اللُّؤلُؤة

الرياضيات

الفرع الأدبي

أحمد الراميني

0796970106

Ahmad Ramini

النهايات

مفهوم النهاية هو دراسة سلوك الاقتران عند الاقتراب من نقطة ما

مثال أدرس سلوك الاقتران ق(س) = س + ٣ **عندما تقترب س من العدد ٢**

س	٢,٤	٢,٣	٢,٢	٢,١	٢	١,٩	١,٨	١,٧	١,٦
ق(س)	٥,٤	٥,٣	٥,٢	٥,١	٥	٤,٩	٤,٨	٤,٧	٤,٦

جهة اليمين (+)		جهة اليسار (−)

لاحظ أنه كلما اقتربنا للعدد ٢ من جهة اليمين فان قيمة ق(س) تقترب للعدد ٥ ويرمز لها بالرمز

نـــهـا ق(س) = ٥
س ← ٢^+

وكلما اقتربنا إلى العدد ٢ من جهة اليسار فان قيمة ق(س) تقترب للعدد ٥ ويرمز لها بالرمز

نـــهـا ق(س) = ٥
س ← ٢^-

... نـــهـا ق(س) = ٥
س ← ٢

نتيجة مهمة : تكون النهاية عند نقطة موجودة إذا تحقق الشرط التالي

نـــهـا ق(س) = نـــهـا ق(س) = ل
س ← $أ^+$		س ← $أ^-$

∴ نـــهـا ق(س) = ل
س ← أ

حيث أ = **النقطة التي نبحث النهايه عندما**

ل = **قيمة النهاية**

مثال : أذا علمت أن

نـــهـا ق(س) = ٤ ,
س ← ٣^+

نـــهـا ق(س) = ٥
س ← ٣^-

اوجد نـــهـا ق(س)
س ← ٣

الحل:

مثال أذا كان نـــهـا ق(س) = ١٠ **اوجد ما يلي :**
س ← ٥-

١) نـــهـا ق(س)		٢) نـــهـا ق(س)
س ← -٥^+		س ← -٥^-

طـرق ايـجـاد الـــنــهـــايـــه

أولا : بـالـــطـــرق الرياضية

نـظـريـات فـي الــنــهـــايـــات

مراجعة سريعة لمعلومات قديمة

١. **إذا كان** ق(س) = أ، حيث أ ثابت فان ق(أي عدد) = أ

مثال إذا كان ق(س) = ٣

فجد ق(٤)		ق(٧)		ق(٠)		ق(−٢)		ق(−٣)

الحل:

ق(٤) = ٣		ق(٧) = ٣
ق(٠) = ٣		ق(−٢) = ٣
ق(−٣) = ٣

٢. **إذا كان ق(س)** = س +٣ فجد
١. ق (٢)
٢. ق(−٣)

الحل:

١) ق(٢) = ٢ + ٣ = ٥
٢) ق(−٣) = −٣ + ٣ = ٠

* نعوض بدل كل س القيمه الموجوده بين القوسين و نجري العمليات الحسابيه المطلوبه

النظريه الاولى :

إذا كان ق(س)= جـ فان نـــهـا ق(س)=جـ
س←أ

بالعامية نـــهـا (العدد الثابت) = العدد الثابت
س←اي عدد

النظريه الثانيه :

إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود
فان نـــــها ق(س)=ق(أ)
س←أ

الاصل في حل النهايات هو
الـتـعـويـض الـمـبـاشـر

أمثله

جد ناتج ما يلي

(١) نـــــها س+٣ =
س←٤

(٢) نـــــها ٢س+٦ =
س←٠

(٣) نـــــها ٣س−٥ =
س←−٢

(٤) نـــــها س^{٢}+٦س−٥
س←٣

النظريه الثالـثـة :

النهاية تتوزع على +, −, ×, ÷
أي انه إذا كانت نـها ق(س) = ل , نـــها هـ (س) = م فان
س ← أ   س ← أ

أ) نـــــها (ق(س) ± هـ (س)) =
س ← أ
نـــــها ق(س) ± نـــــها هـ (س) = ل ± م
س ← أ   س ← أ

ب) نـــــها (ق(س) × هـ(س)) =
س ← أ
نـــــها ق(س) × نـــــها هـ (س) = ل × م
س ← أ   س ← أ

ج) نـــــها جـ × ق(س) = جـ نـــــها ق(س)
س ← أ   س ← أ
(حيث ان جـ ثابت)

د) نـــــها (ق(س))^{ن} = (نـــــها ق(س))^{ن} = ل^{ن}
س ← أ   س ← أ

أمثلـه عامـه

إذا كان نـــــها ق(س) =٣ ، نـــــها هـ(س) =٦
س←٢   س←٢

جد ما يلي :

(١) نـــــها (٣ ق(س))
س←٢

(٢) نـــــها (ق(س) −٤)
س←٢

(٣) نـــــها(ق(س)+هـ(س))
س←٢

(٤) نـــــها $\sqrt{\text{ق(س)}}$
س←٢

(٥) نـــــها $\sqrt{\text{ق(س) + هـ(س)}}$
س←٢

(٦) نـــــها (ق(س) × هـ(س))
س←٢

(٧) نـــــها (ق(س)+٢هـ(س) −٦)
س←٢

إذا كانت نــــها ق(س) = ٤ ، نــــها ع(س) = ٥
س←-٢　　　　س←-٢

فجد :

(أ) نــــها(س^{٢} ق(س)+ع(س) −٤س)
س←-٢

(ب) نــــها $\sqrt{\text{٥ق(س) + ٤س}}$
س←-٢

إذا كانت نــــها (٢ ق (س)+ ٤س) =٢٦
س←٥

فجد نــــها (ق^{٣}(س)+٤)
س←٥

إذا كانت نــــها ق(س) =٥
س←٢

فجد ما يلي نــــها (٦ س ق(س) +٣)
س←٢

إذا كان نــــها (م س+٥)=٢١ **فجد قيمة الثابت م؟**
س←٨

إذا كانت نــــها (م س^{٢}+٢س−٣)=١٣ **فجد قيمة الثابت م؟**
س←٢

إذا كانت نــــها $\sqrt{\text{أ س+٥}}$ = ٥ **فجد قيمة أ ؟**
س←٤

إذا كانت نــــها ق(س) = ٤ , نهــا هـ (س) = -٨
س←٣　　　　س←٣

فجد: نــــها ($\sqrt{\text{٢ ق(س)- هـ(س)}}$ + س هـ(س))
س←٣

إذا كانت نــــها ق(س) =-٦ , نهــا هـ (س) = ٤
س←٢　　　　س←٢

فجد: نــــها (ق(س) + (هـ(س)+١)^{٢} -٣س)
س←٢

نـهـايـــه الاقـتـران الـكـســري

الاقتران الكسري هو اقتران على شكل $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)$

الأصل في إيجاد النهاية هو التعويض المباشر و تكون النتيجة واحد من أربع حالات :

(١) $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ ← النتيجة مقبولة

(٢) $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ ← ∴ النهاية موجودة و تساوي صفر

(٣) $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ ← تكون النهاية غير موجودة و النتيجة أيضا غير موجودة و سوف يتم تغطية هذه الحالة بالتفصيل التام في درس النهاية في المالا نهاية (محذوف وزارة)

(٤) $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ← وهنا النتيجة غير مقبولة و نلجأ هنا إلى احد الحيل الرياضية التالية :

اخذ عامل مشترك	أو
التحليل	أو
توحيد المقامات	أو
الضرب بالمرافق .	

مراجعة سريعة لمعلومات قديمة

حلل ما يلي :

١) س^{٢}+س=س(س+١)
إخراج س كعامل مشترك

٢) ٢٥س^{٢}+٥س=٥س(٥س+١)
إخراج ٥س كعامل مشترك

٣) ٥ع−٢٠=٥ (ع−٤)
إخراج ٥ كعامل مشترك

٤) ٣ص^{٢}−٩ص=٣ص(ص−٣)
إخراج ٣ص كعامل مشترك

٥) ٥س^{٣}−٥س=٥س(س^{٢}−١)
= ٥س((س−١)(س+١))
إخراج ٥س كعامل مشترك
ثم تحليل الفرق بين مربعين

٦) ٣ع+٦ع^{٢}=٣ع (١+٢ع)
إخراج ٣ع كعامل مشترك

٧) س^{٢}−٤=(س−٢)(س+٢)
الفرق بين مربعين

٨) س^{٣}−٢٧=(س−٣)(س^{٢}+٣س+٩)
فرق بين مكعبين

٩) س^{٣}+٨=(س+٢)(س^{٢}−٢س+٤)
مجموع مكعبين

١٠) $\frac{\text{س} - \text{أ}}{\text{س} - \text{أ}} = ١$

١١) $\frac{\text{س} - \text{أ}}{\text{أ} - \text{س}} = -١$

اولا : الـــتـــحـــلـيـــل

خطـوات الحــل :

١. حــلــل
٢. أخـتـــصـــر
٣. عــــــوض

جد النهاية في كل حالة من الحالات التالية :

(A) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نــــهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{\text{س} - ٢} =$

(B) $\underset{\text{ع}\to ٤}{\text{نــــهـا}} \frac{٥\text{ع} - ٢٠}{\text{ع} - ٤} =$

(C) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نــــهـا}} \frac{\text{س}^{٤} - ٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢}} =$

(D) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نـهـا}} \frac{\text{٧س} - ٢١}{٣ - \text{س}} =$

جد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نـهـا}} \frac{\text{٣س}^{٢} - \text{٦س}}{\text{س} - ٢}$

جد النهاية في كل حالة من الحالات التالية :

(A) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نـهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١} =$

(B) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نـهـا}} \frac{٩ - \text{س}^{٢}}{\text{س} - ٣}$

(C) $\underset{\text{س}\to ١٠}{\text{نـهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - ١٠٠}{\text{س}^{٢} - \text{١٠س}} =$

(D) جد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نـهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{٥س} + ٦}{\text{س} - ٢}$

جد النهايات في كل مما يلي :

(A) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نـهـا}} \frac{٢٥٠ - \text{٢س}^{٣}}{\text{س}^{٢} - ٢٥}$

(B) $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نـهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{٥س} - ١٤}{٧ - \text{س}}$

(C) $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نـهـا}} \frac{\text{س}^{٣} + ٨}{\text{س} + ٢}$

(D) $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نـهـا}} \frac{\text{س}^{٣} + ٢٧}{\text{س} + ٣}$

(E) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نـهـا}} \frac{٤ - \text{س}}{\text{س}^{٣} - ٦٤} =$

سؤال للاذكياء

جد $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نـهـا}} \frac{(\text{س} - ١)^{٢} - ٤}{\text{س} - ٣}$

ثـانـيـا : الـضــرب بـالـمـرافــق

و تستعمل هذه الطريقة عند وجود الجذر

معلومة حلوة ← $(\sqrt{س}+\sqrt{ص})\times(\sqrt{س}-\sqrt{ص}) =$ س+ص

(A) $\lim\limits_{س\to ٠} \dfrac{\sqrt{س+١}-١}{س}$

(B) $\lim\limits_{س\to ٤} \dfrac{س-٤}{\sqrt{س}-٢}$

(C) $\lim\limits_{س\to ١^{+}} \dfrac{\sqrt{س}-١}{\sqrt{س-١}}$

جد $\lim\limits_{س\to ٨} \dfrac{س-٨}{\sqrt{س+١}-٣}$

جد ناتج ما يلي :

$\lim\limits_{س\to ١} \dfrac{س-١}{\sqrt{٥س-٤}-\sqrt{س}} =$

ثالثا : توحيد المقامات

نلجأ لها عند جمع أو طرح الكسور و ذلك بعد التأكد بان التعويض المباشر = صفر/صفر

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\frac{٣}{\text{س}+١} - \frac{٣}{٤}}{\text{س} - ٣}$$

(B) $$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}-١} - \frac{١}{\text{س}-١}$$

(C) $$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \left(\frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{٤}\right) \left(\frac{١}{\text{س}-٤}\right)$$

جد ناتج ما يلي :

(١) $$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{س}}{٢\text{س}+١} - \frac{٢\text{س}-١}{٤\text{س}-١}}{\text{س}-١}$$

(٢) $$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \left(\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}-٩} - \frac{٦}{\text{س}^{٢}-٩}\right)$$

اسئلة اضافية في الحصة هامة جدا

نـهـايـــه الـــــجـــذور

الجذور

- **جذر فردي**: التعويض دائماً مقبول
- **جذر زوجي**: التعويض بالنقطة التي تقترب منها س

أولا : الـجـذور الـفـرديـــه

مثال

جد ما يلي

(١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نـها}} \sqrt[3]{\text{س}+٦} = \sqrt[3]{٢+٦} = ٢$

(٢) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نـها}} \sqrt[5]{\text{س}^{٢}+٣١} = \sqrt[5]{١+٣١} = ٢$

(٣) $\underset{\text{س}\to -١٤}{\text{نـها}} \sqrt[3]{\text{س}+٦} = \sqrt[3]{-١٤+٦} = -٢$

(٤) $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نـها}} \sqrt[7]{\text{س}+٢} = \sqrt[7]{-٢+٢} = \text{صفر}$

(٥) $\underset{\text{س}\to -٤}{\text{نـها}} \sqrt[3]{\text{س}^{٢}-١٦} = \sqrt[3]{١٦-١٦} = \text{صفر}$

ثـانـيـا : الـجـذور الـزوجـيـــه

نقوم بالتعويض بالنقطة التي تقترب منها (س)

ويكون الجواب واحد من ٣ حالات

موجب ← النهاية موجودة وتساوي ناتج التعويض

سالب ← النهاية غير موجودة لان $\sqrt{\text{السالب}}$ غير معرف ومرفوض

صفر ← تحدد المجال وندرس الإشارة إذا كانت حول العدد الذي تقترب منه الإشارة موجبة فهي موجودة وتساوي صفر . وإذا كانت اختلفت الإشارة فهي غير موجودة

جد ما يلي

(A) $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نـها}} \sqrt{\text{س}-٧}$

(B) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نـها}} \sqrt{\text{س}-٣}$

(C) $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نـها}} \sqrt{٧-\text{س}}$

(D) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نـها}} \sqrt[4]{(\text{س}-٢)^{٢}}$

(E) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نـها}} \sqrt{\text{س}^{٢}}$

نـهايـــه الاقتــران المـتـشـعـب

الاقتران المتشعب: هو الاقتران المعرف بأكثر من قاعدة ويتم إيجاد النهاية في هذا النوع من الاقترانات اعتمادا على نوع النقطة المراد إيجاد النهاية عندها و هي واحدة من ثلاث

i. **نقطة عادية** ⟸ يتم التعويض مباشرة بالقاعدة المقابلة لها

ii. **نقطة تحول تشعب .** ⟸ نجد النهاية من اليمين واليسار و نقارنهم ببعض

iii. **نقطة طرف** ⟸ يمكن إيجاد النهاية من جهة واحدة فقط (الجهة الداخلية)

إذا كان ق(س) $= \begin{cases} س^{٢}+١ & س < ٢ \\ ٢س-٣ & س \geq ٢ \end{cases}$

فجد ما يلي:

(١) $\underset{س \to ٣}{\text{نـــهـا}}$ ق(س)

(٢) $\underset{س \to -١}{\text{نـــهـا}}$ ق(س)

(٣) $\underset{س \to -١}{\text{نـــهـا}}$ ق(س)

(٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نـــهـا}}$ ق(س)

(٥) $\underset{س \to ٢}{\text{نـــهـا}}$ ق(س)

اذا كان ق(س) $= \begin{cases} س^{٢} & ١ \leq س < ٤ \\ ٥س-٤ & ٤ \leq س < ٥ \\ ٩ & ٥ \leq س < ٧ \end{cases}$

فجد ما يلي:

(١) $\underset{س \to ٢}{\text{نـــهـا}}$ ق(س)

(٢) $\underset{س \to ٤}{\text{نـــهـا}}$ ق(س)

(٣) $\underset{س \to ٥}{\text{نـــهـا}}$ ق(س)

(٤) $\underset{س \to ٧^{-}}{\text{نـــهـا}}$ ق(س)

(٥) $\underset{س \to ٧^{+}}{\text{نـــهـا}}$ ق(س)

إذا كان ق(س) $= \begin{cases} س^{٣} - ٤ & , س \neq ٣ \\ ٧ & , س = ٣ \end{cases}$

أوجد :

١) $\underset{س \to ١}{\text{نـــــها}}$ ق (س)

٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نـــــها}}$ ق (س)

نتيجة مهمة :

عند وجود نتيجة ≠ فأننا نعوض بها دائما و لا نهتم بقاعدة . ذلك لان تعريف النهاية هي قيمة تقترب و لا تساوي

اذا كانت ق (س) =
- أ س^{٢} + ب , س < ٢
- ٣س + أ , س > ٢

و كانت نهـــا ق (س) = ٥ ,
س ← ٢
فجد قيمة كل من الثابتين أ , ب ؟

إذا كان ق (س) =
- ٣س^{٢} , س < ٢
- أس + ١ , س ≤ ٢

و كانت نهـــا ق(س) موجودة , ما قيمة أ ؟
س ← ٢

إذا كان هـ(س) =
- ٩ – س^{٢} س<٢
- ٣ س = ٢
- √(١٠س+٥) س > ٢

فجد نهـــاهـ(س)
س←٢

إذا كان ق(س) =
- س– م س<٣
- ٢+س^{٢} س>٣

فجد قيمة الثابت م إذا كانت نهـــا ق(س) موجودة
س←٣

إذا كان ق(س) =
- س– أ س<٣
- ب س^{٢}–٤ س>٣

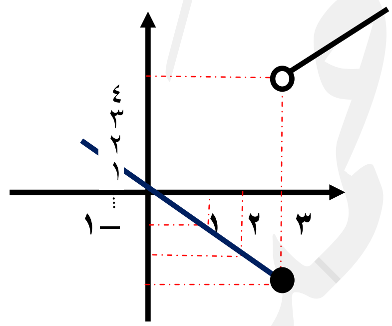
فجد قيمة الثابت أ،ب إذا كانت نهـــا ق(س)=٥
س←٣

ثانيا : الـجـــدول

بالاعتماد على الجدول الاتي الذي يبين قيم ق(س) عندما س ← ٣ فان نهـــا ق(س) =
س ← ٣

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١		٢,٩٩	٢,٩٨	٢,٩
ق(س)	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١		٥,٩٩	٥,٩٨	٥,٩

ثالثا : الـرســـم



جد ما يلي

(١) نـــــها ق(س)
س ← -١^+

(٢) نـــــها ق(س)
س ← -١^-

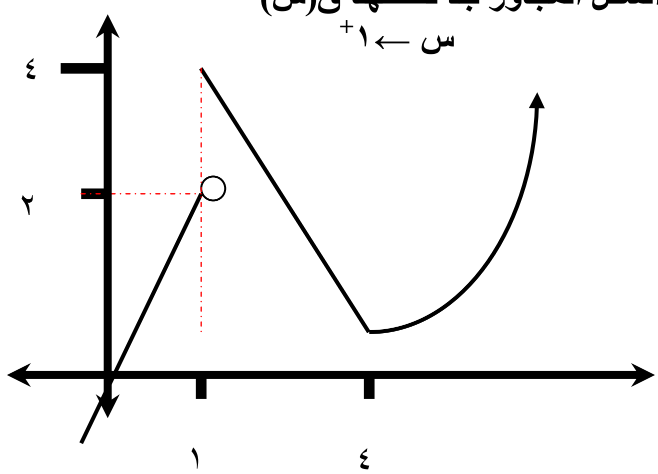
(٣) نـــــها ق(س)
س ← -١

(٤) نـــــها ق(س)
س ← ٣^+

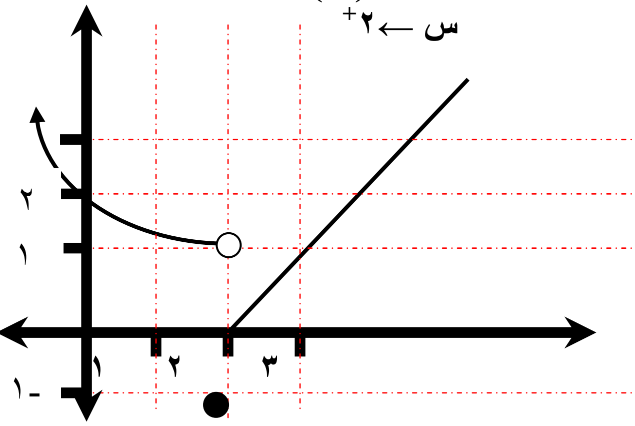
(٥) نـــــها ق(س)
س ← ٣^-

نهـــــــا ق (س) = ٤
س ← ١^+

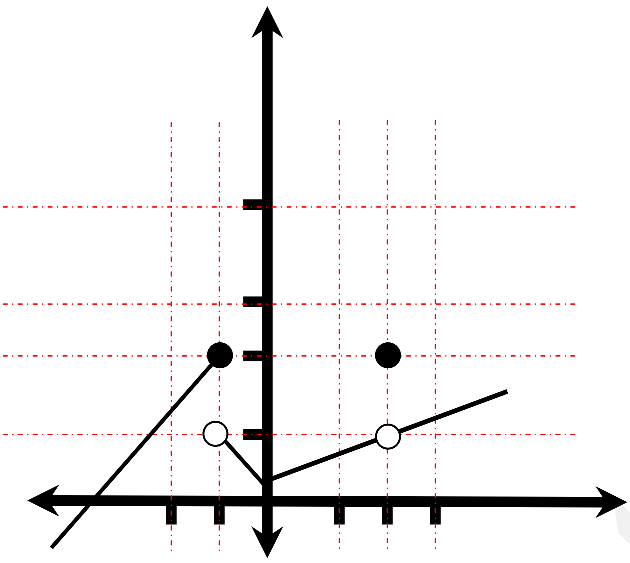
من الشكل المجاور جد نـــــها ق(س)
س ← ١^+



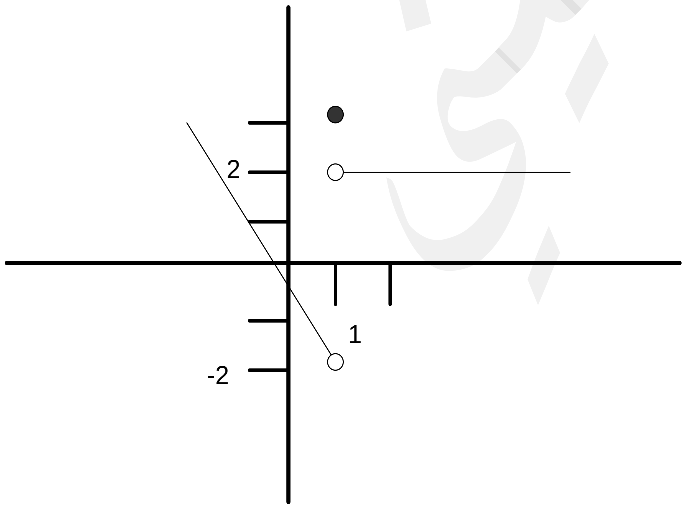
من الشكل المجاور جد نـــــها ق(س)
س ← ٢^+



من الشكل المجاور ما هي جميع قيم أ التي عندها نهـــا ق(س) غير موجوده
س ← أ



معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) , فما نهـــا ق(س)
س ← ١



الاتـصـــــــال

الاتــصـال عــنـد نـقــطـه

خطــوات الــحــل :

١) نجد النهاية (في حالة الاقتران المتشعب نجدها من اليمين و اليسار)

٢) نجد الصورة (ق(س)) (عن طريق التعويض عند اشاره اليساوي بالاقتران)

٣) إذا متساويين بالقيمة :. الاقتران متصل عند تلك النقطة و إلا فلا

ابحث في الاتصال الاقتران

ق(س) = س^{٢} + ٤س – ٢ عند س= ١؟

الحل:

لان ق(س) اقتران كثير حدود

∴ ق(س) متصل عند س = ١

بين ان الاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س & ، س < ٣ \\ س^{٢} & ، س \geq ٣ \end{cases}$$

متصل عند س = ٣ ؟

بالرسم

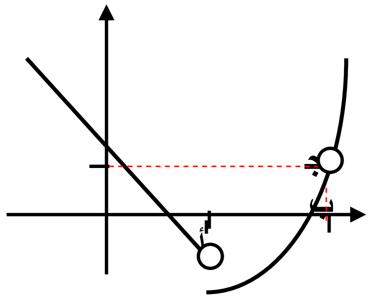
يكون الاقتران ق(س) متصلا إذا تحقق الشرط التالي

نـــــــهـا ق(س) = ق(أ)
س← أ

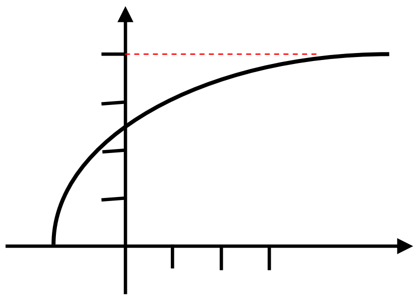
ويكون الاقتران متصل في الرسم عند نقطة ما إذا كان منحنى الاقتران ليس فيه فجوة أو انقطاع

جد النقط التي يكون الاقتران فيها غير متصل في كل من الحالات ادناه :

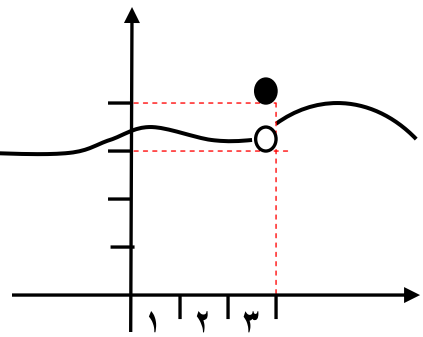
(A)



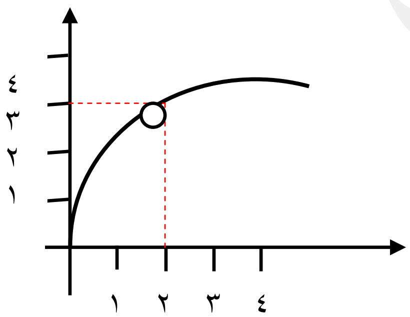
(B)



(C)



(D)



ابحث في اتصال الاقتران عند س = ١ ؟

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ١ - \frac{١}{\text{س}} & ، ٠ < \text{س} \leq ١ \\ \text{س}٢ - ١ & ، ١ < \text{س} \leq ٢ \end{cases}$$

إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} \text{س} + ١ & ، \text{س} > ١ \\ ٣ - \text{س} & ، \text{س} < ١ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران عندما س = ١؟

إذا كان

$$\text{ع(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} & \text{س} \neq ٢ \\ ٢\text{س} & \text{س} = ٢ \end{cases}$$

فابحث بالاتصال ع(س) عند س = ٢

إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣} & \text{س} < ٣ \\ ٣\text{س}^{٢} & \text{س} > ٣ \\ \text{س} + ٢٤ & \text{س} = ٣ \end{cases}$$

فابحث في الاتصال ق(س) عند س =٣

اذا كان ق(س) = { (س٢ − ٥س + ٦) / (س − ٣) ، س ≠ ٣
أ ، س = ٣ }

ما قيمة أ التي تجعل ق(س) متصلاً عند س = ٣؟

إذا كان ق(س) = { (م − ١) / س ، ٠< س ≤ ١
٣س٢ + س ، ١< س ≤ ٣ }

و كان ق(س) متصلاً عند س = ١ ، جد قيمة م ؟

إذا كان ق(س)= { أ س٢+ب ، س>٢
٣أ س + ٤ ، س<٢
١٦ ، س=٢ }

و كان ق(س) متصلا عند س = ٢ فما قيمة الثوابت أ ، ب

إذا كان ق(س) متصل عند س = ٣ ،
ق(٣) = ٦ فجد قيمة نهـا (٢ق(س) -٤)
س←٣

إذا كان ق(س) = { ٣س^{٢}+١ ، س >−٢
س + أ ، س ≤ − ٢ }

و كان الاقتران متصلا فجد قيمة الثابت أ؟

ثانيا : الاتصال على فترة

يكون الاقتران ق(س) متصلاً على الفترة [أ ، ب] إذا كان

١) متصلاً على (أ ، ب)

٢) متصلاً عند أ من الجهة اليمنى

نهـا ق(س)= ق (أ)
س←أ+

٣) متصلاً عند ب من جهة الشمال

نهـا ق(س) = ق(ب)
س←ب−

اعداد الانقطاع

1) **كل اقتران كثير حدود يكون متصل دائماً**
2) **كل اقتران نسبي (كسري) يكون متصلاً عند جميع الأعداد ماعدا أصفار المقام**
3) **الاقتران المتشعب نبحث في نقاط التحول فقد تكون هي أعداد انقطاع (نقطة عدم اتصال)**

ق(س)= {
٩ − ٢س ، −١ ≤ س < ٣
٣ ، س = ٣

ابحث في اتصال ق على الفترة [−١ ، ٣] ؟

ق(س)= {
٣ ، س = ٣
٩ − ٢س ، ٣ < س < ٥
−١ ، س = ٥

ابحث في اتصال ق(س)على الفترة [٣، ٥] ؟

ق(س)= {
٣ + ٥س ، ١ ≤ س < ٤
س^2 + ٢ ، ٤ ≤ س ≤ ٥

ابحث في اتصال على الفترة [١، ٥]

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانيين متصلين عندما س = أ فتجوز كل العمليات الجبرية عليهم
١) ق + هـ متصل عند س = أ
٢) ق− هـ متصل عند س = أ
٣) ق × هـ متصل عند س = أ
٤) $\frac{ق}{هـ}$ متصل عند س = أ

اذا كان ق(س) = س

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ٥ , & \text{س} \geq ٢ \\ ٣\text{س}^{٢} - ٥ , & \text{س} < ٢ \end{cases}$$

و كان ل(س) = ق(س) * هـ (س) فابحث في اتصال ل(س) عندما س = ٢؟

اذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ , & \text{س} \geq ٢ \\ ٥ , & \text{س} < ٢ \end{cases}$$

ل(س) = س
و كان هـ(س) = ق(س) + ل(س) , فبين ان هـ(س) متصل عند س = ٢

اذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س} + ٢ ، & \text{س} \leq ١ \\ ٦ - \text{س}^{٢} ، & \text{س} > ١ \end{cases}$$

هـ (س) = س أبحث في اتصال (هـ × ق) (س) عند س= ١ ؟

إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٤\text{س} ، & ١ \leq \text{س} \leq ٢ \\ ١٠ - ٣\text{س} ، & ٢ < \text{س} < ٤ \\ \frac{٢}{\text{س} - ٥} ، & ٤ \leq \text{س} \leq ٦ \end{cases}$$

فابحث في اتصال ق(س)على [١، ٦]

جد إعداد الانقطاع للاقترانات التالية

١- ق(س) = س^{٢} – ٥س + ٧

٢- ق(س) = $\frac{٢}{س – ١}$

٣- ق(س) = $\frac{١}{س^{٢} – ١}$

٤- ق(س) = $\frac{٥س + ٥}{س^{٢}+١}$

٥- ق(س)= $\begin{cases} ٣س+١ & ، س \le ٢ \\ \frac{س+١}{س^{٢}-١} & ، س > ٢ \end{cases}$

اذا كان ق(س) = $\frac{س – ١}{س-٣}$, فان مجموعه نقط عدم الاتصال للاقتران ق(س) هي :

أ) { ٣ ,. }　ب) { ٣ }　ج) { -١ , -٣ }　د) { -٣ }

الاتصال على الاعداد الحقيقيه

إذا كان ق(س)= $\begin{cases} س^{٢} & ، س < ٢ \\ ٢س & ، س \le ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران على مجموع الأعداد الحقيقية؟

ق(س)= $\begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، س < -١ \\ ٢س + ٥ & ، س \le -١ \end{cases}$

ابحث في الاتصال على مجموع الأعداد الحقيقية ؟

متوسط التغير

أولا : مفهوم التغير بشكل عام

يعرف التغير على أساس انه
الشيء الجديد – الشيء القديم

فمثلا لو قلنا " أن سعر لتر البنزين حاليا:"هو ٦٢ قرش حيث انه كان سعره سابقاً ٣٠ قرش
فإننا نستنتج أن التغير في سعر البنزين
= السعر الجديد –السعر القديم
= ٦٢–٣٠= ٣٢ قرش
ويرمز للتغير بشكل عام بالرمز (Δ) وتقرأ دلتا
إذا التغير في قيم س= Δ س = س$_٢$– س$_١$
التغير في قيم ص = Δ ص = ص$_٢$ – ص$_١$
التغير في السرعة = Δ ع = ع$_٢$ – ع$_١$
<== يمكن الرمز ل ق(س) بالرمز ص

أمثله

إذا كانت س$_١$ = ٤,٥ . س$_٢$ = ٢,٥ فجد مقدار التغير في السينات ؟

الحل: Δ س = س$_٢$ – س$_١$
= ٢,٥ – ٤,٥ = – ٢ (سالب مقبول)

٢) إذا كان س$_١$ = ٣,٦ . س$_٢$ = ٤,٩ فجد مقدار التغير في السينات؟

الحل: Δ س = س$_٢$ – س$_١$
= ٤,٩ – ٣,٦ = ١,٣ (موجب مقبول)

٣)إذا كانت قيمة س = ٧ وتغيرت لتصبح ١٢ فجد مقدار التغير في السينات؟

الحل: Δ س = س$_٢$ – س$_١$
= ١٢ – ٧ = ٥

٤) إذا كان ق (س) = ٢س + ٣ فجد ما يلي
أ) مقدار التغير في السينات إذا كانت س = ٢ وتغيرت لتصبح ٤
ب) مقدار التغير في الصادات
ج) مقدار التغير في الاقتران

الحل أ) Δ س = س$_٢$ – س$_١$
= ٤ – ٢ = ٢
ب) Δ ص = ص$_٢$ – ص$_١$
= [(٢×٤) + ٣] – [(٢×٢) + ٣]
= ١١ – ٧ = ٤
ج) مقدار التغير في الاقتران = Δ ق(س) = Δ ص = ٤

ثانيا : متوسط التغير

متوسط التغير = $\frac{\text{Δ ص}}{\text{Δ س}}$ = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

مثال ١

اذا كان ق(س)= س^٢+٣ فجد متوسط التغير في ق (س) إذا كانت س$_١$ =٣ ، س$_٢$ =٧ ؟

مثال ٢

إذا كانت ق(س) =$\sqrt{٣س+١}$ وكانت س$_١$ = صفر ، Δس = ٥ فجد متوسط التغير

وزاره

اذا علمت ان مقدار التغير في الاقتران ق(س) = ١٣ عندما تتغير س من ٢ الى ٤ و كان ق(٢)=٢ فان ق(٤) تساوي ؟

مثال ٣

إذا كان ق (س) =أ س^{٢} + ٤ ، س Э [١ ، ٢]
وكان التغير في الاقتران = ٩ فجد قيمة أ فجد قيمه أ ؟

وزاره ٢٠٠٧

اذا كانت ق(س) = س^{٢} – ٥ فجد متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما س تتغير من ١ الى ٣ ؟

وزاره

اذا كان مقدار التغير في س = ٦ عندما تتغير س من س١ = ٣ فان قيمه س٢ تساوي ؟

مثال ٤

اذا كانت ق(س)= $\frac{\text{أ}}{\text{س + ٢}}$ وكان متوسط التغير لـ ق(س) عندما تتغير س من صفر الى ٣ يساوي -٢ فجد قيمه أ ؟

أ= ٢٠

وزاره

اذا كان متوسط التغير للاقتران ق=-٢ و تغير س من ١ الى ٥ و كان ق(٥) = ١٠ , اوجد ق(١) ؟

مثال ٥

إذا كان ق (٦) = ٤ ق (٢) = ٣ فجد متوسط التغير للاقتران عندما تتغير س من ٢ إلى ٦

مثال ٦

اذا كان متوسط تغير ق(س) عندما تتغيرس من س= ١ الى ٥= ١٢ و كان هـ(س) = ٢ق(س) + ٧س فجد متوسط تغيرهـ(س) عندما تتغير س من ١ الى ٥ ؟

مثال ٧

إذا كان متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ٣ في الفترة[٢،٤] وكان ق (س) = هـ (س)+٢س فجد متوسط التغير للاقتران ق (س) في الفترة [٢،٤]

٢٠١٥ شتوي

اذا كان متوسط تغير ق(س) في الفترة [-٢ , ١] يساوي (٣) و كان هـ(س) = س^{٢} – ق(س) , فجد متوسط الغير في الاقتران هـ في الفتره [-٢ , ١] ؟

٥ علامات

مثال ٨

إذا كان ق (س) =
$$\begin{cases} ٢س & ١ \le س \le ٤ \\ ٤+س & ٤ < س \le ٦ \end{cases}$$

فجد متوسط التغير للاقتران ق عندما نغير س من ٤ إلى ٥

٢٠١٥ صيفي

اذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} س^{٢} -٣ & ، ١ \le س \le ٤ \\ ٦س+٢ & ، ٤ < س < ٨ \end{cases}$$

فجد متوسط التغير للاقتران ق اذا كانت س$_{١}$ = ٣ ,
Δ س = ٢

٤ علامات

ثالثا : التفسير الهندسي لمتوسط التغير

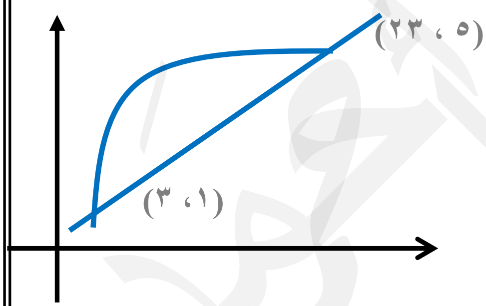
ميـــل الـقـــاطـــع

مثال ٩

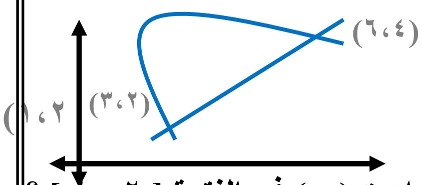
اذا كان ق(س) يمر بالنقطتين (١، ٣) ، (٥ ، ٢٣):

١) جد متوسط التغير عندما تتغير س من ١ الى ٥؟

٢) جد ميل القاطع المار بالنقطتين ؟



مثال ١٠



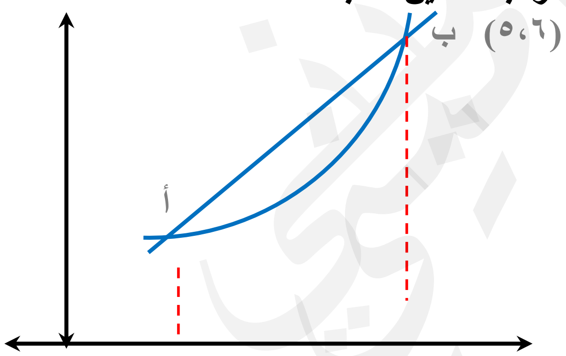
أوجد متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [٢ ، ٤] ؟

امثله ١١

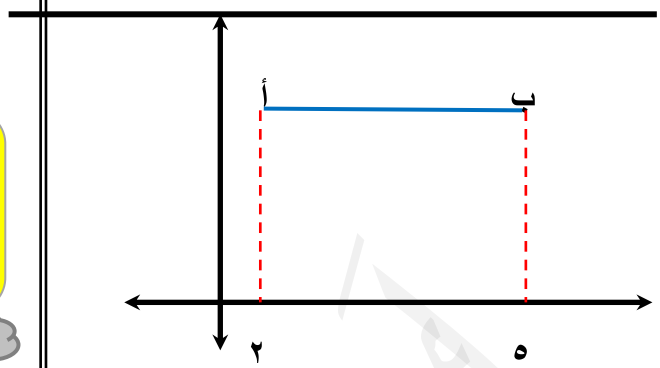
١) إذا كان ص = ق(س) = ٣– س^{٢} جد ميل القاطع المار بالنقطتين (١، ٢) , (–٣، ٦)

٢) إذا كان ص = ق(س) = ٢ س^{٢} فجد ميل القاطع المار بالنقطتين (١،ق(١)) (٣ ، ق(٣))

٣) معتمدا على الشكل المجاور جد ميل القاطع المار بالنقطتين ا ب ؟



٤) جد ميل القاطع المار بالنقطتين أ ، ب



= صفر

رابعا: التفسير الفيزيائي لمتوسط التغير

السرعه المتوسطه

يرمز لها بالرمز $(\bar{ع})$

$$= \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{ن_2 - ن_1}$$

امثله ١٢

(١) يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن)=ن^2+٢ حيث ف المسافة بالأمتار ن الزمن بالثانية ، احسب السرعة المتوسطة في الفترة [٣، ٦]

....

(٢) يتحرك الجسم حسب العلاقة ف(ن)=ن^2 + ٣ن − ٦، حيث ف المسافة بالأمتار،ن الزمن بالثانية ، احسب السرعة المتوسطة في الفترة [٠، ٢]

(٣) إذا كانت المسافة التي يقطعها الجسيم أثناء سقوطه إلى أسفل من قمة جبل تعطى بالعلاقة ف(ن)= ٣٠ن − ٥ن^{٢} ، حيث ف المسافة بالأمتار،ن الزمن بالثانية، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [٢، ٥]

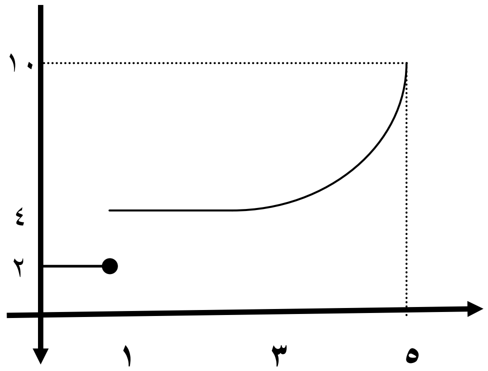
٢٠١٤ شتوي

أ) اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) , اجب عما يلي /

٤ علامات

١) نهـــا ق(س)
س ← ١$^{-}$

٣) جد متوسط التغير في الاقتران ق في الفترة [٣ , ٥]



ما لا يـؤخـذ كلـه .... لا يــتـــرك كلـه

المشتقة الاولى

التعريف

إذا كان ص = ق(س) ← فان

$$ق'(س) = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$$

يمكن الرمز للمشتقة الأولى بالرموز التالية

$ق'(س)$ ، $\frac{د ص}{د س}$ ، $ص'$ ، $\frac{د ق(س)}{د س}$

خطوات الحل

"خطوات شامله لكل الاسئله"

١) كتابة القانون .

٢) التعويض بدل كل س بـ (س+هـ) في الحد الأول ثم نسخ ق(س) كما هي .

٣) نلجأ إلى بعض المهارات و هي :

(أ) فك الأقواس ← إذا كان اقتران كثير الحدود

(ب) توحيد المقامات ← إذا كان اقتران نسبي (كسري)

(جـ) الضرب بالمرافق ← إذا كان اقتران جذر تربيعي

٤) إخراج هـ كعامل مشترك من البسط و نختصرها مع هـ التي في المقام .

٥) نعوض بدل هـ = ٠ و يكون الجواب النهائي هو المشتقة الأولى بدون هـ .

و سلامتكو

مراجعة سريعة لمعلومات قديمة

جد ناتج ما يلي :

(١) ٥ (س+٤) = ٥س+٢٠

(٢) ٣ (س−٢) = ٣س−٦

(٣) −٢(س+٦) = −٢س−١٢

(٤) $(س+هـ)^٢ = س^٢ + ٢س هـ + هـ^٢$

(٥) $(س+هـ)^٣ = س^٣ + ٣س^٢ هـ + ٣س هـ^٢ + هـ^٣$

مثال ١ اذا كان $ق(س) = س^٢ + ١$ اوجد ق'(س) باستخدام تعريف المشتقة ؟

وزاره

اذا كان $ق(س) = س^٢ - ٤$ ، اوجد ق'(س) باستخدام تعريف العام للمشتقة ؟

الحل :

مثال ٢

اذا كان ق(س) = ٥ـ س^{٢} ، اوجد قَ (س) باستخدام تعريف العام للمشتقة ؟

مثال ٣

باستخدام التعريف العام للمشتقه , جد المشتقه الاولى للاقتران ق(س) = س^{٣} + ٦

مثال ٤

باستخدام التعريف العام للمشتقه , جد المشتقه الاولى للاقتران ق(س) = ٢ـ س^{٣}

مثال ٥

باستخدام التعريف العام للمشتقه , جد صَ للاقتران ق(س) = س + ٥

مثال ٦

جد المشتقة الأولى للاقتران ق حيث أن
ق(س) = ٣ $س^{٢}$ + ٥

مثال ٧

باستخدام تعريف المشتقة جد مشتقة ق (س)=٤$س^{٣}$ -٤

مثال ٨

جد المشتقة الأولى للاقتران ق حيث أن ق(س) = ٣ س -٢

٢٠١٤

باستخدام التعريف العام للمشتقه , جد المشتقه الاولى للاقتران ق (س) = $\frac{٣}{س}$, س ≠ صفر

٥ علامات

مثال ٩

جد المشتقة الأولى للاقتران ق(س)

ق(س)= $\frac{-٢}{س+٧}$

٢٠١٢ صيفي

باستخدام التعريف العام للمشتقه , جد المشتقه الاولى للاقتران ق (س) = $\frac{٢}{س}$, س ≠ صفر

٥ علامات

مثال ١٠

جد المشتقة الأولى للاقتران ق(س) ق(س) = $\sqrt{س}$

٢٠١٤ شتوى

باستخدام التعريف العام للمشتقه , جد المشتقه الاولى للاقتران ق (س) = $\sqrt{٢ س}$, س≥ ٠ ؟

٦ علامات

مثال ١١

جد المشتقة الأولى للاقتران ق(س) = ٤

وزاره ٢٠٠٨

اذا كان ق(س) =٣س+١ ،
اوجد قَ (س) باستخدام تعريف العام للمشتقة ؟

وزاره ٢٠٠٩

جد المشتقه الاولى للاقتران ق(س)=٦ باستخدام التعريف العام للمشتقه ؟

سؤال وزاره ٢٠١١

باستخام التعريف العام للمشتقه جد المشتقه الاولى للاقتران ق(س)= س^{٢} ؟

قطره المطر تحفر في الصخر
ليس بالعنف ☹ و لكن بالتكرار ☺

تعريف المشتقة عند نقطة س١

$$ق\prime(س_١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س_١+هـ)-ق(س_١)}{هـ}$$

مثال ١٢

باستخدام تعريف المشتقة لإيجاد المشتقة الأولى ق(س) = س^٢+٢س−٦ عند س= ٣ ؟

مثال ١٣

باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة لحساب مشتقة الاقتران ق(س)=٢س^٣+٤س−٣ عند س= صفر ؟

وزاره ٢٠٠٩

اذا كان ص=ق(س) و كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س الى (س+هـ) هو

Δص = ٤س هـ + ٢هـ^٢ فجد ق$\prime$(س)؟

٢٠١٥ صيفي

اذا كان ق(س) = س − ٣ , فجد ق$\prime$(٤) باستخدام تعريف المشتقه الاولى عند نقطه؟

٥ علامات

قواعد الاشتقاق

يمكن الرمز للمشتقة الاولى بالرمز

صَ او $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ او قَ(س)

القاعده الاولى

اذا كان ق(س) = جـ فان قَ(س) = صفر حيث جـ = ثابت

بالعامية مشتقة الثابت = صفر

مثال ق(س) = ١٩ ⟸ قَ(س) = صفر

القاعده الثانيه

اذا كان ص = $\text{س}^{ن}$ فان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = قَ(س) = ن $\text{س}^{ن-١}$

مثال ص = $\text{س}^{١٢}$ ⟸ قَ(س) = ١٢ $\text{س}^{١١}$

القاعده الثالثه

اذا كان ص = جـ × ق(س) فان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = جـ × قَ(س)

مشتقة (ثابت × اقتران) = الثابت × مشتقة الاقتران

مثال اذا كانت ص = ٨ $\text{س}^{١٠}$ ⟸ قَ(س) = ١٠ × ٨ $\text{س}^{٩}$

القاعده الرابعه

اذا كانت ص = ق(س) + هـ (س) فان صَ = قَ(س) + هَـ(س)

بالعاميه : المشتقة توزع على الجمع و الطرح

مثال ص = ٢$\text{س}^{٤}$ – ١٥ $\text{س}^{٣}$ + ٧$\text{س}^{٢}$ + ١١س - ١٣ فجد صَ ؟

الحل:

٢×٤ $\text{س}^{٣}$ – ١٥×٣ $\text{س}^{٢}$ + ٧×٢ س + ١١

القاعده الخامسه

اذا كانت ص = ق(س) × ع(س) فان

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (ق(س) × عَ(س)) + (ع(س) × قَ(س))

(مشتقة الاول × الثاني) +(مشتقة الثاني × الاول)

مثال **اذا كان** ق(س) = ($\text{س}^{٢}$ + ٣) ($\text{س}^{٣}$ + ٢$\text{س}^{٢}$) جد قَ(س)

الحل: قَ(س) = (٢س) ($\text{س}^{٣}$ + ٢$\text{س}^{٢}$) + (٣$\text{س}^{٢}$ + ٤س) ($\text{س}^{٢}$ + ٣)

القاعده السادسه

اذا كانت ص = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{ع(س)}}$ فان

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{ع(س)} \times \text{قَ(س)} - \text{عَ(س)} \times \text{ق(س)}}{(\text{ع(س)})^{٢}}$

$\frac{\text{(مشتقة البسط × المقام) – (مشتقة المقام × البسط)}}{\text{(المقام)}^{٢}}$

أمثله

(I) جد المشتقة الأولى في كل من الحالات التالية :

(١) ق(س) = ١٣ (٢) ق(س) = س^{٣}+٦

(٣) ق(س) = $(\pi)^{٢}$ (٤) ق(س) = $\sqrt{٧}$

الحل:

(II) جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ لكل مما يلي :

(١) $\frac{١}{\text{س}}$

(٢) ق(س) = $\frac{٢}{\text{س}^{٢}}$ + ٦س − ٣

نتيجة مهمة :

عند وجود الجذر نقوم أولا بالتجهيز

(تحويل الجذر إلى قوة)

ثم نشتق

(III جد صَ لكل من الحالات التالية

١) ق(س) = (س^{٢} +٣س)(٦س − ٤س^{٣})

٢) ق(س) = $\frac{\text{٢س}^{٢} + ٤}{\text{س}^{٣} + \text{٦س}}$

(IV) جد قَ(١) لكل من الحالات التالية:

(١) ق(س) = ٤س^{٣} + ٦س

(٢) ق(س) = س^{٢} (س−٢) (س^{٢}−٣س)

حـــــالات خـــاصــه

أمثله

جد قَ(س) لكل من الحالات التالية:

(١) $ق(س) = \frac{٧}{س^{٢}+٣}$

(٢) $ق(س) = \frac{-٤}{٢س + ٦}$

(٣) $ق(س) = \frac{٣}{٤س + ٨س^{٢} + ٩}$

حالة خاصة بمشتقه القسمه

إذا كان $ص = \frac{جـ}{ع(ر)}$

حيث أن ع(ر)اقتران جـ ثابت قابل للاشتقاق

فان $\frac{دص}{دس} = \frac{-جـ \times عَ(س)}{(ع(س))^{٢}}$

مثال

جد صَ لكل من الحالات التالية

١) $ص = \sqrt{س - ٤}$

٢) $ص = \sqrt[٣]{س - س}$

حالة خاصة بالجذر التربيعي **فقط**

مشتقة الجذر التربيعي

$= \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}}$

مثال

اذا كان ق(٥)=٣ , قَ(٥)= ٧ , هـ(٥)= ٢ , هـَ (٥)=٤ جد ما يلي:

١) $(ق+هـ)'(٥)$

٢) $(٤ق + ٥هـ)'(٥)$

٣) $(ق.هـ)'(٥)$

٤) $\left(\frac{هـ}{ق}\right)'(٥)$

٥) $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(٥)$

٦) $\left(\frac{٩}{ق}\right)'(٥)$

٧) $\left(\frac{١٦}{هـ}\right)'(٥)$

٨) $((ق.هـ)(٥))'$

الحل:

وزاره

اذا علمت ان ق(١)=١ , قَ(١)=٢, هـ(١)=٣, هـَ(١)=-٢ فان مشتقه (ق.هـ) عندما س=١ تساوي ؟

مثال

اذا كانت ق(س) = $\frac{أ}{(٢س+١)}$ وكان قَ(١) = $-\frac{١٤}{٩}$ فجد أ ؟

وزاره

اذا علمت ان ق (س) = $س^٥ - ٣س + ١$

فان $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ}$ تساوي ؟

سؤال وزاره ٢٠٠٨

اذا علمت ان

ق (س) = $س^٥ - ٥س^٢$ فان

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ}$ تساوي ؟

مثال

اذا كان ق(٢) = ٣ ، قَ(٢) = ٥ ، وكان ل(س) = ٢س . ق(س) + ٤$س^٢$ جد لَ(س) ، لَ(٢)؟

وزاره

كان ص = $\sqrt[٣]{س}$ فان $\frac{دص}{دس}$ تساوي ؟

مشتقة الاقترانات الدائرية

١. اذا كانت ق(س) = جا س فإن **قَ(س)** = جتا س
٢. اذا كانت ق(س) = جتا س فان **قَ(س)** = – جا س
٣. اذا كانت ق(س) = ظا س فان **قَ(س)** = قا^2 س

اما اذا كانت الزاويه عباره عن اقتران ق(س) فاننا نتبع القوانين اعله بالاضافه الى اشتقاق الزاويه اي كالتالي

١. اذا كانت ص= جا ق(س)
فإن **صَ** =قَ(س) × جتا س
٢. اذا كانت ص = جتا ق(س)
فإن **صَ** = قَ(س) × (– جا س)
٣. اذا كانت ص = ظا ق(س)
فإن **صَ** = قَ(س) × قا^2 س

مشتقة الاقترانات الاسيه و اللوغاريتميه

اذا كان ص = $\text{هـ}^{\text{س}}$ فان $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

إذا كانت ص = $\text{هـ}^{\text{ق(س)}}$ فان $\frac{\text{دص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\text{ق(س)}} \times$ قَ(س)

اذا كان ص = $\text{لـو}_{\text{هـ}}$ س فان $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{1}{\text{س}}$

إذا كانت ص= $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ق(س) فان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{قَ(س)}}{\text{ق(س)}}$

بالعاميه = (مشتقه ما بداخل اللوغاريتم) / ما بداخل اللوغاريتم

تذكر ان :

$\text{لـو}_{\text{هـ}}$ ١ = صفر

$\text{لـو}_{\text{هـ}}$ هـ = ١

هـ = ٢,٧
و هو العدد النيبيري

مثال

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ لكل مما يلي:

١) ص = س^2 + ٥جتا س
٢) ص = ٦س^3 + ٢ظا س
٣) ص = ٣س^4 جا س
٤) ص = $\frac{\text{جا س}}{\text{١+ جتا س}}$

الحل :

مثال ١

اذا كان ق(س)
= جا ٧س + جتا ٤س^2 + ظا ٣س
جد قَ(س) ؟

مثال ٢

اذا كانت ص = ٦ س ظا ٤س جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

مثال ٣

اذا كان ق(س) = ٧ س – ٣ $\text{هـ}^{\text{س}}$ + $\text{لو}_{\text{هـ}}$(س)
جد قَ(١)

وزاره ٢٠٠٩

اذا كان ص = ٢س جاس فان $\frac{دص}{دس}$ تساوي ؟

وزاره ٢٠٠٨

اذا كان ص= ٦ ظاس – جتا٤س فجد صَ؟

٢٠١٥ صيفى

جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يلي : ٦ علامات

١) ص = س^{٢} جـا ٣س – هـ^{٢س}

٢) ص = لـو (٢س^{٢} + ١)

٣) ص

٤)

مثال ٤

اذا كانت ص = هـ$^{س^{٣}+٢س}$ جد $\frac{دص}{دس}$:

٥) ص

مثال ٥

ص= لو$_{هـ}$ (س^{٣} + ٢س) جد $\frac{دص}{دس}$:

مثال ٦

ص = هـ$^{س + ٤س^{٢}}$ + لو$_{هـ}$ (٥س + ٦)

فجد) جد $\frac{دص}{دس}$ ؟

مثال ٧

ص= هـ$^{٤س^{٢} + ٣س}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ٠

سؤال وزاره ٢٠١١

اذا كان ق(س) = هـ^{س} ,

فان $\underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{ق(س+\Delta س) - ق(س)}{\Delta س}$ ؟

٢٠١٥ شتوى

جد $\frac{دص}{دس}$ للاقتران ٣ علامات

ص = س^{٢} ظـــا س – هـ^{٣س}

٢٠١٤ صيفى

جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يلي

١) ص = لـــو(س^{٢} − ٣س) + هـ$^{١-٢س}$

٤) ص = س^{٣} جـا س + ظـا س

المشتقات العليا

إذا كان ص = ق(س)

فان المشتقة الأولى للاقتران يرمز لها باحدى الرموز التاليه:

$$ص' = ق'(س) = \frac{دص}{دس}$$

المشتقة الثانية يرمز لها باحدى الرموز التاليه:

$$ص'' = ق''(س) = \frac{د^2ص}{دس^2}$$

مثال ١ إذا كان ص = ٦$س^3$+٤س فجد $\frac{د^2ص}{دس^2}$

الحل

مثال ٢ جد ق''(س) لكل من الحالات التالية

أ) ق(س) = (س+٣)(٢س+٦)

ب) ق(س) = $س^2 هـ^س$

جـ) ص = ٣$لو_{هـ}س^2$

الحل

مثال ٣ إذا كان ق(س)=$لو_{هـ}$(٣س+٦)فجد ق''(١)

مثال ٤ إذا كان ق(س)=أ$س^3$–٣$س^2$+٥س+٨

وكان ق''(١) = صفر فجد قيمة أ ؟

مثال ٥ إذا كان ق(س) = $\frac{س^4}{٤}$ + $\frac{س^3}{٣}$ + ٦س – ٤

فجد قيمة س التي تجعل ق''(س) = صفر

الحل

٢٠١٥ شتوى إذا كان ق(س)=$لو_{هـ}$($س^2$ +٥)فجد ق''(١)

٦ علامات

٢٠١٤ شتوى إذا كان ق(س)=$لو_{هـ}$(٦-٢س)

فجد ق''(س)

٣ علامات

قاعدة السلسلة

تستخدم هذه القاعدة عند وجود معادلتين بثلاث رموز و المطلوب فيها مشتقة تربط بينهما

خطوات الحل :

١) نشتق كل معادلة على حدا
٢) نطبق القانون
٣) نستبدل الرموز و الوسيط

مثال ١

١) إذا كان ص = ع^{٣}+٦ع ، ع=٣س+٤

جد $\frac{د ص}{د س}$ ؟

٢) ص = ل^{٢} + ٧ ، ل = س^{٢} + ١

الحل:

٣) ص =جاع ، ع = ٤س^{٣}

الحل:

= جتاع × ١٢س^{٢} = ١٢س^{٢} جتا(٤س^{٣})

مثال ٢

إذا كان ص = ع^{٣} + ع^{٢} ، ع = ٣س+١

جد $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ٠ ؟

الحل:

مثال ٣

إذا كان ص = ٣ل^{٢} – ٤ل ، ل = س^{٢}–٨

جد $\frac{د ص}{د س}$ عند ل = ١ ؟

الحل:

وزاره

إذا كانت ص = ع^{٣}+ع ، ع = س$^{\frac{٢}{٥}}$+٧ جد $\frac{د ص}{د س}$

مثال ٤ **إذا كان ص = هـ^{٣} + ٢ ، هـ = $\frac{٣}{٢س+١}$ فجد $\frac{د ص}{دس}$ ؟**

الحل:

وزاره

إذا كانت ص = ع^{٢} – ٢ع ، ع = ٦ – س^{٤}
جد $\frac{د ص}{د س}$ ؟

٢٠١٥ صيفي

اذا كان ص = $\sqrt{ع + ١}$, ع = ١ – ٢س , فجد $\frac{دص}{دس}$

٢٠١٥ شتوي

اذا كان ص = ٣ع^{٢}- ع , ع = ١ – ٢س , فجد $\frac{دص}{دس}$

مشتقه الاقتران المركب

قاعده الرمانه

إذا كان ص = $(هـ(س))^{ن}$

فان $\frac{د ص}{د س}$ = ن $(هـ(س))^{ن-1}$ × هَ(س)

بالعاميه : نشتق القوة ثم نشتق الاقتران

امثله

جد $\frac{د ص}{د س}$ في كل من الحالات التالية

١) ص = $(س^{2} + 1)^{5}$

٢) ق(س) = $\sqrt[3]{س^{3} + 7س}$

٣) ص = $\frac{6}{(3 س - 2)^{7}}$

٤) ص = $\sqrt{\frac{س^{2} - 1}{س^{2} + 1}}$

٥) ص = $\sqrt{س^{2} + 5س}$

٦) ص = $جا^{3}س$

سؤال وزاره ٢٠٠٨

إذا كانت ق(س) = $ظا^{2}$ ٤س+جتاس

فجد قَ(س)

وزاره

إذا كانت ص = ٥ − $ع^{3}$ ، ع = $(س^{2} - 3س)^{7}$

جد $\frac{د ص}{د س}$

وزاره ٢٠٠٨

إذا كانت ص = $\sqrt{ع + 1}$

ع = ٤$س^{3}$ − ٩ فجد $\frac{د ص}{د س}$ ؟

وزاره ٢٠٠٩

إذا كانت ص = $هـ^{١-٢س}$ + $(جتا٢س)^{٦}$ جد $\frac{د ص}{د س}$

وزاره ٢٠١١

اذا كان ص = $هـ^{٢س}$ فان

$\lim_{\Delta س \leftarrow ٠} \frac{ق(س+\Delta س) - ق(س)}{\Delta س}$ ؟

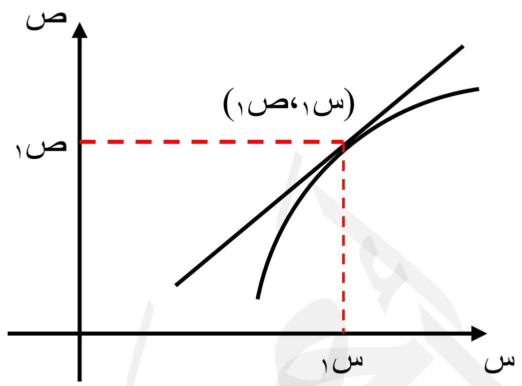
٢٠١٤ صيفى

اذا كان ق(س) = $(٢س-١)^{٤}$

فجد قَ (٠)

٤ علامات

التفسير الهندسي



ميل المماس = قَ(س) = $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

معادلة المماس المار بالنقطة (س١،ص١)

ص − ص١ = م (س − س١)

مثال ١

أوجد ميل المماس للمنحنى

ق(س) = ٢س^{٣} − ٦س

مثال ٢

جد ميل المماس لمنحنى ق(س)= $\frac{\text{٢س}}{\text{٣س+١}}$

عند (٢ ، $\frac{٤}{٧}$)

الحل

مثال ٣

جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

ص = ٢س^{٢} + ٦س عند س = ٢

الحل

مثال ٤

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

ص = (٢س + ٦)(س + ٤) عند س =١

مثال ٥

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

ق(س)= ٢س+٤ عند النقطة (−٢ ، ٠)

سؤال وزاره ٢٠٠٨

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

ق(س) = ٣س^{٢} + ٢س − ٣عندما س= ١

سؤال وزاره ٢٠٠٩

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
ق(س) = س + $\sqrt{\text{س}}$ عندما س = ١

الحل:

مثال ٦

إذا اكان ق(س) = ٤س$^{-١}$ + ٩س
فجد معادلة المماس عند س = ٢

الحل:

مثال ٧

جد قيم س التي يكون عندها ميل المماس
لمنحنى الاقتران ق(س) = ٦س^{٢} − ٣س
يساوي ٣

الحل:

وزاره

إذا كان ميل المماس للاقتران
ق(س)=(٢−س)^{٤} عند النقطة
(س$_{١}$،ص$_{١}$)
يساوي ٤ ، فجد قيم س$_{١}$

وزاره

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
ق(س) = ٣س^{٢} + ٢$\sqrt{\text{س}}$ عند النقطة
(١ ،٥)

الحل:

ان خانك احدهم مره فالذنب ذنبه
وان خانك مرتين فالذنب ذنبك

وزاره

إذا علمت ان قَ(س) = س +٣فان المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عندما س = ١ تساوي؟

مثال ٨

إذا كانت ص = $(س^٤ - ٣)^٣$ فجد قاعدة المماس عند س = ١

وزاره

إذا علمت أن ق(س) = $\frac{١}{س}$ + ٢س فجد معادلة المماس للمنحنى عندما س =١

الحل:

٢٠١٥ صيفى

جد معادله المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{١}{س^٢}$ عند س = -١

٤ علامات

وزاره

إذا كانت معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (٢ ،٨) هي ص = ٤س فأن قَ(٢) ؟

٢٠١٥ شتوى

جد معادله المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{٣س^٢ + ٦}$ عند النقطه (١ , ٣)

٤ علامات

٢٠١٤ شتوي

٦ علامات

اذا ق(س) = س (٣س – ١) ٢ , فجد معادله المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند س = ١

٢٠١٣ صيفي

جد معادله المماس لمنحنى الاقتران

ق(س) = ٤ +√س – ٢ عند النقطه (٣ , ٥)

٤ علامات

التفسير الفيزيائي للمشتقة

إذا تحرك جسيم وقطع مسافة = ف(ن)
فان السرعة التي يسير بها الجسم =ع(ن)
وتعطى بالعلاقة التالية:

ع(ن) = فَ(ن)

بالعاميه : السرعة = مشتقة المسافة

ت(ن) = عَ(ن) = فً(ن)

بالعاميه : التسارع = مشتقة السرعة

مصطلحات مخفية داخل السؤال تدلنا على ثوابت

عندما تنعدم السرعة ⬅ ع(ن) = صفر

عندما ينعدم التسارع ⬅ ت(ن) = صفر

عندما يتوقف الجسم ⬅ ف(ن) =صفر

مثال ١

يتحرك جسم حسب العلاقة
ف(ن) = $ن^٤ + ٣ن^٢ + ٩$ فجد ما يلي
(١) سرعة الجسم بعد مرور ٣ ثواني
(٢) تسارع الجسم عندما ن = ٣

الحل

مثال ٢

إذا كانت ف(ن) = $٢ن^٣ - ٦ن - ٧$ فما تسارع الجسم عندما تكون سرعته ١٨م/ث

مثال ٣

يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^٣ - ١٢ن^٢ + ٣$ ، حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد السرعة عندما تنعدم التسارع ؟

مثال ٤

يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^٢ - ٤ن + ٦$ ، حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد متى تنعدم السرعة

مثال ٥

يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^٣ - ٣ن + ٦$ ، حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد التسارع عندما تنعدم السرعة ؟

ت(١) = ٦ م/ $ث^٢$

وزاره ٢٠٠٨

يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^٣ - ٣ن + ١٥$ ،حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد التسارع عندما تصبح سرعته ٩ م/ ث ؟

ت(٢) = ١٢ م/ $ث^٢$

وزاره ٢٠٠٨

يتحرك جسم وفق العلاقة ف(ن) = ن^٣ – ٢ن + ٧،حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد سرعته عندما يصبح تسارعه ١٢ م/ ث^٢ ؟

∴ ع(٢) = ٣(٢)^٢– ٢ = ١٠ م/ ث

وزاره ٢٠٠٩

يتحرك جسم وفق العلاقة ف(ن) = ن^٢ – ن + ٥ ،حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد تسارع الجسيم بعد مرور٣ ثواني عن بدء الحركة؟

٢٠١٥ صيفى

يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ٢ن^٣ – ٣ ن^٢ ،حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني , ن≥ ٠ , جد المسافه التي يقطعها الجسيم عندما يكون تسارعه ٣٠م/ث^٢

٤ علامات

٢٠١٥ شتوى

٥ علامات

يتحرك جسم على خط مستقيم وفقا للاقتران ف(ن) = ن^٣ – ٣ن^٢ + ٧،حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني , ن≥ ٠ , جد سرعه الجسيم عندما يكون تسارعه ١٢ م/ ث^٢ ؟

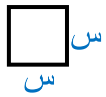
٢٠١٤ صيفى

٥ علامات

يتحرك جسم على خط مستقيم وفقا للاقتران ف(ن) = ن^٣ – ٢ن + ١ ،حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني , ن≥ ٠ , جد تسارع الجسيم عندما يكون سرعته ٢٥ م/ ث ؟

قـــوانـــــيـــــن

المربـــع



المساحة = الطول × العرض = س^{٢}

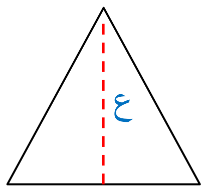
المحيط = ٤س

المستطيل

المساحة = س× ص

المحيط = ٢س + ٢ص

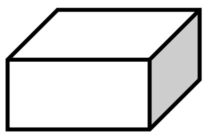
المثلث



إذا علمت أن طول قاعدته يساوي س وارتفاعه يساوي ع

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ س ع

متوازي الاضلاع



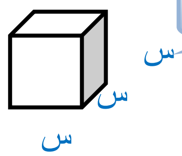
إذا علمت أن طوله يساوي س

عرضه = ص

ارتفاعه = ع

∴ الحجم = س ص ع

المكعب



كل أضلاعه متساوية الأبعاد = س

الحجم = ح = س^{٣}

المساحة الجانبية = ٤س^{٢}

المساحة الكلية = ٦س^{٣}

التـــزايـــد و التــنـاقــص

اولا: قاعده اختبار المشتقه الاولى

خطوات إيجاد فترات التزايد و التناقص

١. نجد المشتقة الأولى (ق َ(س))
٢. نضع ق َ(س) = ٠ لإيجاد أصفار المشتقة و تسمى النقاط الحرجة
٣. نضع النقاط الحرجة على خط الإعداد و نفحص إشارتها
٤. إذا كانت المشتقة موجبة ← تزايد
إذا كانت المشتقة سالبة ←تناقص

عندما يتحول الاقتران من متزايد إلى متناقص (قمة) تسمى تلك النقاط **قيمة عظمى**
عندما يتحول الاقتران من متناقص إلى متزايد(قاع) تسمى تلك النقاط **قيمة صغرى**

مثال

إذا كان $ق(س)= س^{٢} - ٨س+٧$
،جد فترات التزيد والتناقص للاقتران ق(س)

إذا كان $ق(س)=\frac{١}{٣}س^{٣}-\frac{١}{٢}س^{٢}-٦س+٨$

جد ما يلي
١)فترات التزايد والتناقص
٢)القيم الحرجه
٣)القيم القصوى للاقتران

سؤال وزاره ٢٠٠٩

إذا كان $ق(س)= س^{٣} - ٣س+١$ فجد:
١) قيم س الحرجة للاقتران ق
٢) فترات التزايد والتناقص للاقتران
٣) القيم الصغرى و العظمى للاقتران

مثال

إذا كان ق(س)=(س+٢)^{٣} فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران

سؤال وزاره ٢٠٠٩

إذا كان ق(س)=٣س^{٢} – س^{٣}+١
فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)؟

وزاره

إذا كان للاقتران ق(س)=أس^{٢}+٦س نقطة حرجة عند س=١ فما قيمة أ؟

سؤال وزاره ٢٠١١

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)= س^{٣} – ٤٨س + ٥

سؤال وزاره ٢٠٠٨

إذا كان الاقتران ق(س)=١– س^{٢} فان الاقتران ق يكون متزايد في الفترة

وزاره

إذا كان للاقتران ق (س)= أس^{٢}– ٨س+٢ نقطة حرجة عند س=١ فان قيمة أ تساوى

سؤال وزاره ٢٠٠٩

إذا كان الاقتران ق (س)=٢س^{٣}–٢٤س +٢ فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)؟
الحل

وزاره

إذا كان ق (س)= س^{٢}–٤س فان للاقتران ق(س)قيمة عظمى عندما س تساوي

مثال

إذا كان ق(س)= س^{٣}+٥ فجد
١) قيم س الحرجة
٢) فترات التزايد والتناقص
٣) القيم الصغرى و العظمى

ثانيا: قاعده اختبار المشتقه الثانيه

خطوات الحل:
١)نجد القيم الحرجة (أي نجد أصفار المشتقة الأولى)
٢) نجد المشتقة الثانية للاقتران
٣)نعوض القيم الحرجة(أصفار المشتقة الأولى) في المشتقة الثانية

- إذا كان الجواب سالب ←القيمة عظمى
- إذا كان الجواب موجب←القيمة صغرى
- إذا كان الجواب صفر←فشل الاختبار ونستخدم اختبار المشتقة الأولى

مثال

إذا كان ق(س)= س^{٣} – ١٢س استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى للاقتران

مثال

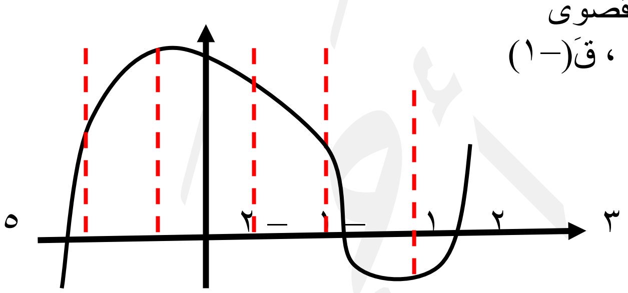
إذا كان ق(١)= –٣، قَ(١)=٠
قً(١)=٥ ق(٣)=٤ قَ(٣)=٠
قً(٣)= –٢ فجد القيمة العظمى والصغرى للاقتران

طرق ايجاد القيم القصوى باستخدام الرسم

مثال

الرسم يمثل منحنى ق(س) اعتمد على الرسم في إيجاد
١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)
٢) القيم س الحرجة
٣)القيم القصوى
٤)قَ(٣) ، قَ(−١)

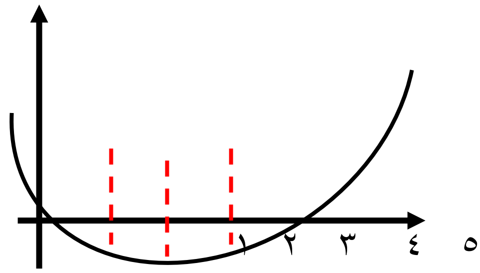
ق(س)



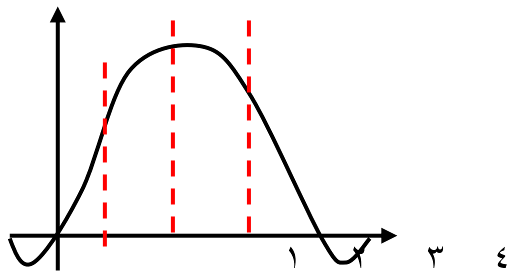
وزاره

الشكل يمثل منحن الاقتران ق(س) فان الاقتران متزايد في الفترة
أ) [٣ , ∞)   ب) [٥ , ∞)
ج)[١،٥]   د) (− ∞ , ٣]

ق(س)

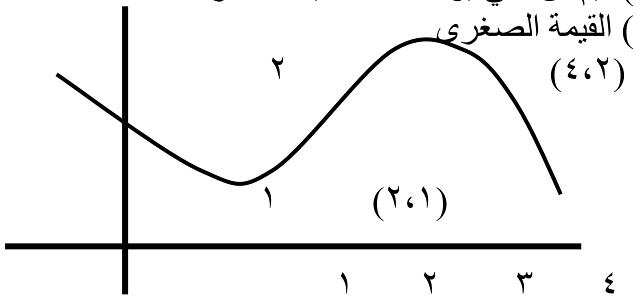


اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) فان الاقتران ق يوجد نقطة حرجة عندما س تساوي
أ) صفر   ب)١   ج) ٢   د)٤



مثال

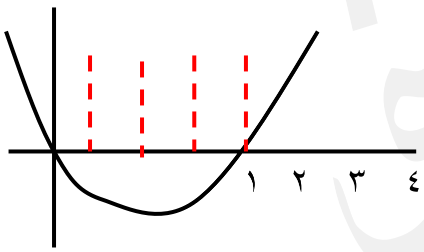
الرسم التالي بين منحن الاقتران ق(س) اعتمد عليه لإيجاد ما يلي
١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)
٢) قيم س الحرجة
٣) قيم س التي يوجد عندها قيمة عظمى
٤) القيمة العظمى
٥) قيم س التي يوجد عندها قيمة صغرى
٦) القيمة الصغرى



مثال

يمثل الشكل المجاور منحنى قَ(س) جد ما يلي
١) فترات التزايد والتناقص
٢) قيم س الحرجة للاقتران ق (س)
٣) القيم القصوى

قَ(س)



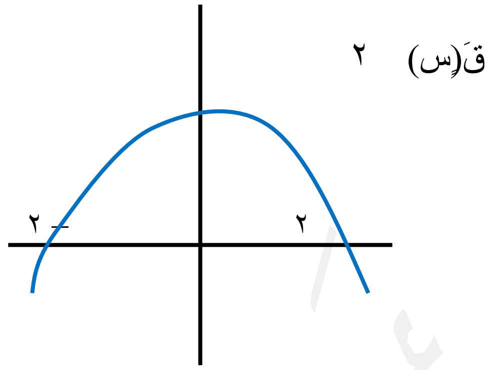
الحل

فوق محور السينات ⟸ موجب
تحت محور السينات ⟸ سالب

سؤال وزاره ٢٠٠٨

معتمدا على الشكل الذي يمثل منحنى قَ (س) فان للاقتران ق (س) قيمة عظمى عند س = ؟

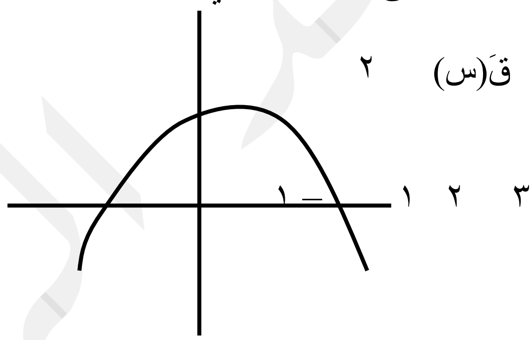
أ) ٢
ب) −٢
ج) ١
د) صفر



سؤال وزاره ٢٠٠٨

معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى قَ (س) فان للاقتران ق (س) قيمة عظمى عند س تساوي

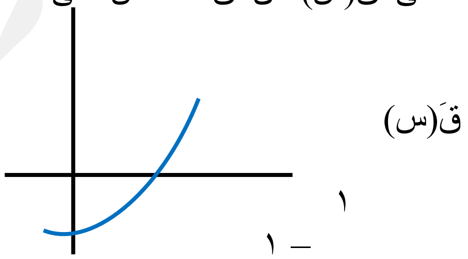
أ) − ١
ب) ١
ج) ٢
د) ٣



وزاره

ي... جاور منحنى قَ(س) فان ق متناقص على الفترة

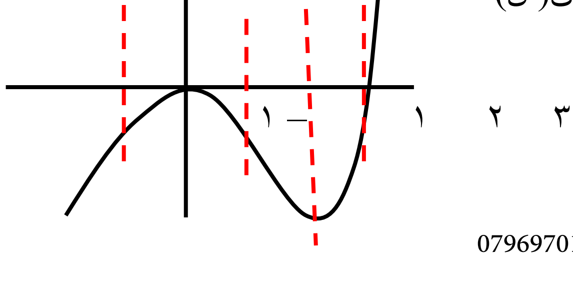
أ) [١ , ∞)
ب) [٠ , ١]
ج) [−١،١]
د) (− ∞ , ١]



مثال

اعتمد على الرسم البياني لمنحنى ق(س) واجب على الأسئلة ا...

١) جد فترات التزايد والتناقص
٢) القيم الحرجة
٣)النقط القصوى
ق(س)



مثال

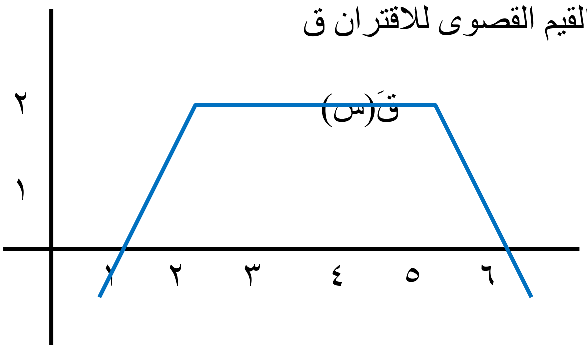
يمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق

قَ (٣)= قَ (٥)= ٢

قَ(١)= قَ(٦)= صفر

اعتمد على الشكل في إيجاد

١) قيم س الحرجة
٢) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق
٣) نقط القيم القصوى للاقتران ق



تطبيقات على القيم القصوى

نحتاج التطبيقات على القيم القصوى لايجاد اكبر أو اصغر كمية لشيء

خطوات الحل:

١) نرسم شكل توضيحي للسؤال (إن أمكن)
٢) تكوين الاقتران أو المعادلة حسب المقدار المطلوب
٣) تحويل المعادلة إلى متغير واحد فقط
٤) نشتق ونساوى المشتقة بالصفر لإيجاد القيمة الحرجة (المطلوب)
٥) نختبر القيم الحرجة باستخدام اختبار المشتقة الأولى أو الثانية

مثال

ج... ان اللذين مجموعها (٦٠) وحاصل ضربهما اكبر ما يمكن

مثال

جد العددان اللذين مجموعهما (٤٠) وحاصل مجموع مربعيهم اقل ما يمكن ؟

مثال

عددان موجبان مجموعهما (١٦) وحاصل ضربهما اكبر ما يمكن ؟

مثال

قطعة ارض مستطيلة الشكل محيطها ٦٠٠ متر جد بعدي القطعة لتكون مساحتها اكبر ما يمكن ؟

الحل

سؤال وزاره ٢٠٠٩

قطعة ارض مستطيلة الشكل مساحتها ٨٠٠م٢ تقع على ضفة نهر مستقيم فإذا أراد مالكها تسيجها ولم يسج الواجهة الواقعة على ضفة النهر جد أبعادها ليكون سياجها اقل ما يكن ؟

سؤال وزاره ٢٠١١

ما العددان الصحيحان الموجبان اللذان مجموعهما (١٤) وحصل ضربهما اكبر ما يمكن ؟

الحل

سؤال وزاره ٢٠١٠

مستخدما تطبيقات التفاضل حل المسالة آلاتية: ما العددان الصحيان الموجبان اللذان حاصل ضربهما (٨١) و مجموعهما اقل ما يمكن ؟

مثال

حديقة مستطيلة الشكل محيطها ٢٠٠ سم جد طولها لتكون المساحة اكبر ما يكن

صندوق معدني قاعدته مربعة الشكل بلا غطاء حجمه ٣٢ سم^{3} ما أبعاده لتكون كمية المادة المستخدمة في تصنيعه اقل ما يمكن ؟

يراد عمل صندوق مفتوح من الأعلى من قطعة ورق مستطيلة الشكل إبعادها ٨٠سم، ٥٠سم وذلك بقطع مربعات متساوية عند رؤوسهم ثم ثني الأجزاء البارزة إلى الأعلى ، ما حجم اكبر صندوق يمكن صنعة بهذه الطريقة؟

الحل

سؤال وزاره ٢٠١٠

لدى مزارع ٥٠٠ متر من الأسلاك الشائكة إذا أراد المزارع تسيج قطعة ارض مستطيلة الشكل ما بعدا قطعة الأرض المستطيلة اللون اللذان يجعلان مساحتها اكبر ما يمكن ؟

مثال

صفيحة من الورق مستطيلة مساحتها (٣٢ سم^{2}) يراد طباعة إعلان عليها إذا كان عرض كل من الهامشين في راس الورق وأسفلها (اسم) وفى كل من الجانبيين (٠,٥ سم) فجد بعدي الورقة حتى تكون المساحة اكبر ما يمكن

مثال

مثلث قائم الزاوية مجموع ضلعي القائمة =٨٠ سم جد اكبر مساحة ممكنة للمثلث؟

سؤال وزاره ٢٠٠٩

إذا كان طول ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية يساوي ٤٠ سم ، فجد اكبر مساحة ممكنة للمثلث

مثال

يراد تسيج قطعة ارض مستطيلة الشكل إذا كانت تكلفة المتر الواحد من الجانبيين المتوازيين هي ٨ دنانير ومن الجانبين الآخرين هي ٤ دنانير فجد مساحة اكبر قطعة يمكن تسيجها بمبلغ ١٢٠٠ دينار ؟

تطبيقات اقتصاديه على التفاضل

يلزمنا في هذا الدرس التعرف على ٣ مصطلحات جديدة

١) ك (س) = اقتران التكلفة الكلية
كَ (س) = التكلفة الحدية
٢) د(س) = اقتران الإيراد الكلي
دَ (س) = الإيراد الحدي
٣) ر (س) = اقتران الربح
رَ (س) = الربح الحدي

حيث أن :
اقتران الإيراد الكلى = الربح + التكلفة الكلية

ملاحظة :
إذا أعطانا السؤال تكلفة قطعة واحدة أو ربحها أو إيرادها و طلب منا التكلفة الكلية أو الإيراد الكلي أو الربح الكلي فإننا نضرب المعطى بـ س

امثله

١) إذا كانت تكلفة قطعة واحدة لإنتاج قميص يساوي ٤ فجد التكلفه الكليه ؟

٢) إذا كانت تكلفة قطعة واحدة من الخزانات الشمسية تعطى بالعلاقة
(٣ س – ٤) فجد التكلفة الكلية؟

مثال

إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو
د(س) = – ٢ س^{٢} + ٦٠ س دينار و اقتران التكلفة الكلية ك(س) = ٢٠ س دينار . حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما فجد ما يلي :
١) التكلفة الحدية , الإيراد الحدي , الربح الحدي
٢) قيمة س التي تجعل الربح اكبر ما يمكن

سؤال وزاره ٢٠٠٩

ينتج مصنع للثلاجات س ثلاجة شهريا , فإذا كانت تكلفة إنتاجها تعطى بالعلاقة ك (س) = ١٦٠٠٠ – ٤س + س^{٢} وكان يبيع الثلاجة الواحدة بسعر ٢٥٠ دينار فجد
اقتران الإيراد الكلي للمصنع من بيع الثلاجات
عدد الثلاجات التي يجب أن يبيعها المصنع شهريا لتحقيق اكبر ربح ممكن

مثال

إذا كان د(س) = ٣٠س – س^{٢} هو اقتران الإيراد الكلي وكان ك(س) =٣٠ +٦س هو اقتران التكلفة الكلية فجد س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن

سؤال وزاره ٢٠٠٨

ينتج مصنع للحواسيب س جهاز أسبوعيا فإذا كانت تكلفة الإنتاج الكلي الأسبوعي تعطى بالعلاقة
ك(س) = ٣٠٠ +٥٠س + س^{٢} وكان المصنع يبيع الجهاز الواحد بمبلغ ٢٥٠ دينار فجد
اقتران الإيراد الكلي
اقتران الربح الكلي
عدد الأجهزة التي يجب أن يبيعها المصنع أسبوعيا ليحقق اكبر ربح

سؤال وزاره ٢٠٠٨

إذا كان الإيراد الكلي الناتج عن بيع س من منتج ما هو د(س) = ٣٠س – س^{٢} والتكلفة الكلية
ك(س) = ١٠ س فجد قيمة س التي تجعل الربح اكبر ما يمكن

وزاره

إذا كان د(س) = ١٦ س – س^{٢} – ٢٠ ،
ك (س) = ٢ س^{٢} – ٨ س + ١٥، هما إيراد س من وحدات سلعة معينة و تكلفتها، فجد :
١) اقتران الربح
٢) قيمة س التي تجعل الربح اكبر ما يمكن؟

سؤال وزاره ٢٠٠٨

إذا كان الإيراد الكلي لبيع س وحدة منتج ما يعطى بالعلاقة د(س) = ٦٠ س – ٢ س^{٢}
فان الإيراد الحدي عندما س = ١٠ تساوي؟