

$\int \frac{\cancel{قا^2 س}}{5ص^2-3ص-2} \times \frac{دص}{\cancel{قا^2 س}}$

$\int \frac{1}{5ص^2-3ص-2}\, دص$ كسور جزئية

$\frac{1}{5ص^2-3ص-2} = \frac{أ}{5ص+2} + \frac{ب}{ص-1}$

$أ(ص-1) + ب(5ص+2) = 1$

$ص = 1 \leftarrow \boxed{ب = \frac{1}{7}} \;/\; ص = \frac{-2}{5} \leftarrow \boxed{أ = \frac{-5}{7}}$

$\int \frac{\frac{-5}{7}}{5ص+2} + \frac{1}{ص-1}\, دص = \frac{-5}{7} \times \frac{1}{5}\,لو|5ص+2| + \frac{1}{7}\,لو|ص-1| + جـ$

١٢ $\int \frac{دس}{(س-4)(س+1)}$

١٣ $\int_2^4 \frac{4س-1}{س^2+س-2}\, دس$ واجب

١٤ $\int \frac{2س^2+3}{س^2-س}\, دس$

١٥ $\int \frac{س^3+4س-8}{س^2-9}\, دس$

١٦ $\int \frac{\sqrt{س-2}+1}{\sqrt{س-2}-1}\, دس$

$ص = \sqrt{س-2} \leftarrow دس = 2ص\, دص$

$\int \frac{ص+1}{ص-1} \times 2ص\, دص = \int \frac{2ص^2+2ص}{ص-1}\, دص$

قسمة طويلة

$= \int 2ص+4 + \frac{4}{ص-1}\, دص$

$= ص^2 + 4ص + 4\,لو|ص-1| + جـ$

$= (س-2) + 4(\sqrt{س-2}) + 4\,لو|\sqrt{س-2}-1| + جـ$

١٧ $\int_9^{16} \frac{\sqrt{س}}{س-4}\, دس$

$ص = \sqrt{س} \leftarrow س = ص^2 \leftarrow دس = 2ص\, دص$

$س = 9 \leftarrow ص = 3 \;/\; س = 16 \leftarrow ص = 4$

$\int_3^4 \frac{ص}{ص^2-4} \times 2ص\, دص = \int_3^4 \frac{2ص^2}{ص^2-4}\, دص$

قسمة طويلة ثم كسور جزئية.

$= 2ص + 2\,لو|ص-2| - 2\,لو|ص+2| \Big]_3^4$

١٨ $\int \frac{هـ^{3س}}{هـ^{2س} - 3هـ^{س} - 4}\, دس$

$ص = هـ^{س} \leftarrow دس = \frac{دص}{هـ^{س}} = \frac{دص}{ص}$

$= \int \frac{ص^3}{ص^2-3ص-4} \times \frac{دص}{ص}$

$= \int \frac{ص^2}{ص^2-3ص-4}\, دص$

قسمة طويلة .. ثم كسور جزئية

$= هـ^{س} + \frac{16}{5}\,لو|هـ^{س}-4| - \frac{1}{5}\,لو|هـ^{س}+1| + جـ$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

١٩ $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^4+\text{س}^2}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}}{\text{س}(\text{س}^3+\text{س})}\,\text{دس}$

$= \int \frac{1}{\text{س}^3+\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{1}{\text{س}(\text{س}^2+1)}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2+1 \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$\int \frac{1}{\text{س}\,\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{2\text{س}} = \int \frac{1}{2}\,\frac{1}{\text{س}^2\,\text{ص}}\,\text{دص}$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{(\text{ص}-1)(\text{ص})}\,\text{دص} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-1} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}}$

$\text{أص} + \text{ب}(\text{ص}-1) = 1$

$\text{ص} = 0 \leftarrow \boxed{\text{ب} = -1}$ / $\text{ص} = 1 \leftarrow \boxed{\text{أ} = 1}$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\text{ص}-1} + \frac{-1}{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{لو}|\text{ص}-1| - \text{لو}|\text{ص}|\right) + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{لو}|\text{س}^2+1-1| - \text{لو}|\text{س}^2+1|\right) + \text{جـ}$.

٢٠ $\int \frac{\text{س}^3}{2\text{س}^4+\text{س}^8}\,\text{دس}$

$\int \frac{\text{س}^3}{\text{س}^4(2+\text{س}^4)}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^4 \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{4\text{س}^3}$

$\int \frac{\text{س}^3}{\text{ص}(2+\text{ص})} \times \frac{\text{دص}}{4\text{س}^3} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\text{ص}(2+\text{ص})}\,\text{دص}$

كسور جزئية / $\text{أ} = \frac{1}{2}$ / $\text{ب} = \frac{-1}{2}$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\text{لو}|\text{س}^4| - \frac{1}{2}\text{لو}|2+\text{س}^4|\right) + \text{جـ}$

٢١ $\int \frac{1}{\text{س}^{10}+\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{1}{\text{س}(\text{س}^9+1)}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^9 \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{9\text{س}^8}$

$\int \frac{1}{\text{س}\times(\text{ص}+1)} \times \frac{\text{دص}}{9\text{س}^8} = \frac{1}{9}\int \frac{\text{دص}}{\text{س}^9\times(\text{ص}+1)}$

$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\text{ص}(\text{ص}-1)}\,\text{دص}$ كسور جزئية

$\text{ص} = -1 \leftarrow \text{ب} = -1$

$\text{ص} = 0 \leftarrow \text{أ} = 1$

$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\text{ص}} + \frac{-1}{\text{ص}+1}\,\text{دص} = \frac{1}{9}\text{لو}|\text{ص}| - \text{لو}|\text{ص}+1| + \text{جـ}$

$= \frac{1}{9}\text{لو}|\text{س}^9| - \text{لو}|\text{س}^9+1| + \text{جـ}$

٢٢ $\int \frac{\sqrt{\text{س}^4+2\text{س}^2+1}}{\text{س}^2-\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\sqrt{(\text{س}^2+1)^2}}{\text{س}^2-\text{س}}\,\text{دس}$

$\int \frac{|\text{س}^2+1|}{\text{س}^2-\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{س}^2+1}{\text{س}^2-\text{س}}\,\text{دس}$

قسمة طويلة ثم كسور جزئية

$= \text{س} - \text{لو}|\text{س}| + 2\,\text{لو}|\text{س}-1| + \text{جـ}$.

٢٣ $\int \frac{2\text{س}}{\text{س}^2-6\text{س}+9}\,\text{دس}$

$\int \frac{2\text{س}}{(\text{س}-3)(\text{س}-3)}\,\text{دس}$

$= \int (2\text{س})(\text{س}-3)^{-2}\,\text{دس}$

اجزاء

$\text{ق} = 2\text{س} \leftarrow \text{دق} = 2\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = (\text{س}-3)^{-2} \leftarrow \text{هـ} = \frac{(\text{س}-3)^{-1}}{-1}$

$2\text{س} \times \frac{(\text{س}-3)^{-1}}{-1} + 2\int (\text{س}-3)^{-1}\,\text{دس}$

$2\text{س} \times \frac{(\text{س}-3)^{-1}}{-1} + 2\,\text{لو}|\text{س}-3| + \text{جـ}$

٢٤ $\int \frac{\text{س}+3}{\text{س}^3-\text{س}}\,\text{دس}$

$\frac{\text{س}+3}{\text{س}^3-\text{س}} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-1} + \frac{\text{جـ}}{\text{س}+1}$

$\text{أ}(\text{س}-1)(\text{س}+1) + \text{ب}\,\text{س}(\text{س}+1) + \text{جـ}\,\text{س}(\text{س}-1) = \text{س}+3$

$\text{س} = 1 \leftarrow \boxed{\text{ب} = 2}$

$\text{س} = -1 \leftarrow \boxed{\text{جـ} = 1}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \boxed{\text{أ} = -3}$

$\int \frac{-3}{\text{س}} + \frac{2}{\text{س}-1} + \frac{1}{\text{س}+1}\,\text{دس}$

$-3\,\text{لو}|\text{س}| + 2\,\text{لو}|\text{س}-1| + \text{لو}|\text{س}+1| + \text{جـ}$

٢٥ $\int \frac{1}{\text{س}\left((\text{لو}\,\text{س})^2+\text{لو}\,\text{س}\right)}\,\text{دس}$

واجب

" افرض $\text{ص} = \text{لو}\,\text{س}$

ثم كسور جزئية .

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٢٦ $\int \text{لو}(\text{س}^2+2\text{س})\,\text{دس}$

$\text{ق} = \text{لو}\,\text{س}^2+2\text{س} \leftarrow \text{دق} = \frac{2\text{س}+2}{\text{س}^2+2\text{س}}$

$\text{دهـ} = \text{دس} \leftarrow \text{هـ} = \text{س}$

$\text{س}(\text{لو}\,\text{س}^2+2\text{س}) - \int \text{س} \times \frac{2\text{س}+2}{\text{س}^2+2\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{س}(\text{لو}\,\text{س}^2+2\text{س}) - \int \frac{2\text{س}^2+2\text{س}}{\text{س}^2+2\text{س}}\,\text{دس}$ ← قسمة طويلة.

$\text{س}(\text{لو}\,\text{س}^2+2\text{س}) - \int 2 - \frac{2}{\text{س}+2}\,\text{دس}$

$\text{س}(\text{لو}\,\text{س}^2+2\text{س}) - (2\text{س} - 2\,\text{لو}|\text{س}+2| + \text{جـ})$

٢٧ $\int \frac{\text{لو}\,\text{س}}{(\text{س}-1)^2}\,\text{دس}$

$= \int (\text{لو}\,\text{س})(\text{س}-1)^{-2}\,\text{دس}$

$\text{ق} = \text{لو}\,\text{س} \leftarrow \text{دق} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = (\text{س}-1)^{-2} \leftarrow \text{هـ} = \frac{(\text{س}-1)^{-1}}{-1}$

$\frac{(\text{س}-1)^{-1}}{-1}\,\text{لو}\,\text{س} + \int \frac{1}{\text{س}-1} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\frac{(\text{س}-1)^{-1}}{-1}\,\text{لو}\,\text{س} + \int \frac{1}{\text{س}(\text{س}-1)}\,\text{دس}$ كسور جزئية

٢٨ $\int \frac{\text{ظا}\,\text{س}}{9-(\text{لو}\,\text{جتا}\,\text{س})^2}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{لو}\,\text{جتا}\,\text{س} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{-\text{جا}\,\text{س}}{\text{جتا}\,\text{س}}} = \frac{\text{دص}}{-\text{ظا}\,\text{س}}$

$\int \frac{\cancel{\text{ظا}\,\text{س}}}{9-\text{ص}^2}\,\frac{\text{دص}}{-\cancel{\text{ظا}\,\text{س}}}$

$\int \frac{1}{\text{ص}^2-9}\,\text{دص}$ ← كسور جزئية.

٢٩ $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}-9}\,\text{دس}$ ،، افرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

٣٠ $\int \frac{1}{\text{س}-\sqrt{\text{س}}-6}\,\text{دس}$ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

٣١ $\int \frac{\sqrt{4\text{س}+20}-3}{\sqrt{\text{س}+5}+3}\,\text{دس}$

$= \int \frac{2\sqrt{\text{س}+5}-3}{\sqrt{\text{س}+5}+3}\,\text{دس}$ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}+5}$

٣٢ $\int \frac{1}{\text{س}(\sqrt[3]{\text{س}}-1)}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}}$
ثم كسور جزئية

٣٣ $\int \frac{1}{1+\text{هـ}^{-\text{س}}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{-\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{هـ}^{-\text{س}}} = \frac{\text{دص}}{-\text{ص}}$

$\int \frac{1}{1+\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{-\text{ص}} = \int \frac{-1}{\text{ص}(1+\text{ص})}\,\text{دص}$
كسور جزئية

٣٤ $\int \frac{\text{هـ}^{3\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}-\text{هـ}^{\text{س}}-2}\,\text{دس}$ واجب

٣٥ $\int \sqrt{1-\text{هـ}^{-\text{س}}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{1-\text{هـ}^{-\text{س}}}$
قسمة طويلة ثم كسور جزئية

٣٦ $\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظا}^2\text{س}-\text{ظا}\,\text{س}-6}\,\text{دس}$

٣٧ $\int \frac{\text{جتا}^3\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}-3\,\text{جا}\,\text{س}+2}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جا}\,\text{س} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتا}\,\text{س}}$

$\int \frac{\text{جتا}^3\text{س}}{\text{ص}^2-3\text{ص}+2}\,\frac{\text{دص}}{\text{جتا}\,\text{س}} = \int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{ص}^2-3\text{ص}+2}$

$\int \frac{1-\text{جا}^2\text{س}}{\text{ص}^2-3\text{ص}+2}\,\text{دص} = \int \frac{1-\text{ص}^2}{\text{ص}^2-3\text{ص}+2}\,\text{دص}$
قسمة طويلة

٣٨ $\int \frac{\text{جتا}\,\text{س}}{3+\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$\int \frac{\text{جتا}\,\text{س}}{3+1-\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتا}\,\text{س}}{4-\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جا}\,\text{س} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتا}\,\text{س}}$

$\int \frac{\text{جتا}\,\text{س}}{4-\text{ص}^2}\,\frac{\text{دص}}{\text{جتا}\,\text{س}} = \int \frac{1}{4-\text{ص}^2}\,\text{دص}$ كسور جزئية

٣٩ $\int \frac{\text{دس}}{\text{س}\sqrt{\text{س}+1}}$

٤٠ $\int \frac{\sqrt{\text{س}+2}}{\text{س}+1}\,\text{دس}$

٤١ $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}+2}\,\text{دس}$

٤٢ $\int \frac{\sqrt{\text{س}+1}}{\text{س}}\,\text{دس}$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

المساحات

النوع الأول:-
احسب المساحة المحصورة بين منحنى ومحور السينات

١ احسب المساحة المحصورة بين
$ق(س) = ٤ - س^٢$ ومحور السينات

الحل $٤ - س^٢ = ٠$
$س^٢ = ٤ \leftarrow س = \pm ٢$

$$م = \int_{-٢}^{٢} |٤ - س^٢| \, دس = ٤س - \frac{س^٣}{٣} \Big|_{-٢}^{٢}$$
$$(٨ - \frac{٨}{٣}) - (-٨ + \frac{٨}{٣})$$
$$٨ - \frac{٨}{٣} + ٨ - \frac{٨}{٣}$$
$$\frac{٣ \times ١٦}{١ \times ٣} - \frac{١٦}{٣} = \frac{٤٨ - ١٦}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$$

٢ أوجد المساحة بين $ق: س^٣ - ٤س$ ومحور السينات

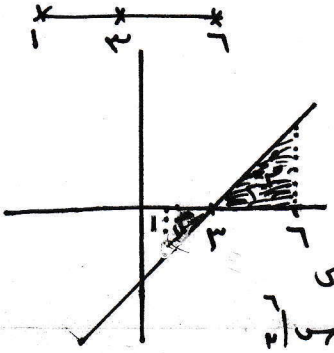
الحل: $س^٣ - ٤س = ٠$
$س(س^٢ - ٤) = ٠$
$س = ٠$ أو $س^٢ = ٤$
$س = \pm ٢$

$$= \int_{-٢}^{٠} س^٣ - ٤س \, دس + \int_{٠}^{٢} س^٣ - ٤س \, دس$$
$$= \frac{س^٤}{٤} - ٢س^٢ \Big|_{-٢}^{٠} + \frac{س^٤}{٤} - ٢س^٢ \Big|_{٠}^{٢}$$
$$٠ - (٤ - ٨) + (٤ - ٨) - ٠$$
$$٤ + ٤ = ٨$$

٣ $ق: س^٣ - س$ ومحور السينات
أوجد المساحة المحصورة بينهما **واجب**

٤ احسب المساحة المحصورة بين
$ق: ٢س - ٦$ ومحور السينات
والمستقيم $س = ١$ ، $س = ٦$

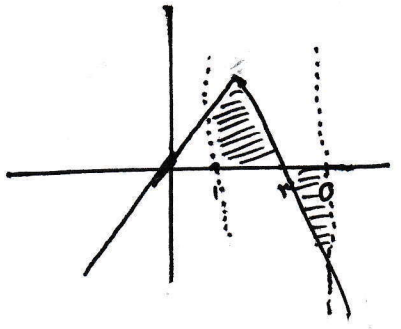
الحل: $٢س - ٦ = ٠ \leftarrow س = ٣$



$$م_١ = \int_{١}^{٣} (٠) - (٢س - ٦) \, دس$$
$$م_٢ = \int_{٣}^{٦} (٢س - ٦) - (٠) \, دس$$
$$م = م_١ + م_٢$$
$$= \int_{١}^{٣} ٦ - ٢س \, دس + \int_{٣}^{٦} ٢س - ٦ \, دس$$
$$= ٦س - س^٢ \Big|_{١}^{٣} + س^٢ - ٦س \Big|_{٣}^{٦}$$
$$(١٨ - ٩) - (٦ - ١) + (٣٦ - ٦) - (٩ - ١٨)$$
$$= ٩ - ٥ + ٣٠ + ٩ = ١٣$$

٥ احسب المساحة المحصورة بين
$ق: ٣س - س^٢$ ومحور السينات
لكل $[٥ ، ١]$

الحل $٣س - س^٢ = ٠$
$س(٣ - س) = ٠$
$س = ٠$ أو $س = ٣$

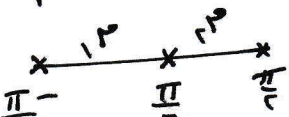


$$= \int_{١}^{٣} ٣س - س^٢ \, دس + \int_{٣}^{٥} ٣س - س^٢ \, دس$$
$$= \frac{٣س^٢}{٢} - \frac{س^٣}{٣} \Big|_{١}^{٣} + \frac{٣س^٢}{٢} - \frac{س^٣}{٣} \Big|_{٣}^{٥} = \cdots$$

٦ تدريب: احسب المساحة بين $ق: ٢ - \sqrt{س}$ والمحاور
الجواب $= \frac{٨}{٣}$

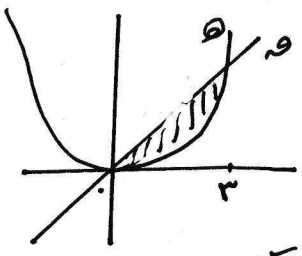
٧ احسب المساحة بين $ص = جاس - \frac{١}{٢}$
ومحور السينات في $[-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$

الحل:
$جاس - \frac{١}{٢} = ٠ \leftarrow جاس = \frac{١}{٢} \leftarrow س = \frac{\pi}{٦}$



$$م_١ = \int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٦}} جاس - \frac{١}{٢} \, دس$$
$$+ \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} جاس - \frac{١}{٢} \, دس$$
$$---$$

٨ احسب المساحة المحصورة بين
$ق: ٣س - س^٢$ ، $ص = ٠$ ، $س = ٤$

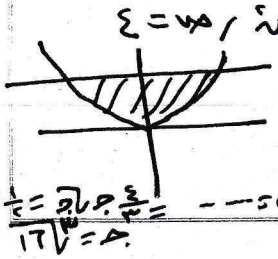


$ص = ٠$
$٣س - س^٢ = ٠$
$س^٢ - ٣س = ٠$
$س(س - ٣) = ٠$
$س = ٠$ أو $س = ٣$

$$م = \int_{٠}^{٣} ٣س - س^٢ \, دس = \cdots$$

٩ اذا كان $ص = ج$ يقسم المساحة بين
$ص = س^٢$ ، $ص = ٤$ الى قسمين متساويين
فما قيمة $ج$

الحل:- نجد المساحة بين $ص = س^٢$ ، $ص = ٤$



$س^٢ = ٤ \leftarrow س = \pm ٢$

$$م = \int_{-٢}^{٢} ٤ - س^٢ \, دس = \cdots = \frac{٣٢}{٣}$$

نجد المساحة بين $ص = س^٢$ ، $ص = ج$

$$\frac{١٦\sqrt{٣}}{٣} = \frac{١}{٢} \times \frac{٣٢}{٣} = \frac{١}{٢} \times م$$

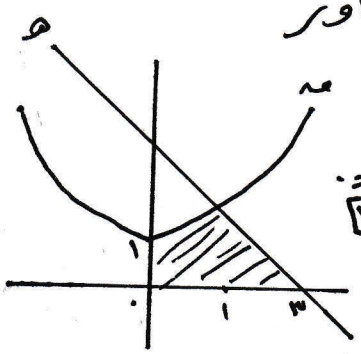
$$م = \int_{-\sqrt{ج}}^{\sqrt{ج}} ج - س^٢ \, دس = \cdots = \frac{٤ج\sqrt{ج}}{٣}$$

$س = \pm \sqrt{ج} \leftarrow م$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

النوع الثاني :-
المساحة بين أكثر من اقترانين
في هذه الحالة يجب الرسم وتحديد المنطقة المطلوبة وايجاد نقاط التقاطع وايجاد المساحة كل منطقة ثم جمع المساحات

١ احسب المساحة بين ق = س² + ١ ، هـ = ٣ − س والمحاور



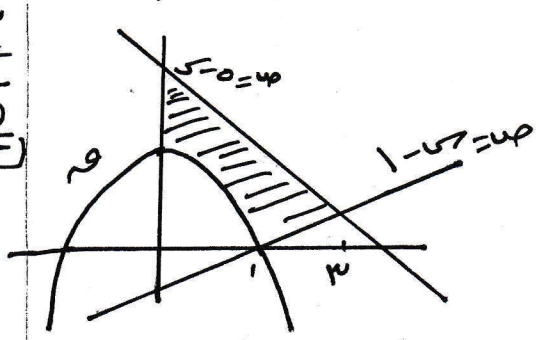
الحل

ق = هـ
س² + ١ = ٣ − س
س² + س − ٢ = ٠
(س + ٢)(س − ١) = ٠
س = −٢ ✗ ، س = ١ ✓

هـ = ٠
٣ − س = ٠
س = ٣ ✓

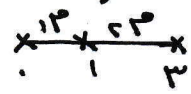
م = ∫₀¹ س² + ١ دس + ∫₁³ ٣ − س دس
= س³/٣ + س |₀¹ + ٣س − س²/٢ |₁³ = ... = ١٠/٣

٢ احسب المساحة بين ق = ١ − س² ، ص = ٥ − س ، ص = س − ١ ومحور الصادات



ق = ص
١ − س² = س − ١
س² + س − ٢ = ٠
(س + ٢)(س − ١) = ٠
س = −٢ ✗ ، س = ١ ✓

ص = ص
٥ − س = س − ١
٦ = ٢س
س = ٣ ✓



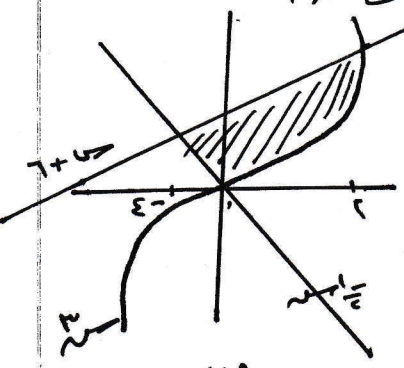
= ∫₀¹ (٥ − س) − (١ − س²) دس + ∫₁³ (٥ − س) − (س − ١) دس
= ∫₀¹ ٤ − س + س² دس + ∫₁³ ٦ − ٢س دس
٤س − س²/٢ + س³/٣ |₀¹ + ٦س − س² |₁³ = ... = ٤٧/٦

٣ ق = س³ ، هـ = −٢س ، ص = ٨
احسب المساحة.

واجب

الجواب = ٢٨

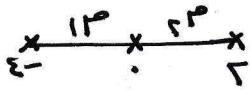
٤ ق = س³ ، ص = −½س ، ص = س + ٦
احسب المساحة المحصورة.



ق = ص
س³ = −½س
س³ + ½س = ٠
س(س² + ½) = صفر
س = ٠ ✓

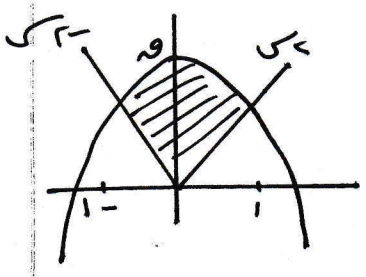
ق = ص
س³ = س + ٦
س³ − س − ٦ = ٠
بالتجريب س = ٢ ✓

ص = ص
س + ٦ = −½س
س = −٤



∫₋₄⁰ (س + ٦) − (−½س) دس + ∫₀² (س + ٦) − س³ دس
= ٢٢

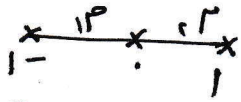
٥ احسب المساحة المحصورة بين هـ = |٢س| ، ق = ٣ − س²



الحل
٢س ، س ≥ ٠
−٢س ، س < ٠

٣ − س² = −٢س
−س² + ٢س + ٣ = ٠
س² − ٢س − ٣ = ٠
(س − ٣)(س + ١) = ٠
س = ٣ ✗ ، س = −١ ✓

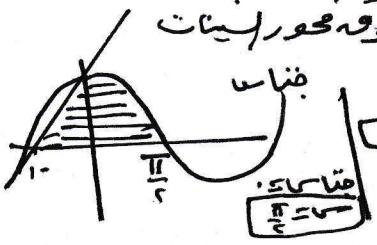
٣ − س² = ٢س ⇐ −س² − ٢س + ٣ = صفر
س² + ٢س − ٣ = صفر
(س + ٣)(س − ١) = ٠
س = −٣ ✗ ، س = ١ ✓



∫₋₁¹ (٣ − س²) − (−٢س) دس + ∫₀¹ (٣ − س²) − (٢س) دس
٣س − س³/٣ + س² |₋₁¹ + ٣س − س³/٣ − س² |₀¹ = ... = ١٠/٣

٦ احسب المساحة بين ق = جتاس ، ص = س + ١ وفوق محور السينات

الحل :-



جتاس = س + ١
س = ٠

س + ١ = ٠
س = −١

جتاس = ٠
س = π/٢

∫₋₁⁰ س + ١ دس + ∫₀^{π/٢} جتاس دس
= ٣/٢

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٧) ق(س) = $\frac{٢}{س}$ ، ص = س − ١ ، س = ٤

٨) ص = $\frac{٣}{س}$ ، ص = س − ٢ ، ص = ٣

واجب

٩) ق = س² ، هـ = ٢ − س ، ص = −٢ ومحور الصادات

الحل:

ق = هـ

س² = ٢ − س

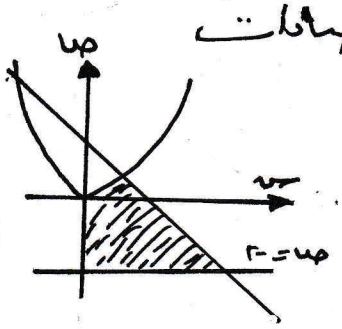
س² + س − ٢ = صفر

(س + ٢)(س − ١) = ٠

س = −٢ / س = ١

هـ = ص

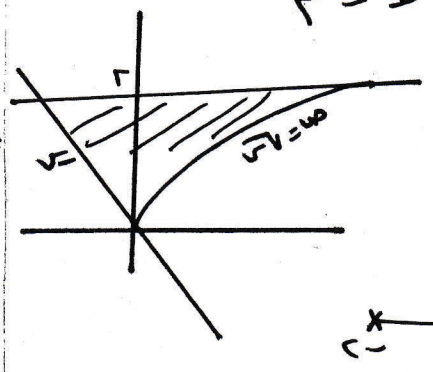
٢ − س = −٢ ← س = ٤



$\int_{٠}^{١} س^٢ - (-٢)\,دس + \int_{١}^{٤} (٢ - س) - (-٢)\,دس$

$= \frac{٤١}{٦}$

١٠) احسب المساحة بين ص = $\sqrt{س}$ ، ق = −س ، هـ = ٢



ص = ق

$\sqrt{س}$ = −س

س = ٠

٢ = $\sqrt{س}$

س = ٤

−س = ٢

س = ٢

$\int_{-٢}^{٠} ٢ - س\,دس + \int_{٠}^{٤} ٢ - \sqrt{س}\,دس$

$٢س + \frac{س^٢}{٢}\Big|_{-٢}^{٠} + ٢س - \frac{٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣}\Big|_{٠}^{٤}$

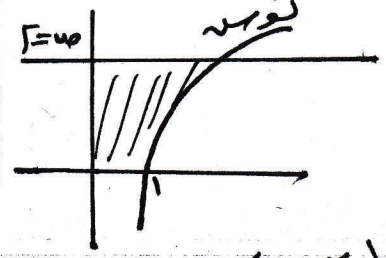
$٠ - (-٤ + ٢) + (٨ - \frac{١٦}{٣}) - (٠) = \frac{١٤}{٣}$

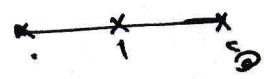
١١) ق(س) = لو س ومحور الصادات ومحور السينات والمستقيم ص = ٢

الحل:

لو س = ٠ | لو س = ٢

س = ١ | س = هـ²





$\int_{٠}^{١} ٢\,دس + \int_{١}^{هـ^٢} ٢ - لو س\,دس$

$٢س\Big|_{٠}^{١} + ٢س\Big|_{١}^{هـ^٢} - \int_{١}^{هـ^٢} لو س\,دس$ ← اجزاء

لما

واجب

١٢) احسب المساحة بين ق = س² − ٤ ، هـ = س + ٢ ، ل = ٢ − س في الربع الاول

١٣) ق(س) = لو س ، ومحور السينات والمستقيم س = هـ

١٣) ق = $\frac{١}{\sqrt{س}}$ ومحور السينات و س = هـ ، س = ١

١٤) ق = س³ ، ص = ١ ، ص = ٨ ، س = صفر

١٥) ق = س ، هـ = $\frac{١}{س}$ ، ص = ٢

١٦) ق = س ، هـ = $\frac{١}{س}$ ، ص = ٢ ، س = صفر

١٧) ق = س² + ٢ ، س + ص = ٤ ، ص = ٤ − س ، س = صفر ، ص = صفر

١٨) ص = س³ ، $\frac{ص}{س}$ = ٤ ،

١٩) ق = س² ، ومحور السينات والمماس لمنحنى ق عند (٢ ، ٤)

الحل: بحاجة لمعرفة معادلة المماس

ق' = ٢س

م = ٢ × ٢ = ٤

المعادلة: ص − ص₁ = م(س − س₁)

ص − ٤ = ٤(س − ٢)

ص = ٤س − ٤

⇐ لدينا: ق = س² / ص = ٤س − ٤ / ومحور السينات

س² = ٤س − ٤

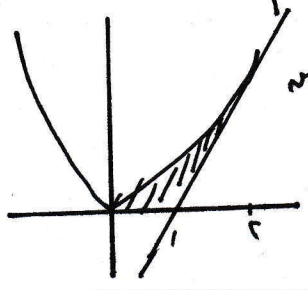
س² − ٤س + ٤ = صفر

(س − ٢)(س − ٢) = ٠

س = ٢

س² = ٠ ، س = ٠

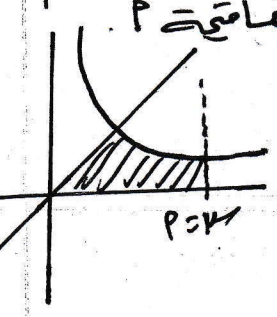
٤س − ٤ = ٠ ، س = ١



$\int_{٠}^{١} س^٢ - ٠\,دس + \int_{١}^{٢} س^٢ - (٤س - ٤)\,دس$

٢٠) اذا كانت المساحة بين محور السينات ومنحنى ص = س ومنحنى ص = $\frac{١}{س}$ والمستقيم س = أ ، أ > ١ تساوي $\frac{٣}{٢}$ فما قيمة أ

الحل: س = $\frac{١}{س}$ ← س² = ١ ← س = ١ ، −١



م = $\int_{٠}^{١} س\,دس + \int_{١}^{أ} \frac{١}{س}\,دس = \frac{٣}{٢}$

$= \frac{س^٢}{٢}\Big|_{٠}^{١} + لو|س|\Big|_{١}^{أ} = \frac{٣}{٢}$

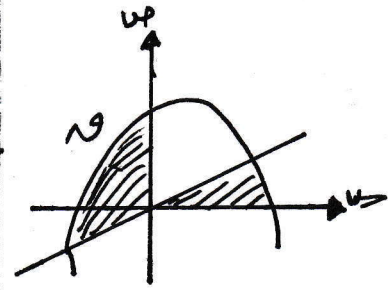
$= \frac{١}{٢} + لو أ - لو ١ = \frac{٣}{٢}$

$\frac{١}{٢} + لو أ = \frac{٣}{٢}$

لو هـ أ = ١ ← أ = هـ

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

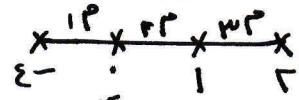
٢١ معتمداً على الرسم المجاور احسب المساحة المحصورة بين ق(س) = ٤ − س² والمستقيم هـ(س) = ٣س



الحل:-
نجد نقاط التقاطع
هـ = ق
٣س = ٤ − س²
س² + ٣س − ٤ = ٠
(س + ٤)(س − ١) = صفر
س = −٤ / س = ١

ق = صفر ⇐ ٤ − س² = ٠ ⇐ س = ٢ ، −٢

م = م١ + م٢ + م٣

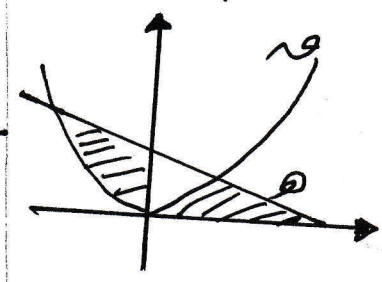


$\int_{-٤}^{٠} (٤ - س^٢) - (٣س) \, دس + \int_{٠}^{١} ٣س - ٠ \, دس + \int_{١}^{٢} ٤ - س^٢ \, دس$

$= \frac{١٣١}{٦}$

٢٢ معتمداً على الرسم المجاور احسب المساحة المظللة بحيث ق = س²
هـ = ٦ − س

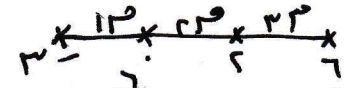
الحل:-
نجد نقاط التقاطع



ق = هـ
س² = ٦ − س
س² + س − ٦ = ٠
(س + ٣)(س − ٢) = ٠
س = −٣ ، س = ٢

هـ يقطع محور السينات ⇐ ٦ − س = ٠ ⇐ س = ٦

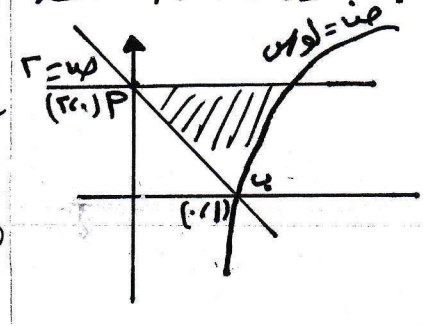
م = م١ + م٢ + م٣



$\int_{-٣}^{٠} (٦ - س) - (س^٢) \, دس + \int_{٠}^{٢} س^٢ - ٠ \, دس + \int_{٢}^{٦} ٦ - س \, دس$

$= \frac{١٤٥}{٦}$

٢٣ معتمداً على الرسم المجاور احسب المساحة المظللة

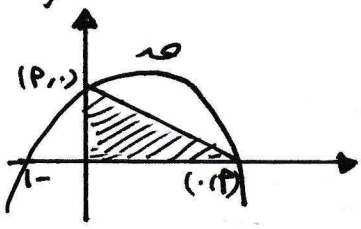


الحل:- نجد معادلة أب = الميل = $\frac{٢ - ٠}{٠ - ١}$ = −٢
المعادلة: ص − ٠ = −٢(س − ١) ⇐ ص = −٢س + ٢
لوس = ٢ ⇐ س = هـ²

م = $\int_{٠}^{١} -٢ - (-٢س + ٣) \, دس + \int_{١}^{هـ^٢} ٢ - لوس \, دس$ ← اجزاء

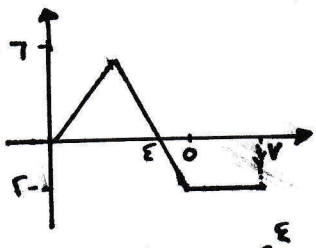
= هـ² − ٢

٢٤ معتمداً على الرسم المجاور اذا كان ق = (١ + س)(أ − س) وكانت مساحة المثلث تساوي ٨ احسب المساحة المحصورة بين ق ومحور السينات



الحل:-
يجب معرفة قيمة أ
(١ + س)(أ − س) = صفر
س = −١ / س = أ
ق يقطع الصادات عند ما س = ٠ ⇐
ق(٠) = (١ + ٠)(أ − ٠) = أ
مساحة المثلث = ½ × أ × أ = ½ أ² = ٨
⇐ أ² = ١٦ ← أ = ٤ ، −٤
نأخذ أ = ٤ ⇐ ق = (١ + س)(٤ − س)
⇐ م = $\int_{-١}^{٤} (١ + س)(٤ - س) \, دس$
= $\int_{-١}^{٤} ٤ + ٣س - س^٢ \, دس = ٤س + \frac{٣س^٢}{٢} - \frac{س^٣}{٣} \Big|_{-١}^{٤}$
= $\frac{١٢٥}{٦}$

٢٥ معتمداً على الرسم المجاور احسب ما يلي



① $\int_{٠}^{٧}$ ق(س) دس
② $\int_{٠}^{٧}$ |ق(س)| دس
③ $\left| \int_{٠}^{٧}$ ق(س) دس $\right|$
④ المساحة بين ق ومحور السينات على [٠، ٧]

الحل: م١ = ½ × ٤ × ٦ = ١٢ ⇐ $\int_{٠}^{٤}$ ق(س) دس = ١٢
م٢ = ½ × ١ × ٢ = ١ ⇐ $\int_{٤}^{٥}$ ق(س) دس = −١
م٣ = ٢ × ٢ = ٤ ⇐ $\int_{٥}^{٧}$ ق(س) دس = −٤

① $\int_{٠}^{٧}$ ق(س) دس = ١٢ + (−١) + −٤ = ٧
② $\int_{٠}^{٧}$ |ق(س)| دس = ١٢ + ١ + ٤ = ١٧
③ $\left| \int_{٠}^{٧}$ ق(س) دس $\right|$ = |١٢ + −١ + −٤| = ٧
④ م = م١ + م٢ + م٣ = ١٧