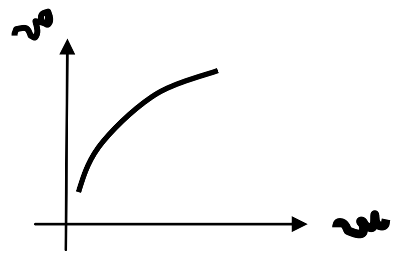
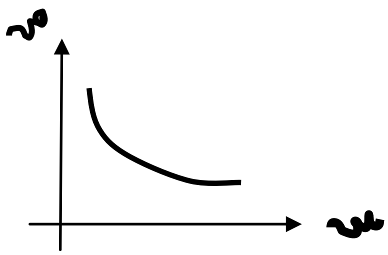
إذا كانت قَ(س) > ٠ ⟵ ق(س) متزايد

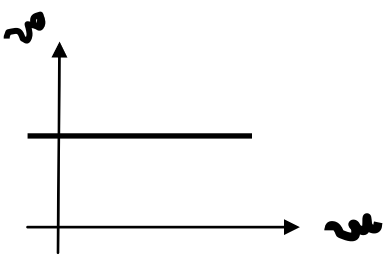
إذا كانت قَ(س) < ٠ ⟵ ق(س) متناقص

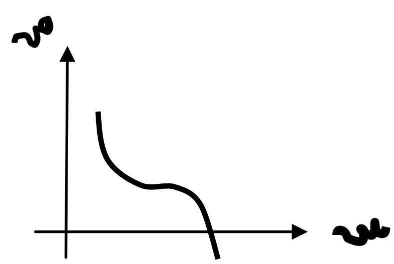
إذا كانت قَ(س) = ٠ ⟵ ق(س) ثابت

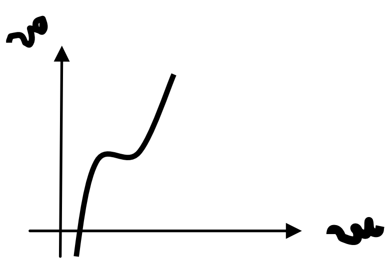
ادرس تزايد وتناقص كل من المنحنيات الآتيـــــة :

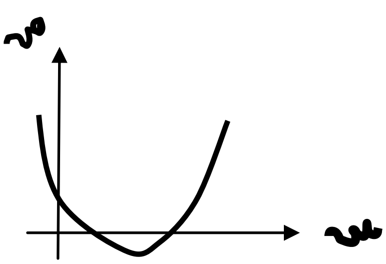






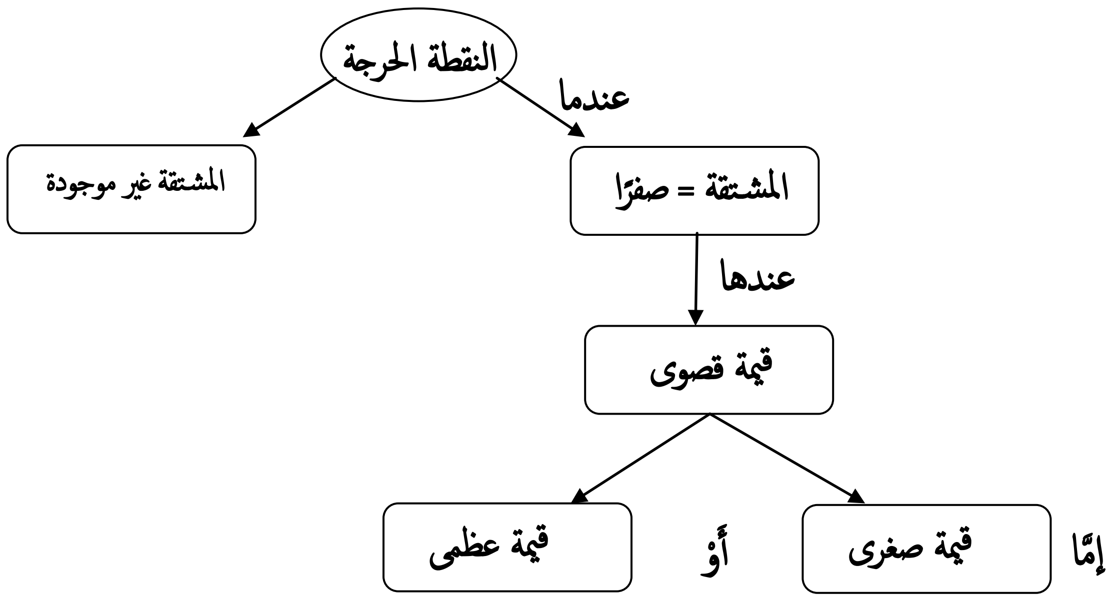






هذا المخطط يبين مفهوم : النقطة الحرجة ، القيمة العظمى ، القيمة الصغرى

النقطة الحرجة : هي النقطة التي تكون عندها قيمة المشتقة صفرًا



خطوات إيجاد فترات التزايد و التناقص لمنحنى اقتران ما :

(١) نجد مشتقة الاقتران .

(٢) نساوي المشتقة بالصفر .

(٣) نجد أصفار المشتقة (القيم التي تجعل المشتقة صفرًا) .

(٤) نعين هذه الأصفار على خط الأعداد .

(٥) ندرس إشارة المشتقة حول كل صفر منها .

(٦) إذا كانت المشتقة موجبة ، يكون منحنى الاقتران متزايدًا في هذه الفترة .

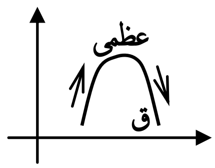
(٧) إذا كانت المشتقة سالبة ، يكون منحنى الاقتران متناقصًا في هذه الفترة .

خطوات إيجاد القيم القصوى (الصغرى أو العظمى) لمنحنى اقتران ما :

(١) ندرس إشارة المشتقة حول أصفارها .

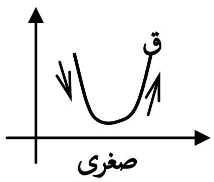
(٢) إذا تحولت إشارة المشتقة حول صفرها من موجبة إلـــى سالبة ،

فإننا نكون عند قيمة عظمى للاقتران : **+ ⟵ – (عظمى)**



(٣) إذا تحولت إشارة المشتقة حول صفرها من سالبة إلـــى موجبة ،

فإننا نكون عند قيمة صغرى للاقتران : **– ⟵ + (صغرى)**



(٤) إذا لم تتغير إشارة المشتقة حول صفرها ، فلا توجد عند هذا الصفر قيمة قصوى .

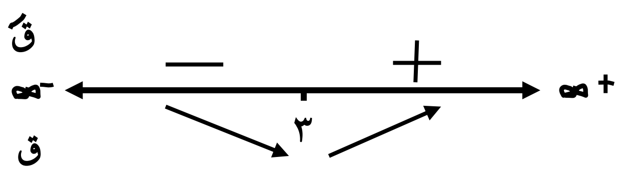
مثال ١ : ليكن ق(س) = س^{٢} – ٦س + ٩ ، ادرس تزايد و تناقص الاقتران ق(س) على ح

الحل : ق/(س) = ٢ س - ٦

نضع ٢ س – ٦ = ٠ ، ثم نحل المعادلة ⟵ س = ٣ (عندها نقطة حرجة لــ ق)

نرسم خط الأعداد ...

- نعين عليه صفر المشتقة الأولـــى
- نبين إشارة المشتقة حول صفرها
- ق متزايد في الفترة :
- ق متناقص في الفترة :



سؤال : جد فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ (س) = س^{٣} – ٣ س + ١

تمرين : ادرس تزايد و تناقص الاقتران ك (س) = (س + ١) (س + ٢)

تدريب : بيّن أن الاقتران ق(س) = $س^{٣}$ + س متزايـــــد دائمًا على ح .

تدريب : بين أن الاقتران ق(س) = $س^{٣}$ + ١ متناقص دائمًا على ح .

لاحظ أنه يوجد نقطة حرجة عند س = ٠ ، لكنها ليست قصوى .

ملاحظة هامة : تكون إشارة مشتقة الاقتران التربيعي ذي الصفر الواحد (المكرر) نفسها على كل المجال(نفس إشارة $س^{٢}$)

كما في التدريبين السابقين.

تمرين : ليكن ق(س) = ٣ س – س^{٣} + ٢ ، أوجد ما يلي :

(١) قيم س التي عندها نقاط حرجة للاقتران ق .

(٢) قيم س التي يكون عندها قيمة قصوى للاقتران ق .

(٣) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق .

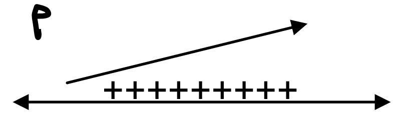
سؤال : اعتمد الأشكال الآتيـة ،في الإجابة عما يلي :

(١) اكتب أصفار المشتقة الأولـــى للاقتران :

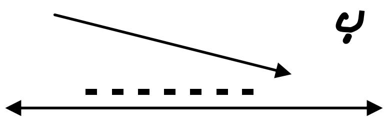
(٢) اكتب قيم س التي يكون للاقتران عندها نقاط حرجة :

(٣) اكتب فترات التزايد والتناقص للاقتران في كل من المخططات الآتيـة :

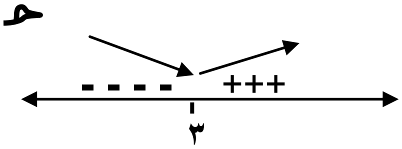
أ



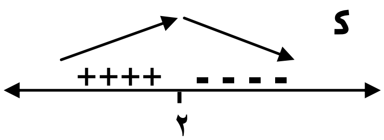
ب



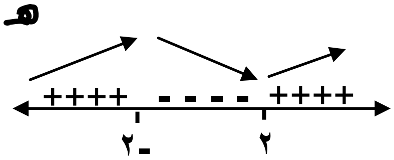
جـ



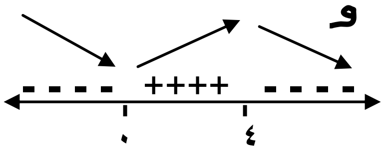
د



هـ



و



تمرين : لتكن قَ(س) = س – س^{٢} ، أوجد ما يلي :

(١) قيم س التي عندها نقاطة حرجة للاقتران ق .

(٢) فترات التزايد و التناقص لـــ ق .

(٣) قيم س التي يكون عندها للاقتران ق قيم قصوى ، وبيّن نوعها .

مثال : ليكن ق (س) = س^{٢} – ٥ س + ٦ ، أجب عما يلي :

(١) أوجد قَ (س)

(٢) أوجد قيم س التي يكون عندها للاقتران ق نقاط حرجة .

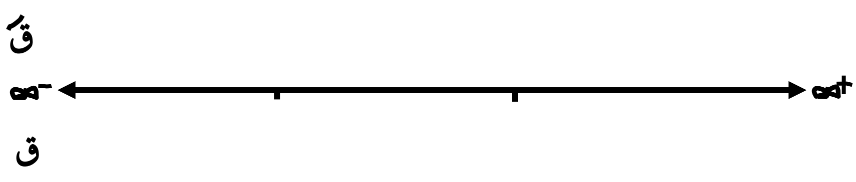
(٣) اكتب النقاط الحرجة لهذا الاقتران .

(٤) أين يتزايـــد الاقتران ق ؟

(٥) أين يتناقص الاقتران ق ؟

(٦) ما هي القيمة العظمى للاقتران ق ؟

(٧) ما هي القيمة الصغرى للاقتران ق ؟



تمرين : إذا كانت ق َ(س) = س – س^{٢} ، أجب عما يلي :

أ) قيم س الحرجة لـــ ق :

ب) فترات التزايد والتناقص لمنحنى ق :

جـ) قيم س التي يوجد عندها قيم قصوى ، وبين نوعها :

تمرين : اعتمد الجدول المجاور في إيجاد كل مما يلي :

س	-٢	٤	
ق َ(س)	+ +	– –	+ +
ق (س)	↗	↘	↗

(١) قيم س الحرجة لـــ ق :

(٢) قيم س التي يكون عندها قيمة قصوى :

(٣) فترات التناقص و فترات التزايد لـــ ق :

(٤) ارسم شكلاً تقريبيًا لمنحنى ق :

(٥) ما هي درجة الاقتران ق ؟

(٦) كم صفرًا للمشتقة الثانية للاقتران ق ؟

تمرين : ليكن ق(س) = جـ س^{٢} – ٨ س + ٣ ، احسب قيمة الثابت جـ إذا كان للاقتران ق قيمة حرجة عند س = ١ .

تمرين : إذا كان للاقتران ق(س) = ب س^{٢} + ٨ س ،قيمة قصوى عندما س = ٢ ، فجد قيمة الثابت ب .

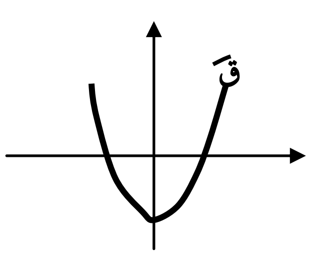
تمرين : إذا كانت ق′(س) = س^{٢} + ٣ ك س ، وكان للاقتران ق(س) قيمة قصوى عندما س = ٣ ، فجد قيمة الثابت ك .

تمرين : إذا كان ق(س) = ٢س^{٣} + ٢ ب س + جـ ، وكانت النقطة (١ ، ٣) نقطة حرجة لــ ق(س) ، فجد قيمة كل من الثابتين ب ، جـ .

تمرين : ليكن ق(س) = س^{٢} (ل – س) ، احسب قيمة الثابت ل ، إذا علمت أن ق′(س) تغير إشارتها حول س = ١ من سالب إلــى موجب .

تمرين : معتمدًا على الشكل المرافق ، احسب قيمة الثابت ب ،

حيث ق(س) = س^{٣} – ب س + ١



اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى للاقتران

خطوات إيجاد القيم القصوى للاقتران ق(س) باستخدام اختبار المشتقة الثانية :

(١) نجد المشتقة الأولى لـ ق .

(٢) نُساوي المشتقة الأولى بالصفر ، ونحسب قيم س الحرجة لـ ق ، ولتكن مثلًا $س_١$.

(٣) نجد المشتقة الثانية لـ ق .

(٤) نعوض قيمة $س_١$ الحرجة في قاعدة المشتقة الثانية ، ثم ندرس إشارة الناتج :

أ) إذا كانت إشارة الناتج > ٠ ، فإنه يوجد قيمة صغرى للاقتران وهي ق($س_١$) .

ب) إذا كانت إشارة الناتج < ٠ ، فإنه يوجد قيمة عظمى للاقتران وهي ق($س_١$) .

جـ) إذا كان ناتج التعويض صفرًا ، فإننا نعود إلى اختبار المشتقة الأولــى ؛ لفشل اختبار المشتقة الثانية في ذلك .

مثال : جد القيم القصوى (إن وُجدت) للاقتران ق(س) = ٣ $س^٢$ - ٤ $س^٣$ ، باستخدام اختبار المشتقة الثانية .

الحل :

- ق َ(س) = ٦ س – ١٢ $س^٢$ = ٠

٦ س (١ – ٢ س) = ٠ ⟵ س = ٠ ، س = $\frac{١}{٢}$

- ق ً(س) = ٦ – ٢٤ س

- نجد ق ً(٠) = ٦ – ٢٤ × ٠ = ٦ > ٠ ⟵ يوجد قيمة صغرى محلية للاقتران ق عند س=٠ ، وهي ق(٠) = ٠

- نجد ق ً(٠,٥) = - ٦ < ٠ ⟵ يوجد قيمة عظمى للاقتران ق عند س = ٠,٥ ، وهي ق(٠,٥) = ٠,٢٥

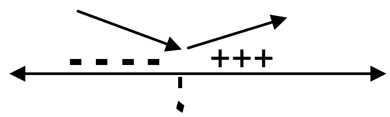
مثال ٢ : ق(س) = س^{٤} ، استخدم اختبار المشتقة الثانية في إيجاد القيم القصوى للاقتران ق ، إن وجدت .

الحل : قَ(س) = ٤ س^{٣} = ٠ ⟵ س = ٠

قً(س) = ١٢ س^{٢}

قً(٠) = ٠ ⟵ يفشل الاختبار ، بالتالي نعود إلى اختبار المشتقة الأولـــى .

اختبار المشتقة الأولى :



من المخطط نجد أن الاقتران ق له قيمة صغرى محلية عند س = ٠ ، وهي ق(٠) = ٠

تمرين : جد قيم س التي عندها قيم قصوى للاقتران ق (س) ، إذا علمت أن قَ(س) = س^{٢} – ٢س + ١ باستخدام اختبار المشتقة الثانية .

تمرين: إذا كان ق(٣) = ٤ ، قَ(٣) = ٠ ، قً(٣) = ـ ٢، فجد قيمة س التي عندها قيمة قصوى مع بيان النوع وتحديد قيمتها .

دراسة خواص المنحنيات من الرسم البياني

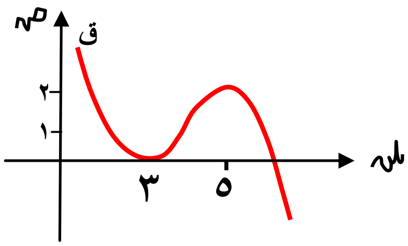
المقصود بخواص المنحنيات هو : القيم الحرجة ، التزايد ، التناقص ، القيم القصوى .

مثال١ : الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) ، اعتمد الشكل في الإجابة عما يلي :

(١) جد قيم س الحرجة لـ ق :

(٢) جد فترات التزايد والتناقص لـــ ق :

(٣) القيم القصوى و بيان نوعها (عظمى أو صغرى) :

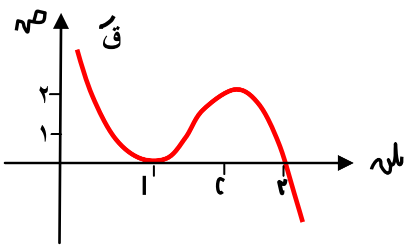


مثال٢ : اعتمادًا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولــى لمنحنى الاقتران قَ(س) جد :

(١) قيم س التي عندها مماس أفقي للاقتران ق .

(٢) قيم س التي عندها قيمة صغرى للاقتران ق .

(٣) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق .

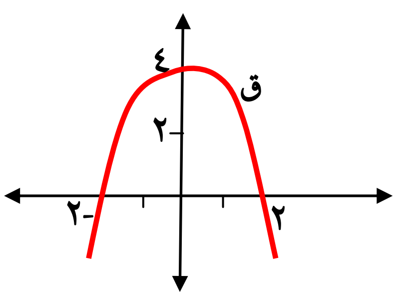


تمرين : اعتمد الشكل المجاور في إيجاد :

(١) قيم س الحرجة لـ ق :

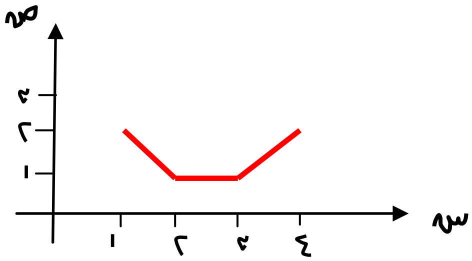
(٢) فترات التزايد لـ ق :

(٣) القيمة الصغرى والقيم العظمى لـ ق (إن وجدت) :



تمرين : الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) في الفترة [١ ، ٤] ، أجب عما يلي :

(أ) اكتب الفترة التي يكون فيها ق متزايدًا ، متناقصًا :



(ب) أين تكون قَ(س) = ٠ ؟

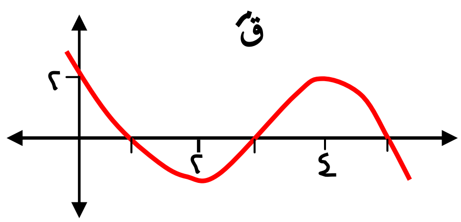
(جـ) أين تكون قَ(س) < ٠ ؟

(د) أين تكون قَ(س) > ٠ ؟

(هـ) ارسم منحنى قَ(س) .

تمرين : الشكل المجاور يبين منحنى قَ(س) ، اعتمده في الإجابة عما يلي :

(١) قيم س الحرجة لـِ ق :



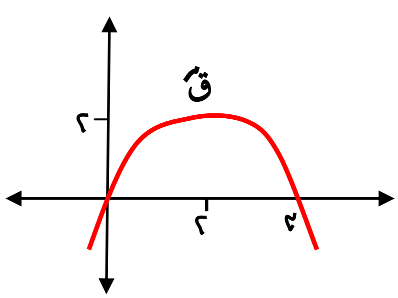
(٢) فترات التزايد وفترات التناقص لـِ ق :

(٣) القيم القصوى – إن وجدت – لـِ ق :

(٤) ما درجة الاقتران ق ؟

تمرين : اعتمد الشكل جانبـًا والذي يمثل قَ(س) في الإجابة عما يأتي :

(١) جد قيمة كل من : قَ(٠) ، قَ(١) ، قَ(٢)



(٢) جد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق :

(٣) قيم س التي عندها قيمة قصوى لـِ ق :

(٤) جد قيمة $\underset{\text{هـ} \to \text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق(١+هـ) – ق(١)}}{\text{هـ}}$

(٥) ما هي درجة ق ؟

هذا الدرس هو تطبيق لمفهوم المشتقة بشكل مباشر وواضح .

مسائله كلامية ، ولكي نحلها يجب أن نحولها إلى رموز ومفاهيم رياضية ...

سنحاول معًا أن نحدد معالم خطوات حل هذا النوع من المسائل من خلال المثال الآتـــي :

مثال١ : ما العددان الموجبان اللذان مجموعها ٣٠ ، وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن ؟

الحل : النقاط الساخنة في المسألة هي :

مجموعها ٣٠	**نفرض أن س هو أحد العددين فيكون العدد الآخر ٣٠- س**
مربع الآخر	**س^{٢} (يصح أن نربع العدد ٣٠ – س)**
أحدهما × مربع الآخر	**(٣٠ – س) × س^{٢}**
أكبر ما يمكن (هنا العلاقة الأساسية)	**المقدار (٣٠ – س) × س^{٢} أكبر ما يمكن**

الخطوة الأولـــى

تكوين العلاقة الأساسية

نرمز للمقدار بحرف مثل ك ، ولأن متغيره س فإننا نقول : ك(س) = (٣٠ – س) × س^{٢}

نحضر المقدار للاشتقاق : ك(س) = ٣٠ س^{٢} – س^{٣}

نجد مشتقة ك (س) : كَ(س) = ٦٠ س – ٣ س^{٢}

الخطوة الثانية

نجد المشتقة الأولى

نساوي المشتقة بالصفر : ٦٠ س – ٣ س^{٢} = ٠

نحل المعادلة الناتجة : ٣ س (٢٠– س) = ٠   س = صفر ، س = ٢٠

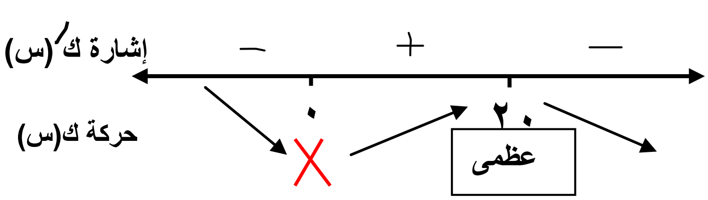
الخطوة الثالثة

نساوي المشتقة بالصفر ونحل المعادلة

نختبر هل يكون المقدار ك(س) أكبر ما يمكن عند صفر ؟ عند ٢٠؟

نعتمد اختبار المشتقة الأولـــى :

من الشكل نستنتج أن :



يكون الناتج أكبر ما يمكن عند س = ٢٠

بالتالي يكون العدد الآخر هو : ٣٠ – ٢٠ = ١٠

تمرين : مستطيل مساحته ٦٤ سم^{٢} ، احسب بعديه عندما يكون مجموعهما أقل ما يمكن .

تمرين : مستطيل مجموع بعديه ٥٠ سم ، جد هذين البعدين عندما تكون مساحته أكبر ما يمكن .

تمرين : مستطيل محيطه ٦٠ سم ، احسب بُعْدَيه عندما تكون مساحته أكبر ما يمكن .

تمرين : جد العددين اللذين مجموعهما ٢٠ ، و مجموع مربعيهما أقل ما يمكن .

تمرين : قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٨٠٠ م^{٢} ، يمر من أمامها مجرى ماء ، أراد صاحب الأرض أن يحيط الأرض من جهاتها الثلاث (عدا جانب الممر المائي) ، جد أبعاد الأرض بحيث يكون طول السياج أقل ما يمكن . وزارة

تمرين (سؤال ٣ صـــ ١٢٧) / الكتاب المقرر :

قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٨٠٠ م٢ تقع على ضفة نهر مستقيم ، أراد مالكها تسييجها ما عدا جهة النهر ، أثبت أن طول السياج يكون أصغر ما يمكن عندما يكون طول قطعة الأرض مساويًا مثلي عرضها .

تمرين : أقام صاحب مزرعة أبقار سياجًا حول مزرعته المستطيلة الشكل ، فإذا كانت تكلفة المتر الطولي من جانبين متوازيين وزارة هو ٤ دنانير ، ومن الجانبين الآخرين دينارين ، فجد مساحة أكبر مزرعة يمكن تسييجها بمبلغ ٨٠٠ دينار .

تمرين : أقام صاحب مزرعة خضار سياجًا حول مزرعته المستطيلة والتي مساحتها ١٨٠٠ م^{٢} ، فإذا كانت تكلفة المتر الطولي من جانبين متوازيين هو ديناران ، ومن الجانبين الآخرين ٤ دنانير ، فجد بعدي المزرعة بحيث تكون كلفة السياج أقل ما يمكن .

تمرين : صفيحة من الورق مستطيلة مساحتها ٣٢ سم^{٢} ، يُراد طباعة إعلان عليها . فإذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها هو س سم ، وفي كل من الجانبين ٠,٥ سم ، احسب بعدي الورقة بحيث تكون مساحة المنطقة المطبوعة أكبر ما يمكن .

تمرين : يراد إنشاء حديقة مستطيلة مساحتها ٩٠٠ م^{٢} ، وإحاطتها بطريق خارجي منتظم عرضه ٢ م ، جد بعدي الحديقة التي تجعل المساحة الكلية للحديقة والطريق أقل ما يمكن .

تمرين : صندوق على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة ، مجموع أبعاده الثلاثة ١٢٠ سم ، جد أبعاده التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن .

تمرين : يراد عمل صندوق مفتوح من الأعلى من قطعة ورقية مربعة طولها ١٢ سم ، وذلك بقطع مربعات صغيرة متساوية عند رؤوسها وثني الأجزاء البارزة للأعلى ، احسب حجم أكبر صندوق يمكن صنعه من هذه الورقة .

تمرين : يراد عمل صندوق مفتوح من الأعلى من قطعة ورقيةمستطيلة طولها ٢١ سم ، وعرضها ١٦ سم ، وذلك بقطع مربعات صغيرة متساوية عند رؤوسها وثني الأجزاء البارزة للأعلى ، احسب حجم أكبر صندوق يمكن صنعه من هذه الورقة .

تمرين : مثلث قائم الزاوية مجموع ضلعي قائمته يساوي ٤٠ سم ، جد مساحة أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث .

تطبيقات اقتصادية للقيم القصوى : إيراد كلي ، تكلفة كلية ، ربح حدي ، تكلفة حدية ، إيراد حدي

الربح = الإيراد – التكلفة

ر(س) = د(س) – ك(س)

ر′(س) = د′(س) – ك′(س)

ربح حدي = إيراد حدي – تكلفة حدية

مثال١ : ليكن ك(س) = ٣ س^{٢} - ٢٤ س اقتران التكلفة الكلية لإنتاج س قطعة في مصنع خلويات ،

وليكن د(س) = ٢ س^{٢} - ٢٠٠٠س + ٣٠٠ اقتران الإيراد الكلي من بيع هذه السلعة .

أوجد كلاً مما يأتـــــي :

(١) اقتران التكلفة الحدية :

(٢) اقتران الإيراد الحدي :

(٣) اقتران الربح :

(٤) اقتران الربح الحدي :

(٥) احسب عدد القطع التي يجب أن ينتجها المصنع لكي تكون التكلفة أقل ما يمكن

(٦) احسب عدد القطع التي يجب أن ينتجها المصنع لكي يكون الإيراد الكلي أكبر ما يمكن

(٧) احسب عدد القطع التي يجب أن ينتجها المصنع لكي يكون الربح أكبر ما يمكن

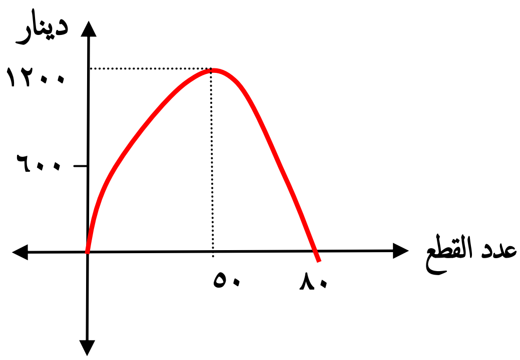
تمرين : اعتمد الشكل البياني المرافق – الذي يمثل اقتران الإيراد الكلي لمصنع أحذية - في الإجابة عما يأتـــي :

(١) كم عدد القطع الذي يكون عندها الإيراد الكلي أكبر ما يمكن ؟

(٢) متى يكون إيراد المصنع الكلي صفرًا ؟

(٣) متى يكون الإيراد الكلي أكبر ما يمكن ؟

(٤) هل يمكن أن يكون الإيراد أقل من صفر ؟؟؟



تمرين : شركة لإنتاج ألعاب الأطفال وجدت أن كلفة إنتاج س لعبة تكون حسب القاعدة التالية :

ك (س) = ٢٠٠ – ٠,٥ س + ٠,٠٠١ س^{٢} ، أوجد عدد الألعاب التي تكون عندها كلفة الإنتاج أقل ما يمكن .

تمرين : إذا كان اقتران الإيراد الكلي لشركة ما يعطى بالعلاقة د(س) = ٣٠ س – س٢ ، و كانت التكلفة الكلية لإنتاج هذه الشركة هي ك (س) = ٣٠ + ٦ س ، فجد قسمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن .

تمرين : ينتج مصنع ثلاجات س ثلاجة شهريًا ، فإذا كانت تكلفة الإنتاج تعطى حسب العلاقة التالية :

ك(س) = ١٦٠٠٠ – ٤ س + س^{٢} ، وكان يبيع الثلاجة الواحدة بـ ٤٥٠ دينارًا ، احسب عدد الثلاجات التي يجب أن يبيعها المصنع في الشهر ليحقق أكبر ربح ممكن .

تمرين : وجد مصنع أجهزة كهربائية أن تكلفة إنتاج س قطعة أسبوعيًا من هذه الأجهزة هي ك(س) = ٥٠ س + ٣٠ ، وكان يبيع الجهاز الواحد بسعر (٢٠٠ - س) دينار ، جد قيم س التي تجعل الربح الأسبوعي أكبر ما يمكن .

تمرين : ينتج مصنع س وحدة من سلعة ما أسبوعيًا ، ويبيع القطعة الواحدة منها بمقدار (ص) دينار ، فإذا كانت تكلفة إنتاج هذه الوحدات هي ك(س) = ٠,٢ س^{٢} + ١٥ س + ٥٠٠ ، و كانت العلاقة بين س ، ص هي :

٥ س = ٣٨ – ٣ ص ، أثبت أن أكبر ربح للمصنع عندما يكون الإنتاج الأسبوعي ٣٠ وحدة .