٢	١	١	٢

المملكة الأردنية الهاشمية

وزارة التربية والتعليم
إدارة الامتحانات والاختبارات
قسم الامتحانات العامة

١
١
٢

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١١ / الدورة الصيفية ..

(وثيقة محمية/محدود)

المبحث : الرياضيات/المستوى الرابع
الفرع : العلمي والإدارة المعلوماتية (المسار ٢)

مدة الامتحان : ٠٠ : ٢ د ٠٠ س
اليوم والتاريخ : السبت ٢٠١١/٧/٢

ملحوظة : أجب عن الأسئلة الآتية جميعها وعددها (٦)، علماً بأن عدد الصفحات (٤).

السـؤال الأول : (١٨ علامة)

جـد التكاملات الآتية :

أ) $\int$ قا^{٢} $\sqrt{س}$ دس (٦ علامات)

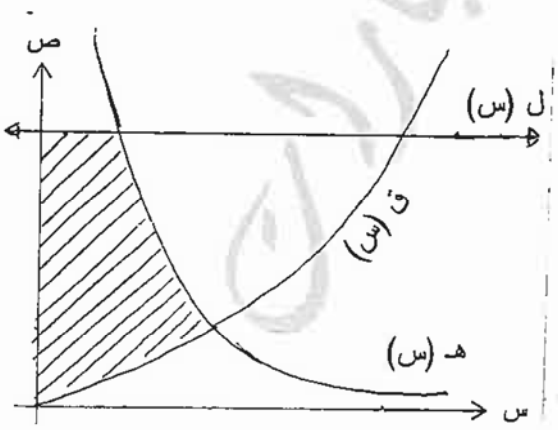
ب) $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\pi}$ جا^{٢}س جتا^{٢}س دس (٥ علامات)

ج) $\int \frac{٤ \text{ دس}}{س^{٣} + س}$ ، س > ٠ (٧ علامات)

السـؤال الثاني : (١٥ علامة)

أ) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{\sqrt{هـ ص}}{١ - جتا^{٢}س}$ ،
فجـد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ٠)$ (٦ علامات)

ب) جـد مساحة المنطقة المظللة بالشكل المجاور حيث
ق (س) = س^{٢} ، هـ (س) = $\frac{١}{س^{٢}}$ ، ل (س) = ٤



(٩ علامات)

يتبع الصفحة الثانية ...

السـؤال الثالث : (٢٤ علامة)

أ) قطع زائد مركزه النقطة (٢ ، ١) وإحدى بؤرتيه النقطة (٢ ، −٢) وبُعده البؤري ثلاثة أمثال طول محـوره القاطع، جـد كلاً مما يأتي لهذا القطع : (٩ علامات)

١) إحداثيات كل من الرأسين. ٢) الاختلاف المركزي. ٣) معادلة القطع.

ب) قطع ناقص معادلته $(٢ص + ٤)^{٢} + (٣ - س)^{٢} = ٦٤$، جـد كلاً مما يأتي لهذا القطع : (٨ علامات)

١) إحداثيي المركز. ٢) إحداثيات كل من الرأسين. ٣) إحداثيات كل من البؤرتين.

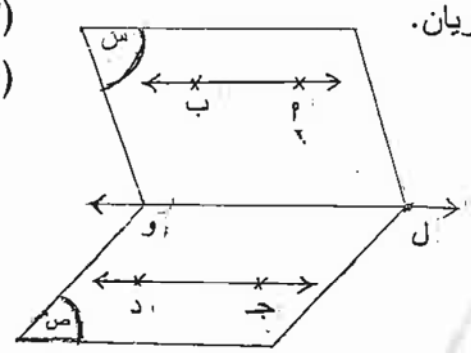
ج) جـد معادلة الدائرة التي يقع مركزها في بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته

$ص = \frac{١}{٤} س^{٢} + س + ٣$ وتمس دليله. (٧ علامات)

السـؤال الرابع : (١٢ علامة)

أ) برهن أن المستقيمين العموديين على مستوى واحد متوازيان. (٧ علامات)

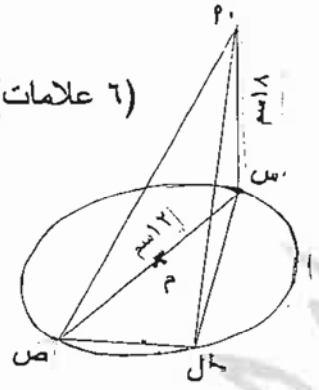
ب) في الشكل المجاور س ، ص مستويان متقاطعان في المستقيم $\overleftrightarrow{ل و}$ ، المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ يقع في المستوى س ويوازي المستوى ص ، المستقيم $\overleftrightarrow{جـ د}$ يقـع فـي المستوى ص ويوازي $\overleftrightarrow{ل و}$ ، أثبت أن : (٥ علامات)



١) $\overleftrightarrow{أ ب} \parallel \overleftrightarrow{جـ د}$ ٢) $\overleftrightarrow{ل و} \parallel$ المستوى أ ب د جـ

السـؤال الخامس : (١١ علامة)

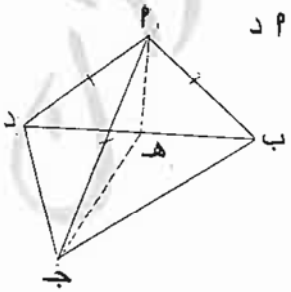
أ) في الشكل المجاور دائرة مركزها م، $\overline{س ص}$ قطر فيها طوله ١٢ سم، ل نقطة على الدائرة بحيث ل ص = ٦ سم، رُسمت $\overline{أ س}$ عمودية على مستوى الدائرة بحيث أ س = ١٨ سم، أجب عما يأتي : (٦ علامات)



١) أثبت أن قياس الزاوية الزوجية $(أ ، \overleftrightarrow{ل ص} ، س)$ هو قياس الزاوية المستوية أ ل س.

٢) جـد قياس الزاوية الزوجية $(أ ، \overleftrightarrow{ل ص} ، س)$

ب) في الشكل المجاور أ ب جـ د هرم ثلاثي فيه أ ب = أ جـ = أ د ، قياس الزاوية ب جـ د = ٩٠°، هـ منتصف $\overline{ب د}$ أثبت أن $\overline{أ هـ}$ ⊥ المستوى ب جـ د (٥ علامات)



يتبع الصفحة الثالثة ...

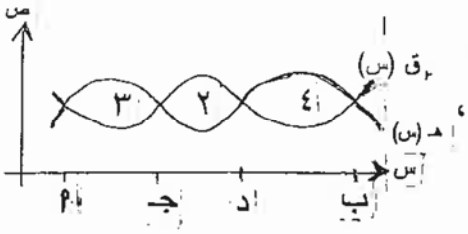
السـؤال السادس : (٢٠ علامة)

يتكون هذا السؤال من (١٠) فقرات من نوع الاختيار من متعدد، يلي كل فقرة (٤) بدائل، واحد منها فقط صحيح. انقل إلى دفترِ إجابتك رقم الفقرة وبجانبه رمز الإجابة الصحيحة لها:

(١) إذا كان ق (س) = $\int_{-٢}^{أ}$ (٤ دس – ٣ س^{٢}) دس فإن قَ (–١) =

أ) –١١ ب) صفر ج) ١ د) –٣

(٢) إذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين في الفترة [أ ، ب] ، وكانت مساحات المناطق بين الاقترانين كما هو مُبيّن في الشكل المجاور، فإن $\int_{جـ}^{ب}$ (ق (س) – هـ (س)) دس =



أ) ٦ ب) –٢ ج) ٢ د) –٥

(٣) إذا كان $\int_{١}^{٢}$ (٢ ق (س) – ٤) دس = ٦ ، وكان $\int_{٤}^{٣}$ ق (س) دس = –١ ، فجد $\int_{١}^{٤}$ ق (س) دس

أ) ٧ ب) ٨ ج) ٥ د) ١٥

(٤) إذا كان ق (س) = $\frac{هـ^{س} + ١}{هـ^{س}}$ ، فجد قَ (٠)

أ) صفر ب) ١ ج) –١ د) غير موجودة

(٥) إحداثيات نهايتي المحور المرافق للقطع الزائد $(س + ٢)^{٢} - (ص - ٣)^{٢} = ١$ هي :

أ) (–٢ ± ١ ، ٣) ب) (–٢ ، ٣ ± ١) ج) (٢ ± ١ ، –٣) د) (٢ ، –٣ ± ١)

(٦) طول المحور الأصغر للقطع الناقص الذي يمس كلاً من المستقيمات س = ١ ، س = ٩ ، ص = –١ ، ص = ٥ يســـاوي :

أ) ٨ ب) ٦ ج) ٤ د) ٣

(٧) تتحرك النقطة ن (س ، ص) بحيث يتحدّد موقعها بالمعادلة $\frac{س^{٢}}{ل} + \frac{ص^{٢}}{ل - ١٦} = ١$ ، ل عدد ثابت

إذا كانت ٠ < ل < ١٦ فإن المحل الهندسي لحركة النقطة ن يُمثّل :

أ) قطعاً مكافئاً ب) قطعاً ناقصاً ج) قطعاً زائداً د) دائرة

يتبع الصفحة الرابعة ...

(٨) ما رقم العبارة الصحيحة من بين العبارات الآتية :

١) يمكن أن يكون طول مسقط القطعة المستقيمة أكبر من طول القطعة نفسها.

٢) إذا لم يتقاطع مستقيمان لا يمكن أن يتقاطع مسقطاهما.

٣) الزاوية الزوجية هي اتحاد نصفي مستويين.

٤) يمكن أن يتعامد المستقيمان المتخالفان.

أ) ٤ ب) ٣ ج) ٢ د) ١

(٩) س ، ص ، ع ، ل رؤوس هرم ثلاثي، ما عدد جميع المستويات التي يمر كل منها بالنقاط الأربع معاً؟

أ) ٠ ب) ١ ج) ٣ د) ٤

(١٠) عدد أحرف المكعب التي توازي مستوى قاعدته :

أ) ٨ ب) ٦ ج) ٢ د) ٤

(انتهت الأسئلة)

بسم الله الرحمن الرحيم

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١١ (الدورة الصيفية).

صفحة رقم (١)

صححه

وزارة التربية والتعليم
إدارة الامتحانات والاختبارات
قسم الامتحانات العامة

المبحث : الرياضيات / المستوى الرابع
الفرع : العلمي والادارة المعلوماتية (المسار ٢)

مدة الامتحان : د س / ٢
التاريخ : ٢٠١١/٧/٣

الإجابة النموذجية :

رقم الصفحة في الكتاب

السؤال الاول : (١٨ علامة)

(أ) (P) $\int \tan^2 x \, dx$

نفرض أن $u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \tan x \, dx$ ①

$\int \tan^2 x \sec x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx$

$= \int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx$

$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx$ ①

$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx$ ①

$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \ln|\sec x + \tan x| + c$ ①

$2\int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + c$ ①+①

$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$

(ب) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x \, dx$ ①

$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4}\sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \, dx$ ①+①

$= \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin^2 2x + \sin^2 2x \cos 2x) \, dx$

$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin^3 2x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$ ①+①

$= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

(ج) $\int \frac{4}{x^3 + x} \, dx = \int \frac{4}{x(x^2+1)} \, dx$ نفرض أن $x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta \, d\theta$

$\int \frac{4}{x^3 + x} \, dx = \int \frac{4}{\tan\theta(\tan^2\theta + 1)} \cdot \sec^2\theta \, d\theta$ ①

$= \int \frac{4}{\tan\theta} \, d\theta$

$= 4\ln|\sin\theta| + c$ ①

$= 4\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + c$ ①

$= 2\ln\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right| + c$ ①

$\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{4}{x(x^2+1)}$

$A(x^2+1) + (Bx + C)x = 4$

$(A + B)x^2 + Cx + A = 4$

$A + B = 0$ ، $A = 4$ ومنها $B = -4$ ، $C = 0$ ①

$\int \frac{4}{x(x^2+1)} \, dx = \int \frac{4}{x} \, dx + \int \frac{-4x}{x^2+1} \, dx$ ①

$= 4\ln|x| - 2\ln|x^2+1| + c$ ①

$= 2\ln|x^2| - 2\ln|x^2+1| + c$

رقم الصفحة في الكتاب

السؤال الثاني: (١٥ علامة)

٦) أ) $\frac{ص}{س} = \frac{ظاس}{1-ظاس} \Leftarrow \frac{ص}{س} = \frac{ص}{ظاس}$ ①

$\frac{ص}{ظاس} = \frac{س}{جاس} \Leftarrow ص = ظاس \times س$ أي الخطوة ① صحيحة

$ص = ظاس \times س \Leftarrow ص = ظاس \times س$ ① + ①

$ص = \frac{1}{2} ظاس + جـ$ حيث $جـ = -\frac{1}{2}$

المنحنى يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{4}, 0)$

$1 = \frac{1}{2} \times 1 + جـ \Leftarrow جـ = \frac{1}{2}$ ①

$ص = \frac{1}{2} ظاس + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(ظاس + 1)$

$\frac{ص}{س} = \frac{1}{2}(ظاس + 1)$

$ص = \frac{1}{2} \int (ظاس + 1)$ ⊕

٦) ب) نجد نقط التقاطع

$س^2 = \frac{1}{س^2} \Leftarrow س^4 = 1 \Leftarrow س = \pm 1$ نهمل الجذر السالب ①

$\frac{1}{س^2} = 4 \Leftarrow س^2 = \frac{1}{4} \Leftarrow س = \pm \frac{1}{2}$ نهمل الجذر السالب ①

$م = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \{(4 - س^2) - (\frac{1}{س^2} - س^2)\} س$ ⊕ + ⊕

$= \left| (4س - \frac{1}{3} س^3) + (-\frac{1}{س} - \frac{1}{3} س^3) \right|_{\frac{1}{2}}^{1}$ ① + ①

$= (4 - \frac{1}{3}) + (-1 - \frac{1}{3}) - (2 - \frac{1}{24}) - (-\frac{1}{12} - \frac{1}{24})$ ① + ①

$= 2 - \frac{1}{24} + 2 + \frac{4}{3} - \frac{1}{24}$

$= 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ وحدة مربعة

أي بديل صحيح يأخذ العلامة ①

رقم الصفحة في الكتاب

التعويض P، ن إذا كتب المطلوب مباشرة بأحد علامات فقط فيصبح فرع P صـ ٤، فرع ن صـ ٤ (٤ علامات)

السؤال الثالث:

(٩) أ) ١) ح = ١ - (-٢) = ٣ ①

ح = ٢ق × ٣ = P ⇐ P٣ = ح ①

إذن P = ١ ①

الرأس (٥ ± P ، ٥ ح) ⇐ (٢ ، ٥) ، (٠ ، ٢) ① + ① لكل رأس علامتان

٢) الانفلات المركزي = ح/P = ٣/٣ = ١ ① + ① العلامتان للجوابين

٣) ب٢ = ح٢ - P٢ = ٩ - ١ = ٨ ① العلامتان للجوابين

الصورة العامة لمعادلة هذا القطع (ص - هـ)٢/P٢ - (س - ك)٢/ب٢ = ١ ①

معادلة القطع (ص - ١)٢/١ - (س - ٢)٢/٨ = ١ ①

(٨) ب) يمكن كتابة معادلة القطع على الصورة ٤(ص + ٢)٢ + (س - ٣)٢ = ٦٤ ①

(س - ٣)٢/٦٤ + (ص + ٢)٢/١٦ = ١ ①

١) المركز (٣ ، -٢) ① إذا وضع إشارة - بين القوسين وأكمل الحل وصل لقطع ناقص ثم صح

٢) ٦٤ = P٢ ⇐ P = ٨ ① خمس علامات P ، ح ، والمعادلات تحسب علامات

الرأسان (٥ ± P ، ٥ ح) = (٣ ± ٨ ، -٢)

البؤرتان (١١ ، -٢) ، (-٥ ، -٢) ① + ①

٣) ح٢ = P٢ - ب٢ = ٦٤ - ١٦ = ٤٨ ⇐ ح = ٤√٣ ①

البؤرتان (٥ ± ح ، ٥ هـ) = (٢ ± ٤√٣ ، -٢) ①

(٧) هـ) ص = ١/٤ (س٢ + ٤س) + ٣ الكمال صحيح

ص = ١/٤ (س٢ + ٤س + ٤) + ٣ - ١ ①

= ١/٤ (س + ٢)٢ + ٢

ص - ٢ = ١/٤ (س + ٢)٢ ⇐ (س + ٢)٢ = ٤ (ص - ٢) ①

الرأس (-٢ ، ٢) ① ، ٤ ح = ٤ ⇐ ح = ١ ①

البؤرة (٥ ، ح + هـ) = (-٢ ، ٣) وهو مركز الدائرة ①

طول نصف قطر الدائرة = ٢ ح = ٢ ①

معادلة الدائرة

(س - م)٢ + (ص - ن)٢ = نق٢ حيث (م ، ن) مركز الدائرة

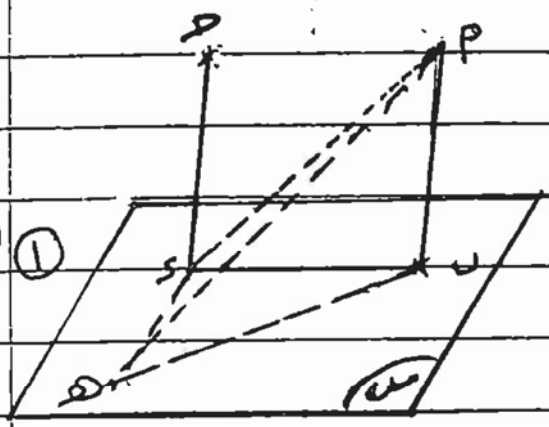
(س + ٢)٢ + (ص - ٣)٢ = ٤ ①

رقم الصفحة في الكتاب

السؤال السادس: (٢٠ علامة) علامتان لكل فقرة

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة	أ	ب	ب	جـ	ب	ب	جـ	أ	أ	د
الإجابة	-١١	-٢	٨	-١	(±٣٦٠-)	٦	قطع زائد	٤	٠	٤

السؤال الرابع: (١٢ علامة)



(٧) أ) المعطيات

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{هـد}$ عموديان على المستوى س

ويتقاطعان معه في النقطتين ب ، د

على الترتيب

المطلوب: اثبات أن $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{هـد}$

للرسم ①

العمل: ارسم المستقيم $\overleftrightarrow{هـجـ}$ في المستوى س بحيث يكون عموديًا على $\overleftrightarrow{بد}$

البرهان:

① صل $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أهـ}$ ، $\overline{بهـ}$

① $(أهـ)^2 = (أب)^2 + (بهـ)^2$ (لأن الزاوية أبهـ قائمة)

① $= (أب)^2 + (بد)^2 + (دهـ)^2$ (لأن الزاوية بدهـ قائمة)

① $= (أجـ)^2 + (دهـ)^2$

إذن الزاوية أجـهـ قائمة

① $\overline{أجـ}$ ، $\overline{دهـ}$ ، $\overline{دجـ}$ تقع في مستوى واحد وليكن ص (نظرية)

① المستقيمان $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{هـد}$ عموديان على $\overleftrightarrow{دجـ}$

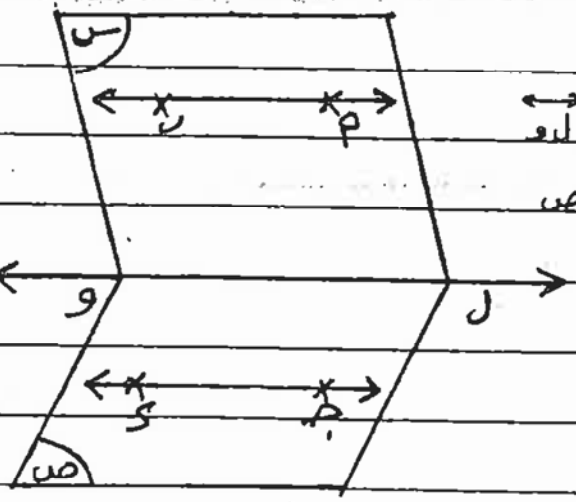
(لأنهما يقطعانه ~~في المستوى س~~)

ويقطعانه في المستوى ص

إذن $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{هـد}$

رقم الصفحة في الكتاب

السؤال الرابع :



(٥) س) المعطيات :

س ، ص مستويان متقاطعان في المستقيم $\overleftrightarrow{لو}$

$\overleftrightarrow{مP}$ يقع في المستوى س ، $\overleftrightarrow{مP}$ // المستوى ص

$\overleftrightarrow{دك}$ يقع في المستوى ص ، $\overleftrightarrow{دك}$ // $\overleftrightarrow{لو}$

المطلوب : اثبات أن

① $\overleftrightarrow{مP}$ // $\overleftrightarrow{دك}$

② $\overleftrightarrow{لو}$ // المستوى مPكد

البرهان :

١) $\overleftrightarrow{مP}$ مرسوم في المستوى س ، $\overleftrightarrow{مP}$ // المستوى ص ، المستويان س ، ص متقاطعان في $\overleftrightarrow{لو}$ إذن $\overleftrightarrow{مP}$ // $\overleftrightarrow{لو}$ ..... (١) (نظرية) ①

المستقيم $\overleftrightarrow{دك}$ // $\overleftrightarrow{لو}$ ..... (٢) (بالفرض) ①

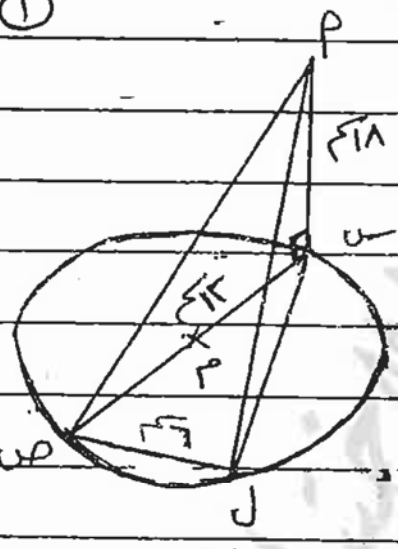
من (١) و (٢) نستنتج ان $\overleftrightarrow{مP}$ // $\overleftrightarrow{دك}$ (نتيجة) ①

٢) المستقيمان المتوازيان $\overleftrightarrow{مP}$ ، $\overleftrightarrow{دك}$ يحددان المستوى مPكد

$\overleftrightarrow{لو}$ // $\overleftrightarrow{مP}$ الواقع في المستوى مPكد ، $\overleftrightarrow{لو}$ خارج المستوى مPكد ①

إذن $\overleftrightarrow{لو}$ // المستوى مPكد (نظرية) ①

السؤال الخامس : (العلاقات)



(٦) م) المعطيات :

$\overline{سص}$ قطر في الدائرة التي

مركزها م ، س ص = ١٢ سم

ل نقطة على الدائرة ، ل ص = ٦ سم

$\overline{مس}$ ⊥ مستوى الدائرة ، مس = ١٨ سم

المطلوب :

١) اثبات ان قياس الزاوية الزوجية (م ، $\overleftrightarrow{لص}$ ، س) هو قياس الزاوية المستوية م ل س

٢) ايجاد قياس الزاوية الزوجية (م ، $\overleftrightarrow{لص}$ ، س)

رقم الصفحة في الكتاب

تابع السؤال الخامس

أ) البرهان: الزاوية س ل ص قائمة لذا محيطية تقابل نقطة P ∴ $\overline{PL}$ قائل على مستوى لدائرة ومقطه س ل ⊥ $\overleftrightarrow{L ص}$ ①

اذن $\overline{PL} \perp \overleftrightarrow{L ص}$ (عكس نظرية الأعمدة الثلاث) ①

أي انه الخط $\overleftrightarrow{L ص}$ ⊥ كل من س ل، $\overline{PL}$ الواقعين في المستويين س ل ص، P L ص على الترتيب التبرير بأي طريقة يأخذ العلامة ①

إذن قياس الزاوية الزوجية (P، $\overleftrightarrow{L ص}$، س) هو قياس الزاوية المستوية P ل س ①

ج) $(س ل)^2 = (١٢)^2 - (٦)^2$ لان الزاوية س ل ص قائمة

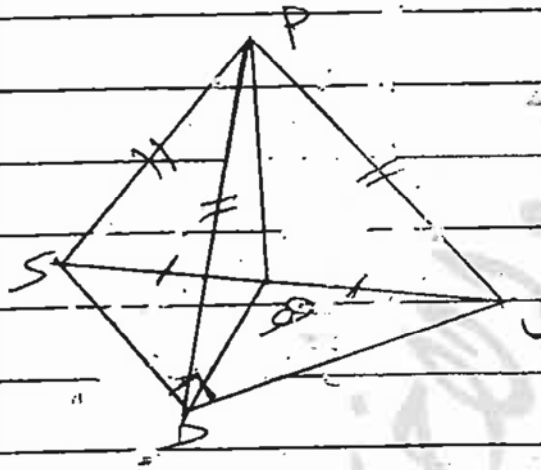
$= ١٤٤ - ٣٦ = ١٠٨$

$س ل = \sqrt{١٠٨} = ٦\sqrt{٣}$ سم ①

ظا $\angle P ل س = \frac{١٨}{٦\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}$ لأن الزاوية P ص ل قائمة.

$\therefore ق(\angle P ل س) = ٦٠°$ ①

ب) المعطيات:



P ل ص ع ثلاثي فيه

P ل = P ص = P ع، ق(∠ ل P ع) = ٩٠°

هـ منتصف $\overline{ل ع}$

المطلوب: إثبات أن

$\overline{P هـ}$ ⊥ المستوى ل ص ع

البرهان:

$\overline{P هـ}$ ⊥ $\overline{ل ع}$ في النقطة هـ لأنه $\overline{P هـ}$ واصلة من رأس مثلث متساوي الساقين الى منتصف القاعدة ①

نظيفه المثلثين P هـ ب، P هـ ع فيهما $\overline{P هـ}$ مشترك، P ل = P ع (بالفرض)

هـ هـ = ل هـ (هـ هـ واصلة من رأس القائمة الى منتصف الوتر تساوي نصف الوتر) ①

ينتج من الاثباته أن

ق(∠ P هـ ل) = ق(∠ P هـ ع) = ٩٠° ①

إذن $\overline{P هـ}$ ⊥ المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{ل ع}$، $\overleftrightarrow{ص هـ}$ ①

إذن $\overline{P هـ}$ ⊥ المستوى ل ص ع ①

أنتهت الاجابات.

حلول أخرى

⑤ س ا فرع ب : $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ظا}^3 س \text{ جتا}^3 س \, د س$

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{جتا}^2 س)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{جتا}^2 س) \, د س$ ①

$= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \text{جتا}^2 س) \, د س = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ظا}^2 س \, د س$ ①

$= \frac{1}{8} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \text{جتا} 4 س) \, د س$ ①

$= \frac{1}{8} [س]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{32} \text{جا} 4 س]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$ ①

$= \frac{1}{8} (\frac{\pi}{2} + 0) - \frac{1}{32} (0 + \text{جا} \frac{4\pi}{3})$ ①

---

⑦ س ا فرع جـ

$\int \frac{4}{س^3 + س} \, د س = \int \frac{4}{س (1 + س^2)} \, د س$ ① + ①

$= \int \frac{4 س}{1 + س^2} \, د س = 2 \int \frac{2 س}{1 + س^2} \, د س$ ① ①

$= 2 \text{ لو} |1 + س^2| + ث$

② ①

(*) إذا فرض ص = $1 + س^2$ وأوجد $د س = \frac{د ص}{2 س}$

ثم أكمل الحل بدون كما في الحل الموجود في الأعلى.

س١ فرع هـ (٧)

$$\int \frac{٤}{س^٣ + س}\, د س = \int \frac{٤}{س^٣ (١ + \frac{١}{س^٢})}\, د س \quad (١)$$

نفرض أن $ص = ١ + \frac{١}{س^٢} \Leftarrow د س = -\frac{١}{٢} س^٣\, د ص$ (١)

$$\therefore = \int \frac{٤}{س^٣ ص} \times \frac{س^٣}{-٢}\, د ص = \int \frac{-٢}{ص}\, د ص \quad (١)$$

$$= -٢ \log_{هـ} |ص| + ح = -٢ \log_{هـ} |١ + \frac{١}{س^٢}| + ح \quad (١)$$

س١ فرع هـ (٧) (*)

$$\frac{٤}{س^٣ + س} = \frac{ب}{١ + س^٢} + \frac{ا}{س} = \frac{ا(١ + س^٢) + ب س}{س(١ + س^٢)} \quad (١)$$

$$٤ = ا(١ + س^٢) + ب س^٢ = ا + ا س^٢ + ب س^٢ + ب س$$

$$ا + ب = ٠ \quad (١) \qquad ا = ٤ \quad (١)$$

$$\therefore = \int \frac{٤}{س}\, د س - \text{صفر}$$

$$= ٤ \log_{هـ} |س| + ح \quad (١)$$

(*) صحيح هذا الحل ص (٥) لأن البسط الثاني يجب أن يكون $ب س + ك$ حيث $ب \neq ٠$ ثابتان.

س٢ فرع ب (٩)

اذا اعتبر أن هـ(س) = $\frac{١٠}{س^٤}$ سيكون الحل

$س^٤ = \frac{١٠}{س^٤} \Leftarrow س^٤ = ١٠ \Leftarrow س = \sqrt[٤]{١٠}$ (١)

$\frac{١٠}{س^٤} = ٤ \Leftarrow ٤س^٤ = ١٠ \Leftarrow س^٤ = \frac{١٠}{٤} \Leftarrow س = \frac{\sqrt[٤]{١٠}}{\sqrt[٤]{٤}}$ (١)

$م = \int_{\frac{\sqrt[٤]{١٠}}{\sqrt[٤]{٤}}}^{\sqrt[٤]{١٠}} (٤ - س^٤)\,د س + \int_{\frac{\sqrt[٤]{١٠}}{\sqrt[٤]{٤}}}^{\sqrt[٤]{١٠}} (\frac{١}{س^٤} - س^٤)\,د س$ (١) (١)

$= (٤س - \frac{١}{٣}س^٣)\Big|_{\frac{\sqrt[٤]{١٠}}{\sqrt[٤]{٤}}}^{\sqrt[٤]{١٠}} + (-\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}س^٣)\Big|_{\frac{\sqrt[٤]{١٠}}{\sqrt[٤]{٤}}}^{\sqrt[٤]{١٠}}$ (١)

$= ٤ \times \sqrt[٤]{١٠} - \frac{١}{٣}(\sqrt[٤]{١٠})^٣ - [\frac{١}{\sqrt[٤]{١٠}} + \frac{١}{٣}(\sqrt[٤]{١٠})^٣] - (\frac{١}{\sqrt[٤]{١٠}} + \frac{١}{٣}(\sqrt[٤]{١٠})^٣)$ (١)

تبسيط الاجابة (١)

س٢ فرع ب (٩)

ل(س) = هـ(س)

$٤ = \frac{١}{س^٤} \Leftarrow س^٤ = \frac{١}{٤} \Leftarrow س = \pm\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (١)

هـ(س) = هـ(س)

$س^٤ = \frac{١}{س^٤}$ (١)

$س^٤ = ١ \Leftarrow س = \pm ١$

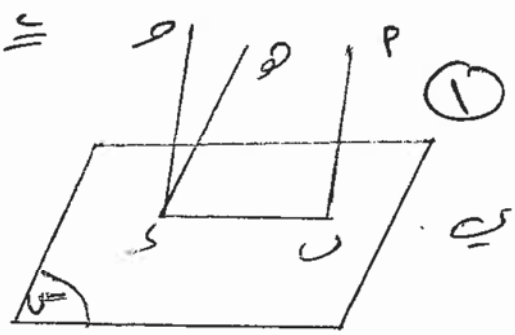
مساحة المنطقة المظللة (١)

= مساحة المستطيل $- \int_{-١}^{١} (٤ - \frac{١}{س^٤})\,د س$ (١)

$= ٤ - [\frac{س^٣}{٣} + ٤س + \frac{١}{س}]_{-١}^{١}$ (١)

$= ٤ - [\frac{١}{٣} + ٤ + ١ - (-٤ - ١)]$ (١)

$= ٤ - \frac{٤}{٣} = \frac{٨}{٣}$ وحدة مربعة (١)



مسـ ٤ فرع P ⓥ

نفرض أن $\overleftrightarrow{ل P}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{ك د}$ ①

اذن يمكن رسم مستقيم من النقطة د يوازي المستقيم $\overleftrightarrow{ل P}$ ولكنه $د ه$ ①

(من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط يوازيه)

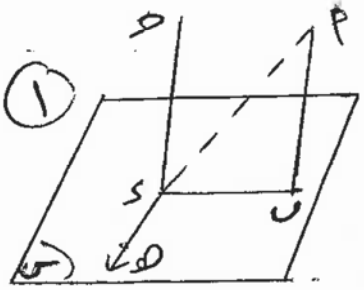
وبما أن $\overleftrightarrow{ل P} \perp س$ (معطيات) ①

$\overleftrightarrow{P ل} \parallel \overleftrightarrow{د ه}$ (بالبرهان) ① $\Leftarrow \overleftrightarrow{د ه} \perp س$ ①

(إذا توازى مستقيمان وكان أحدهما عموديا على المستوى فإن الآخر يكون عموديا على المستوى نفسه) نتيجة

اذن يمكن رسم عمودان على المستوى س من النقطة د وهذا ① تناقض (لا يمكن رسم أكثر من عمود على مستوى من نقطة واحدة)

اذن $\overleftrightarrow{ل P} \parallel \overleftrightarrow{ك د}$ ①



مسـ ٤ فرع P ⓥ

العمل: نرسم المستقيم $\overleftrightarrow{ه د}$ في المستوى س عموديا على $\overleftrightarrow{ك د}$

البرهان: نصل $\overline{P د}$ ①

$\overleftrightarrow{P ل} \perp$ المستوى س فهو عمودي على جميع المستقيمات في المستوى

اذن $\overleftrightarrow{P ل} \perp \overleftrightarrow{ه د}$ ... (*) ، $\overleftrightarrow{ل د} \perp \overleftrightarrow{ه د}$ بالعمل. (**)

من (*) ، (**) $\overleftrightarrow{ه د} \perp$ كل من $\overleftrightarrow{P ل}$ ، $\overleftrightarrow{ل د}$ ①

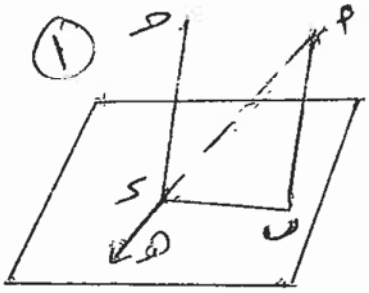
اذن $\overleftrightarrow{ه د} \perp$ المستوى P ل ك (نظرية) ①

اذن $\overleftrightarrow{ه د} \perp \overline{P د}$ ①

نكمل الاشياء كما ورد في حل الوزارة ونضع علاماته لباقي الاشياء

=

نتيجة فرع م ⇐



العمل: نصل $\overleftrightarrow{Pك}$ ، نرسم $\overleftrightarrow{كهـ} \perp \overleftrightarrow{نك}$

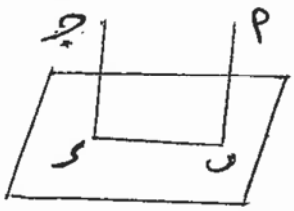
$\overleftrightarrow{Pن} \perp$ المستوى س ، $\overline{Pك}$ مائل على المستوى س

$\overline{نك}$ مسقط المائل $\overline{Pك}$ ، $\overleftrightarrow{نك} \perp \overleftrightarrow{كهـ}$ بالعمل

اذن $\overleftrightarrow{Pك} \perp \overleftrightarrow{كهـ}$ (عكس نظرية الأعمدة الثلاث)

نكمل باقي الاثبات كما ورد في حل الوزارة وبأي خط علاقة له في الاثبات.

نتيجة فرع م ⇐



البرهان: نفرض أن $\overleftrightarrow{Pن}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{كن}$

إما أن $\overleftrightarrow{Pن}$ يقطع $\overleftrightarrow{كن}$ في نقطة مثل ن أو $\overleftrightarrow{Pن}$ يخالف $\overleftrightarrow{كن}$ ①

أولاً: اذا كان $\overleftrightarrow{Pن}$ يقطع $\overleftrightarrow{كن}$ في ن فهما يقعان في مستوى واحد ولكن ص.

$\overleftrightarrow{نن}$ ، $\overleftrightarrow{نك}$ ، $\overleftrightarrow{نك}$ مستقيمات تقع في ص ①

ن خارج $\overleftrightarrow{نك}$ ، $\overleftrightarrow{نن}$ ، $\overleftrightarrow{نك}$ يمرّ بان عن $\overleftrightarrow{نك}$ وهذا يناقض حقيقة إحداثيات ركن مستقيم يقاطع مستقيم آخر في نقطة خارجه ①

اذن $\overleftrightarrow{Pن}$ ، $\overleftrightarrow{كن}$ لا يتقاطعان.

ثانياً: المستقيمان متخالفان

بما أن $\overleftrightarrow{Pن} \perp$ س ، $\overleftrightarrow{Pن}$ يقطع $\overleftrightarrow{نك}$ فإنه المستوى Pن ك ⊥ س ①

(إذا عامد مستقيم مستوى فكل مستوى صار بالمستقيم يعامد هذا المستوى) . المستويان يتقاطعان في $\overleftrightarrow{نك}$ ... (*)

كذلك $\overleftrightarrow{كك} \perp$ س ، $\overleftrightarrow{كك}$ يقطع $\overleftrightarrow{نك}$

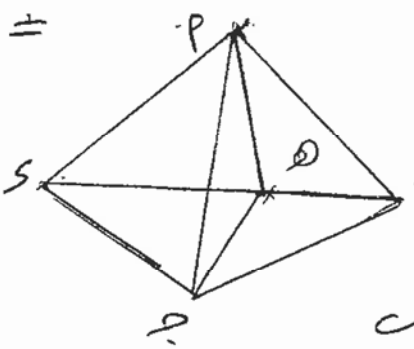
اذن المستوى ح ن ك ⊥ س ، والمستويان يتقاطعان في $\overleftrightarrow{نك}$ ①

(**) ...

من (*) ، (**) يتعامد مستويان مع مستوى واحد وقطعاتهما في الخط نفسه وهذا تناقض ①

اذن المستوى Pن ك يقطع المستوى ح ن ك

أي أن $\overleftrightarrow{Pن}$ ، $\overleftrightarrow{كن}$ غير متخالفين.



مسألة فرعية ب ⑤

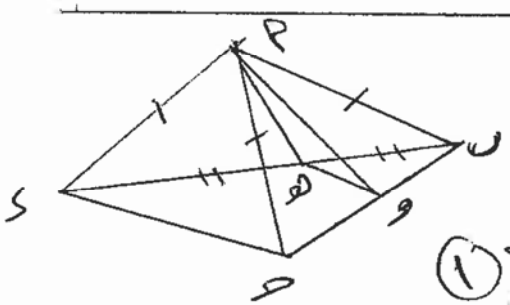
البرهان: $\overline{Pه} \perp \overline{بك}$ في النقطة هـ ① تطابق
متوسطة في المثلث Pبك المتساوي الساقين)
هـ = ب هـ (هـ هـ حاملة من رأس القائمة إلى
منتصف الوتر). ①

$(Pب)^2 = (بهـ)^2 + (Pهـ)^2$ ، لكن $Pب = Pحـ$ ، هـ = ب هـ

إذن $(Pحـ)^2 = (هـحـ)^2 + (Pهـ)^2 \Leftarrow$ حـ $\angle Phحـ = 90°$ ①

إذن $\overline{Pه} \perp$ المستقيمين $\overleftrightarrow{بك}$ ، $\overleftrightarrow{هـه}$ ①

إذن $\overline{Pه} \perp$ المستوى ب هـ ك ①



مسألة فرعية ب ⑤

الحل: منتصف $\overline{بحـ}$ في هـ ①

البرهان: $\overline{وه} // \overline{كحـ}$ (القطعة المستقيمة ①
الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث تساوي نصف الضلع الثالث وتوازيه)

لكن $\overline{كحـ} \perp \overline{بحـ}$ (معطيات)

إذن $\overline{وه} \perp \overline{بحـ}$

① $\overline{Pه} \perp \overline{بحـ}$ (قطعة واصلة من رأس المثلث إلى
منتصف الضلع المقابل في مثلث متساوي الساقين) ... (*)

$\overline{بحـ} \perp \overline{هو}$ ، $\overline{Pو}$

إذن $\overline{بحـ} \perp$ المستوى Pوه ①

إذن $\overline{Pه} \perp \overline{بحـ}$

لكن $\overline{Pه} \perp \overline{بك}$ كما سبق في (*)

إذن $\overline{Pه} \perp \overline{بحـ}$ ، $\overline{بك}$ ①

إذن $\overline{Pه} \perp$ المستوى ب حـ ك