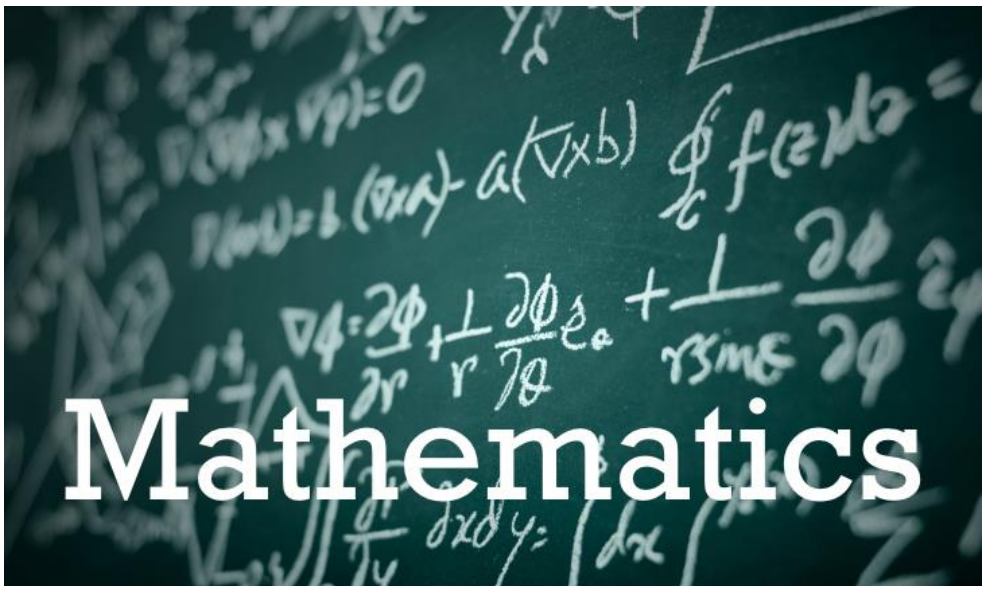
دوسية الإبداع
في الرياضيات م٣ (أدبي)

(نسخة ٢٠١٦/ ٢٠١٧)



الأستاذ فيصل السعدون

اسم الطالب/الطالبة : .....

الفهرس

الوحدة	الموضوع	الصفحة
الوحدة الأولى	أولاً : نهاية الاقتران عند نقطة	٥ ـ ٧
	ثانياً : نظريات على النهايات	٧ ـ ١٣
	ثالثاً : نهاية خارج قسمة اقترانين	١٣ ـ ٢١
	رابعاً : النهايات عند ما لا نهاية (محذوف من المنهاج)	
	خامساً : الاتصال	٢٢ ـ ٣٣
الوحدة الثانية	أولاً : متوسط التغير	٣٥ ـ ٣٨
	ثانياً : المشتقة الأولى	٣٩ ـ ٤١
	ثالثاً : قواعد الاشتقاق (١)	٤١ ـ ٤٥
	رابعاً : قواعد الاشتقاق (٢)	٤٥ـ ٥٠
	خامساً : التفسير الهندسي و التفسير الفيزيائي للمشتقة	٥٠ ـ ٥٥
	سادساً : قاعدة السلسلة	٥٥ ـ ٦١
	سابعاً : الاشتقاق الضمني (محذوف من المنهاج)	
الوحدة الثالثة	أولاً : تطبيقات على الاشتقاق الضمني (محذوف من المنهاج)	
	ثانياً : التزايد و التناقص للاقتران	٦٣ ـ ٦٦
	ثالثاً : القيم القصوى للاقتران	٦٧ ـ ٧٥
	رابعاً : تطبيقات القيم القصوى	٧٥ ـ ٨٨

بسم الله الرحمن الرحيم

الوحدة الأولى
النهايات و الاتصال

أ. فيصل السعدون

ملاحظات مهمة :

١- الملاحظات الموجودة في الدوسية (في الدروس) مهمة .
٢- تحتوي الدوسية على أسئلة منوعة من الكتاب و من أسئلة وزارة سابقة
٣- الدوسية شاملة المادة ١٠٠% (ليست ملخص) .

بالتوفيق يا مبدعين ☺

مراجعة عامة (مهم جدا)

*** التحليل الى العوامل :**

١) إخراج العامل المشترك :

$٣س^{٢} - ١٢س = ٣س (س - ٤)$ ، $٦س^{٣} + ١٨س^{٢} = ٦س^{٢} (س + ٣)$

٢) الفرق بين مربعين : القاعدة : $س^{٢} - أ^{٢} = (س - أ) (س + أ)$

$س^{٢} - ٩ = (س - ٣) (س + ٣)$

$٣٦ - س^{٢} = (٦ - س) (٦ + س)$ ، $س^{٢} - ١ = (س - ١) (س + ١)$

٣) العبارة التربيعية : القاعدة : $س^{٢} + ب س + جـ$

ملاحظة : * اذا كانت إشارة الحد الأخير (+) تكون إشارة القوسين نفس إشارة الحد الأوسط .
* اذا كانت إشارة الحد الأخير (-) تكون إشارة القوسين عكس بعض .

$س^{٢} + ٥س + ٦ = (س + ٢) (س + ٣)$

$س^{٢} - ٥س + ٦ = (س - ٢) (س - ٣)$

$س^{٢} - ٣س - ١٠ = (س - ٥) (س + ٢)$

$س^{٢} + ٢س - ١٥ = (س - ٣) (س + ٥)$

٤) فرق و جمع عددين مكعبين :

القاعدة : $س^{٣} - أ^{٣} = (س - أ) (س^{٢} + أس + أ^{٢})$
$س^{٣} + أ^{٣} = (س + أ) (س^{٢} - أس + أ^{٢})$

$س^{٣} - ٦٤ = (س - ٤) (س^{٢} + ٤س + ١٦)$

$س^{٣} - ٢٧ = (س - ٣) (س^{٢} + ٣س + ٩)$

$س^{٣} + ١ = (س + ١) (س^{٢} - س + ١)$

$س^{٣} + ٨ = (س + ٢) (س^{٢} - ٢س + ٤)$

أ. فيصل السعدون

الدرس الأول :
نهاية الاقتران عند نقطة

* مفهوم نهاية الاقتران : وصف و دراسة سلوك الاقتران عندما يقترب المتغير (س) من عدد محدد .

مثال (١) :

ق (س) = س + ٢ , كوّن جدولاً و ادرس ماذا يحدث لقيم ق (س) عندما س تقترب من ٢ (س ⟵ ٢)

س	٢,٢	٢,١	٢	١,٩	١,٨
ق (س)	٤,٢	٤,١	٤	٣,٩	٣,٨

جهة اليمين (+) ⟵ ⟶ جهة اليسار (-)

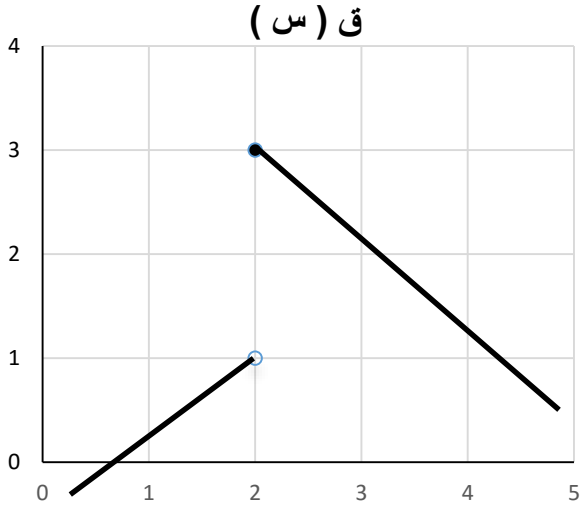
$\lim_{س \to ٢^+}$ ق (س) = ٤ ، $\lim_{س \to ٢^-}$ ق (س) = ٤ إذن $\lim_{س \to ٢}$ ق (س) = ٤

س ١ : ق (س) = $\frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ ، س ≠ ٣

كوّن جدولاً و ادرس ماذا يحدث لقيم ق (س) عندما س ⟵ ٣ ؟

إيجاد النهاية عن طريق الرسم

مثال : يمثل الشكل الاتي منحنى اقتران ق (س) , جد قيمة ما يلي :

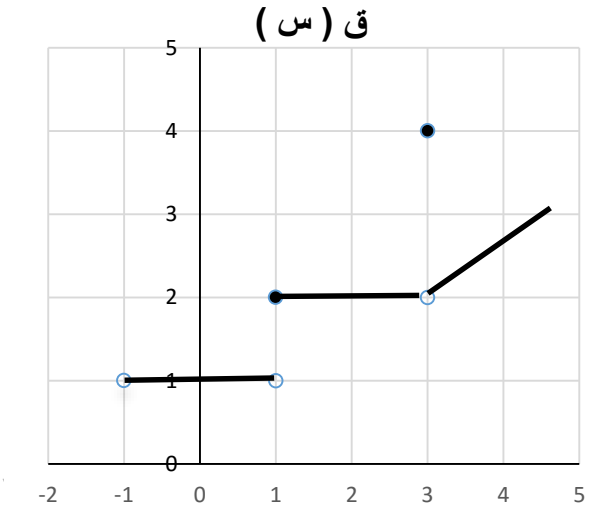


$\lim_{س \to ٢^+}$ ق (س) = ٣

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق (س) = ١

$\lim_{س \to ٢}$ ق (س) = غير موجودة

س ٢ : يمثل الشكل الاتي منحنى اقتران ق (س) , جد قيمة ما يلي :



$\lim_{س \to -١}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ١^+}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ١}$ ق (س) =

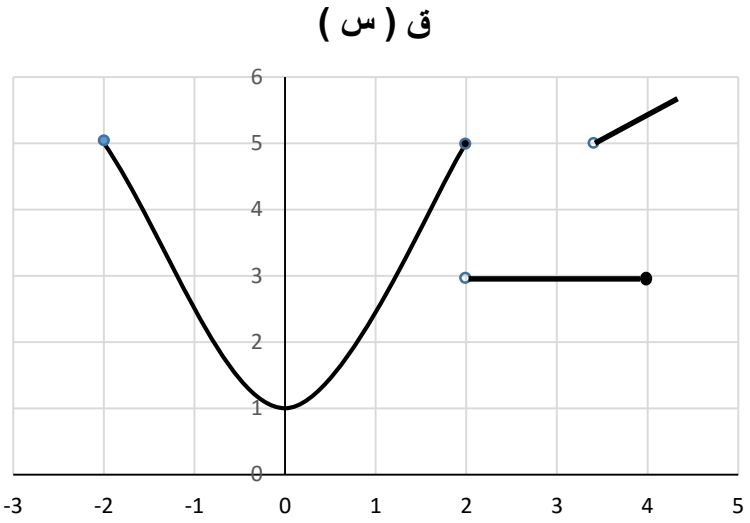
$\lim_{س \to ٣^+}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٣}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٠}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٣}$ (ق (س) ^{٢} - $\frac{١}{٤}$ (س - ٧)) =

*** مثال : يمثل الشكل الاتي منحنى اقتران ق (س) , جد قيمة ما يلي :**



$\lim_{س \to ٢^+}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٢}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٤^+}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٤^-}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٤}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٠^+}$ ق (س) =

$\lim_{س \to ٠^-}$ ق (س) =

ق (٤) =

الدرس الثانى :
نظريات على النهايات

*** نظرية (١) :** إذا كان أ و جـ عددين حقيقيين و كان :

ق (س) = جـ فإن $\lim_{س \to ا}$ ق (س) = جـ >>> $\lim_{س \to ا}$ العدد الثابت = العدد الثابت

*** أمثلة :**

$\lim_{س \to ٢}$ ٤ = ٤ $\lim_{س \to ٣}$ ٧ = ٧ $\lim_{س \to ٩}$ ٦ = ٦

أ. فيصل السعدون

* **نظرية (٢)** : إذا كان ق (س) كثير حدود فإن : $\lim_{س \to أ}$ ق (س) = ق (أ)

* **أمثلة :**

$\lim_{س \to ٣}$ س - ٢ = ٣ - ٢ = ١ $\qquad$ $\lim_{س \to ١}$ ٢س - ٣ = ٢ × ١ - ٣ = -١

$\lim_{س \to -١}$ ٣س^{٢} + ٢س + ٧ = ٣(-١)^{٢} + ٢(-١) + ٧ = ٣ - ٢ + ٧ = ٨

---

* **نظرية (٣) =** إذا كانت أ ، ل ، ك ، جـ أعداداً حقيقية

و كانت $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ هـ (س) = ك فإن :

* $\lim_{س \to أ}$ ق(س) + $\lim_{س \to أ}$ هـ (س) = ل + ك
* $\lim_{س \to أ}$ ق(س) - $\lim_{س \to أ}$ هـ (س) = ل - ك
* $\lim_{س \to أ}$ ق(س) × $\lim_{س \to أ}$ هـ (س) = ل × ك
* $\lim_{س \to أ}$ جـ × ق (س) = جـ × ل
* $\lim_{س \to أ}$ $\sqrt[ن]{ق(س)}$ = $\sqrt[ن]{ل}$ (ل > صفر إذا كان ن عدد زوجي)
* ($\lim_{س \to أ}$ ق(س))^{ن} = ل^{ن}

س ١ : اذا كان $\lim_{س \to ٢}$ ق (س) = ٤ ، $\lim_{س \to ٢}$ هـ (س) = -٣ ، جد قيمة ما يلي :

١) $\lim_{س \to ٢}$ ق (س) - هـ (س) = $\qquad$ ٢) $\lim_{س \to ٢}$ ق (س) × هـ (س) =

٣) $\lim_{س \to ٢}$ ق (س) + هـ (س) = $\qquad$ ٤) $\lim_{س \to ٢}$ ٥ ق (س) =

٥) ($\lim_{س \to ٢}$ ق (س))^{٢} =

نهاية الاقتران المتشعب

مثال :

ق (س) = $\begin{cases} ٣س^{٢} - ٢س & ، س < ٤ \\ ٢س + ٣ & ، س \leq ٤ \end{cases}$ جد قيمة $\lim_{س \to ٤}$ ق (س) ؟

الحل :

$\lim_{س \to ٤^{+}}$ ق (س) = $\lim_{س \to ٤^{+}}$ ٢س + ٣ = ٢ × ٤ + ٣ = ١١

$\lim_{س \to ٤^{-}}$ ق (س) = $\lim_{س \to ٤^{-}}$ ٣(٤)^{٢} - ٢ × ٤ = ٤٠

اذن $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) غير موجودة لأن $\lim_{س \to ٤^{+}}$ ق (س) ≠ $\lim_{س \to ٤^{-}}$ ق (س)

في حال وجود نقطة تشعب :

نأخذ النهاية من اليمين (+)
و من اليسار (-)

س ١ : ق (س) = $\begin{cases} س^{٣} + ٢ & ، س < -١ \\ س^{٢} + س & ، س \leq -١ \end{cases}$ ، جد قيمة $\lim_{س \to -١}$ ق (س) ؟

مثال : اذا كان هـ (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٥ & ، س > ٣ \\ ٢٠ & ، س = ٣ \\ أس + ٢ & ، س < ٣ \end{cases}$

و كانت $\lim_{س \to ٣}$ هـ (س) موجودة ، جد قيمة (أ) ؟

الحل :

$\lim_{س \to ٣}$ هـ (س) موجودة اذن $\lim_{س \to ٣+}$ هـ (س) = $\lim_{س \to ٣-}$ هـ (س)

= $\lim_{س \to ٣+}$ (أس + ٢) = $\lim_{س \to ٣-}$ ($س^{٢}$ + ٥) = ٣أ + ٢ = $٣^{٢}$ + ٥ >> ٣أ = ١٢ >> أ = ٤

س ٢ : اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٢س^{٣} + ٤ & ، س > -٢ \\ أس + ٦ & ، س \leq -٢ \end{cases}$

و كانت $\lim_{س \to -٢}$ ق (س) موجودة ، جد قيمة (أ) ؟

س٣ : اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٥س^{٢} - ل & ، س > ٢ \\ ل س + ٢ & ، س \leq ٢ \end{cases}$

و كانت $\lim_{س \to ٢}$ ق (س) موجودة ، جد قيمة (ل) ؟

نهاية الجذور الزوجية و الفردية

- الجذور الزوجية : بعد التعويض :

* اذا كان الناتج موجباً تكون النهاية موجودة و تساوي العدد الناتج .
* اذا كان الناتج سالباً تكون النهاية غير موجودة .
* اذا كان الناتج صفراً , نساوي ما داخل الجذر بالصفر و نضع الناتج على خط الأعداد و نأخذ النهاية من اليمين و اليسار .

*** أمثلة :**

١) $\lim_{س\to ٢} \sqrt{س+٧} = \sqrt{٢+٧} = ٣$

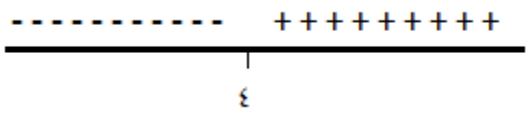
٢) $\lim_{س\to ٢} \sqrt{س-٣} = \sqrt{٢-٣} = \sqrt{-١}$ = غير موجودة

٣) $\lim_{س\to ٤} \sqrt{س-٤} = \sqrt{٤-٤}$ = صفر >> س - ٤ = ٠ >> س = ٤

$\lim_{س\to ٤^+}$ ق (س) = صفر

$\lim_{س\to ٤^-}$ ق (س) = غير موجودة

$\lim_{س\to ٤}$ ق (س) = غير موجودة



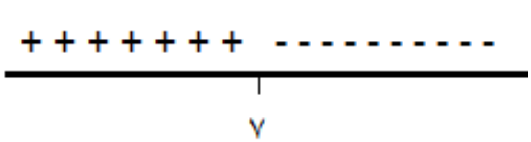
---

٤) $\lim_{س\to ٧} \sqrt{٧-س} = \sqrt{٧-٧}$ = صفر >>> س - ٧ = صفر >>> س = ٧

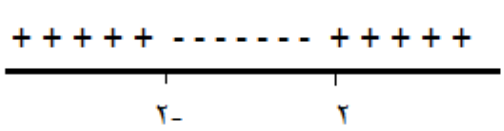
$\lim_{س\to ٧^+}$ ق (س) = غير موجودة

$\lim_{س\to ٧^-}$ ق (س) = صفر

$\lim_{س\to ٧}$ ق (س) = غير موجودة



٥) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س^{٢} - ٤}$ = $\sqrt{٤ - ٤}$ = صفر <<< $س^{٢} - ٤$ = صفر <<< س = ٢ ، -٢



$\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق (س) = صفر

$\lim_{س \to ٢^{-}}$ ق (س) = غير موجودة

$\lim_{س \to ٢}$ ق (س) = غير موجودة

س ١ : جد قيمة كل من النهايات التالية (إن كانت موجودة) ؟

١) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{س + ١٨}$ =

٢) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س^{٢} - ٩}$ =

٣) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{٣ - س}$ =

٤) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{س^{٢} - ١٦}$ =

أ. فيصل

٥) $\lim_{س \to ٠} \sqrt{س^{٢}} =$

* **الجذور الفردية : يُقبل الناتج دائما .**

أمثلة :

١) $\lim_{س \to ٣} \sqrt[٣]{س + ٢٤} = \sqrt[٣]{٣ + ٢٤} = ٣$

٢) $\lim_{س \to -١٤} \sqrt[٣]{س + ٦} = \sqrt[٣]{-١٤ + ٦} = -٢$

٣) $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٣]{س + ٢} = \sqrt[٣]{-٢ + ٢} =$ صفر

الدرس الثالث :

نهاية خارج قسمة اقترانين

نظرية : اذا كانت أ ، ل ، ك أعداداً حقيقية ، حيث ك ≠ صفر

و كانت $\lim_{س \to أ}$ ق (س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ هـ (س) = ك

فإن $\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{ك}{ل}$ (اذا كان الناتج $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ تكون النهاية غير موجودة)

أمثلة :

١) اذا كانت $\lim_{س \to ٥}$ ق (س) = ٦ ، $\lim_{س \to ٥}$ هـ (س) = -٢ ، جد قيمة $\lim_{س \to ٥} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ؟

الحل : $\lim_{س \to ٥} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to ٥} ق(س)}{\lim_{س \to ٥} هـ(س)} = \frac{٦}{-٢} = -٣$

٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{س^{٢} - ١} = \frac{(-٢)^{٢} + ٢(-٢) + ٤}{(-٢)^{٢} - ١} = \frac{٤ - ٤}{٤ - ١} = \frac{٠}{٣}$ = صفر

س١ : ما قيمة كل مما يلي :

١) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} + س - ٣}{٢س - ٤} =$

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - س - ١}{٢س - ٣} =$

٣) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٢س - ١} + ٧}{س^{٢} - ٣} =$

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} + ٥}{س} =$

*** اذا كان الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نستخدم احد الطرق الاتية :**

١) التحليل للعوامل (صفحة المراجعة رقم ٤ في بداية الدوسية)

٢) الضرب بالمرافق

٣) توحيد المقامات

أمثلة : <u>الطريقة الأولى : حالة (١) : (اخراج العامل المشترك)</u>

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{٣س - ٦}{س - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ <<< $\lim_{س \to ٢} \frac{٣(س - ٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} ٣ = ٣$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} + س}{س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ <<< $\lim_{س \to ٠} \frac{س(س + ١)}{س} = \lim_{س \to ٠} ١ = ١$

أ. فيصل السعدون

س١: جد قيمة ما يلي :

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢٥س^{٢} + ٥س}{٥س}$ =

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{٧س - ٢١}{٣ - س}$ =

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٤} + ٣س^{٢}}{س^{٣} - ٤س^{٢}}$ =

الطريقة الأولى : حالة (٢) : الفرق بين مربعين **(صفحة المراجعة رقم ٤ في بداية الدوسية)**

أمثلة :

١) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٢} - ٩}{٣س + ٩} = \frac{صفر}{صفر}$ >>> $\lim_{س \to -٣} \frac{(س - ٣)\cancel{(س + ٣)}}{٣\cancel{(س + ٣)}} = \frac{(-٣ - ٣)}{٣} = \frac{-٦}{٣}$ = -٢

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} = \frac{صفر}{صفر}$ >>> $\lim_{س \to ١} \frac{(س + ١)\cancel{(س - ١)}}{\cancel{س - ١}}$ = $\lim_{س \to ١} س + ١$ = ٢

سؤال : جد قيمة ما يلي :

١) $\lim_{س \to ٣} \frac{٩ - س^{٢}}{س - ٣}$ =

٢) $\lim_{س \to ١٠} \frac{س^{٢} - ١٠٠}{س^{٢} - ١٠س}$ =

٣) $\lim_{ص \to ٧} \frac{٤٩ - ص^{٢}}{ص - ٧}$ =

*** الطريقة الأولى : حالة (٣) : تحليل العبارة التربيعية (صفحة المراجعة رقم ٤ في بداية الدوسية)**

*** أمثلة :**

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ <<< $\lim_{س \to ٢} \frac{\cancel{(س - ٢)}(س - ٣)}{\cancel{س - ٢}} = \lim_{س \to ٢} س - ٣ = -١$

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} + س - ١٢}{س^{٢} - ٩} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ <<< $\lim_{س \to ٣} \frac{\cancel{(س - ٣)}(س + ٤)}{\cancel{(س - ٣)}(س + ٣)} = \frac{٣ + ٤}{٣ + ٣} = \frac{٧}{٦}$

*** سؤال : جد قيمة كل ما يلي :**

١) $\lim_{س \to -٤} \frac{س^{٢} + ٣س - ٤}{س + ٤} =$

٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٢} - ٤س - ٥} =$

٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ٧س + ١٢}{س - ٤} =$

*** الطريقة الأولى : حالة (٤) : تحليل فرق و جمع عددين مكعبين (صفحة المراجعة رقم ٤ في بداية الدوسية)**

*** أمثلة :**

١) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٣} + ٨}{س + ٢} = \frac{صفر}{صفر} >>> \lim_{س \to -٢} \frac{(س + ٢)(س^{٢} - ٢س + ٤)}{س + ٢} = (-٢)^{٢} - ٢(-٢) + ٤ = ١٢$

٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{٥ - س}{س^{٣} - ١٢٥} = \frac{صفر}{صفر} >>> \lim_{س \to ٥} \frac{٥ - س}{(س - ٥)(س^{٢} + ٥س + ٢٥)} = \frac{-١}{٥^{٢} + ٥(٥) + ٢٥} = \frac{-١}{٧٥}$

*** سؤال : جد قيمة ما يلي :**

١) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} + ٣س + ٢} =$

٢) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٣} + ٢٧}{س + ٣} =$

٣) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٣} + ٢٧}{س^{٢} + ٤س + ٣} =$

*** الطريقة الثانية : (الضرب بالمرافق) >>> هو عكس الإشارة بين الجذر و العدد .**

*** أمثلة :** ١) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

الحل : $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} \times \frac{\sqrt{س} + ١}{\sqrt{س} + ١} = \lim_{س \to ١} \frac{\cancel{س - ١}}{\cancel{(س - ١)}(\sqrt{س} + ١)} = \frac{١}{\sqrt{١} + ١} = \frac{١}{٢}$

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س + ١} - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

الحل : $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س + ١} - ٢} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ٢}{\sqrt{س + ١} + ٢} = \lim_{س \to ٣} \frac{\cancel{(س - ٣)}(\sqrt{س + ١} + ٢)}{\cancel{س + ١ - ٤}} = ٤$

*** سؤال : جد قيمة كل مما يلي :**

١) $\lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} =$

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{٢ - \sqrt{س + ١}}{س - ٣} =$

٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - س - ٦}{\sqrt{س + ١} - ٢} =$

*** الطريقة الثالثة : توحيد المقامات (اذا كان لدينا كسور)**

$$\frac{\frac{أ}{ب} \pm \frac{جـ}{د}}{هـ} = \frac{أ \times د \pm جـ \times ب}{ب \times د} = \frac{أ \times د \pm جـ \times ب}{ب \times د \times هـ}$$

*** أمثلة :**

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{٢} - \frac{١}{س}}{س - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ <<< $\frac{\frac{١ \times س - ١ \times ٢}{٢ \times س}}{س - ٢} = \frac{١ \times س - ١ \times ٢}{٢ س (س - ٢)} = \frac{\cancel{س - ٢}}{٢ س \cancel{(س - ٢)}} = \frac{١}{٤}$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س + ١} - \frac{٢}{س + ٣}}{س - ١} = \frac{صفر}{صفر}$ **الحل :**

$$\frac{\frac{(س + ٣) - ٢(س + ١)}{(س + ١)(س + ٣)}}{س - ١} = \frac{س + ٣ - ٢س - ٢}{(س + ١)(س + ٣)(س - ١)} = \frac{\cancel{- س + ١}}{(س + ١)(س + ٣)\cancel{(س - ١)}} = \frac{-١}{٨}$$

سؤال : جد قيمة ما يلي :

١) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{١}{٤} - \frac{١}{س}}{س - ٤} =$

أ. فيصل السعدون

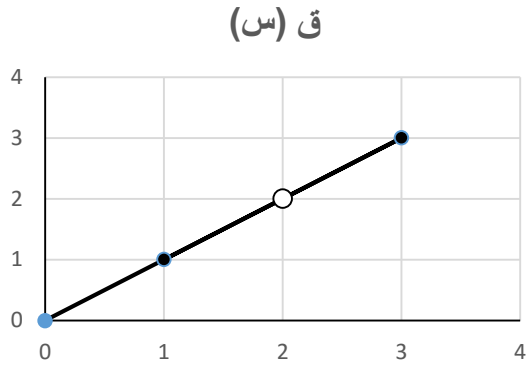
٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{٢}{س - ٣} + \frac{٤}{س + ٦}}{س} =$

٣) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{٣س} - \frac{١}{س + ٢}}{س - ١} =$

٤) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{س}{س - ٢} - \frac{س + ٢}{س - ١}}{٢س - ٨} =$

الدرس الخامس : الاتصال

* يكون الاقتران متصلاً في حال عدم وجود قفزات أو ثقب ,, و يكون غير متصل عند وجود قفزات او ثقب ..



ق (س) عند س = ٢ (غير متصل)

ق (س) عند س = ١ (متصل)

* يكون الاقتران (ق) متصلاً عند النقطة س = أ ، إذا كانت $\lim_{س \to أ} ق(س) = ق(أ)$

*** أمثلة :**

١) اذا كان ق (س) = ٣س^{٢} + ٢س - ١ ، فهل (ق) متصل عند س = ٢ ؟

الحل : ق(٢) = ٣(٢)^{٢} + ٢(٢) - ١ = ١٥

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = \lim_{س \to ٢} (٣س^{٢} + ٢س - ١) = ٣(٢)^{٢} + ٢(٢) - ١ = ١٥$

بما أن $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢)$ ، فإن ق (س) متصل عند س = ٢

---

٢) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢س + ١ & ، س \neq ٠ \\ ٣س + ١ & ، س = ٠ \end{cases}$ ، هل (ق) متصل عند س = ٠ ؟

الحل : ق (٠) = ٣ X ٠ + ١ = ١

$\lim_{س \to ٠} ق(س) = (٠)^{٢} + ٢ X ٠ + ١ = ١$

بما أن $\lim_{س \to ٠} ق(س) =$ ق (٠) ، فإن ق (س) متصل عند س = ٠

فيصل السعدون

٣) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^{٣} + ٢ & ، س < -١ \\ س^{٢} + س & ، س \leq -١ \end{cases}$ ، ابحث في الاتصال عند س = -١ ؟

الحل : ق (-١) = $(-١)^{٢} + (-١) = ١ - ١ =$ صفر

$\lim_{س \to -١^{+}}$ ق(س) = $(-١)^{٢} + (-١) = ١ - ١ =$ صفر

$\lim_{س \to -١^{-}}$ ق(س) = $(-١)^{٣} + ٢ = ١$

اذن $\lim_{س \to -١}$ ق(س) غير موجودة و هذا يعني أن ق (س) غير متصل عند س = -١

في حال وجود نقطة تشعب :

نأخذ النهاية من اليمين (+)
و من اليسار (-)

*** أسئلة :**

١) اذا كان ق (س) = $س^{٢} + ٥س + ٢$ ، فهل (ق) متصل عند س = ٣ ؟

٢) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٥ & ، س = ٣ \end{cases}$ ، ابحث في الاتصال عند س = ٣ ؟

٣) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} & ، \ س > ٣ \\ ٣س^{٢} & ، \ س < ٣ \\ س + ٢٤ & ، \ س = ٣ \end{cases}$ ، ابحث في الاتصال عند س = ٣ ؟

٤) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٢س^{٣} + ٤ & ، \ س > -٢ \\ أس + ٦ & ، \ س \leq -٢ \end{cases}$ و كان ق (س) متصلا عند س = -٢ ، فما هي قيمة الثابت (أ) ؟

٥) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} أس^{٢} + ب & ، \ س > ٢ \\ ٣أس + ٤ & ، \ س < ٢ \\ ١٦ & ، \ س = ٢ \end{cases}$ و كان ق (س) متصلا عند س = ٢ ، فما هي قيمة الثابت (أ) و (ب) ؟

الاتصال على فترة [ ]

* يكون الاقتران متصلاً على الفترة [أ ، ب] إذا كان :

١) متصلاً على الفترة المفتوحة (أ ، ب)

٢) متصلاً على نقاط التشعب (التحول)

٣) متصلاً من اليمين عند (أ) ، أي أن $\lim_{س \to أ^+} ق(س) = ق(أ)$

٤) متصلاً من اليسار عند (ب) ، أي أن $\lim_{س \to ب^-} ق(س) = ق(ب)$

أمثلة :

١) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٩ - ٢س & ، -١ \geq س < ٣ \\ ٣ & ، س = ٣ \end{cases}$ ، ابحث في اتصال (ق) في الفترة [-١ ، ٣] ؟

الحل :

* الفترة المفتوحة (-١ ، ٣) يكون ق (س) متصل لأنه كثير حدود

* $\lim_{س \to -١^+} ق(س) = ٩ - ٢ \times -١ = ٩ + ٢ = ١١$

* ق (-١) = ٩ - ٢ X -١ = ٩ + ٢ = ١١

اذن (ق) متصل من اليمين لأن $\lim_{س \to -١^+} ق(س) = ق(-١)$

* $\lim_{س \to -٣^-} ق(س) = ٩ - ٢ \times ٣ = ٩ - ٦ = ٣$

ق (٣) = ٣

اذن (ق) متصل من اليسار لأن $\lim_{س \to -٣^-} ق(س) = ق(٣)$

* اذن (ق) متصل في الفترة [-١ ، ٣]

٢) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٥ & ، س = ٣ \\ س^{٢} - ١ & ، ٣ < س \geq ٧ \end{cases}$ ، ابحث في اتصال (ق) في الفترة [٣ ، ٧] ؟

الحل :

* في الفترة المفتوحة (٣ ، ٧) يكون ق (س) متصل لأنه كثير حدود .

* $\lim_{س \to ٣^{+}}$ ق(س) = $(٣)^{٢}$ - ١ = ٩ - ١ = ٨

* ق (٣) = ٥ ، اذن (ق) غير متصل من اليمين لأن $\lim_{س \to ٣^{+}}$ ق(س) ≠ ق(٣)

* $\lim_{س \to ٧^{-}}$ ق(س) = $(٧)^{٢}$ - ١ = ٤٩ - ١ = ٤٨

* ق (٧) = $(٧)^{٢}$ - ١ = ٤٩ - ١ = ٤٨ ، اذن (ق) متصل من اليسار لأن $\lim_{س \to ٧^{-}}$ ق(س) = ق(٧)

* اذن (ق) متصل على الفترة (٣ ، ٧) أو متصل على الفترة [٣ ، ٧] ما عدا العدد (٣)

---

٣) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ١ + ٥س & ، ١ \geq س < ٣ \\ س٢ + ٧ & ، ٣ \geq س \geq ٥ \end{cases}$ ، ابحث في اتصال (ق) في الفترة [١ ، ٥] ؟

الحل :

* الفترة المفتوحة (١ ، ٣) يكون ق (س) متصل لأنه كثير حدود
* الفترة المفتوحة (٣ ، ٥) يكون ق (س) متصل لأنه كثير حدود
نقطة التشعب (التحول) = ٣

* $\lim_{س \to ٣^{+}}$ ق(س) = $٣^{٢}$ + ٧ = ١٦ , $\lim_{س \to ٣^{-}}$ ق(س) = ١ + ٥ X ٣ = ١٦ , ق (٣) = $٣^{٢}$ + ٧ = ١٦

اذن (ق) متصل عند س = ٣

* $\lim_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = ١+٥ X ١ = ٦

* ق (١) = ١+٥ X ١ = ٦ اذن (ق) متصل من اليمين لأن $\lim_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = ق(١)

* $\lim_{س \to ٥^{-}}$ ق(س) = $٥^{٢}$ + ٧ = ٣٢ * ق (٥) = $٥^{٢}$ + ٧ = ٣٢

اذن (ق) متصل من اليسار لأن $\lim_{س \to ٥^{-}}$ ق(س) = ق(٥)

* اذن (ق) متصل على الفترة [١ ، ٥]

*** أسئلة :**

١) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٤ & ، س = ٢ \\ ٣س^{٢} - ٨ & ، ٢ < س \geq ٤ \end{cases}$ ، ابحث في اتصال (ق) في الفترة [٢ ، ٤] ؟

٢) اذا كان هـ (س) = $\begin{cases} ٣ + ٥س & ، ١ \geq س < ٤ \\ س^{٢} + ٢ & ، ٤ \geq س \geq ٥ \end{cases}$ ، ابحث في اتصال (ق) في الفترة [١ ، ٥] ؟

٣) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٢ - ٢س & ، \ ٠ \geq س < ٢ \\ س^{٢} + ٧ & ، \ ٢ \geq س \geq ٤ \end{cases}$ ، ابحث في اتصال (ق) في الفترة [٠ ، ٤] ؟

الاتصال على الاعداد الحقيقية (ح)

*** مثال :**

١) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٥ & ، \ س < ٣ \\ ٢س + ٨ & ، \ س \leq ٣ \end{cases}$ ، ابحث في اتصال (ق) لجميع قيم (س) الحقيقية ؟

الحل :

* (ق) متصل عندما س < ٣ لأنه كثير حدود

* (ق) متصل عندما س ≤ ٣ لأنه كثير حدود

* $\lim_{س \to ٣^{+}}$ ق(س) = ٢ X ٣+٨ = ١٤ * $\lim_{س \to ٣^{-}}$ ق(س) = $(٣)^{٢}$ + ٥ = ١٤

* ق (٣) = ٢ X ٣+٨ = ١٤ * اذن $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ١٤

* اذن ق (س) متصل على (ح) (جميع قيم س الحقيقية)

*** سؤال : ابحث في اتصال (ق) لجميع قيم (س) الحقيقية لكل ما يلي :**

١) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، \ س < ٤ \\ ٣س + ٦ & ، \ س \geq ٤ \end{cases}$

٢) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٣س + ٢ & ، \ س \geq -١ \\ س + ١ & ، \ س < -١ \end{cases}$

٣) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^{٣} - ٩ & ، \ س < ٣ \\ ٢س + ٥ & ، \ س \geq ٣ \end{cases}$

نقاط عدم الاتصال (الانفصال)

هي النقاط التي تجعل المقام صفر (الاقتران النسبي)

* الاقتران النسبي دائما متصل عند جميع الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار المقام

مثال :

ق (س) = $\frac{\text{س} - ٩}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}$ **جد نقاط عدم الاتصال ؟**

الحل : س^{٢} - ٣س = ٠ >>> س(س - ٣) = ٠ >>> س = ٠ ، س = ٣

*** سؤال : جد نقاط عدم الاتصال للاقترانات الاتية :**

١) ق (س) = ٥

٢) ق (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} + ٥}$ =

٣) ق (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٢٨}$ =

٤) ق (س) = (س+٣) (س^{٢} - ١٦) =

٥) $\frac{١ - ٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٩}$ =

٦) هـ (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{س} > ٤ \\ ٢\text{س} + ٥ & ، \text{س} = ٤ \\ \text{س} + ٢ & ، \text{س} < ٤ \end{cases}$

أ. فيصل السعدون

* **نظرية :** اذا كان كل من الاقترانين (ق) ، (هـ) متصلا عند س = أ فإن :

* ق + هـ متصل عند س = أ (مجموع اقترانين متصلين)
* ق - هـ متصل عند س = أ (فرق بين اقترانين متصلين)
* ق X هـ متصل عند س= أ (حاصل ضرب اقترانين متصلين)
* $\frac{ق}{هـ}$ متصل عند س = أ ، هـ (أ) ≠ صفر (ناتج قسمة اقترانين متصلين)

مثال :

اذا كان ق (س) = ٣س - ١ ، هـ (س) = $\begin{cases} ٤س + ١ & ، س < ٢ \\ س^{٢} + ٥ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ل(س) = ق (س) X هـ (س) ؟

الحل : **باستخدام الطريقة الأولى** (فقط عندما يكون الاقترانين متصلين)

* ق (س) متصل لأنه كثير حدود
* $\text{نهـــا}_{س \to ٢^+} هـ(س) = \text{نهـــا}_{س \to ٢^+} س^{٢} + ٥ = ٩$
* $\text{نهـــا}_{س \to ٢^-} هـ(س) = \text{نهـــا}_{س \to ٢^-} ٤س + ١ = ٩$
* هـ (٢) = $٢^{٢} + ٥ = ٩$

اذن هـ (س) متصل من لأن $\text{نهـــا}_{س \to ٢^+} هـ(س) = \text{نهـــا}_{س \to ٢^-} هـ(س) = هـ(٢)$

* اذن ل (س) متصل عند س = ٢ لأنه (حاصل ضرب اقترانين متصلين)

* **الحل بالطريقة الثانية** (عندما يكون احد الاقترانين او كلاهما غير متصلين عند نقطة معينة)
(و تستخدم في حال الاتصال ايضاً)

$$\text{ل (س)} = \begin{cases} (٣\text{س} - ١)(٤\text{س} + ١) & ، \text{ س} < ٢ \\ (٣\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + ٥) & ، \text{ س} \leq ٢ \end{cases}$$

* $\text{نهـــال}(\text{س}) = \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow ٢+} (٣\text{س} - ١)(٤\text{س} + ١) = ٥ \times ٩ = ٤٥$
$\text{س}\leftarrow ٢+$ $\text{س}\leftarrow ٢+$

* $\text{نهـــال}(\text{س}) = \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow ٢-} (٣\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + ٥) = ٥ \times ٩ = ٤٥$
$\text{س}\leftarrow ٢-$ $\text{س}\leftarrow ٢-$

* $\text{نهـــال}(\text{س}) = ٤٥$
$\text{س}\leftarrow ٢$

* ل (٢) = ٥ X ٩ = ٤٥

* اذن ل (س) = ق (س) X هـ (س) متصل عند س = ٢ من لأن $\text{نهـــال}(\text{س}) = \text{ل}(٢) = ٤٥$
$\text{س}\leftarrow ٢$

---

* **أسئلة :**

١) اذا كان هـ (س) = $\text{س}^{٢}$ + ٥س ، ق (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} & ، \text{ س} < ٢ \\ ٢\text{ س} & ، \text{ س} \leq ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق (س) + هـ (س) عند س = ٢ ؟

٢) اذا كان هـ (س) = س^{٢} - ٤ ، ق (س) = { س^{٢} ، س < ٢ ؛ ٢س + ٣ ، س ≤ ٢ }

و كان ل (س) = ق (س) X هـ (س) ، فبيّن أن ل (س) متصل عند س = ٢ ؟

٣) اذا كان هـ (س) = س - ٥ ، ق (س) = { ١ ، س > ٥ ؛ صفر ، س = ٥ ؛ -١ ، س < ٥ }

ابحث في اتصال ل(س) = ق (س) X هـ (س) عند س = ٥ ؟

الوحدة الثانية
التفاضل

أ. فيصل السعدون

ملاحظات مهمة :

١- الملاحظات الموجودة في الدوسية (في الدروس) مهمة .
٢- تحتوي الدوسية على أسئلة منوعة من الكتاب و من أسئلة وزارة سابقة
٣- الدوسية شاملة المادة ١٠٠% (ليست ملخص) .

بالتوفيق يا مبدعين ☺

الدرس الأول : متوسط التغير

* مثال على مفهوم التغير : قد يكون سعر كيلو غرام من الخبز في أحد الأيام ٢٠ قرشاً ثم يصبح بعد سنة ٣٠ قرشاً ، اذن التغير في السعر من ٢٠ الى ٣٠ ، أي زيادة قدرها (٣٠ - ٢٠) = ١٠ قروش .

* مقدار التغير في (س) : هو الفرق بين قيمتي (س) عندما تتغير (س) من ($س_1$) إلى ($س_2$)

و يرمز له $\Delta س$ (دلتا س)

* التغير في (س) = $\Delta س = س_2 - س_1$ ، التغير في (ص) = $\Delta ص = ص_2 - ص_1 = ق(س_2) - ق(س_1)$

* أمثلة : جد $\Delta س$ اذا تغيرت (س) من :

$س_1 = ٢$ ، $س_2 = ٥$ ، $\Delta س = س_2 - س_1 = ٥ - ٢ = ٣$

$س_1 = -٢$ ، $س_2 = -٦$ ، $\Delta س = س_2 - س_1 = -٦ - (-٢) = -٦ + ٢ = -٤$

$س_1 = ٢,٥$ ، $س_2 = ٣,٦$ ، $\Delta س = س_2 - س_1 = ٣,٦ - ٢,٥ = ١,١$

سؤال (١) : اذا كان ص = ق(س) = $س^2 - ١$ ، و تغيرت (س) من ٢ الى ٣ ، جد التغير في (س) و (ص) ؟

* **متوسط التغير** >>> $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$

*** مثال :**

اذا كان ص = ق(س) = $س^2 + ٣$ ، $س_1 = ٢$ ، $\Delta س = ٣$ ، جد : ١) $\Delta ص$ ٢) $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ؟

الحل :

$\Delta س = س_2 - س_1$ >>> $٣ = س_2 - ٢$ >>> $س_2 = ٥$

١) $\Delta ص = ق(س_2) - ق(س_1) = ق(٥) - ق(٢) = ٢٨ - ٧ = ٢١$

٢) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{٢١}{٣} = ٧$

* **أسئلة :** ١) ما متوسط تغير الاقتران (ل) ، ل(س) = ٥س^{٢} + ٦ ، عندما تتغير (س) من ١ إلى ٣ ؟

٢) ما متوسط التغير في الاقتران (ق) حيث ق(س) = $\sqrt{س}$ عندما تتغير (س) من ٤٩ الى ٢٥ ؟

٣) اذا كانت ص = ق(س) = $\frac{٣}{٢}$س^{٢} − ١ ، س$_{١}$ = ١ ، Δس = ٣

جد : ١) مقدار التغير في الاقتران (ق) **٢) متوسط التغير للاقتران (ق)**

٤) اذا كان متوسط التغير في الاقتران (ق) في الفترة [-٢ ، ١] يساوي ٣ ، و كان هـ (س) = س^{٢} - ق (س)
جد متوسط التغير للاقتران (هـ) في الفترة [-٢ ، ١] ؟

٥) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٣ & ، ١ \geq س > ٤ \\ ٦س + ٢ & ، ٤ \geq س \geq ٨ \end{cases}$

جد متوسط التغير في الاقتران (ق) اذا كانت $س_{١} = ٣$ ، $\Delta س = ٢$ ؟

*** التفسير الهندسي لمتوسط التغير :**

- **ميل القاطع** : $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$

*** مثال** : اذا كان ص = ق(س) = ٣ - $س^{٢}$ ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (-٣ ، -٦) ؟

الحل : $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{-٦ - ٢}{-٣ - ١} = \frac{-٨}{-٤} = ٢$

*** أسئلة :**

١) اذا كان ص = ق(س) = $س^{٣}$ - ٧ ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين (٠ ، -٧) ، (١ ، -٦) ؟

٢) اذا كان ص = ق(س) = ٣$س^{٢}$ ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين (١ ، ق (١)) ، (-٣ ، ق (٢)) ؟

*** التفسير الفيزيائي لمتوسط التغير :**

- السرعة المتوسطة $\bar{ع} = \frac{\Delta ل}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$

* مثال : يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^٢ + ٣ ،
حيث (ن) الزمن بالثواني ، (ف) المسافة بالمتر ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١ ، ٢] ؟

الحل : $(\bar{ع}) = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١} = \frac{ف(٢) - ف(١)}{٢ - ١} = \frac{(٣ + ٢^{٢}) - (٣ + ١^{٢})}{١} = ٣$ م/ث

*** أسئلة :**

١) اذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم في أثناء سقوطه الى أسفل تعطى بالعلاقة ف (ن) = ٣٠ن - ٥ن^٢
حيث (ن) الزمن بالثانية و (ف) المسافة بالمتر ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١ ، ٣] ؟

٢) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^٢ + ٢ن ،حيث (ن) الزمن بالثواني ، (ف) المسافة بالمتر
احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [٢ ، ٣] ؟

٣) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^٢ + ٥ ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١ ، ٣] ؟

الدرس الثاني : المشتقة الأولى

* التعريف العام للمشتقة الأولى : $ن'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ) - ن(س)}{هـ}$

* رموز المشتقة الأولى : $ن'(س)$ ، $ص'$ ، $\frac{د ص}{د س}$

مثال : جد المشتقة الأولى للاقتران (ق) حيث ق (س) = ٣س - ٥ ، باستخدام التعريف العام للمشتقة الأولى ؟

الحل :

$$ن'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ) - ن(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{٣(س+هـ) - ٥ - (٣س - ٥)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{٣س + ٣هـ - ٥ - ٣س + ٥}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{٣هـ}{هـ} = ٣$$

*** أسئلة : باستخدام التعريف العام للمشتقة ، جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ق (س) = $س^{٢}$ - س

٢) ق (س) = ٦ - ٥س ، س= ٢ أو $ن'(٢)$

٣) ق (س) = $\sqrt{س}$ ، س ≥ ٠

٤) ص = $\sqrt{٣س - ٢}$ ، س = ١

٥) ص = $\frac{٢}{س}$ ، س ≠ ٠

٦) ص = $\frac{٢}{س - ١}$ ، س = ٣ أو ن ´(٣)

الدرس الثالث : قواعد الاشتقاق (١)

*** قاعدة (١)** : ق(س) = عدد >>> ن ´(س) = صفر

*** أمثلة :**

١) ق (س) = ٤ >>> ن ´(س) = صفر

٢) ق (س) = $\sqrt{١٦}$ >>> ن ´(س) = صفر

٣) ق (س) = ٦ ^{٣} >>> ن ´(س) = صفر

*** قاعدة (٢) :** ق(س) = س^{ن} >>> ق$'$(س) = ن س$^{ن-١}$

*** أمثلة :** ١) ق (س) = س^{٥} >>> ٥س^{٤} ٢) ق (س) = س$^{-٦}$ >>> -٦س$^{-٧}$

*** أسئلة : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ق (س) = س^{٤}

٢) ق (س) = س$^{-٣}$

٣) ق (س) = س $^{\frac{١}{٢}}$

٤) ق (س) = س $^{\frac{١}{٣}}$

٥) ق (س) = س $^{\frac{٣}{٢}}$

*** ملاحظة** : تذكر أن $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$ ، $\frac{١}{س^{م}} = س^{-م}$

*** أمثلة :** ١) ق (س) = $\sqrt[٣]{س^{٤}}$ = س $^{\frac{٤}{٣}}$ >>> ق$'$(س) = $\frac{٤}{٣}$س $^{\frac{١}{٣}}$ = $\frac{٤}{٣\sqrt[٣]{س}}$

٢) ق (س) = $\sqrt{س^{٥}}$ = س $^{\frac{٥}{٢}}$ >>> ق$'$(س) = $\frac{٥}{٢}$س $^{\frac{٣}{٢}}$ = $\frac{٥}{٢\sqrt{س^{٣}}}$

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) $\sqrt[٣]{س}$ =

٢) $\sqrt{س}$ =

*** قاعدة (٣) :** ق (س) = جـ X م (س) ، حيث (جـ) عدد ثابت >>> ق$'$(س) = جـ X م$'$(س)

*** أمثلة :** ١) ق (س) = ٣س^{٦} >>> ق$'$(س) = ٣ X ٦س^{٥} = ١٨س^{٥}

٢) ق (س) = $\frac{٤}{س^{٢}}$ = ٤س$^{-٢}$ >>> ق$'$(س) = ٤ X -٢س$^{-٣}$ = -٨س$^{-٣}$

٣) ق (س) = ٣ $\sqrt{س}$ = ٣س $^{\frac{١}{٢}}$ >>> ق$'$(س) = ٣ × $\frac{١}{٢}$س $^{\frac{-١}{٢}}$ = $\frac{٣}{٢}$س $^{\frac{-١}{٢}}$ = $\frac{٣}{٢\sqrt{س}}$

أ. فيصل السعدون

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) $ن(س) = ٥س^{-٤}$

٢) $ن(س) = ٥\sqrt[٣]{س}$

٣) $ن(س) = \frac{٤}{س^{٢}}$

٤) $ن(س) = ٢س^{\frac{١}{٢}}$

*** قاعدة (٤)** : في حالة الجمع و الطرح نشتق كل قاعدة لوحدها

ق (س) = م (س) ± هـ (س) >>> $ن'(س) = م'(س) \pm هـ'(س)$

*** مثال :**

$س^{٦} - ٣س^{٤} + س^{-٢} - ٧س + ٨$ >>> $ن'(س) = ٦س^{٥} - ١٢س^{٣} - ٢س^{-٣} - ٧$

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ق (س) = $٥س^{٤} - ٢س^{٣} - س^{٢} - س + ٢$

٢) ق (س) = $س^{-٢} - ٣س + ٥$

٣) ق (س) = $\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٢س + ١$

٤) ق (س) = $\sqrt[٣]{س} + س^{٢} - ٢٠٠$

*** قاعدة (٥) :** مشتقة الاقترانات المثلثية

* ق (س) = جا س >>> ق ` (س) = جتا س

* ق (س) = جتا س >>> ق ` (س) = - جا س

* ق (س) = ظا س >>> ق ` (س) = قا^{٢}س (معلومة : قاس = $\frac{١}{\text{جتاس}}$)

*** مثال :**

ص = ٣ ظاس - ٥ جتاس + جاس >>> $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٣ قا^{٢}س + ٥ جاس + جتاس

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ق (س) = ٢س^{٣} - ٢ ظاس + ٤ جاس - جتاس

٢) ص= ٣ جاس + ٢ جتاس - ٥ ظاس

٣) ق (س) = ٥ × $\sqrt[٣]{\text{س}}$ + جتاس

*** قاعدة (٦) :** مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي و الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي)

* ق (س) = هـ$^{\text{س}}$ >>> ق ` (س) = هـ$^{\text{س}}$

* ق (س) = لـو$_{\text{هـ}}$ س >>> ق ` (س) = $\frac{١}{\text{س}}$

***أمثلة :**

١) ص = ٢س^{٥} - ٣هـ$^{\text{س}}$ - ٢س >>> $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ١٠س^{٤} - ٣هـ$^{\text{س}}$ - ٢

٢) ص = ٤س – لـو$_{\text{هـ}}$ س ، حيث س = ١ >>> $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٤ – $\frac{١}{\text{س}}$ >>> $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=١}$ = ٤ – $\frac{١}{١}$ = ٣

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ق (س) = س^{٢} - ٣هـ^{س} + ٢ ، س = ٠

٢) ص = ٢س^{٤} + ٥ لـو$_{هـ}$ س ، س = ١

٣) ق (س) = ٣ لـو$_{هـ}$ س - ٤هـ^{س}

الدرس الرابع : قواعد الاشتقاق (٢)

*** قاعدة (٧) :** مشتقة حاصل ضرب اقترانين

ص = ل (س) X م (س) >>> $\frac{د ص}{د س}$ = ل (س) X م ` (س) + م (س) X ل ` (س)

بمعنى آخر (الاقتران الأول X مشتقة الاقتران الثاني) + (الاقتران الثاني X مشتقة الاقتران الأول)

*** مثال :**

ق (س) = (٥س + ٣) (س^{٢} - ١) >>> ق `(س) = (٥س + ٣) (٢س) + (س^{٢} - ١) (٥)

= ١٠س^{٢} + ٦س + ٥س^{٢} - ٥ = ١٥س^{٢} + ٦س - ٥

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ع (س) = (٣س - ١) ($س^{٢}$ + ٧)

٢) ق (س) = $س^{-٣}$($س^{٣}$ + ٧)

٣) ق (س) = ٣س جاس

٤) ص = ٤$س^{٢}$($س^{٣}$ + ٢)

*** قاعدة (٨) :** مشتقة قسمة اقترانين

$$ن(س) = \frac{ل(س)}{م(س)} \quad >>> \quad ن'(س) = \frac{م(س) \times ل'(س) - ل(س) \times م'(س)}{(م(س))^{٢}}$$

بمعنى اخر $\frac{\text{(المقام × مشتقة البسط) - (البسط × مشتقة المقام)}}{\text{مربع المقام}}$

*** مثال :**

$$ص = \frac{س^{٣} + ١}{س^{٢} + ٤} \leftarrow \frac{ص}{س} = \frac{(س^{٢} + ٤)(٣س^{٢}) - (س^{٣} + ١)(٢س)}{(س^{٢} + ٤)^{٢}}$$

$$= \frac{٣س^{٤} + ١٢س^{٢} - (٢س^{٤} + ٢س)}{(س^{٢} + ٤)^{٢}} = \frac{٣س^{٤} + ١٢س^{٢} - ٢س^{٤} - ٢س}{(س^{٢} + ٤)^{٢}} = \frac{س^{٤} + ١٢س^{٢} - ٢س}{(س^{٢} + ٤)^{٢}}$$

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ص = $\frac{٣س - ٥}{٨س - ٣}$

٢) ق (س) = $\frac{٢س + ١}{س^{٣} + ١}$

٣) ق (س) = $\frac{س + ١}{س^{٢}}$

٤) ق (س) = $\frac{جاس}{١ + جتاس}$

*** قاعدة (٩)** : اذا كانت ص = $\frac{\text{جـ}}{\text{م}(\text{س})} \leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-\text{جـ} \times \text{م}'(\text{س})}{(\text{م}(\text{س}))^{٢}}$

*** مثال** :

ص = $\frac{٥}{\text{س}^{٢}+١} \leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-٥ \times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢}+١)^{٢}} = \frac{-١٠\text{س}}{(\text{س}^{٢}+١)^{٢}}$

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ق (س) = $\frac{٤}{\text{س}^{٢}-\text{س}-٦}$ =

٢) ص = $\frac{-٣}{٢\text{س}^{٧}-٣}$ =

٣) هـ (س) = $\frac{-٢}{\text{س}^{٢}+١٠\text{س}}$ =

*** قاعدة (١٠) :** مشتقة الجذر التربيعي

ق (س) = $\sqrt{\text{ل}(\text{س})} \leftarrow \text{ن}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}'(\text{س})}{٢\sqrt{\text{ل}(\text{س})}}$

*** مثال** : ق (س) = $\sqrt{\text{س}^{٣}+٥} \leftarrow \text{ن}'(\text{س}) = \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢\sqrt{\text{س}^{٣}+٥}}$

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ص = $\sqrt{س^{٢} + س}$ =

٢) هـ (س) = $\sqrt{٢س^{٣} + ٣س^{٢}}$ =

٣) ق (س) = $\sqrt{س^{٢} + ٣س}$ ، س = ٢

المشتقات العليا

*** رموز المشتقة الثانية :** ص″ ، ص″(س) ، $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$

*** مثال :**

ص = ٩س^{٣} - ٣س^{٢} - ٥ ، جد ص″(٢) ؟

الحل :

$\frac{د ص}{د س} = ٢٧س^{٢} - ٦س \leftarrow \frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = ٥٤س - ٦ \leftarrow \left|\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}\right|_{س=٢} = ٥٤ \times ٢ - ٦ = ١٠٢$

*** سؤال :** جد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ لكل مما يلي :

١) ص = ٥س^{٣} - ٤س^{٢} - ٣ =

أ. فيصل السعدون

٢) ص = $س^{٢} هـ^{س}$ =

٣) ص = س جاس + ٢ جتاس =

٤) ص = $لـو_{هـ} س$ =

٥) ص = $\frac{٥}{س}$ =

الدرس الخامس : التفسير الهندسي و الفيزيائي للمشتقة

* التفسير الهندسي للمشتقة : ميل المماس (م) = ن ` (س) (المشتقة الأولى)

* **مثال :** اذا كان ص = ق (س) = $س^{٣}$ - ١٥س - ١٠

جد : ١) ميل المماس لمنحنى الاقتران (ق) عند س = -٣
٢) معادلة المماس لمنحى الاقتران (ق) عند النقطة (-٣ ، ٨)

الحل :

١) ن ` (س) = $٣س^{٢}$ - ١٥ >>> ن ` (-٣) = $٣(-٣)^{٢}$ - ١٥ = ٢٧ - ١٥ = ١٢ (م)

٢) معادلة المماس >>> ص -ص١ = م (س - س١)

= ص - ٨ = ١٢ (س + ٣) >>> ص - ٨ = ١٢س + ٣٦ >>> ص = ١٢س + ٤٤

*** أسئلة : جد معادلة المماس كل من المنحنيات الآتية :**

١) ق (س) = ٢س + ١ ، النقطة (٢ ، ٥)

٢) ق (س) = ٤س$^{-١}$ + ٩س ، س = ٢

٣) ق (س) = (٢س - ٣)(س - ٥) ، س = ١

٤) ق (س) = $\sqrt{س^{٢} + ٥}$ ، النقطة (٢ ، ٣)

٥) ق (س) = $\frac{٤}{س}$ ، س = ٢

*** التفسير الفيزيائى :**

(ف) : المسافة بالمتر ، (ن) : الزمن بالثانية ، (ع) : السرعة (م / ث) ، (ت) : التسارع (م / ث^{٢})

- المسافة = ف(ن)
- السرعة = ع (ن) = ف ′(ن)
- التسارع = ت (ن) = ع ′(ن) = ف ″ (ن)

*** أمثلة :**

١) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٢} - ٣ن + ٥ ،
جد سرعة الجسيم بعد مرور (٤) ثواني من بدء الحركة ؟

الحل :

ع (ن) = ف ′(ن) = ٢ن - ٣ >>> ع (٤) = ٢× ٤ - ٣ = ٨ - ٣ = ٥ م / ث

---

٢) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٢} - ٢ن + ٧ ،جد تسارع الجسيم بعد مرور (٤) ثواني من بدء الحركة ؟

الحل :

ع (ن) = ف ′(ن) = ٢ن - ٢

ت (ن) = ع ′(ن) = ف ″ (ن) = ٢ >>> ت (٤) = ٢ م / ث^{٢}

*** أسئلة :**

١) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ٣ن^{٢} + ٧ ، احسب سرعة الجسيم بعد مرور (٣) ثواني من بدء الحركة ؟

٢) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = $\frac{١}{٣}$ن^{٣} + $\frac{٥}{٢}$ن^{٢} + ٧ن − ١ ، جد تسارع الجسيم عندما (ن) = ٢ ثانية ؟

٣) يتحرك جسيم وفق العلاقة ف (ن) = ن^{٢} - ٦ن + ٥ ، احسب تسارع الجسيم عندما تكون سرعته (٤٢) م / ث ؟

٤) اذا مثّل الاقتران ف (ن) المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء الحركة ،

و كان ف (ن) = ن^{٣} - ن^{٢} + ٥ ، فما سرعة هذا الجسيم عندما يكون تسارعه يساوي (٤) م / ث^{٢} ؟

٥) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ٢ن^{٣} - ٦ن - ٧، احسب تسارع الجسيم عنما تكون سرعته (١٨) م/ث ؟

٦) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٣} - ١٢ن + ٣ ، احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم التسارع ؟

٧) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٣} - ٣ن + ٦ ، احسب تسارع الجسيم عندما تنعدم السرعة ؟

الدرس السادس : قاعدة السلسلة

* تستخدم لإيجاد مشتقة اقتران مركب .

*** قاعدة (١) :** اذا كان ص = ق (هـ(س)) ، ع = هـ (س) فإن $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ (ع هو وسيط)

* **مثال :** اذا كان ص = ٥ع^{٢} + ٣ ، ع = س^{٣} + ٤ ، جد $\frac{د ص}{د س}$ ؟

الحل :

$\frac{د ص}{د ع} = ١٠ع$ ، $\frac{د ع}{د س} = ٣س^{٢}$

$\frac{د ص}{د س} = ١٠ع \times ٣س^{٢}$ >>> $\frac{د ص}{د س} = ١٠(س^{٣} + ٤) \times ٣س^{٢} = ٣٠س^{٥} + ١٢٠س^{٢}$

*** سؤال : جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يلي :**

١) ص = ع^{٣} + ١ ، ع = ٥س - ٢

٢) ص = ع^{٣} + ٥ع ، ع = ٣س^{٢} - ٢

٣) ص = جاع ، ع = س^{٥}

٤) ص = ع^{٢} + ٥ ، ع = ٤س ، عندما س = ١

*** قاعدة (٢)** : اذا كان ص = (هـ(س))^{ن} فإن $\frac{د ص}{د س}$ = ن(هـ(س))$^{ن-١}$ × هـ`(س)

بمعنى آخر (اشتقاق القوة × اشتقاق الاقتران)

*** أمثلة :**

١) ص = (٢س - ٣)^{٧} <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ٧(٢س - ٣) × (٢)

٢) ق (س) = $\sqrt[٣]{س^{٢}+٤}$ = (س^{٢} + ٤)$^{\frac{١}{٣}}$ <<< $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{٣}$(س^{٢} + ٤)$^{\frac{-٢}{٣}}$ × ٢س = $\frac{٢س}{٣\sqrt[٣]{(س^{٢}+٤)^{٢}}}$

٣) ص = $\frac{١}{(س^{٣}-٤)^{٣}}$ = (س^{٣} − ٤)$^{-٣}$ <<< $\frac{د ص}{د س}$ = −٣(س^{٣} − ٤)$^{-٤}$ × ٣س^{٢} = $\frac{-٩س^{٢}}{(س^{٣}-٤)^{٤}}$

---

* سؤال : جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يلي :

١) ص = (س^{٢} + ٤س + ٦)^{٩} =

٢) ص = (٣س^{٢} + ٥س)^{٤} =

٣) ص $= \frac{-٢}{(س+٤)^{٣}}$ =

٤) ص $= \frac{٣}{(س^{٢}+٣س)^{٤}}$ =

٥) ص $= \sqrt[٤]{(س^{٣}+٦س)}$ =

٦) ص $= \sqrt[٥]{(٢س^{٣}-٦)^{٢}}$ =

*** قاعدة (٣) :** مشتقة الاقتران الأسي >>> ص $= هـ^{ن(س)}$ فإن $\frac{د ص}{د س} = ن'(س) \times هـ^{ن(س)}$

*** أمثلة :**

١) ص $= هـ^{س^{٢}-٣س}$ >>> $\frac{د ص}{د س} = (٢س-٣) \times هـ^{س^{٢}-٣س}$

٢) ص = هـ^جاس <<< $\frac{د ص}{د س}$ = جتاس × هـ^جاس

٣) ص =جتاس × هـ^جاس <<< $\frac{د ص}{د س}$ = (جتاس)(جتاس × هـ^جاس) + (−جاس)(هـ^جاس) (قاعدة الضرب)

*** سؤال : جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يلي :**

١) ص = هـ^(٤س^٢−٨س) =

٢) ص = هـ^(س^٢+٦س−٤) =

٣) ص = هـ^جتاس =

٤) ص =ظاس هـ^جاس =

*** قاعدة (٤) :** مشتقة الاقتران اللوغاريتمي

ص =لـو_هـ ق(س) <<< $\frac{د ص}{د س} = \frac{ق'(س)}{ق(س)}$

*** أمثلة :**

١) ص = لـــو$_{هـ}$ (س^{٣} − ٢س + ٤) <<< $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٣س^{٢} - ٢}{س^{٣} - ٢س + ٤}$

٢) ص = لـــو$_{هـ}$ جاس <<< $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{جتاس}{جاس}$

* **سؤال :** جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يلي :

١) ص = لـــو$_{هـ}$ س

٢) ص = لـــو$_{هـ}$ (٤س^{٢} − ٥س) ، س = ١

٣) ص = لـــو$_{هـ}$ جتاس

٤) ص = لـــو$_{هـ}$ ظاس

---

* **قاعدة (٥) :** مشتقة اقتران مثلثي بداخله اقتران

ص = جاهـ(س) <<< $\frac{د ص}{د س}$ = هـ ´(س) × جتاهـ(س)

ص = جتاهـ(س) <<< $\frac{د ص}{د س}$ = هـ ´(س) × (−جاهـ(س))

ص = ظاهـ(س) <<< $\frac{د ص}{د س}$ = هـ ´(س) × قا^{٢} هـ(س)

---

* **مثال :** ص = جا٣س <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ٣ × جتا٣س

سؤال : جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يلي :

١) ص = جا(س^{٣} + ٤س^{٢}) =

٢) ص =ظا(٢س ^{٢} + ٦س) =

٣) ص =جتا(٤س ^{٢} + ٧س)=

*** قاعدة (٦) :** مشتقة اقتران مثلثي بداخله اقتران مرفوع لقوة

ص = (جاو(س)) ^{ن} <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ن(جاو(س)) $^{ن-١}$ ×جتاو(س)×و َ(س)

ص = (جتاو(س)) ^{ن} <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ن(جتاو(س)) $^{ن-١}$ × (-جاو(س))×و َ(س)

ص = (ظاو(س)) ^{ن} <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ن(ظاو(س)) $^{ن-١}$ ×قا^{٢}و(س)×و َ(س)

*** أمثلة :**

١) ص = (جا٦س) ^{٤} <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ٤(جا٦س) ^{٣} ×جتا٦س × ٦

٢) ص = (جتا٢س ^{٢}) ^{٣} <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ٣(جتا٢س ^{٢}) ^{٢} × (-جا٢س ^{٢}) × ٤س

٣) ص = (ظاس ^{٤}) ^{٦} <<< $\frac{د ص}{د س}$ = ٦(ظاس ^{٤}) ^{٥} × (قا^{٢}س ^{٤}) × ٤س ^{٣}

---

* سؤال : جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يلي :

١) ص = (جا٩س ^{٢}) ^{٤} =

٢) ص = (جتاس ^{٥}) ^{٢} =

٣) ص = (ظا٥س) ^{٧} =

٤) ص =جتا^{٣}س =

٥) ص =ظا^{٢}٣س =

الوحدة الثالثة
تطبيقات التفاضل

فيصل السعدون

*** ملاحظات مهمة :**

١- الملاحظات الموجودة في الدوسية (في الدروس) مهمة .
٢- تحتوي الدوسية على أسئلة منوعة من الكتاب و من أسئلة وزارة سابقة
٣- الدوسية شاملة المادة ١٠٠% (ليست ملخص) .

بالتوفيق يا مبدعين ☺

الدرس الثاني : التزايد و التناقص للاقتران

*** نظرية :** اذا كان الاقتران (ق) متصلاً على الفترة [أ ، ب] ،
و قابلاً للاشتقاق في الفترة المفتوحة (أ ، ب) فإن :

١) ق (س) متزايد على الفترة [أ ، ب] اذا كان ق´(س) > صفر ، لجميع قيم (س) ∈ (أ ، ب)

٢) ق (س) متناقص على الفترة [أ ، ب] اذا كان ق´(س) < صفر ، لجميع قيم (س) ∈ (أ ، ب)

٣) ق (س) ثابت في الفترة [أ ، ب] اذا كان ق´(س) = صفر ، لجميع قيم (س) ∈ (أ ، ب)

*** الخطوات الإجرائية لإيجاد فترات التزايد و التناقص للاقتران ق (س) :**

١) إيجاد المشتقة الأولى ق´(س) للاقتران (ق)

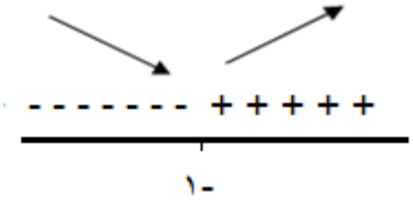
٢) إيجاد أصفار المشتقة الأولى بوضع (ق´(س) = صفر) و تسمى القيم الحرجة

٣) نضع قيم (س) على خط الأعداد (الموجب = تزايد ، السالب = تناقص)

*** أمثلة :**

١) جد فترات التزايد و التناقص للاقتران ق (س) = س^{٢} + ٢س + ١ ؟

الحل : ق´(س) = ٢س + ٢ >>> ٢س + ٢ = ٠ >>> ٢س = -٢ >>> س = -١



* ق (س) متناقص في الفترة (-∞ ، -١]

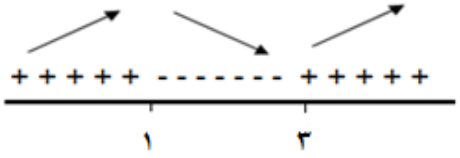
* ق (س) متزايد في الفترة [-١ ، ∞)

---

٢) جد فترات التزايد و التناقص للاقتران ق (س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س - ٦ ؟

الحل : ق (س) = ٣س^{٢} - ٦س + ٩ >>> س^{٢} - ٢س + ٣ = ٠

(س - ١)(س - ٣) >>> س = ١ ، س = ٣



* ق (س) متناقص في الفترة [١ ، ٣]

* ق (س) متزايد في الفترتين [- ∞ ، ١] ، [٣ ، ∞)

*** سؤال : جد فترات التزايد و التناقص لكل مما يلي**

١) ق (س) = س^{٣} - ٦س + ٨

٢) ق (س) = ٢س - س^{٢} + ٤

٣) ق (س) = س^{٣} - ٣س + ١

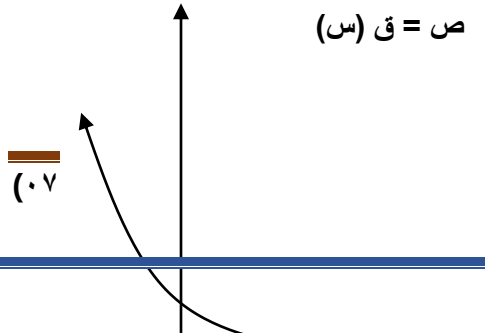
٤) ق (س) = -س^{٣} - ٦س^{٢} + ١٥س - ٦

٥) ق (س) = (س+١)(س+٢)

٦) ق (س) = ١ - ٢س

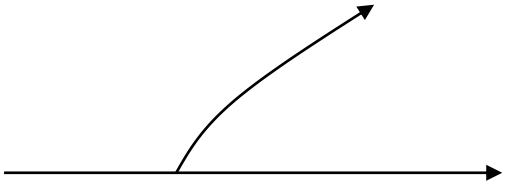
٧) ق (س) = س^{٣} + س

٨) اوجد فترات التزايد و التناقص للاقتران (ق) :



(٠٧

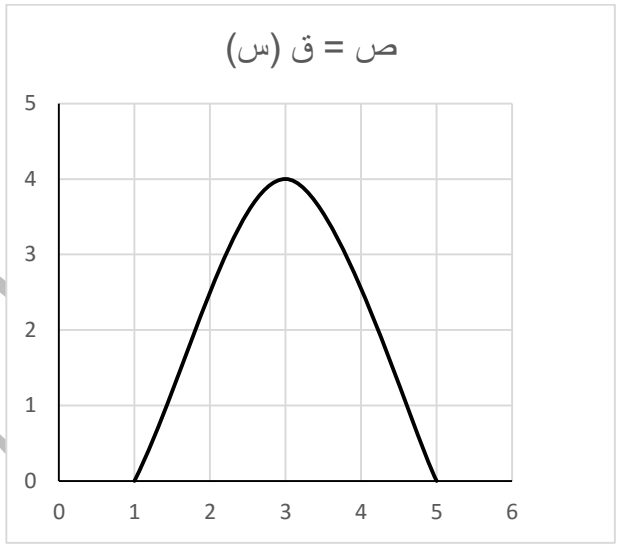
٦



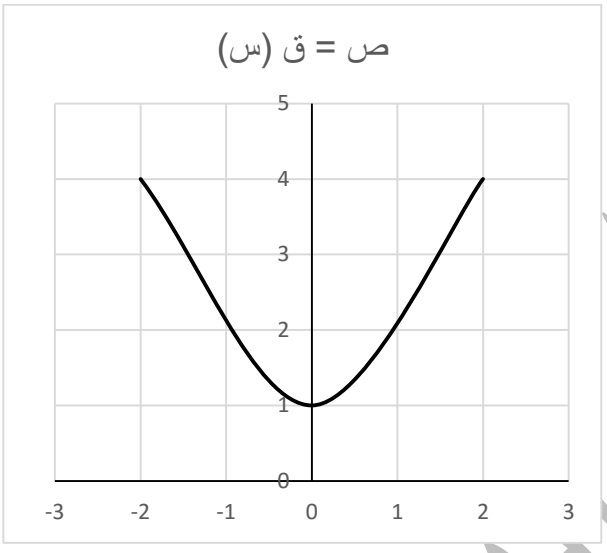
٣

الدرس الثالث : القيم القصوى للاقتران

الشكل (١)



الشكل (٢)



* الشكل (١) يوجد نقطة عظمى عند النقطة (٣ ، ٤) (قمة)

* الشكل (٢) يوجد نقطة صغرى عند النقطة (٠ ، ١) (قاع)

*** اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى :**

- الخطوات الإجرائية للإيجاد القيم الصغرى و العظمى للاقتران ص = ق (س) (المشتقة الأولى)

١) إيجاد المشتقة الأولى ق ´(س) للاقتران (ق)

٢) إيجاد أصفار المشتقة الأولى بوضع (ق ´(س) = صفر) و تسمى القيم الحرجة

٣) نضع قيم (س) على خط الأعداد (الموجب = تزايد ، السالب = تناقص)

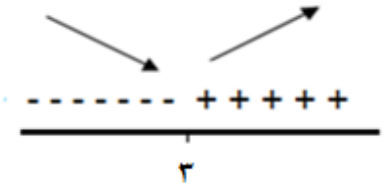
٤) اذا تحول الاقتران من متزايد الى متناقص (يكون قيمة عظمى)

و اذا من متناقص الى متزايد (يكون قيمة صغرى)

*** أمثلة :**

١) جد النقط الحرجة و القيم الصغرى و العظمى (ان وجدت) للاقتران : ق (س) = س^{٢} - ٦س

الحل :



* ق ` (س) = ٢س - ٦ = ٠

٢س = ٦ >>> س = ٣

* نقطة حرجة عند س = ٣

* قيمة صغرى عند س = ٣

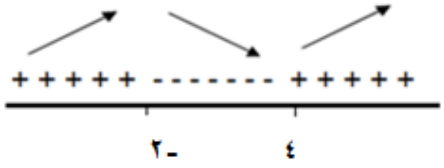
و قيمتها : ق (٣) = (٣)^{٢} - ٦ × ٣ = ٩ - ١٨ = -٩

* النقطة (٣ ، -٩)

---

٢) جد النقط الحرجة و القيم الصغرى و العظمى (ان وجدت) للاقتران : م (س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٢٤س + ١٢

الحل :



* م ` (س) = ٣س^{٢} - ٦س - ٢٤

س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠

(س + ٢) (س - ٤) = ٠

س = -٢ ، س = ٤

* نقط حرجة عند س = -٢ ، س = ٤

* قيمة عظمى عند س = -٢

و قيمتها : م (-٢) = (-٢)^{٣} - ٣(-٢)^{٢} - ٢٤(-٢) + ١٢ = ٤٠

النقطة (-٢ ، ٤٠)

* قيمة صغرى عند س = ٤

و قيمتها : م (٤) = (٤)^{٣} - ٣(٤)^{٢} - ٢٤(٤) + ١٢ = -٦٨

النقطة (٤ ، -٦٨)

*** سؤال : جد النقط الحرجة و فترات التزايد و التناقص و القيم القصوى لكل مما يلي :**

١) ق (س) = س^{٢} - ٨س + ٥

٢) ق (س) = س^{٣} - ٣س + ٤

٣) ق (س) = ٢س^{٢} + ٥س - ٤

٤) هـ(س) = ١٦س − $\frac{س^{٣}}{٣}$

٥) ل (س) = س^{٣} + ١

٦) ق (س) = ١٠ - ٣س

*** اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى :**

- الخطوات الإجرائية للإيجاد القيم الصغرى و العظمى للاقتران ص = ق (س) (المشتقة الثانية)

١) إيجاد المشتقة الأولى ق ً(س) للاقتران (ق)

٢) إيجاد أصفار المشتقة الأولى بوضع (ق ´(س) = صفر) و تسمى القيم الحرجة و نفترضها (جـ)

٣) إيجاد المشتقة الثانية ق ´´(س) و عندئذ :

- اذا كانت ق ´´(جـ) > صفر (موجبة) ، فإن ق (جـ) هي قيمة صغرى للاقتران ق .

- اذا كانت ق ´´(جـ) < صفر (سالبة)، فإن ق (جـ) هي قيمة عظمى للاقتران ق .

- اذا كانت ق ´´(جـ) = صفر ، يفشل الاختبار و نستخدم اختبار المشتقة الأولى .

*** أمثلة :**

١) باستخدام اختبار المشتقة الثانية ، جد القيم العظمى و الصغرى (ان وجدت) للاقتران : ق (س) = ٤س^{٢} - ٣

الحل :

* ق ´(س) = ٨س >>> ٨س = ٠ >>> س = ٠

* نقطة حرجة عند س = ٠

* ق ´´(س) = ٨ >>> ق ´´(٠) = ٨ موجب (قيمة صغرى عند س = ٠)

النقطة (٠ ، ق (٠)) = (٠ ، -٣)

---

٢) جد القيم العظمى و الصغرى (ان وجدت) للاقتران : ل (س) = ٤ - س^{٢} ، باستخدام اختبار المشتقة الثانية .

الحل :

* ل ´(س) = - ٢س >>> - ٢س = ٠ >>> س = ٠

* نقطة حرجة عند س = ٠

* ل ´´(س) = -٢ >>> ل ´´(٠) = -٢ سالب (قيمة عظمى عند س = ٠)

النقطة (٠ ، ل (٠)) = (٠ ، ٢)

*** سؤال : جد القيم العظمى و الصغرى (ان وجدت) لكل مما يلي ، باستخدام اختبار المشتقة الثانية ؟**

١) ق (س) = س^{٢} + ٢

أ. فيصل السعدون

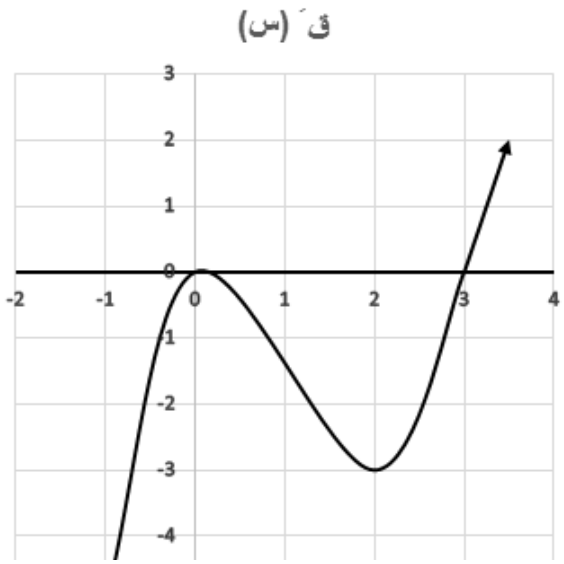
٢) ق (س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ١٢س + ٥

٣) ق (س) = ٣س^{٢} - ٤س^{٣}

إيجاد القيم القصوى بالرسم البياني

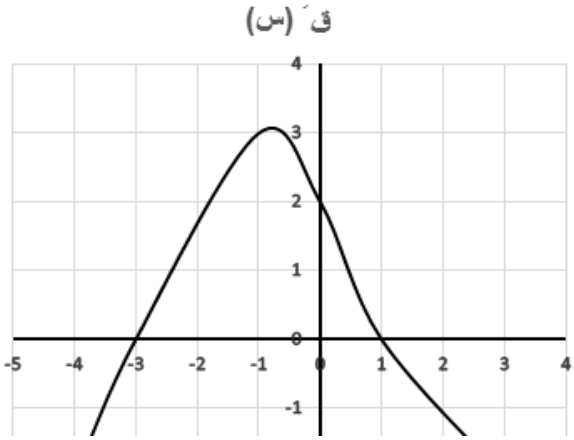
*** رسمة ق (س)**

*** سؤال : جد فترات التزايد و التناقص ، القيم الحرجة ، النقط القصوى ؟**

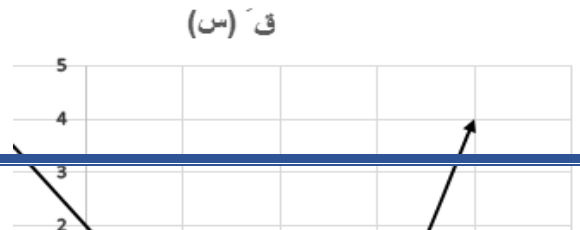


*** رسمة ق َ(س) :**

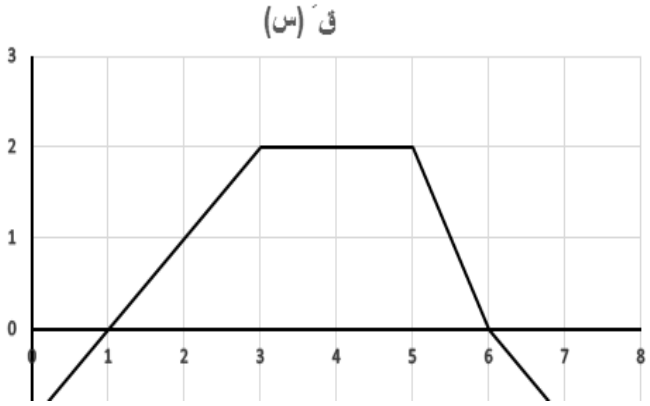
*** سؤال : جد فترات التزايد و التناقص ، القيم الحرجة ، النقط القصوى ؟**



*** سؤال : جد فترات التزايد و التناقص ، القيم الحرجة ، النقط القصوى ؟**



*** سؤال : جد فترات التزايد و التناقص ، القيم الحرجة ، النقط القصوى ؟**



الدرس الرابع : تطبيقات على القيم القصوى

*** مثال** : ما العددان الموجبات اللذان مجموعهما (٥٠) و حاصل ضربهما أكبر ما يمكن ؟

الحل :

س + ص = ٥٠ <<< ص = ٥٠ - س

ح (س) = س × ص <<< س × (٥٠ - س) <<< ٥٠س - س^{٢}

ح َ(س) = ٥٠ - ٢س <<< ٥٠ - ٢س = ٠

٢س = ٥٠ <<< س = ٢٥

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

ح ״(س) = -٢ <<< ح ״(٢٥) = -٢ (سالب)

(قيمة عظمى عند س = ٢٥)

ص = ٥٠ - ٢٥ = ٢٥

اذن يكون حاصل الضرب أكبر ما يمكن عندما يكون العدد الأول = ٢٥ و العدد الثاني = ٢٥

(ملاحظة : يمكن استخدام اختبار المشتقة الأولى (خط الأعداد) بدلا من المشتقة الثانية في تحديد القيمة العظمى و الصغرى)

*** أسئلة :**

١) ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما (١٢) و **حاصل ضربهما أكبر ما يمكن ؟**

٢) ما العددان اللذان حاصل ضربهما (٣٦) **و حاصل جمعهما أقل ما يمكن ؟**

٣) ما العددان الصحيحان الموجبان اللذان مجموعهما (٦٠) و **حاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن ؟**

* **مثال** : قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها (٦٠٠ م) ، **ما بعدا قطعة الأرض اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن ؟**

الحل :

نفرض الطول = س ، و العرض = ص

المحيط = ٢ (س + ص) >>> ٢س + ٢ص = ٦٠٠ >>> ص = ٣٠٠ - س

مساحة المستطيل = س × ص >>> م (س) = س (٣٠٠ - س)

م (س) = ٣٠٠س - س^{٢}

م$'$(س) = ٣٠٠ - ٢س >>> ٣٠٠ - ٢س = ٠ >>> ٢س = ٣٠٠ >>> س = ١٥٠

م ״(س) = - ٢ <<< م ״(١٥٠) = -٢ (سالب)

(قيمة عظمى عند س = ١٥٠)

ص = ٣٠٠ - ١٥٠ = ١٥٠

اذن أكبر مساحة ممكنة للمستطيل عندما يكون طوله = ١٥٠ ، و عرضه = ١٥٠ (مربع الشكل)

(ملاحظة : يمكن استخدام اختبار المشتقة الأولى (خط الأعداد) بدلا من المشتقة الثانية في تحديد القيمة العظمى و الصغرى)

<u>* أسئلة :</u>

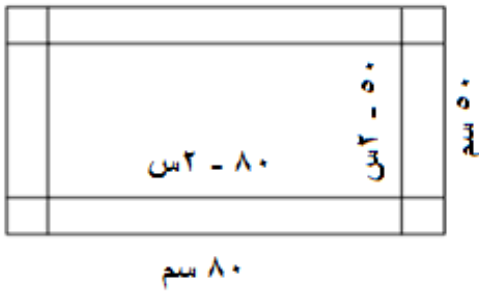
١) مستطيل مساحته (١٠٠ سم^{٢}) **أوجد أبعاده ليكون المحيط أكبر ما يمكن ؟**

٢) قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها (٨٠٠ م^{٢}) ، تقع على ضفة نهر مستقيم , فإذا أراد مالكها تسييجها ، و لم يسيّج الواجهة الواقعة على ضفة النهر ، **فأثبت أن طول السياج يكون أصغر ما يمكن إذا كان طول القطعة مساويا مثلي عرضها ؟**

٣) اذا كان مجموع طول ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية يساوي (٤٠ سم)،**فجد أكبر مساحة ممكنة للمثلث؟**

* **مثال** : يراد عمل صندوق مفتوح من الجهة العليا من قطعة ورق مقوى مستطيلة الشكل أبعادها (٨٠ سم ، ٥٠ سم) و ذلك بقطع مربعات متساوية عند رؤوسها ثم ثني الأجزاء البارزة الى أعلى ،
ما حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة ؟

الحل :



نفرض طول ضلع المربع المراد قطعه (س) ، فيكون :

* طول قاعدة الصندوق = (٨٠ - ٢س)
* و عرض قاعدة الصندوق = (٥٠ - ٢س)
* و ارتفاع الصندوق = س
* بما أن شكل الصندوق متوازي مستطيلات ، اذن الحجم = الطول × العرض × الارتفاع
* ح (س) = (٨٠ - ٢س) (٥٠ - ٢س) (س)

= س (٤س^{٢} - ٢٦٠س + ٤٠٠٠) <<< ٤س^{٣} - ٢٦٠ س^{٢} + ٤٠٠٠س

* ح ´(س) = ١٢س^{٢} - ٥٢٠س + ٤٠٠٠ <<< ح ´(س) = ٣س^{٢} - ١٣٠س + ١٠٠٠ = ٠

(٣س - ١٠٠) (س - ١٠) = ٠ <<< س = $\frac{١٠٠}{٣}$ (تُهمل) ، <u>س = ١٠</u>

* ح ״(س) = ٢٤س - ٥٢٠ >>> ح ״(١٠) = ٢٤٠ - ٥٢٠ = - ٢٨٠ (سالب)

* (قيمة عظمى عند س = ١٠)

* طول قاعدة الصندوق = ٨٠ - ٢(١٠) = ٦٠ سم ، * عرض قاعدة الصندوق = ٥٠ - ٢(١٠) = ٣٠ سم

اذن أكبر حجم متوازي مستطيلات = ١٠ × ٦٠ × ٣٠ = ١٨٠٠٠ سم^{٣}

(ملاحظة : يمكن استخدام اختبار المشتقة الأولى (خط الأعداد) بدلا من المشتقة الثانية في تحديد القيمة العظمى و الصغرى)

أسئلة :

١) صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها (١٢ سم) ، اذا رفعت من زواياها الأربع أربعة مربعات متساوية ، طول ضلع كل منها (س) ، ثم ثنيت الجوانب بحيث أصبحت الصفيحة على شكل علبة مفتوحة من أعلى ،

فجد قيمة (س) ليكون حجم العلبة أكبر ما يمكن ؟

٢) يراد عمل صندوق مفتوح من الجهة العليا من لوح مربع من الصفيح طول ضلعه (١٢٠ سم) ، وذلك بقطع مربعات ، متساوية من أركانه الأربعة و ثني الأجزاء البارزة الى أعلى ،
ما أكبر حجم ممكن للصندوق ؟

٣) صندوق قاعدته مربعة الشكل ، حجمه (٦٤ سم^{٣}) ، **جد أكبر مساحة لأوجه الصندوق ؟**

٤) صندوق قاعدته مربعة الشكل ، حجمه (١٠٨ سم^{٣}) ، **جد أكبر مساحة لأوجه الصندوق دون غطاء ؟**

٥) صحيفة من الورق مستطيلة الشكل ، مساحتها (٣٢ سم^{٢}) ، يراد طباعة إعلان عليها ،
إذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة و أسفلها (١ سم) ، و في كل من الجانبين (٠,٥ سم) ،
فجد بعدي الورقة حتى تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن ؟

تطبيقات اقتصادية على التفاضل

* **التعريف** : اذا كانت (س) هي عدد الوحدات المنتجة من سلعة معينة في فترة محددة في مصنع ما ، فإن :

١) ك (س) = التكلفة الكلية

ك ´(س) = التكلفة الحدية (معدل التغير في التكلفة بالنسبة لعدد الوحدات المبيعة)

٢) د (س) = الايراد الكلي = التكلفة الكلية + الربح = ك (س) + ر (س)

د ´(س) = الايراد الحدي (معدل التغير في الايراد بالنسبة لعدد الوحدات المبيعة)

٣) ر (س) = الربح = الايراد الكلي - التكلفة الكلية = د (س) - ك (س)

ر ´(س) = الربح الحدي = د ´(س) - ك ´(س) (معدل التغير في الربح بالنسبة لعدد الوحدات المبيعة)

* **مثال** : اذا كان اقتران التكلفة الكلية لإنتاج (س) لعبة هو ك (س) = ٢٠٠ - ٠,٥ س + ٠,٠٠٠١ س^{٢} ،

و أن اقتران الربح الناتج من بيع (س) لعبة هو ر (س) = ٠,٢٠ س ،

جد : ١) التكلفة الحدية ٢) الايراد الحدي ٣) الربح الحدي

الحل :

١) التكلفة الحدية = ك ´(س) = -٠,٥ + ٠,٠٠٠٢ س

٢) الايراد الكلي = د (س) = ك (س) + ر (س)

د (س) = ٢٠٠ - ٠,٥ س + ٠,٠٠٠١ س^{٢} + ٠,٢٠ س >>> د (س) = ٢٠٠ + ٠,١٥ س + ٠,٠٠٠١ س^{٢}

د ´(س) = ٠,١٥ + ٠,٠٠٠٢ س

٣) الربح الحدي = ر ´(س) = ٠,٢٠

---

* **أسئلة** :

١) اذا كان اقتران الايراد الكلي للمبيعات هو د (س) = ٦٠س - س^{٢} ، و اقتران التكلفة الكلية هو ك (س) = ٢٠ + ٨س ، حيث (س) عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما ، **فجد الربح الحدي ؟**

٢) اذا كان اقتران التكلفة الكلية هو ك (س) = ١٠س ، و اقتران الايراد الكلي هو د (س) = ٥٠س - س^{٢} عن بيع (س) وحدة من منتج ما ، **جد : ١) التكلفة الحدية ٢) الايراد الحدي ٣) الربح الكلي ٤) الربح الحدي ؟**

٤) يبيع مصنع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بسعر (١٠٠) دينار ، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لإنتاج (س) وحدة من هذه السلعة أسبوعيا تُعطى بالعلاقة : ك (س) = ٠,٣ س^{٢} + ٦٠س + ٧٠ ، **جد الربح الحدّي ؟**

٥) اذا كان سعر الوحدة الواحدة ع (س) = ٥س^{٣} + س^{٢} ، و تكلفة القطعة الواحدة = ٤س + ٣ ،

جد الربح الحدي عند س = ١ ؟

*** إيجاد أكبر ايراد ، أكبر ربح ، أقل كلفة**

* **مثال** : وجد مصنع أثاث أن التكلفة الكلية بالدينار للإنتاج الأسبوعي لغرف نوم عددها (س) تقدر بالاقتران :

ك (س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٨٠س + ٥٠٠ ، فإذا بيعت كل غرفة نوم ب (٢٨٠٠ دينار) ،

فما الإنتاج الأسبوعي للشركة الذي يجعل الربح أكبر ما يمكن ؟

الحل :

الايراد الكلي = عدد القطع × سعر القطعة الواحدة >>> د (س) = ٢٨٠٠ × س = ٢٨٠٠س

الربح الكلي = ر (س) = د (س) - ك (س) = ٢٨٠٠س - س^{٣} + ٣س^{٢} + ٨٠س - ٥٠٠

ر (س) = - س^{٣} + ٣س^{٢} +٢٨٨٠س - ٥٠٠

الربح الحدي = ر ً(س) = -٣س^{٢} + ٦س + ٢٨٨٠ >>> س^{٢} - ٢س - ٩٦٠

(س - ٣٢) (س + ٣٠) = ٠ >>> س = ٣٢ ، س = -٣٠ (تُهمل)

ر ً(س) = -٦س + ٦ >>> ر ً(٣٢) = -٦(٣٢) + ٦ = -١٨٦ (سالب) (قيمة عظمى)

* اذن أكبر ربح ممكن عندما ينتج المصنع (٣٢) غرفة نوم في الأسبوع .

(ملاحظة : يمكن استخدام خط الأعداد بدلا من المشتقة الثانية في تحديد القيمة العظمى و الصغرى)

* **أسئلة** :

١) اذا كانت تكلفة قطعة واحدة هي س - ٤ ، **جد عدد القطع حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن ؟**

٢) اذا كان اقتران التكلفة الكلية هو ك (س) = ٦٠٠٠ + ٥٠س + ٠,٠٠٢٥ س^{٢} ، ويتم بيع الوحدة الواحدة بسعر (٧٠) دينار ، **فما عدد الوحدات التي يجب انتاجها لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟**

٣) اذا كان د (س) = ٥٠س - س^{٢} هو اقتران الايراد الكلي الناتج عن بيع (س) وحدة من منتج ما ،
و ك (س) = ١٠س هو اقتران التكلفة الكلية ، **جد قيمة (س) التي تجعل الربح أكبر ما يمكن ؟**

٤) اذا كان ر (س) = ٣س + س^{٢} هو اقتران الربح الكلي الناتج عن بيع (س) وحدة من منتج ما ،
و ك (س) = $١ - \frac{س^{٣}}{٣}$ هو اقتران التكلفة الكلية ، **جد قيمة (س) التي تجعل الايراد أكبر ما يمكن ؟**

٥) ينتج مصنع (س) من الوحدات في الأسبوع من بضاعة معينة ، و يبيع الوحدة بمقدار (ص) ديناراً ،
إذا كانت كلفة الإنتاج لهذه الوحدات هي : ٠,٢ س^{٢} + ١٥س + ٥٠٠ دينار ،
و كانت العلاقة بين س ، ص هي : ٥س = ٣٨١ - ٣ص ،
فبرهن أن أكبر ربح يحصل عليه هذا المصنع هو عندما يكون الإنتاج الأسبوعي (٣٠) وحدة ؟

٦) اذا كان ك (س) = ٣٦٠٠٠ + ٤س + س^{٢} هو اقتران التكلفة الكلية لإنتاج (س) ثلاجة ،
و يتم بيع الثلاجة الواحدة بسعر (٥٠٠ دينار) ، **جد : ١) الايراد الكلي**
٢) عدد الثلاجات التي يجب أن يتم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن .

تم بحمد الله

أ. فيصل السعدون