Mathio 2016

Group A	Group B	Group C
التباديل	المتغير العشوائي	قطعة نقد
التوافيق	العلامه المعيارية	الوسط الحسابي
توزيع ذي الحدين	معامل بيرسون	الانحراف المعياري
المضروب	معادلة خط الانحدار	مبدأ العد

Group D	Group E	Group F
المساحه من خلال الرسم	السرعه والتسارع	التكامل المحدود
فائض المستهلك	قاعدة الاقتران	التكامل غير المحدود
فائض المنتج	التكامل بالتعويض	المشتقه والتكامل
خصائص التكامل	المساحه	السرعة والمسافه

مكثف الرياضيات ٢٠١٦ صيفي

محبكم عامر جرابعه

الوحدة الأولى

Mathio 2016

* مراجعه سريعه حول التكامل *

* * * ∫ عدد ثابت دس = عدد ثابت × س + جـ

امثله ∫ ٣ دس = ٣س + جـ / ∫ دس = س + جـ / ∫ ٢٢ دس = ٢٢ س + جـ

* * * ∫ س^ن دس = س^(ن+١) / (ن+١) + جـ

اذا كان الاس موجب نزيد ١ مثلاً ∫ س^٢ دس = س^٣/٣ + جـ

اذا كان الاس سالب ننقص ١ مثلاً ∫ س^-٢ دس = س^-١/-١ + جـ

* * * ∫ الجذور دس طا بعرف اكاملها نحولها لاس كسري

مثلاً ∫ ∛(س^٤) دس

نخفض

∫ س^(٤/٣) دس = ٣ س^(٧/٣) / ٧ + جـ

مثلاً ∫ ∛(س^٣) دس = ∫ س^(٣/٢) دس

∫ √س دس = ∫ س^(١/٢) دس

∫ ∛س دس = ∫ س^(١/٣) دس

لاحظ المثالين التاليين * ∫ ١/س^٣ دس

نطرح ٢ من ٣ = ∫ س^(-٣/٢) دس

في المقام نفسه = -٢ س^(-١/٢) / -١ + جـ

٢ - ٣ = -١/٢

بعد التكامل اذا كان الاس سالب ينزل تحت = -٢ / √س + جـ

اذا كان كسر يحول الجذر

* ∫ ٢ دس / ∛(س^٤)

نخفض

∫ ٢ دس ترفع لفوق لانه اذا كان بالمقام س

∫ ٢ س^(-٤/٣) دس

٢ × س^(-٣/٣) / -١/٣ + جـ

تم رفع لفوق وتغيير الاشارة

-٦ / ∛س + جـ

Mathio 2016

* * * عندما تزيد س بالمقام لها أس ترفع لفوق

مثلاً ∫ ٥ / س^٤ دس = ∫ ٥ س^-٤ دس = ٥ × س^-٣ / -٣ + د
تصبح

* * * عندما تزيد س بالمقام ليس لها أس
والجواب لوغاريتم

مثلاً ∫ ١ / س دس = لو_هـ |س| + د

مثلاً ∫ ٤ / س^٥ دس = ٤ لو_هـ |س| + د

مثلاً ∫ س^-١ دس = ∫ ١ / س دس = لو_هـ |س| + د

لو_هـ ١ = صفر
لو_هـ هـ = ١

لكن يا طالب شوف مملنر من العجله تغلط ركز

∫ ١ / س^-١ دس لاحظ هنا س^-١ جاءت بالمقام ليست لوغاريتم

∫ س دس
= س^٢ / ٢ + د

[اذا رأيت س لها اس بالمقام ترفع لفوق]

* ∫ (هـ^س / ٤ + ٢ / ٣س^٢) دس = هـ^س / ٤ + ٢/٣ لو_هـ |س| + د
لانه لجدا الاختصار

٢س^٣ / ٣س^٢ = ٢س / ٣ ← س ليس لها اس بالمقام
لوغاريتم

* ∫ ٢ س^-١ دس = ∫ ٢ / س دس = ٢ لو_هـ |س| + د

واقعة ٢

* * * تكامل الزوايا

مثلاً

$\int 2\,جا 3س\,دس$

$= \frac{2 \times -جتا\,3س}{3} + ج$

مثال ١

$\int 2\,جا(4س-1)\,دس$

$= \frac{2 \times -جتا(4س-1)}{4} + ج$

معلوم

$3س$ مقابل $س$ $\frac{3}{2}$

$\frac{س}{3}$ مقابل $س$ $\frac{1}{3}$

وضع

$\int جتا\,3س\,دس$

$= \frac{جا\,3س}{3} + ج$

صيغة

$\int جتا\frac{س}{3}\,دس$

$= \frac{جا\frac{س}{3}}{\frac{1}{3}} + ج$

$= 3\,جا\frac{س}{3} + ج$

* $\int \frac{3}{(قاس)^2}\,دس$ نرفع لفوق

$\int 3\,قا^2س\,دس = 3\,ظاس + ج$

* $قاس = \frac{1}{جتاس}$ / $قا^2س = \frac{1}{جتا^2س}$

* $\int \frac{5}{جتا^2(2س+3)}\,دس$

$= \int 5\,قا^2(2س+3)\,دس = \frac{5\,ظا(2س+3)}{2} + ج$

في حالة الزاوية س

* $\int جاس\,دس = -جتاس + ج$

* $\int جتاس\,دس = جاس + ج$

* $\int قا^2س\,دس = ظاس + ج$

في حالة الزاوية اقتران خطي $أس+ب$ اي س ليست لوحدها

* $\int جا(أس+ب)\,دس = \frac{-جتا(أس+ب)}{أ} + ج$

* $\int جتا(أس+ب)\,دس = \frac{جا(أس+ب)}{أ} + ج$

* $\int قا^2(أس+ب)\,دس = \frac{ظا(أس+ب)}{أ} + ج$

حيث أ معامل س إذا ليست لوحدها اهس

لان ص الزاوية لو كان لوحدها اهس (تعويضه)

مثلاً $\int جا^2س\,دس$ نحول $جا^2$ لـ $جتا$ لان $جا^2$ ما اعرف تكامله

$\int \frac{1}{2}(1-جتا\,2س)\,دس$

$= \frac{1}{2}\int 1\,دس - \frac{1}{2}\int جتا\,2س\,دس$

$= \frac{1}{2}س - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}جا\,2س + ج$

$= \frac{1}{2}س - \frac{1}{4}جا\,2س + ج$

مثلاً $\int جتا^3س\,دس$ نحول $جتا^3$ لـ $جا$ لان $جتا^3$ ما اعرف تكامله

$\int (1-جا^2س)\,جتاس\,دس$

$= \int جتاس\,دس - \int جا^2س\,جتاس\,دس$

$= جاس - \frac{جا^3س}{3} + ج$

مثلاً $\int \frac{جتاس}{1+جاس}\,دس$ نحول $جتاس$ لـ $جاس$ لان $1+جاس$ ما اعرف تكامله

$\int \frac{جتاس}{1+جاس}\,دس$

$= \int \frac{1}{1+ص} \times \frac{دص}{جتاس}$

$= \int \frac{1}{1+ص}\,دص$

$= ln|1+ص| + ج$

$= ln|1+جاس| + ج$

مثلاً $\int \frac{ظاس}{جتاس}\,دس$ نحول $ظاس$ لـ $جاس$ لان $جتاس$ ما اعرف تكامله

$\int \frac{ظاس}{جتاس}\,دس$

$= \int \frac{جاس}{جتاس} \times \frac{1}{جتاس}\,دس$

$= \int \frac{ص}{جتاس} \times \frac{1}{جتاس} \times \frac{دص}{-جاس}$

$= \int \frac{ص}{جتاس} \times \frac{1}{جتاس} \times \frac{دص}{-ص}$

$= \int \frac{-1}{جتاس}\,دص$

$= \int \frac{-1}{ص}\,دص$

$= -ln|ص| + ج$

$= -ln|جتاس| + ج$

مثلاً $\int \frac{1}{1+جتاس}\,دس$ نضرب بمرافق المقام

$\int \frac{1}{1+جتاس} \times \frac{1-جتاس}{1-جتاس}\,دس$

$= \int \frac{1-جتاس}{1-جتا^2س}\,دس$

$= \int \frac{1-جتاس}{جا^2س}\,دس$

$= \int \frac{1}{جا^2س} - \frac{جتاس}{جا^2س}\,دس$

$= \int قا^2س - \frac{1}{جاس} \times \frac{جتاس}{جاس}\,دس$

$= \int قا^2س - قاس\,ظاس\,دس$

$= ظاس - قاس + ج$

مثلاً $\int \frac{1}{1-جاس}\,دس$ نضرب بمرافق المقام

$\int \frac{1}{1-جاس} \times \frac{1+جاس}{1+جاس}\,دس$

$= \int \frac{1+جاس}{1-جا^2س}\,دس$

$= \int \frac{1+جاس}{جتا^2س}\,دس$

$= \int \frac{1}{جتا^2س} + \frac{جاس}{جتا^2س}\,دس$

$= \int قا^2س + \frac{1}{جتاس} \times \frac{جاس}{جتاس}\,دس$

$= \int قا^2س + قاس\,ظاس\,دس$

$= ظاس + قاس + ج$

ورقة ٤

* * * $\int هـ^{س} \, دس = هـ^{س} + جـ$

لكن اذا كان فوق هـ اقتران خطي $\int هـ^{م س + ب} \, دس = \frac{هـ^{م س + ب}}{م} + جـ$

أكتب ($\frac{\text{نفسها}}{\text{معامل س}}$)

$* \int ٤ هـ^{٤-س} \, دس = \frac{٤ \times هـ^{٤-س}}{-١} + جـ$

$* \int ٣ هـ^{٤-س} \, دس = \frac{٣ \times هـ^{٤-س}}{-٤} + جـ$

سؤال مهم بالمساحة

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $د(س) = ٣س^{٢}$ والمستقيم $ص = ٣$ والواقعة في الربع الأول.

الحل نفرض ان $ص = هـ(س)$ ومنه $هـ(س) = ٣$

في المسألة لدي اقترانين $د(س) = هـ(س)$ لايجاد حدود التكامل نساويهم ببعضهم

$٣س^{٢} = ٣$

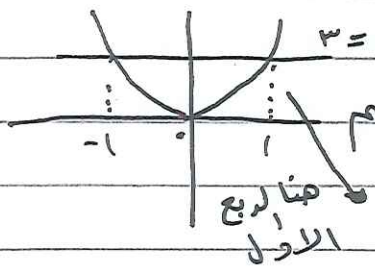
$\frac{٣س^{٢}}{٣} = \frac{٣}{٣}$

$س^{٢} = ١$

$س = \pm ١$

حد للطرفين

من خلال الرسم



$مساحة = \int_{١}^{-١} (د(س) - هـ(س)) \, دس$

$م = \int_{١}^{-١} (٣س^{٢} - ٣) \, دس$

$= |س^{٣} - ٣س|_{١}^{-١}$

$= |س^{٣} - ٣س|_{١}^{-١}$

$(-١)^{٣} - ٣(-١) - (١)^{٣} - ٣(١)$

$-١ + ٣ - ١ + ٣ = ٤$ وحدات مربعة

ورقة ٥

Mathio 2016

السؤال الأول

أ) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران
$هـ(س) = س^2 - ٤س$ ومحور السينات.

الحل $هـ(س) = ٠$ أولاً نساوي الاقتران بالصفر

$س^2 - ٤س = ٠$ عندما $س^2$ و $س$ نخرج $س$ كعامل مشترك

$س(س - ٤) = ٠$ إما $س = ٠$ أو $س - ٤ = ٠$ ومنه $س = ٤$

إذاً مساحة $= \left| \int_{٠}^{٤} هـ(س)\, دس \right|$

مساحة $= \left| \int_{٠}^{٤} (س^2 - ٤س)\, دس \right|$ تعويض ٤ − تعويض ٠

$= \left| \frac{س^3}{٣} - ٤\frac{س^2}{٢} \right|_{٠}^{٤} = \left| \frac{(٤)^3}{٣} - ٢(٤)^2 \right| - (\text{صفر})$

$= \frac{٦٤}{٣} - ٣٢ = \frac{٦٤}{٣} - \frac{٣٢ \times ٣}{٣ \times ١} = \frac{٦٤}{٣} - \frac{٩٦}{٣} = \left| \frac{-٣٢}{٣} \right|$ نوجد المقام

لأن المساحة طول × عرض نضع عليها مطلقة $= \boxed{\frac{٣٢}{٣}}$ وحدات مربعة

ب) احسب قيمة الثابت $ك$، إذا كان $\int_{-١}^{ك} هـ(س)\, دس = \frac{١}{هـ} + ١$

الحل $\left| هـ(س) \right|_{-١}^{ك} = \frac{١}{هـ} + ١$

$هـ^{ك} - هـ^{-١} = -هـ^{-١} + ١$

$هـ^{ك} = -هـ^{-١} + هـ^{-١} + ١$

$هـ^{ك} = هـ$ ومنه $\boxed{ك = ١}$

للعلم $-هـ^{-١} = -\frac{١}{هـ}$

$هـ = ١$

ورقة ٦

Mathio 2016

ج) اذا كان $\int_{٤}^{٤} (٥ه(س) دس = ٦ج - ٢$ فجد قيمة الثابت ج

الحل

نحنه نعلم ان $\int_{٢}^{٢} (٥ه(س) دس = صفر$

$صفر = ٦ج - ٢$

$+٢ \quad +٢$

$صفر + ٦ج = ٢$

$\frac{٦}{٦}ج = \frac{٢}{٦}$

$\frac{١}{٣}$ = ج

د) اذا كان $\int_{-٣}^{٣} (٣ - ٥ه(س)) دس = -٦$ ، $\int_{-٣}^{٣} ٥ه(س) دك = ٨$

فجد $\int_{٣}^{٣} ٤ ٥ه(س) دس$

الحل في هذا السؤال ركّز على الحدود فجد اد خان

$٤ \times \int_{٣}^{٣} ٥ه(س) دس = ٤ \times [\int_{-٣}^{٣} ٥ه(س) دس + \int_{-٣}^{٣} ٥ه(س) دس]$

$= ٤ \times [٨ + (-٢٤)]$

$= ٤ \times [-١٦]$

$= -٦٤$

صنا يجب تصفية المعطى بالسؤال

$\int_{-٣}^{٣} (٣ - ٥ه(س)) دس = -٦$

$\int_{-٣}^{٣} ٣ دس - \int_{-٣}^{٣} ٥ه(س) دس = -٦$

$٣ \times (٣ - (-٣)) - \int_{-٣}^{٣} ٥ه(س) دس = -٦$

$١٨ - \int_{-٣}^{٣} ٥ه(س) دس = -٦$

$-١٨ \quad -١٨$

$\int_{-٣}^{٣} ٥ه(س) دس = ٢٤$

$\int_{٣}^{-٣} ٥ه(س) دس = -٢٤$

تمرين واقتران متوزع ركّز

لانو عكس المعطى فنعكسه الاشارة

ورقة ١

Mathio
2016

السؤال الثاني

أ) إذا علمت أن $\int_{1}^{5} هـ(س)\,د س$ حيث $هـ(س) = \begin{cases} س & ١ \le س \le ٣ \\ س^{٢} & ٣ < س \le ٥ \end{cases}$

الحل

$$\int_{1}^{5} هـ(س)\,د س = \int_{1}^{3} هـ(س)\,د س + \int_{3}^{5} هـ(س)\,د س$$

$$= \int_{1}^{3} س\,د س + \int_{3}^{5} س^{٢}\,د س$$

$$= \left| \frac{س^{٢}}{٢} \right|_{1}^{3} + \left| \frac{س^{٣}}{٣} \right|_{3}^{5}$$

$$= \left(\frac{(٣)^{٢}}{٢} - \frac{(١)^{٢}}{٢}\right) + \left(\frac{(٥)^{٣}}{٣} - \frac{(٣)^{٣}}{٣}\right)$$

$$= \frac{٩}{٢} - \frac{١}{٢} + \frac{١٢٥}{٣} - \frac{٢٧}{٣} = \boxed{٨ + ٥٠ - ٩ = ٤٩}$$

ب) جد تكامل ما يلي $\int ٤س\,جتا(س^{٢}+٥)\,د س$

الحل نفرض ان $ص = س^{٢} + ٥$ تعويض لان المشتقة سس واخذ عليها أس

نشتق $\frac{د ص}{د س} = ٢س$

نستبدل $د س = \frac{د ص}{٢س}$ الآن نرجع للسؤال الاصلية

$$\int ٤س\,جتا ص \cdot \frac{د ص}{٢س}$$

نختصر ٢س

$$\int ٢\,جتا ص + ج$$

نعيد قيمة ص

$$\int ٢\,جتا(س^{٢}+٥) + ج$$

Mathio
2016

ج) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان تسارعه بعد ن ثانية تـ(ن) = ٣ م/ث٢ ، جد السرعة والمسافة بعد (٤) ثوان من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٢ م وسرعته الابتدائية ع(٠) = ١ م/ث

الحل
ع(ن) = ∫ تـ(ن) دن
ع(ن) = ∫ ٣ دن
ع(ن) = ٣ن + جـ
٣×٠ + جـ = ١
اذاً جـ = ١
وعليه ع(ن) = ٣ن + ١
ع(٤) = ٣×٤ + ١ = ١٣

ف(ن) = ∫ ع(ن) دن
ف(ن) = ∫ (٣ن + ١) دن
ف(ن) = ٣ن٢/٢ + ن + جـ
٣/٢ × (٠)٢ + ٠ + جـ = ٢
وعليه جـ = ٢
ف(ن) = ٣ن٢/٢ + ن + ٢
ف(٤) = ٣×(٤)٢/٢ + ٤ + ٢
= ٢٤ + ٦ = ٣٠

د) اذا كان هـ اقترانا "قابلاً" للاشتقاق وكانت
هـ(س) = ٣س٢ - ٤س + ١ فجد هـ(١-١) علماً بان هـ(٣) = ٢

الحل
هـ(س) = ∫ هـَ(س) دس
هـ(س) = ∫ (٣س٢ - ٤س + ١) دس
هـ(س) = ٣س٣/٣ - ٤س٢/٢ + س + جـ
هـ(س) = س٣ - ٢س٢ + س + جـ
هـ(٣) = ٢
(٣)٣ - ٢×(٣)٢ + ٣ + جـ = ٢
٢٧ - ١٨ + ٣ + جـ = ٢
١٢ + جـ = ٢
جـ = -١٠
هـ(س) = س٣ - ٢س٢ + س - ١٠
هـ(-١) = (-١)٣ - ٢(-١)٢ - ١ - ١٠
= -١ - ٢ - ١ - ١٠ = -١٤

ورقة ٩

Mathio
2016

السؤال الثالث.

أ) جد التكامل ما يلي

$$\int \frac{س^{3} + ٥}{\sqrt{س^{3}}}\, دس = \int س^{\frac{3}{2}}\, دس + \int ٥ س^{-\frac{3}{2}}\, دس$$

$$= \int س^{\frac{3}{2}}\, دس + \int ٥ س^{-\frac{3}{2}}\, دس$$

$$= \frac{س^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + ٥ \times -٢ \times س^{-\frac{1}{2}} + ج$$

اذا كان التكامل بالصورة التالية نوزع

$$\int \frac{أ \pm ب}{ج}\, دس$$

$$\int \frac{أ}{ج}\, دس \pm \int \frac{ب}{ج}\, دس$$

معلومة

$$\int س^{م}\, دس$$

تصبح

$$\int س^{م-ب}\, دس$$

ب) $\int_{-١}^{١} \left(\frac{١}{س^{٢} + ٦س + ٩} \right) دس$

الحل

$$\int_{-١}^{١} \frac{١}{(س+٣)(س+٣)}\, دس$$

$$\int_{-١}^{١} \frac{١}{(س+٣)^{٢}}\, دس$$

لان المقام مرفوع لقوى تغير اشارة الـ س

$$\int_{-١}^{١} (س+٣)^{-٢}\, دس$$

نفرض ان ص = س + ٣

نشتق $\frac{دص}{دس} = ١$

ومنه دس = دص

عندما س = -١ فان ص = ٢

عندما س = ١ فان ص = ٤

$$\int_{٢}^{٤} ص^{-٢}\, دص = \frac{ص^{-١}}{-١}\Big|_{٢}^{٤}$$

$$= -\frac{١}{ص}\Big|_{٢}^{٤} = -\left(\frac{١}{٤}\right) - \left(-\frac{١}{٢}\right) = -\frac{١}{٤} + \frac{١ \times ٢}{٢ \times ٢}$$

نوحد المقام

$$= -\frac{١}{٤} + \frac{٢}{٤} = \boxed{\frac{١}{٤}}$$

معلومة سريعة طريقة كريمة للحل

$$\int (أ س + ب)^{ن}\, دس$$

$$= \frac{(أ س + ب)^{ن+١}}{أ \times (ن+١)}$$

حيث أ معامل س

ونحل ايضا بالتعويض

ولكن الحل بالتعويض يفضل

د/ أ/ ١٠

ج) اذا كان اقتران (السعر-الطلب) لمنتج معين هو
ع = هـ(س) = ٨ - س وكان اقتران (السعر-العرض) لهذا
المنتج هو ع = ه(س) = س^{٢} + ٢

الحل لانه لدي الاقترانين نساويهم ببعضهم لايجاد قيمة س$_{١}$
كمية التوازن

هـ(س) = ه(س)
٨ - س = س^{٢} + ٢ نحاول نقل كل شئ لجهة س^{٢}
س^{٢} + س + ٢ - ٨ = ٠
س^{٢} + س - ٦ = ٠ ما لصدان للذان ناتج
(س + ٣)(س - ٢) = ٠ ضربهم ٦ وطرحهم
اما س + ٣ = ٠ ومنه س = -٣ ١ / ٢X٣
اما س - ٢ = ٠ ومنه س = ٢
س = -٣ تهمل لان ٦ سالبه الاشارات
س$_{١}$ = ٢ كمية التوازن ستكون مختلفه
ونضع اشارة الوسط للاكبر

لايجاد قيمة ع نعوض س$_{١}$ باي اقتران
ع = هـ(٢) = ٨ - ٢ = ٦ ومنه ع = ٦
سعر التوازن

فائض المستهلك
ف$_{ك}$ = ∫$_{٠}^{س_{١}}$ هـ(س) دس - ع$_{١}$ X س$_{١}$
= ∫$_{٠}^{٢}$ (٨ - س) دس - ٦ X ٢
= ٨س - س^{٢}/٢ |$_{٠}^{٢}$ - ١٢
(٨X٢ - ٤/٢) - (صفر - صفر) - ١٢
١٦ - ٢ - ١٢
١٤ - ١٢ = ٢

فائض المنتج
ف$_{ج}$ = ع$_{١}$ X س$_{١}$ - ∫$_{٠}^{س_{١}}$ ه(س) دس
ف$_{ج}$ = ٦X٢ - [∫$_{٠}^{٢}$ (س^{٢} + ٢) دس]
= ١٢ - [س^{٣}/٣ + ٢| $_{٠}^{٢}$]
١٢ - [(٢)^{٣}/٣ + ٢) - (صفر)]
١٢ - [٨/٣ + ٢] = ١٢ - ١٤/٣ نوحد المقام
٣٦/٣ - ١٤/٣ = ٢٢/٣

ورقة ١١

Mathio
2016

د) جد التكاملات التالية.

* $\int \frac{س^3 - ٤س^2 + س}{س} \, دس = \int \frac{\cancel{س}(س^2 - ٤س + ١)}{\cancel{س}} \, دس$

نخرج س لبسط
نحاصل مشترك

$= \frac{س^3}{3} - ٤\frac{س^2}{2} + س + ج$

* $\int \frac{٧س^5 - ٩س^3}{س^3} \, دس = \int \frac{\cancel{س^3}(٧س^2 - ٩)}{\cancel{س^3}} \, دس$

نخرج $س^3$ عامل
مشترك

$= ٧\frac{س^3}{3} - ٩س + ج$

* $\int \frac{٧س^2 - س}{١ - ٧س} \, دس = \int \frac{س(٧س - ١)}{-(٧س - ١)} \, دس$

نخرج ف لبسط س
عامل مشترك

$= \int -س \, دس = -\frac{س^2}{2} + ج$

* $\int_{-١}^{٢} ٢س هـ^{س^2} \, دس$ لان فوق هـ س لها اس لكونه تفاضله

نفرض ان ص = $س^2$ ومنه $\frac{دص}{دس} = ٢س$ ومنه $دس = \frac{دص}{٢س}$

نجعل ، نقيم بدلالة ص

عندما س = -١ فان $ص = (-١)^2 = ١$

عندما س = ٢ فان $ص = (٢)^2 = ٤$

$\int_{١}^{٤} \cancel{٢س} هـ^{ص} \cdot \frac{دص}{\cancel{٢س}}$

$هـ^{ص}|_{١}^{٤} = هـ^{٤} - هـ^{١}$

ورقة ١٢

Mathio 2016

متنوعات وأفكار للوحدة
التكامل

① نكره احسب قيمة الثابت ك في كل مما يلي

$\int_{1}^{ك} \frac{1}{\sqrt{س}}\, دس = ٢$ في البداية نحول $\sqrt{س}$ لـ س مرفوعة لأس كسري

الحل $\int_{1}^{ك} \frac{1}{س^{\frac{1}{2}}}\, دس = ٢$ ← $\int_{1}^{ك} س^{-\frac{1}{2}}\, دس = ٢$

اذا كانت س لها اس بالمقام ← نرفع مقوق

$\left[\frac{س^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{1}^{ك} = ٢$

$\left[٢\sqrt{س} \right]_{1}^{ك} = ٢$

$٢(\sqrt{ك} - \sqrt{١}) = ٢$

$\sqrt{ك} - ١ = ١$

$\sqrt{ك} = ٢$ ← نربع الطرفين

$ك = ٤$

② نكره جـ قيمة جـ $\int_{جـ}^{٢} (٤س - ١)\, دس = -٣جـ$ ؟

الحل $\left[\frac{٤س^{٢}}{٢} - س \right]_{جـ}^{٢} = -٣جـ$

$\left[٢س^{٢} - س \right]_{جـ}^{٢} = -٣جـ$

$(٢ \times ٢^{٢} - ٢) - (٢ \times جـ^{٢} - جـ) = -٣جـ$

$(٨ - ٢) - (٢جـ^{٢} - جـ) = -٣جـ$

$٦ - ٢جـ^{٢} + جـ = -٣جـ$

$-٢جـ^{٢} + جـ + ٣جـ + ٦ = ٠$

$-٢جـ^{٢} + ٤جـ + ٦ = ٠$ ← نقسم على -٢

$جـ^{٢} - ٢جـ - ٣ = ٠$

نحلل

$(جـ - ٣)(جـ + ١) = ٠$

اما $جـ - ٣ = ٠$ ← $جـ = ٣$

اما $جـ + ١ = ٠$ ← $جـ = -١$

Mathio
2016

③ فكرة ○ اذا كان الايراد الحدي لبيع س علبة من البسكويت التي ينتجها مصنع ما هو د(س) = ٢س - ١ دينار، فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع هذه العلب.

الحل الايراد الكلي = ∫ الايراد الحدي د س

د(س) = ∫ د'(س) د س

د(س) = ∫ (٢س - ١) د س

د(س) = ٢س²/٢ - س + جـ

بدون + جـ

د(س) = س² - س

④ فكرة ○ جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين
هـ(س) = س + ١ ، ك(س) = ١ - ٢س في الفترة [٠، ٢]

الحل نساوي المعادلتين ببعضهما
هـ(س) = ك(س) ومنه س + ١ = ١ - ٢س وتصبح س + ٢س = ١ - ١
٣س/٣ = ٠/٣ ⟹ س = ٠

مساحة = ∫₀² (س + ١) - (١ - ٢س) د س
= ∫₀² (س + ١ - ١ + ٢س) د س = ∫₀² ٣س د س = ٣س²/٢ |₀²

ومنه (٣ × (٢)²/٢) - (صفر) = ٦ وحدات مربعة

⑤ فكرة ○ * ∫ جتا س ظا س د س للعلم ظا س = جا س / جتا س

∫ جتا س . جا س / جتا س د س = ∫ جا س د س

= - جتا س + جـ

Mathio
2016

⑥ فكرة اذا طلب في السؤال المشتقه اي $\frac{دهـ}{دس}$ او هـ(س) او هـ

- تكامل غير محدود في → الجواب (ما داخل التكامل)
- تكامل محدود في → الجواب (صفر)

مثلاً: اذا كان هـ(س) دس = $٤س^{٣} - ٦س^{٢} + ٢$ فجد هـ'(١)

الحل اولاً نجد هـ(س) للطرفين هـ(س) = $١٢س^{٢} - ١٢س$

هـ'(س) = $٢٤س - ١٢$

هـ'(١) = $٢٤ \times ١ - ١٢ = ١٢$

مثلاً: اذا كان هـ(س) دس = $س^{٤}$ فجد هـ(س) ، هـ(س) ؟

الحل لاحظ المطلوب هـ(س) وهو داخل تكامل غير محدود

نشتق الطرفين $\frac{د}{دس}$ هـ(س) دس = $٤س^{٣}$

هـ(س) = $٤س^{٣}$ وبضرب هـ(س) = $١٢س^{٢}$

* اذا كان هـ(س) دس = $س^{٣} + ب$ على فكرة ناتج التكامل جاهز

فجد $\int_{-١}^{٨}$ هـ(س) دس ؟

الحل $\int_{-١}^{٨} س^{٣} + ب$ دس

$(٨)^{٣} + ب - (-١)^{٣} + ب$

$(٤ + ب) - (١ + ب)$

$٤ + ب - ١ - ب = ٣$

* اذا علمت ان هـ(٤) = ١٢ ، هـ(١) = -٨

احسب قيمة $\int_{١}^{٢}$ س هـ(س^٢) دس

الحل نفرض ان ص = $س^{٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٢س \Rightarrow دس = \frac{دص}{٢س}$

عندما س = ١ فان ص = $(١)^{٢} = ١$

عندما س = ٢ فان ص = $(٢)^{٢} = ٤$

$\int_{١}^{٤}$ ٢س هـ(ص) . $\frac{دص}{٢س}$

$\int_{١}^{٤}$ هـ(ص) دص ⇐ هـ(٤) - هـ(١)

$= ١٢ - (-٨) = ٢٠$

* اذا رأيت داخل القوس س لها اس تكويضه

Mathio 2016

ورقة ١٥

* الكلي الأفضل لسؤال المساحة *

* أغلب الطلاب عندهم مشكلة إيجاد حدود س

فكر ١٥ $ع(س) = س - س^{\frac{1}{3}}$ نساويه بالصفر

$س - س^{\frac{1}{3}} = .$ نخرج س عامل مشترك

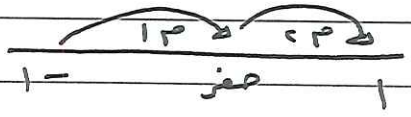
$س(١ - س^{\frac{2}{3}}) = .$ إما $\boxed{س = .}$ أما $١ - س^{\frac{2}{3}} = .$

وتصبح $١ = س^{\frac{2}{3}}$ $س = \pm ١$

مثال ٣ قيم

إذا

مساحة كلية = $١م + ٢م$



* فكر ٢٥ $ص - س = ٦$ ، $ص = س^{٢}$

نرتب هذه المسألة

ونجعلها بدلالة ص

$ص = س + ٦$

ومنه المساحة

$\int_{-٢}^{٣} ((س + ٦) - (س^{٢})) \, دس$

ونكمل الحل

نساوي المعادلتين ببعضهما

$س^{٢} = س + ٦$

$س^{٢} - س - ٦ = .$

$(س - ٣)(س + ٢) = .$

إما $س - ٣ = .$ $س = ٣$

إما $س + ٢ = .$ $س = -٢$

* فكر ٣٥ إذا كان لدينا

اختران ومستقيم

$ص = س^{٣}$ و $س = -١$

نساوي الاختران ص بالصفر

$س^{٣} = .$ جذر تكعيبي

$س = .$

مساحة $= \int س^{٣} \, دس$

-١

ونكمل

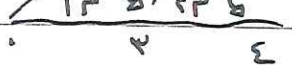
* فكر ٤٥ إذا كان لدينا اختران

ومحور السينات بالفترة

$[٤٦٠]$ $ع(س) = ٦ - ٢س$

$٦ - ٢س = .$

$\frac{٦}{٢} = س$ $\boxed{س = ٣}$

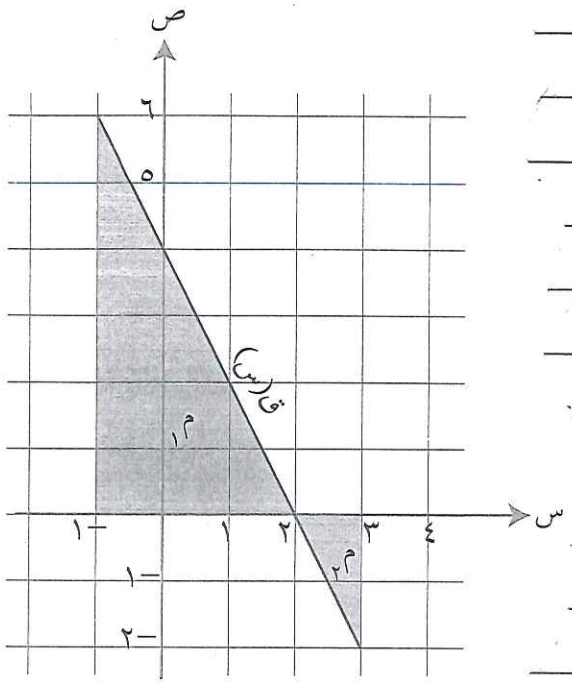


مساحة كلية $= ١م + ٢م$

ونكمل

١٦ ق ١٩

* كيف تجد المساحة من خلال الرسم *



* جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات في الفترة [١-٦]

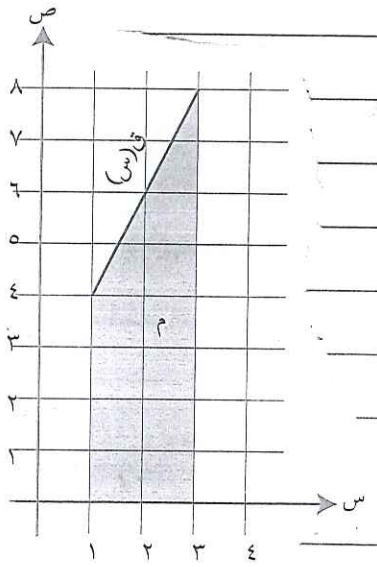
الحل المساحة الكلية = م١ + م٢

م١ = ½ × (٣) × (٦) = ١٨/٢ = ٩
القاعدة × الارتفاع

م٢ = ½ × (١) × ٢ = ٢/٢ = ١

المساحة الكلية = ٩ + ١ = ١٠ وحدات مربعة

* احسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣



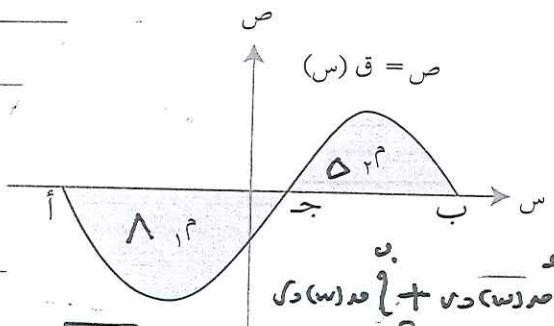
الحل مساحة شبه المنحرف

= ½ × (مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين) × البعد بينهما

= ½ × (٤ + ٨) × ٢

= ١٢ وحدات مربعة

يمثل الشكل (٤-١٠) المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق، ومحور السينات في الفترة [أ ، ب]، فإذا علمت أن مساحة (م١) تساوي (٨) وحدات مربعة، ومساحة (م٢) تساوي (٥) وحدات مربعة، فأوجد $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س$



لأنه طلب بالتكامل $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,د س + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\,د س$

= ٨ - + ٥ = -٣

الوحدة الثانية

ورقة ١٧

* مراجعة سريعة حول الإحصاء والاحتمالات *

* المضروب مثلاً مضروب العدد ٥ = ٥! = ١×٢×٣×٤×٥

احفظ

٠! = ١	١! = ١	٢! = ٢	٣! = ٦
٤! = ٢٤	٥! = ١٢٠	٦! = ٧٢٠	٧! = ٥٠٤٠

* معلومة هامة في حال جد قيمة ن ؟

خارج القوس

٣(ن!) = ٧٢

هنا نقسم ٣ على ٣ (ن!) = ٧٢ / ٣

الطرفين

ن! = ٢٤

ما هي لنون لقي ناتج مضروبها ٢٤

ن = ٤

داخل القوس

(٣ن!) = ٧٢٠

اذا كان العدد داخل القوس نبدأ بتحليل الطرف الثاني

(٣ن!) = ٦

٣ن / ٣ = ٦ / ٣

ن = ٣

* مثال آخر * (ن-١)! = ٢٤ ؟ نحلل الطرف الأيسر

(ن-١)! = ٤!

ومنه ن-١ = ٤

ن = ٥

* جد قيمة كل مما يلي

① ٧! / (٧-٢)! = ٧! / ٥! = ٧×٦×٥! / ٥! = ٤٢

② ن! - ٤! = ٩٦ ← ن! - ٢٤ = ٩٦ ← ن! = ٢٤ + ٩٦

ن! = ١٢٠ ومنه ن = ٥

ورقة ١٨

* التباديل والتوافيق

*** في حال ذكر المسمّى الوظيفي وكان الترتيب مهم (تباديل)

*** في حال لم يلتزم الترتيب مهم او اذا كان السؤال حول اجراء التصفيه النهائيه (التوافيق)

* (التباديل) يحل بطريقتين اما ← بالفرد مثلاً
ل(٣٦٥) = ٣ × ٤ × ٥ = ٦٠
تعني انزل عدد به ٥ ٣ خطوات

← بالقانون ل(ن ٦ ر) = $\frac{\text{ن!}}{(\text{ن}-\text{ر})!}$ مثلاً

ل(٣٦٥) = $\frac{٥!}{٢!}$ = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠

ل(ن ٦ ن) = ن! * ل(ن ٦ ١) = ن * ل(ن ٦ ٠) = ١

حفظ للحل السريع

* التوافيق .. يحل بطريقتين اما ← القانون ١ $\binom{\text{ن}}{\text{ر}}$ = $\frac{\text{ل(ن ٦ ر)}}{\text{ر!}}$

← القانون ٢ $\binom{\text{ن}}{\text{ر}}$ = $\frac{\text{ن!}}{(\text{ن}-\text{ر})! \times \text{ر!}}$

* بالتوافيق اذا كان المجهول تحت $\binom{٨}{٢\text{س}} = \binom{٨}{٦}$ فجد قيم س؟

اما ٢س = ٦ ومنه س = ٣

او ٢س + ٦ = ٨ ← ٢س = ٢ ← س = ١

ضوء $\binom{\text{س}}{٥} = \binom{\text{س}}{٨}$

عندها س = مجموعهم

س = ٥ + ٨

س = ١٣

** $\binom{\text{ن}}{٠} = ١$ / $\binom{\text{ن}}{\text{ن}} = ١$

$\binom{\text{ن}}{١} = \text{ن}$

حفظ للحل السريع

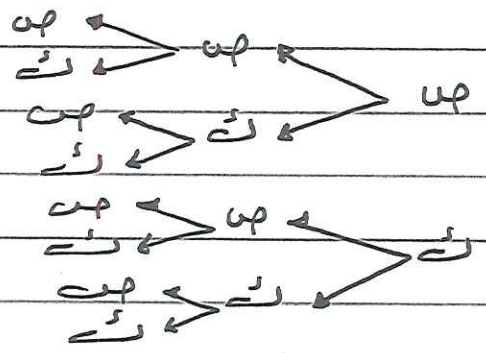
Mathio 2016

** المتغير العشوائي المنفصل * هنا يمكنك حصر قيم لفضاء العينة

مثال توضيحي: اذا دل المتغير العشوائي س على عدد مرات ظهور الصورة عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات فاكتب الفضاء العينة للتجربة، ثم جد قيم س الممكنة؟

الحل لتوضيح مفصل ← استخدم طريقة الشجرة

رمية ١ رمية ٢ رمية ٣



اكتب عناصر فضاء العينة ك

ك = { (ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك) }

لاحظ ان المتغير العشوائي يدل على عدد مرات ظهور الصورة

قيم المتغير العشوائي س = { ٠ --- ن } ← عدد الرميات

س = { ٠، ١، ٢، ٣ }

الاشخاص، الاولاد

جدول التوزيع الاحتمالي

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	١/٨	٣/٨	٣/٨	١/٨

*** قانون توزيع ذي الحدين: ل(س = ر) = $\binom{ن}{ر}$ (م)^{ر} (١ − م)$^{ن-ر}$

حيث م: الاحتمال

ن: العدد الكلي

ر: المطلوب من ن

* يستخدم عندما لا نستطيع حصر قيم الفضاء العينة فمثلاً عدد العمليات الناجحة او عدد العبور... الخ

Mathio 2016

Mathio
2016

وراق ٠

*** العلامة المعيارية ← القانون $ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$

حيث : ز العلامة المعيارية

حيث : س العلامة / القيمة / العلامة المعلمة / العلامة الخام

حيث : $\bar{س}$ الوسط الحسابي و ع الانحراف المعياري

ملاحظة : اذا كان السؤال عن العلامة التي تنحرف فوق الوسط ← ز = +
تحت الوسط ← ز = -

** بالنسبة للانحراف المعياري له قانونان حسب المعطى

$ع = \frac{س - \bar{س}}{ز}$ او $ع = \frac{\text{مجموع العلامات}}{\text{مجموع العلامات المعيارية}}$

* التوزيع الطبيعي * اذا كان معياري ← $\bar{س}$ = صفر ، ع = ١ ، العلامة المعيارية = ز

خواصه

① * ل (ز < م) = نجدها من الجدول مباشرة لانها اقل من عدد موجب

② * ل (ز > م) = ١ - ل (ز < م) بتنقيص واحد ناقص لانها اكبر من عدد موجب

③ * ل (ز < -م) = ل (ز > م) نعكس الاشارة وتصبح اقل من عدد موجب نجدها مباشرة

④ * ل (ز > -م) = ل (ز < م) لانه يعكس الاشارة ثم نتبع القاعدة رقم ②

* معادلة خط الانحدار

$\hat{ص} = م س + ب$

نجد قيمة م من الجدول $م = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2}$

ثم نجد قيمة

$ب = \bar{ص} - م \times \bar{س}$

* اذا كان السؤال تنبأ / قدر ؟ عندها نعوض قيمة س بالمعادلة

* الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقة - القيمة المتنبأ بها
ص - $\hat{ص}$

* معامل ارتباط بيرسون

$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}}$

ورقة (١)

Mathio 2016

السؤال الأول

أ) يبين الجدول الآتي عدد سنوات الخبرة (س) والأجر اليومي (ص) بالدينار لخمسة عمال في إحدى الشركات الصناعية.

* جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص اذا علمت قيم س

عدد سنوات الخبرة (س)	٥	٦	٩	٧	٣
الاجر اليومي بالدينار (ص)	١٦	١٨	٢٢	١٣	١١

الحل

س	ص	س - س̄	ص - ص̄	(س - س̄)(ص - ص̄)	(س - س̄)²
٥	١٦	-١	٠	٠	١
٦	١٨	٠	٢	٠	٠
٩	٢٢	٣	٦	١٨	٩
٧	١٣	١	-٣	-٣	١
٣	١١	-٣	-٥	١٥	٩
٣٠	٨٠			٣٠	٢٠

$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$ $\quad \bar{س} = \frac{٣٠}{٥}$ $\quad \bar{س} = ٦$ $\quad \bar{ص} = \frac{\sum ص}{ن}$ $\quad \bar{ص} = \frac{٨٠}{٥} = ١٦$

نجد قيمة $م = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2}$ ومنه $م = \frac{٣٠}{٢٠}$ اذاً $\boxed{م = \frac{٣}{٢}}$

ثم نجد قيمة $ب = \bar{ص} - م \times \bar{س}$ ، ومنه $ب = ١٦ - \frac{٣}{٢} \times ٦$

$ب = ١٦ - ٩$

$\boxed{ب = ٧}$

المعادلة هي $\hat{ص} = \frac{٣}{٢} س + ٧$

لو كان السؤال: قدر أو تنبأ بالاجر اليومي عندما تكون س = ٤ سنوات الخبرة

$\hat{ص} = \frac{٣}{٢} \times ٤ + ٧$

$= ٦ + ٧ = (١٣)$ دينار

عندها بعوض قيمة س بالمعادلة

لو كان السؤال: جد الخطأ في التنبؤ عندما س = ٦ ؟

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ بها

$= ص - \hat{ص}$

$= ١٨ - (\frac{٣}{٢} \times ٦ + ٧)$

$= ١٨ - (٩ + ٧)$

$= ١٨ - ١٦$

$= \boxed{٢}$

ورقة ٢

Mathio
2016

ب) اذا كان س متغيراً "عشوائياً" يخضع لتوزيع ذي الحدين حيث ن = ٣
ل(س ≥ ١) = $\frac{19}{27}$ ، فجد كلاً مما يأتي :

أ) قيمة م ب) ل(س = ٢)

الحل معلومة ل(س ≥ ١) اول ما 👁 حولها ⇐ ١ - ل(س = ٠)

١ - ل(س = ٠) = $\frac{19}{27}$ ⟸ ل(س = ٠) = ١ - $\frac{19}{27}$ نوحد المقام

$\binom{3}{0}$ $(م)^0$ $(1-م)^3$ = $\frac{8}{27}$ ⟸ $1 \times 1 \times (1-م)^3 = \frac{8}{27}$

عرفت بالعمانون

وضنه $\sqrt[3]{(1-م)^3} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ جذر تكعيبي للطرفين

١ - م = $\frac{2}{3}$ وضنه م = ١ - $\frac{2}{3}$ ⟸ $م = \frac{1}{3}$

ب) ل(س = ٢) = $\binom{3}{2}$ $(\frac{1}{3})^2$ $(\frac{2}{3})^1$ = $\frac{ل(3)(2)(1)}{1 \times 2}$ $\times \frac{1}{9} \times \frac{2}{3}$

= $\frac{3 \times 2}{2} \times \frac{2}{27}$ = $\boxed{\frac{12}{54}}$

ج) اذا كان س متغيراً "عشوائياً" ذا الحدين معاملاه ن = ٢ ، م = ٠٫٣ فجد
١) قيم س الحل س = {٠ ، ١ ، ٢} ، واعلماً من هذه القيم تتواصل بـ

٢) جدول التوزيع الاحتمالي

س	٠	١	٢
ل(س)	٠٫٤٩	٠٫٤٢	٠٫٠٩

ل(٠) = $\binom{2}{0}$ $(٠٫٣)^0$ $(٠٫٧)^2$ = ٠٫٤٩

ل(١) = $\binom{2}{1}$ $(٠٫٣)^1$ $(٠٫٧)^1$ = ٠٫٤٢

ل(٢) = $\binom{2}{2}$ $(٠٫٣)^2$ $(٠٫٧)^0$ = ٠٫٠٩

ملاحظة فكرة م = $\frac{3}{10}$

١ - م = كم ناقص للـ ١ حتى نصير ١ إذا ١ - م = ٠٫٧

مهم

ورقة ٢

Mathio 2016

السؤال الثاني

أ) إذا كان $ل_{٣}(ن^{٢}-٦) = \binom{ن}{٣}$ فما قيمة ن ؟

الحل $ل_{١٣}(ن^{٢}-٦) = \frac{ن \times (ن-١) \times ٢ \times ن}{!٣}$

$$\frac{ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times ن}{٦} = ن \times (ن-١) \times ٢ \times ن$$

$$ن^{٢}-ن = ١٢ \quad \text{ومنه} \quad \boxed{ن = ١٤}$$

ب) مجموعة مكوّنة من (٨) معلمين و (٤) إداريين، أوجد عدد طرق يمكن بها تكوين لجنة ثلاثية بحيث تتكون من معلم واحد على الأقل.

الحل : عدد معلم واحد على الأقل معناها

إما معلم	+ معلمين	+ ثلاثة معلمين

$$\binom{٨}{١}\binom{٤}{٢} + \binom{٨}{٢}\binom{٤}{١} + \binom{٨}{٣}\binom{٤}{٠}$$

$$\frac{!٨}{!١٧} \times \frac{!٤}{!٢ \times !٢} + \frac{!٨}{!٦ \times !٢} \times ٤ + \frac{!٨}{!٣ \times !٥} \times ١$$

$$٤٨ + ١١٢ + ٥٦ = ٢١٦$$

ج) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في مادة الرياضيات (٦٠) والانحراف المعياري لها (٤)، وكانت علامة المعيارية لعلامة الطالب أحمد عادل (-٣) فجد علامة الطالب التي حصل عليها.

الحل $ز = \frac{س - \bar{س}}{ع} \leftarrow -٣ = \frac{س - ٦٠}{٤} \leftarrow -١٢ = س - ٦٠$

(خواص التبادل)

$$\boxed{س = ٤٨}$$

Mathio 2016

د) المجموعة (أ) مكونة من خمسة طلاب ، والمجموعة (ب) مكونة من ستة معلمين ، بكم طريقة يمكن من خلالها اختيار طالبين من المجموعة (أ) لجنة ، ورئيس ومساعد رئيس لمرافقة بعثة من المجموعة (ب)

الحل $(٥ ، ٢) \times ل(٦ ، ٢) \leftarrow ٥ \times ٦ \times \frac{ل(٥ ، ٢)}{ل(٢ ، ٢)} \leftarrow ٥ \times ٦ \times \frac{٤ \times ٥}{١ \times ٢}$

$= \boxed{٣٠٠}$

هـ) قررت احدى الشركات رفض اي شحنة من المواد التي تشتريها من مورد ما ، اذا تبين وجود واحد معيب او اكثر في عينة عشوائية مكونة من (١٠) وحدات ، فاذا كانت نسبة المعيب في شحنة من ذلك المورد (١٠٪) ، فجد احتمال ؟

① احتمال قبول الشحنة = ل (س ≤ ١) = ل (س = ١) + ل (س = ٠)

$\left(\frac{١٠}{١}\right)(٠٫١)^{١}(٠٫٩)^{٩} + \left(\frac{١٠}{٠}\right)(٠٫١)^{٠}(٠٫٩)^{١٠}$

حيث ن = ١٠

م = ٠٫١

ومنه ١ - م = ٠٫٩

② احتمال رفض الشحنة = ل (س ≥ ٢) = ١ - [ل (س = ١) + ل (س = ٠)]

١ - (ناتج فرع ①)

و) اذا كان ع ل (٦ ، ر) = ٤٨٠ فجد قيمة ر

الحل نقسم الطرفين على ل (٦ ، ر) = ١٢٠

انزل عاملين ٦ ← ٦ × ٥ × ٤

$٤ \times ٣ = ١٢٠$ ✓ يعني نزلت ٣ خطوات

ر = ٣

ورقة ٥

Mathio 2016

السؤال الثالث

أ) ثلاثة طلاب أ ، ب ، جـ في أحد الصفوف ، علاماتهم المعيارية ٢ ، ١ ، ٠٫٧٥ على الترتيب والوسط الحسابي لعلامات طلبة الصف جميعهم (٦٨) ، والفرق بين علامتي أ ، جـ هو (١٠) ، فجد

* الانحراف المعياري لعلامات طلبة الصف ؟

	أ	ب	جـ
ز :	٢	١	٠٫٧٥
س :	؟	؟	؟

فرق = ١٠

ع = فرق العلامات / فرق العلامات المعيارية

ع = ١٠ / (٢ - ٠٫٧٥)

ع = ١٠ / ١٫٢٥

ع = ٨

* العلامات الفعلية للطلبة أ ، ب ، جـ ؟

ز = (س - س̄) / ع

أ ← ٢ = (س - ٦٨) / ٨ ← ١٦ = س - ٦٨ ← س = ٦٨ + ١٦ ← س = ٨٤

ب ← ١ = (س - ٦٨) / ٨ ← ٨ = س - ٦٨ ← س = ٦٨ + ٨ ← س = ٧٦

جـ ← ٠٫٧٥ = (س - ٦٨) / ٨ ← ٦ = س - ٦٨ ← س = ٦٨ + ٦ ← س = ٧٤

* علامة الطالب ؟ التي تنحرف الحرافيتة معيار سالبة تحت الوسط الحسابي ؟

الحل هنا يريد قيمة س ودليل ز = -٢

ز = (س - س̄) / ع ← -٢ = (س - ٦٨) / ٨ ← -١٦ = س - ٦٨ ← س = ٦٨ - ١٦

س = ٥٢

Mathio
2016

ب) أكمل الجدول المجاور لحساب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص

س	ص	س − س̄	ص − ص̄	(س − س̄)(ص − ص̄)	(س − س̄)²	(ص − ص̄)²
٨	٦	١	٠	٠	١	٠
٧	٥	٠	−١	٠	٠	١
٦	٧	−١	١	−١	١	١
٩	٨	٢	٢	٤	٤	٤
٥	٤	−٢	−٢	٤	٤	٤
٣٥	٢٥			٧	١٠	١٠

$س̄ = \frac{مجـ س}{ن}$ $س̄ = \frac{٣٥}{٥}$ $س̄ = ٧$

$ص̄ = \frac{مجـ ص}{ن}$ $ص̄ = \frac{٢٥}{٥}$ $ص̄ = ٥$

علماً بأن $ر = \frac{\sum_{ي=١}^{ن}(س_ي - س̄)(ص_ي - ص̄)}{\sqrt{\sum_{ي=١}^{ن}(س_ي - س̄)^٢ \sum_{ي=١}^{ن}(ص_ي - ص̄)^٢}}$

ومنه $ر = \frac{٧}{\sqrt{١٠ \times ١٠}}$

$\boxed{ر = \frac{٧}{١٠}}$

ج) إذا كانت رواتب (١٠٠٠٠) موظف في إحدى الوزارات تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٣٠٠) دينار شهرياً، وانحراف معياري (١٠) دنانير، فما عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين ٢٨٠ ديناراً و٣٢٠ ديناراً ؟

ملاحظة: يمكن الاستعانة بالجدول المجاور.

ز	٣٠	٢,٥	٢	١,٥	٠,٢
ل (ز)	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٣٨	٠,٩٧٧٢	٠,٩٣٣٢	٠,٥٧٩٣

الحل

تنحصر = بين

ل (٢٨٠ ≤ س ≤ ٣٢٠)

* $ز = \frac{٢٨٠ - ٣٠٠}{١٠}$ $ز = \frac{-٢٠}{١٠}$

$\boxed{ز = -٢}$

* $ز = \frac{٣٢٠ - ٣٠٠}{١٠}$ $ز = \frac{٢٠}{١٠}$

$\boxed{ز = ٢}$

ل (−٢ ≤ ز ≤ ٢)

= ل (ز ≤ ٢) − ل (ز ≤ −٢)

= ٠,٩٧٧٢ − ل (ز ≤ ٢)

= ٠,٩٧٧٢ − [١ − ل (ز ≤ ٢)] ⇐ ٠,٩٧٧٢ − [١ − ٠,٩٧٧٢]

= ٠,٩٧٧٢ − ٠,٠٢٢٨

= ٠,٩٥٤٤

* عدد الموظفين = ٠,٩٥٤٤ × ١٠٠٠٠

= ٩٥٤٤ موظفا

ورقة ٢٧

Mathio 2016

ج) إذا كانت أوزان ١٠٠٠٠ طالب تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٤٥) كغ وانحراف معياري (٤) كغ ، ما عدد الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن (٥٠) كغ ؟

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي :

ز	٠,٢٥	٢,٥	١,٢	١,٢٥	١,٥٢	٠,٨
ل(ز)	٠,٥٩٨٧	٠,٩٩٣٨	٠,٨٨٤٩	٠,٨٩٤٤	٠,٩٣٥٧	٠,٧٨٨١

الحل

ل (س ≥ ٥٠)

$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ $ز = \frac{٥٠ - ٤٥}{٤}$

$ز = \frac{٥}{٤}$ $ز = ١,٢٥$

ل (ز ≥ ١,٢٥)

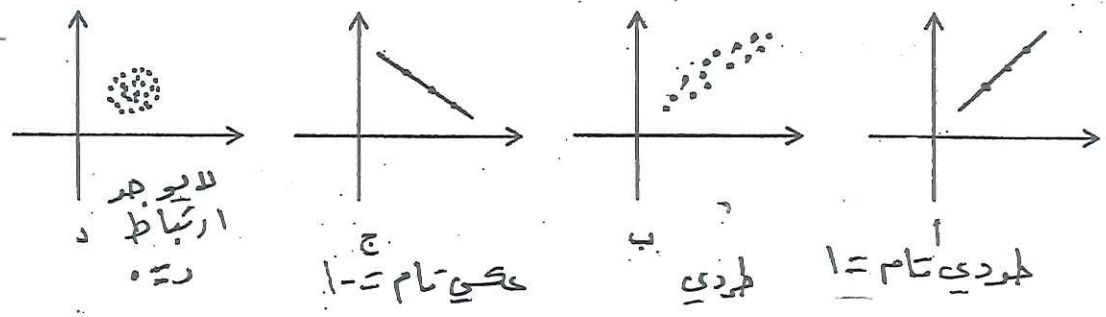
ونصبح ١ - ل (ز ≤ ١,٢٥)

١ - ٠,٨٩٤٤

= ٠,١٠٥٦

* عدد الطلبة = ٠,١٠٥٦ × ١٠٠٠٠ = ١٠٥٦ طالب

هـ) (٨) الشكل الممثل للارتباط بين المتغيرين س ، ص



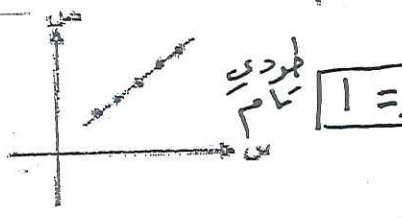
و) أجب عن السؤالين الآتيين :

١) بكم طريقة يمكن أن تجلس أربع طالبات على أربعة مقاعد موضوعة في صف واحد ؟

ل (٤٦٤) = ١٤

= ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤!

٢) إذا مثلت العلاقة بين المتغيرين س ، ص في شكل الانتشار المجاور حيث وقعت جميع النقاط على خط مستقيم، اكتب قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص .



ر = ١