الإبداع في الرياضيات
إعداد المعلم: محمد حجازي
هاتف: 0781794860

أسئلة مراجعة للوحدة الثانية
"التفاضل"

السؤال الأول:-

ا) إذا كان متوسط التغير للاقتران هـ(س) في الفترة [١، ٣] يساوي (٥) وكان هـ(١) × هـ(٣) = ١٠ وكان هـ(س) = $\frac{١}{هـ(س)}$ فجد متوسط التغير للاقتران هـ(س) في الفترة نفسها

الحل:-

متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $\frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١} = \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٢}$

$= \frac{\frac{١}{هـ(٣)} - \frac{١}{هـ(١)}}{٢}$ نوحد مقامات

$= \frac{هـ(١) - هـ(٣)}{٢ \times (هـ(٣) \times هـ(١))}$

نجد هـ(١) - هـ(٣) من متوسط التغير لـ هـ(س)

متوسط التغير لـ هـ(س) = $\frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١} = ٥$

∴ هـ(٣) - هـ(١) = ١٠

وعكسه هـ(١) - هـ(٣) = -١٠

∴ متوسط التغير لـ هـ(س) = $\frac{-١٠}{٢ \times ١٢} = \frac{-١٠}{٢٤} = \frac{-٥}{١٢}$

٢- جد مستخدماً التعريف للمشتقة الأولى قـ(س) للاقترانات التالية

أ) قـ(س) = $\frac{1}{\sqrt{٥س+٣}}$ حيث س > $-\frac{٣}{٥}$

الحل : قـ(س) = نـ$_{ع \to س}$ $\frac{\frac{1}{\sqrt{٥ع+٣}} - \frac{1}{\sqrt{٥س+٣}}}{ع-س}$ نوحد مقامات

= نـ$_{ع \to س}$ $\frac{\sqrt{٥س+٣} - \sqrt{٥ع+٣}}{(\sqrt{٥ع+٣})(\sqrt{٥س+٣})(ع-س)} \times \frac{\sqrt{٥س+٣} + \sqrt{٥ع+٣}}{\sqrt{٥س+٣} + \sqrt{٥ع+٣}}$

= نـ$_{ع \to س}$ $\frac{٥س+٣ - ٥ع-٣}{(\sqrt{٥ع+٣})(\sqrt{٥س+٣})(ع-س)(\sqrt{٥س+٣} + \sqrt{٥ع+٣})}$ × نـ$_{ع \to س}$ $\frac{1}{\sqrt{٥س+٣} + \sqrt{٥ع+٣}}$

= نـ$_{ع \to س}$ $\frac{-٥(س-ع)}{(\sqrt{٥ع+٣})(\sqrt{٥س+٣})(ع-س)}$ × نـ$_{ع \to س}$ $\frac{1}{\sqrt{٥س+٣} + \sqrt{٥ع+٣}}$

$= \frac{-٥}{(٥س+٣) \times ٢\sqrt{٥س+٣}} = \frac{-٥}{٢(٥س+٣)^{\frac{3}{2}}}$

ب) قـ(س) = ظا٣س

ظا أ - ظا ب = ظا(أ-ب)(١+ظا أ ظا ب)

الحل : قـ(س) = نـ$_{ع \to س}$ $\frac{ظا٣ع - ظا٣س}{ع-س}$

= نـ$_{ع \to س}$ $\frac{ظا(٣ع-٣س)(١+ظا٣ع ظا٣س)}{ع-س}$

← تابع الحل .

تابع ٢- ب

$$= \text{نـ}_{\text{ع} \to \text{ك}} \frac{\text{ظا}(2\text{ع}^2 - 3\text{ك}^2)}{\text{ع} - \text{ك}} \times \text{نـ}_{\text{ع} \to \text{ك}} (1 + \text{ظا}^3 \text{ع}^2 \text{ظا}^3 \text{ك}^2)$$

$$= \text{نـ}_{\text{ع} \to \text{ك}} \frac{\text{ظا}\,3(\text{ع}^2 - \text{ك}^2)}{\text{ع} - \text{ك}} \times \text{نـ}_{\text{ع} \to \text{ك}} (1 + \text{ظا}^3 \text{ع}^2 \text{ظا}^3 \text{ك}^2)$$

↑ لاحظ الزاوية غير حفظية نضرب البسط والمقام بالزاوية نفسها

× (انتبه أنه تحلل داخل الزاوية ونختصر) ×

$$= \text{نـ}_{\text{ع} \to \text{ك}} \frac{\text{ظا}\,3(\text{ع}^2 - \text{ك}^2)}{\text{ع} - \text{ك}} \times \frac{\text{ع}^2 - \text{ك}^2}{\text{ع}^2 - \text{ك}^2} \times \text{نـ}_{\text{ع} \to \text{ك}} (1 + \text{ظا}^3 \text{ع}^2 \text{ظا}^3 \text{ك}^2)$$

$$= \text{نـ}_{\text{ع} \to \text{ك}} \frac{\text{ظا}\,3(\text{ع}^2 - \text{ك}^2)}{\text{ع}^2 - \text{ك}^2} \times \text{نـ}_{\text{ع} \to \text{ك}} \frac{\text{ع}^2 - \text{ك}^2}{\text{ع} - \text{ك}} \times (1 + \text{ظا}^3 \text{ك}^2)$$

$\text{ص} = \text{ع}^2 - \text{ك}^2$

ع $\to$ ك فإن ص $\to$ صفر

$$\text{نـ}_{\text{ص} \to \text{صفر}} \frac{\text{ظا}\,3\text{ص}}{\text{ص}} \times \text{نـ}_{\text{ع} \to \text{ك}} \frac{(\text{ع} - \text{ك})(\text{ع} + \text{ك})}{\text{ع} - \text{ك}} \times (1 + \text{ظا}^3 \text{ك}^2)$$

$$3 \times 2\text{ك} \times (1 + \text{ظا}^3 \text{ك}^2) = 6\,\text{ك}\,\text{ظا}^3 \text{ك}^2$$

جـ) $\text{هـ}(\text{س}) = \text{ك}^2 \text{جا}\,\text{س}$

$$\text{هـ}'(\text{س}) = \text{نـ}_{\text{ع} \to \text{ك}} \frac{\text{هـ}(\text{ع}) - \text{هـ}(\text{ك})}{\text{ع} - \text{ك}}$$

$$\text{هـ}'(\text{س}) = \text{نـ}_{\text{ع} \to \text{ك}} \frac{\text{ع}^2 \text{جا}\,\text{ع} - \text{ك}^2 \text{جا}\,\text{ك}}{\text{ع} - \text{ك}}$$

نقوم باستخدام المطرح وإضافة وطرح ونضيف $\text{ك}^2 \text{جا}\,\text{ع}$

$$\text{هـ}'(\text{س}) = \text{نـ}_{\text{ع} \to \text{ك}} \frac{\text{ع}^2 \text{جا}\,\text{ع} - \text{ك}^2 \text{جا}\,\text{ع} + \text{ك}^2 \text{جا}\,\text{ع} - \text{ك}^2 \text{جا}\,\text{ك}}{\text{ع} - \text{ك}}$$

← تابع الحل

تابع ۷- ج

$$= \lim_{ع \to ك} \frac{ع^{ن} \text{جا} ع - ك^{ن} \text{جا} ك}{ع - ك} + \lim_{ع \to ك} \frac{ك^{ن} \text{جا} ع - ك^{ن} \text{جا} ك}{ع - ك}$$

$$= \lim_{ع \to ك} \frac{ع^{ن} \text{جا} ع - ك^{ن} \text{جا} ك}{ع - ك} + \lim_{ع \to ك} \frac{ك^{ن} (\text{جا} ع - \text{جا} ك)}{ع - ك}$$

$$= \lim_{ع \to ك} \frac{ع^{ن} \text{جا} ع - ك^{ن} \text{جا} ك}{ع - ك} + \lim_{ع \to ك} ك^{ن} \left(2 \text{جتا} \frac{ع + ك}{2} \text{جا} \frac{ع - ك}{2} \right)$$

$$= \text{ك}^{ن} \text{جا} ك + \lim_{ع \to ك} ع^{ن} \text{جتا} \frac{ع + ك}{2} \times \lim_{ع \to ك} \frac{\text{جا} \frac{ع - ك}{2}}{\frac{ع - ك}{2}}$$

ص = $\frac{ع - ك}{2}$ ، ص $\to$ صفر عندما ع $\to$ ك

$$= \text{ك}^{ن} \text{جا} ك + \text{ك}^{ن} \text{جتا} ك \times \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا} ص}{ص}$$

$$= \text{ك}^{ن} \text{جا} ك + \text{ك}^{ن} \text{جتا} ك \times 1$$

$$= \text{ك}^{ن} \text{جا} ك + \text{ك}^{ن} \text{جتا} ك \quad \#$$

5- $\text{مد}(س) = \frac{ك^{س}}{1 - س}$ ، $س \neq 1$

الحل $\text{مد}(س) = \lim_{ع \to ك} \frac{\frac{ع^{س}}{1 - ع} - \frac{ك^{س}}{1 - ك}}{ع - ك}$ نوحد المقامات

$$= \lim_{ع \to ك} \frac{ع^{س}(1 - ك) - ك^{س}(1 - ع)}{(1 - ع)(1 - ك)(ع - ك)}$$

$$= \lim_{ع \to ك} \frac{ع^{س} - ع^{س} ك - ك^{س} + ك^{س} ع}{(1 - ع)(1 - ك)(ع - ك)}$$

$$= \lim_{ع \to ك} \frac{ع^{س} - ك^{س}}{(1 - ع)(1 - ك)(ع - ك)} + \lim_{ع \to ك} \frac{ك^{س} ع - ع ك^{س}}{(ع - ك)(1 - ع)(1 - ك)}$$

$$= \lim_{ع \to ك} \frac{(ع - ك)(ع^{س - 1} + \dots + ك^{س - 1})}{(1 - ع)(1 - ك)(ع - ك)} + \lim_{ع \to ك} \frac{ع ك^{س} (ع - ك)}{(ع - ك)(1 - ع)(1 - ك)}$$

$$= \frac{ك^{س}}{(1 - ك)^{2}} - \frac{ك^{س}}{(1 - ك)^{2}} = \frac{ك^{س} - ك^{س}}{(1 - ك)^{2}}$$

#

(٩

٣- ده (س) = س^{٣} - ٤س - ١١ فجد ده (١) مستخدماً التعريف

الحل :- نقوم بإعادة التعريف لإقتران القيمة المطلقة حيث س - ١ = ٠ نتحول (نذهب للستة من اليمين والسار)

+	−	+
	١	

ده (س) = { ع س^{٣} - (٣ك-١) س ، س ≥ ١
ل س^{٣} - (١-٣ك) س ، س < ١

ده (س) = { ع س^{٣} - ك + ١ ، س ≥ ١
ل س^{٣} - ١ + س ، س < ١

ده (١) = $\lim_{ع \to ١^{+}}$ $\frac{ع^{٣} - ١ + ع - ١}{ع - ١}$

$= \lim_{ع \to ١^{+}}$ $\frac{ع^{٣} + ع - ٢}{ع - ١}$

$= \lim_{ع \to ١^{+}}$ $\frac{(ع - ١)(ع + ٢)}{ع - ١}$ = ٣

ده (١) = $\lim_{ع \to ١^{-}}$ $\frac{ع^{٣} - ع - ١ + ١}{ع - ١}$

$= \lim_{ع \to ١^{-}}$ $\frac{ع^{٣} - ع}{ع - ١}$

$= \lim_{ع \to ١^{-}}$ $\frac{ع(ع-١)(ع+١)}{ع - ١}$ = ١

∴ ده (١) غير موجودة حيث ده (١) ≠ ده (١)

ب) ده (س) = [٣ك + ٠,٣] ، فجد ده (٠,٥) مستخدماً التعريف
، وجد ده (٠,٣٥) مستخدماً التعريف

١) ده (٠,٥) ل = $\frac{١}{٢}$

٣ك + ٠,٣ = صفر
س = -٠,١

٠,١٥ ، ٠,٣٥ ، ٠,٨٥ ، ١

نقطة عادية ٠,٥

$= \lim_{ع \to ٠,٥^{+}}$ $\frac{ده (ع) - ده (٠,٥)}{ع - ٠,٥}$

$= \lim_{ع \to ٠,٥^{-}}$ $\frac{١ - ١}{ع - ٠,٥}$ = صفر (موجودة)

ده (س) = ع ١ ، ٠,٣٥ ≤ س < ٠,٨٥

لاحظ س = ٠,٥ نقطة عادية

← تابع الحل لفرع (٢)

ب- ٢) $ه_{١}(س) = [\ ٢ك + ٣٠,٠\ ]$ $ل = \frac{١}{٢}$

$س = -١٥,٠$

لاحظ $س = ٣٥,٠$ نقطة تحول

$ه_{+}(٣٥,٠) = ز_{ك} \frac{ه(ع) - ه(٣٥,٠)}{ع - ٣٥,٠}$ $ع \to ٣٥,٠$

$= ز_{ك} \frac{١ - ١}{ع - ٣٥,٠}$ $ع \to ٣٥,٠$ $= صفر$

$ه(س) = \begin{cases} ع & ٠ \\ ١ & \end{cases}$ $\begin{matrix} -١٥,٠ \le س < ٣٥,٠ \\ ٣٥,٠ \le س < ٨٥,٠ \end{matrix}$

$ه_{-}(٣٥,٠) = ز_{ك} \frac{ه(ع) - ه(٣٥,٠)}{ع - ٣٥,٠}$ $ع \to ٣٥,٠$

$= ز_{ك} \frac{ع - ١}{ع - ٣٥,٠}$ $ع \to ٣٥,٠$ $= \frac{-١}{صفر}$ غير موجودة

$\therefore ه(٣٥,٠)$ غير موجودة

٣- جـ $ه(س) = |\ س^{٢} |\ [س]$ حيث $ه(٠)$ مستمرة

تذكر $|\ س^{٢}| = س^{٢}$ نعيد التعريف $[س]$

$ه(س) = \begin{cases} ع\ س^{٢}(-١) & -١ \le س < صفر \\ س^{٢}(٠) & صفر \le س < ١ \end{cases}$

$ه_{+}(٠) = ز_{ك} \frac{صفر - صفر}{ع - صفر}$ $ع \to صفر$

$ه_{-}(٠) = ز_{ك} \frac{-ع^{٢} - صفر}{ع - صفر}$ $ع \to صفر$ $= صفر$

$\therefore ه_{+}(٠) = ه_{-}(٠)$ موجودة $= صفر$

٣-ى- إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٦ك - ٢ & ١ \leq س < ٢ \\ \sqrt{س+٢} & ٢ \leq س \leq ١٠ \end{cases}$

فجد $ق(س)$ مستخدماً التعريف

الحل:- نشتق كل قاعدة باستخدام التعريف

$٦ س - ٢ \quad ١ \leq س < ٢$

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{٦ك - ٢ - ٦س + ٢}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٦(ع - س)}{ع - س} = ٦$$

$\sqrt{س+٢} \quad ٢ \leq س \leq ١٠$

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع+٢} - \sqrt{س+٢}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{ع+٢} + \sqrt{س+٢}}{\sqrt{ع+٢} + \sqrt{س+٢}}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع + ٢ - س - ٢}{ع - س} \times \lim_{ع \to س} \frac{١}{\sqrt{ع+٢} + \sqrt{س+٢}}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} \times \lim_{ع \to س} \frac{١}{\sqrt{ع+٢} + \sqrt{س+٢}}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{س+٢}}$$

$\therefore ق'(س) = \begin{cases} ٦ & ١ < س < ٢ \\ \frac{١}{٢\sqrt{س+٢}} & ٢ < س < ١٠ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ ، س = ١٠ \end{cases}$

* لاحظ أن المشتقة عند الأطراف غير موجودة دائماً

تابع الحل ←

عند س = ج نقطة تحول

$$\text{هـ}(ج) = \lim_{ع \to ج^+} \frac{\sqrt{ع + ج} - ج}{ع - ج} \times \frac{\sqrt{ع + ج} + ج}{\sqrt{ع + ج} + ج}$$

$$\text{هـ}_+(ج) = \lim_{ع \to ج^+} \frac{ع + ج - ج}{(ع - ج)(\sqrt{ع + ج} + ج)} = \lim_{ع \to ج^+} \frac{1}{\sqrt{ع + ج} + ج}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ج + ج} + ج} = \frac{1}{2ج}$$

$$\text{هـ}(ج) = \lim_{ع \to ج} \frac{6ع - ج - ج}{ع - ج} = \frac{5}{\text{صفر}}$$ غير موجودة

أو عين الكل عند س = ج باستخدام العلاقة بين الاشتقاق والاتصال

حيث $\lim_{س \to ج^+}$ هـ(س) + $\lim_{س \to ج^-}$ هـ(س) غير موجودة

∴ غير متصل عند س = ج

∴ بالتالي هـ(ج) غير موجودة

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} 3 - س & ، \ س < 1 \\ [س] + 3 & ، \ 1 \leq س < 2 \end{cases}$$

نجد هـ(1) مستخدماً التعريف

تذكّر: عند إثبات عدم التشعب باستخدام التعريف فإنه البحث في الاتصال عند نقاط التحول اختياري أما باستخدام القواعد فهو إجباري أنه ينبحث في الاتصال للتحول قبل أنه نشتقه

الإبداع في الرياضيات

إعداد المعلم: صلاح الجاسمي

صلاح

678/79048

- السؤال الثاني :-

أ) إذا كانت التغير في الاقتران $ق(س)$ يساوي

$$٢ك\ \Delta س + (\Delta س)^{٢}$$

فجد $\lim_{\Delta س \to صفر} \frac{\Delta ص}{ق(١+\Delta س) - ق(١)}$

لاحظ أن المطلوب هو $\frac{١}{ق'(١)}$

والمعطى هو التغير في الاقتران $ق(س)$ أي $\Delta ص$

$\therefore \Delta ص = ٢ك\ \Delta س + (\Delta س)^{٢}$

كي نحصل على المشتقة نقسم

$$ق'(س) = \lim_{\Delta س \to صفر} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$ق'(س) = \lim_{\Delta س \to صفر} \frac{٢ك\ \Delta س + (\Delta س)^{٢}}{\Delta س}$$

$$ق'(س) = \lim_{\Delta س \to صفر} \frac{\Delta س (٢ك + \Delta س)}{\Delta س} = ٢ك$$

$\therefore ق'(١) = ٢$ ومنه $\frac{١}{ق'(١)} = \frac{١}{٢}$ #

ب) إذا كان $ق$ اقترانا قابلا للاشتقاق عند $س = ١$

وكانت $\lim_{ه \to صفر} \frac{ق(١+ه)}{ه} = ٥$ فجد $ق(١) + ق'(١)$

الحل بما أن النهاية موجودة ونهاية المقام $= صفر$

$\therefore \lim_{ه \to صفر} ق(١+ه) = صفر$ ومنه $\lim_{ه \to صفر} ق(١+٠) = صفر$ $\therefore ق(١) = صفر$

← تابع الحل ← ← ← ← ←

ولنجد $ه'(1)$

$ه'(1) = \lim_{ه \to 0} \frac{ه(1+ه) - ه(1)}{ه}$ ← أوجدناها $ه(1) = ه$

$ه'(1) = \lim_{ه \to 0} \frac{ه(1+ه) - 0}{ه}$ ← بفرض أنه يساوي 0

$\therefore ه'(1) = 0$

$\therefore ه(1) + ه'(1) = ه + 0 = ه$

ج) إذا كان $ه(أ+ب) = ه(أ) \times ه(ب)$ لكل $أ، ب \in ح$ وكان $ه(1) = ه'(0) = 1$

فأثبت أن $ه'(س) = ه(س)$

الحل:- $ه'(س) = \lim_{ه \to 0} \frac{ه(س+ه) - ه(س)}{ه}$

$ه'(س) = \lim_{ه \to 0} \frac{ه(س) \times ه(ه) - ه(س)}{ه}$

$ه'(س) = \lim_{ه \to 0} \frac{ه(س)(ه(ه) - 1)}{ه}$ بفرض أنه $ه'(0) = 1$

$ه'(س) = \lim_{ه \to 0} ه(س) \left(\frac{ه(ه) - ه(0)}{ه} \right)$ $\lim_{ه \to 0} \frac{ه(ه) - ه(0)}{ه - 0} = ه'(0)$

$ه'(س) = \lim_{ه \to 0} ه(س) \times \lim_{ه \to 0} \frac{ه(ه) - ه(0)}{ه - 0}$

$ه'(س) = ه(س) \times ه'(0) \Rightarrow ه'(1) = 1$

وعليه $ه'(س) = ه(س)$

#

٥- إذا كان $هـ(س)$ يحقق الشروط التالية لكل $س، ص \in ح$ حيث

١) $هـ(س+ص) = هـ(س) \times هـ(ص)$

٢) $هـ(س) = ١ + س ل(س)$

٣) $\lim_{س \to ٠} ل(س) = ١$

فأثبت أن $هـ'(س) = هـ(س)$

السؤال الثالث :

٩- إذا كان $هـ(س) = |س^٣ - ٤س^٢ + ٣س|$ حيث $س \in [-١، ٤]$

فجد $هـ(س)$

الحل: نعيد تعريف القيمة المطلقة $س^٣ - ٤س^٢ + ٣س = صفر$

$س(س-١)(س-٣) = صفر$

$س = ٠$ أو $س = ١$ أو $س = ٣$

	+	٠	−	١	+	٣	+	
		صفر		صفر		صفر		
−١								٤

$هـ(س) = \begin{cases} س^٣ - ٤س^٢ + ٣س & -١ \le س \le ٠ \\ -س^٣ + ٤س^٢ - ٣س & ٠ < س < ١ \\ س^٣ - ٤س^٢ + ٣س & ١ \le س < ٣ \\ -س^٣ + ٤س^٢ - ٣س & ٣ \le س \le ٤ \end{cases}$

$هـ'(س) = \begin{cases} ٣س^٢ - ٨س + ٣ & -١ < س < ٠ \\ -٣س^٢ + ٨س - ٣ & ٠ < س < ١ \\ ٣س^٢ - ٨س + ٣ & ١ < س < ٣ \\ -٣س^٢ + ٨س - ٣ & ٣ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} & س = -١، ٤ \\ \text{صفر} & س = \text{صفر} \end{cases}$

عند $س = -١، ٤$ $هـ(س)$ غير موجودة لأن $ك_١ \neq ك_٢$

عند $س = ٣$ نقسم لحول

$هـ(٣) = \lim_{س \to ٣^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٣^-} هـ(س)$ متصل عند $س = ٣$ $\quad هـ'(٣^+) = ١٦ \neq هـ'(٣^-) = ٨$

$هـ(٣)$ غير موجودة

← تابع الحل ←

تابع ق. عند س = جتا نقطة تحول

ده (س) متصل عند س = ٠ حيث ده (٠) = نهـ ده (س) = نهـ ده (س) = جتا
س → جتا⁺ س → جتا⁻

كما أنه ده (٠) = ده (٠) = جتا ∴ قابل عند س = جتا للإشتقاق

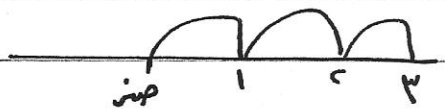
+

ب) ده (س) = [س + ٣] حيث س ∈ [٠ ، ٣٦٠]

أجد ده (س)

الحل :- نعيد تعريف الدالة أكبر عدد صحيح

ل = ١



ده (س) = { ٣ ، ٠ ≤ س < ١
٤ ، ١ ≤ س < ٢
٥ ، ٢ ≤ س < ٣
٦ ، س = ٣

ده (س) = { ٠ ، جتا ≤ س < ١
٠ ، ١ ≤ س < ٢
٠ ، ٢ ≤ س < ٣
غير موجودة ، س = ١ ، ٢ ، ٣

لاحظ أن س = جتا لأنها خارج المجال

ده (٢) غير موجودة لأنها طرف

س = ١ ، ٢ نقاط تحول ده (س) غير متصل عندها .

جـ) جد هَـ (س) عند النقط المبينة إزاء كل منها

١) هـ (س) = $\frac{[\frac{س}{٢}+١]}{س+٣}$ فجد هَـ (٣)

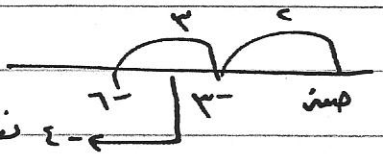
ل = ٢ (عدد زوجي نقطة عادية تأخذ القاعدة المقابلة)

∴ هـ (س) = $\frac{٢}{س+٣}$

هَـ (س) = $\frac{-٢ \times ١}{(س+٣)^{٢}}$ ⇐ هَـ (٣) = $\frac{-٢}{٣٦}$ = $\frac{-١}{١٨}$

٢) هـ (س) = $-س^{٢}[\frac{س}{٣}-٢]+١$ فجد هَـ (-٤)

ل = ٣



-٤ نقطة عادية

∴ هـ (س) = $-س^{٢} \times ٣ + ١$

هـ (س) = $-٣س^{٢}+١$

هَـ (س) = $-٦س$ ⇐ هَـ (-٤) = -٢٤

٣) هـ (س) = $٣س^{٢}+[س+٠,٦]$ فجد هَـ (٠,٤)

ل = ١ $[س+٠,٦]$

س = -٠,٦

← تحول نكتب قاعدة الاقتران ثم نبحث في الاتصال

هـ (س) = $\begin{cases} ٣س^{٢}+٠ & -٠,٦ \leq س < ٠,٤ \\ ٣س^{٢}+١ & ٠,٤ \leq س < ١,٤ \end{cases}$

عند س = ٠,٤ هـ (س) غير متصل عند س = ٠,٤ ∴ هَـ (٠,٤) غير موجودة

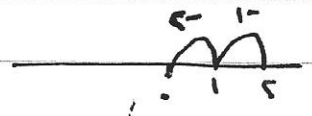
٤- $ق(س) = |س-1| - [س-2] + |س|$ فجد ق(١)

الحل :-

$|س-1| = 0$ ⇒ $س = 1$

$[س-2]$

$ل = 1$



$|س| = صفر$

$س = صفر$

دائماً نكتب فترة الاستمرار الأكثر شمولاً وضموماً وصحيح فترة الصحيح في هذا السؤال

$ق(س) = \begin{cases} (1-س)-(-2)+س & ، 0 \le س < 1 \\ (س-1)-(-1)+س & ، 1 \le س < 2 \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} 3 & ، 0 \le س < 1 \\ 2س & ، 1 \le س < 2 \end{cases}$

لاحظ ق(س) غير متصل عند $س = 1$

حيث $\lim_{س \to 1^+} ق(س) = 2$

$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = 3$

∴ ق(س) غير موجودة.

٥- $ق(س) = |س-1| + 2$

فجد ق(٠) ، ق'(٠) ، ق''(٠) ، $ق^{(4)}$(٠) ، $ق^{(n)}$(٠)

تذكر إذا كانت إحدى المشتقات غير موجودة فجميع المشتقات التي تليها غير موجودة أيضاً

٦- $ه(س) = \begin{cases} ح[س+٢,٠] & ١ < س < ٢ \\ |٣ك+١| & ٢ \leq س \leq ٤,٠ \end{cases}$

فجد $ه(س)$ عند $س = ٢$

٧- $ه(س) = [س+٥] - [س] - |٣ك|$ حيث $س \in (٧,٠ ، ٣)$ فجد $ه(٤)$

٤- إثباتات

١) إذا كان $ه(س) = (س-أ)(س-ب)(س-جـ)$

فأثبت أنه $\frac{ه(س)}{ه'(س)} = \frac{١}{س-أ} + \frac{١}{س-ب} + \frac{١}{س-جـ}$

الحل: $ه(س) = (س-أ)(س-ب) \times ١ + (س-ب)(س-أ) \times ١ + (س-جـ)(س-أ) \times ١ + (س-ب)(س-جـ)$

$\therefore ه(س) = (س-أ)(س-ب) + (س-أ)(س-جـ) + (س-ب)(س-جـ)$

$$\frac{ه(س)}{ه'(س)} = \frac{(س-أ)(س-ب)}{(س-أ)(س-ب)(س-جـ)} + \frac{(س-أ)(س-جـ)}{(س-أ)(س-ب)(س-جـ)} + \frac{(س-ب)(س-جـ)}{(س-أ)(س-ب)(س-جـ)}$$

$$\frac{ه(س)}{ه'(س)} = \frac{١}{س-جـ} + \frac{١}{س-ب} + \frac{١}{س-أ} \quad \#$$

٢- $ه(س) = ١ + س + س^{٢} + س^{٣} + \ldots + س^{ن}$

فأثبت أنه: $١ + ٢ك + ٣ك^{٢} + \ldots + ن ك^{ن-١} = \frac{ن ك^{ن+١} - (ن+١) ك^{ن} + ١}{(١-ك)^{٢}}$

الحل: تذكر مجموع المتسلسلة الهندسية $\Leftarrow \frac{أ(١-ر^{ن})}{١-ر} = \frac{١(١-س^{ن})}{١-س}$

نجد المشتقة للمجموع $\Leftarrow \frac{(١-س)(ن س^{ن-١}) - (١-س^{ن})(-١)}{(١-س)^{٢}} = \frac{(ن+١) س^{ن} - ن س^{ن+١} + ١ - س^{ن}}{(١-س)^{٢}}$ #

٥ - جد قيمة الثوابت فيما يلي :-

١) $هـ(س) = \begin{cases} أ س^{٢} - ب س + ٥ & س \leq ٢ \\ س^{٣} + ج & س > ٢ \end{cases}$

حيث أ ، ب ، ج التي تجعل هـ (س) موجودة

الحل :- $هـ(س) = \begin{cases} أ س^{٢} - ب & س \geq ٢ \\ ٣ س & س < ٢ \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} ٢ أ & س \geq ٢ \\ ٦ & س < ٢ \end{cases}$

∴ هـ (٢) موجودة $\Leftarrow$ $هـ_{+}(٢) = هـ_{-}(٢)$

$٢ أ = ١٢ \Leftarrow أ = ٦$

∴ هـ (٢) موجودة لأن $هـ_{+}(٢) = هـ_{-}(٢)$

$\therefore هـ_{+}(٢) = هـ_{-}(٢)$

$٤ أ - ب = ١٢$ لكن $أ = ٦$

$٢٤ - ب = ١٢$

$-ب = -١٢$

ومنه $ب = ١٢$

كما أن هـ (س) متصل عند س = ٢ $\therefore$ $\lim_{س \to ٢^{+}} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} هـ(س) = هـ(٢)$

$\lim_{س \to ٢^{+}} ج س^{٢} + ج = \lim_{س \to ٢^{-}} أ س^{٢} - ب س + ٥$

$٨ + ج = ٤ أ - ٢ ب + ٥$ ولكن $أ = ٦ ، ب = ١٢$

ومنه $ج = -٣$

د - ٢ - $ق(س) = \begin{cases} أ س^{٣} + ب ك & ، س > ٢ \\ ٩ س^{٢} + ٩ ب ك - ١٢ & ، س \leq ٢ \end{cases}$

مجد أ ، ب التي تجعل ق(٢) موجودة

د - ٣ -

إذا كان $ه(س) + ق(س) = س^{٣} + ٥ ك^{٢} + ك + ٢$ مجد ه(س)

حيث تلاقي من ه(س) ، ق(س)

- السؤال الرابع :-

١) إذا كان $ه(س) = س^{٤} + ١$ ، $هـ(س) = س^{٣} + ٢ ك$

مجد :-

أ) $(هـ \circ ه)'(١)$ ب) $(ه \circ هـ)'(١)$ ج) $(ق \circ ه)'(١)$

الحل :-

أ) $(هـ \circ ه)'(١) = هـ'(ه(١)) \times ه'(١)$ ، $ق(س) = ٢ ك$

$= هـ'(٢) \times ٢ =$ ، $هـ'(س) = ٣ ك^{٢}$

$= ١٢ \times ٢ = ٢٤$ ، $ه'(س) = ٦ ك$

ب) $(ه \circ هـ)'(١) = ه'(هـ(١)) \times هـ'(١)$

$ه'(٣) \times ٦ = ٦ \times ٦ = ٣٦$

ج) $(ق \circ ه)'(١) = ق'(ه(١)) \times ه'(١)$ ، $ق'(س) = ٢$

$= ق'(٢) \times ٢ = ٢ \times ٢ = ٤$

٢- $ق(س) = س^3 + ٢ك$ $\quad$ $ه(س) = ٣ك$

أجد $(ق \circ ه)'(١)$ نقوم بالإشتقاق مرتين

الحل: $(ق(ه(ك)) \times ه(ك))'$ ⟸ مشتقة ضرب اقترانين

$(ق'(ه(س)) \times ه'(س) + ه(س) \times ق''(ه(س)) \times ه'(س))$ (١)

$= ق''(ه(١)) \times ه'(١) + ه(١) \times ق''(ه(١)) \times ه'(١)$

$٦ \times ٣ \times ٦ + ٦ \times ٦ \times ٦$

$= ٣٦٤$

$ق(س) = ٣ك^2 + ٢$

$ق'(س) = ٦ك$

$ق''(س) = ٦$

$ه(س) = ٦ك$

$ه'(س) = ٦$

٣- $ق(س) = س^2 + ٣$ $\quad$ $ه(س) = |س - ١٢|$

أجد $(ق \circ ه)'(٢)$

الحل: $ق'(ه(٢)) \times ه'(٢)$ ⟸ نجد $ه'(٢)$

$(ق \circ ه)(س) = ق(ه(س))$

$(ق \circ ه)(س) = (|س - ١٢|)^2 + ٣$

$(ق \circ ه)(س) = (س - ٢)^2 + ٣$

$(ق \circ ه)'(س) = ٢(س - ٢)^1 \times ١$

$(ق \circ ه)'(٢) = ٢(هـ - ٢) \times ١ =$ هـ غير موجودة

$\therefore$ غير موجودة

$ه(س) = \begin{cases} س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ -(س - ٢) & ، س < ٢ \end{cases}$

$ه'(س) = \begin{cases} ١ & ، س > ٢ \\ -١ & ، س < ٢ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٢ \end{cases}$

$ه'(٢)$ غير موجودة

لكن لا نحكم أنه $(ق \circ ه)'(٢)$ غير موجودة

لذلك نقوم بتركيب الإقترانين ثم نعدمع

$ه'(٢^+) = ١$ $\quad$ $ه'(٢^-) = -١$

٤) $ه(س) = \sqrt{ح كـ - ١}$ $\quad ك(س) = |س^٤ - ٩|$

نجد $\frac{د}{د س}(ه(ك(س)))$ عندما $س = ٢$

الحل: $\frac{د}{د س}(ه(ك(س))) = [ه'(ك(س)) \times ك'(س)]$

وعندما $س = ٢$:

$ه'(ك(٢)) \times ك'(٢) \Leftarrow$ نجد $ك(٢)$

$ه'(٥) \times -٤$

$\frac{١}{٣} \times -٤ = \frac{-٤}{٣}$ #

$ك(س) = \begin{cases} ٩ - س^٤ & -٢ < س < ٣ \\ ٤ - ٣ك & ٣ < س < ٤ \end{cases}$

$ك'(س) = \begin{cases} -٤س^٣ & -٢ < س < ٣ \\ -٣ & ٣ < س < ٤ \end{cases}$

$ك'(٢) = -٣$

$ه'(س) = \frac{١}{٣\sqrt{ح كـ - ١}}$

٥- $ك(س) = \begin{cases} س^٤ + ٣ك & ; \quad س \leq ٢ \\ س^٣ & ; \quad س > ٢ \end{cases}$

$ك(س) = (س^٤ - ٣)^٤$

نجد $(ه \circ ك)'(٢)$

٦- $ص = (١ + ن)^٤$ $\quad س = \frac{١ - ن}{١ + ن}$ عندما $س = ٠$ نجد $\frac{د ص}{د س}$

٧- $ص = \frac{|٤ + ٥ك - ١ س^٤|}{س(س - ١)}$ $\quad س \in [١ ، ٥]$

السؤال الخامس :-

١) إذا كان $(ه \circ د)(\frac{\pi}{4}) = ه(\frac{\pi}{4}) \times د(\frac{\pi}{4})$

$د(س) = ٣$

$د(\frac{\pi}{4}) = ٣$

$د(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

$ه(س) = ٢ جاس جتاس$

$ه(س) = جا٢س$

$ه(\frac{\pi}{4}) = جا\frac{\pi}{2} = ١$

الحل : $(ه \circ د)(\frac{\pi}{4}) = ه(د(\frac{\pi}{4})) \times د(\frac{\pi}{4})$

$= ه(\frac{\pi}{4}) \times ٢$

$= ١ \times ٣ = ٣$

٢- $د(س) = س - جا\pi س$ $\quad س \in [٠ ، ٢]$

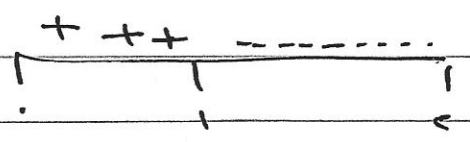
فاحث في قابلية $د(س)$ للإشتقاق عند $س = ١$

$جا\pi س = جتا$

$\pi س = ٠ \Leftarrow س = جتا$

$\pi س = \pi \Leftarrow س = ١$

$\pi س = ٢\pi \Leftarrow س = ٢$



$د(س) = \begin{cases} س - جا\pi س & ٠ \leq س \leq ١ \\ -س + جا\pi س & ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

عند $س = ١$ $د(س)$ متصل عند $س = ١$

← تابع الحل ←

صفحة -١٠-

تابع -ج-

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 \times \text{جتا}\frac{\pi}{\text{س}} + \pi \times \text{جا}\frac{\pi}{\text{س}} & 0 < \text{س} < 1 \\ -\text{س} \times \text{جتا}\frac{\pi}{\text{س}} + \pi \times \text{جا}\frac{\pi}{\text{س}} & 1 < \text{س} < 2 \end{cases}$$

ق(١) غير موجودة $\begin{cases} \text{ق}_-(1) = -\pi + \text{صفر} = -\pi \\ \text{ق}_+(1) = \pi + \text{صفر} = \pi \end{cases}$

٣- ق(٦س + π) = جاس عند ق(π٢)

نشتق الطرفين

$$\text{ق}(6\text{س} + \pi) \times 6 = 2 \text{جا}\text{س} \times \text{جتا}\text{س} \times 2$$

عندما $6\text{س} + \pi = 2\pi$

$$\text{ق}(2\pi) \times 6 = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times 2$$

$$\text{س} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ق}(2\pi) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

نعوض فاسا تكمل س = $\frac{\pi}{2}$

٤- ق(١) = جتاس + ظاس - قاس) = ظاس + قاس حد $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

ق متصلة عند ق(٠) حيث ٠

ق(٢ جتاس + ظاس - قاس) × (-٢ جاس + قاس - قاس ظاس) = قاس + قاس ظاس

٢ جتاس + ظاس - قاس = صفر

$$\left(2\text{جتا}\text{س} + \frac{\text{جا}\text{س}}{\text{جتا}\text{س}} - \frac{1}{\text{جتا}\text{س}} = \text{صفر}\right) \times \text{جتا}\text{س} \Rightarrow 2\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}\text{س} - 1 = \text{صفر}$$

$$2(1 - \text{جا}^2\text{س}) + \text{جا}\text{س} - 1 = \text{صفر}$$

← تابع الكل ← تابع ←

تابع -٤- $٢ - ٢جتا^{٢}س + جاس - ١ = صفر$

$(-٢جتا^{٢}س + جاس + ١ = صفر) - ١$

$٢جتا^{٢}س - جاس - ١ = صفر$

$(٢جاس + ١)(جاس - ١) = صفر$

$٢جاس = -١$ $\quad$ $جاس = ١$

$جاس = -\frac{١}{٢}$ $\quad \rightarrow س = \frac{\pi}{٢}$ تحل

$س = \frac{٧\pi}{٦}$

$\Rightarrow$ ق(صفر) × $(-٢ جا\frac{٧\pi}{٦} + قا^{٢}\frac{٧\pi}{٦} - قا\frac{٧\pi}{٦} ظا\frac{٧\pi}{٦}) = قا^{٢}\frac{\pi}{٦} + ظا\frac{\pi}{٦} قا\frac{\pi}{٦}$

$\Rightarrow$ ق(٠) × $(-٢ \times -\frac{١}{٢} + \frac{٤}{٣} - \frac{-٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{١}{\sqrt{٣}}) = \frac{٤}{٣} + \frac{١}{٣} \times \frac{-٢}{\sqrt{٣}}$

$\Rightarrow$ ق(٠) × $(١ + \frac{٤}{٣} + \frac{٢}{٣}) = \frac{٤}{٣} - \frac{٢}{٣}$

$\frac{١}{٣}$ × ق(٠) × (٣) = $\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٣} \Rightarrow$ ق(٠) = $\frac{٢}{٩}$ #

-٥) $ق(س) = \frac{جا^{٤}س}{٤} - \frac{جتا^{٤}س}{٤} + جتاس$ $\quad$ $س \in [٠ ، ٢\pi]$

جد حلول المعادلة التي تجعل ق(س) = صفر

$ق(س) = \frac{٤ جا^{٣}س جتاس}{٤} - \frac{٤ جتا^{٣}س \times -جاس}{٤} - جاس = صفر$

$جا^{٣}س جتاس + جتا^{٣}س جاس - جاس = صفر$

$جاس جتاس (\underbrace{جا^{٢}س + جتا^{٢}س}_{١}) - جاس = صفر$

$جاس جتاس - جاس = صفر \Rightarrow جاس (جتاس - ١) = صفر$

$جاس = صفر$ $\quad$ $جتاس = ١$

$س = ٠ ، \pi$ $\quad$ $س = ٠ ، ٢\pi$

$\therefore$ $\boxed{س = \pi}$

صفحة -٣٤-

تمرين

٦- جد قيم س في الفترة $[-2\pi, 6\pi]$ والتي تحقق المعادلة $\text{مـ}(س) = \text{جتا}س$

حيث أ) $\text{مـ}(س) = س + \text{جتا}س$

ب) $\text{مـ}(س) = \text{جا}س$

تمرين

٧- ابحث في قابلية $\text{مـ}(س) = \frac{|\text{جتا}س|}{س}$ ، (حيث $0 < س \leq \frac{3\pi}{2}$)

عند $س = \frac{\pi}{2}$

تمرين

٨- $\text{مـ}(س) = |\text{جا}3س|$ حيث $س \in [0, \frac{\pi}{2}]$

ابحث في قابلية $\text{مـ}(س)$ للإشتقاق عند $س = \frac{\pi}{3}$

٩- $ص = \text{جا}س + \text{جتا}س$ فأثبت أنه $(ص')^2 + ص^2 = 2$

الحل $ص' = \text{جتا}س - \text{جا}س$

$(ص')^2 = (\text{جتا}س - \text{جا}س)^2$

$\Leftarrow (ص')^2 = \text{جتا}^2س - 2\text{جا}س\text{جتا}س + \text{جا}^2س = 1 - \text{جا}2س$

$\Leftarrow (ص)^2 = \text{جا}^2س + \text{جتا}^2س + 2\text{جا}س\text{جتا}س = 1 + \text{جا}2س$

$\therefore (ص')^2 + ص^2 = 1 - \text{جا}2س + 1 + \text{جا}2س = 2$

١٠- $ص = \text{جا}س + \text{جتا}س$

أثبت أنه $ص ص'' + 1 = -\text{جا}2س$

$ص' = \text{جتا}س - \text{جا}س$

$ص'' = -\text{جا}س - \text{جتا}س$

$ص \times ص'' = (\text{جا}س + \text{جتا}س)(-\text{جا}س - \text{جتا}س)$

$ص ص'' = (\text{جا}س + \text{جتا}س) \times -(\text{جا}س + \text{جتا}س)$

$ص ص'' = -(\text{جا}س + \text{جتا}س)^2 \Leftarrow ص ص'' = -(1 + \text{جا}2س)$

$ص ص'' = -1 - \text{جا}2س \Leftarrow ص ص'' + 1 = -\text{جا}2س$

ص = ٤ ، ٠

السؤال السادس :-

١) إذا كان $س^{٢} - ٢كص = -١٢$ فجد $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ عند النقطة (٤ ، ٥)

الحل :- $٢ك - ٢ك \frac{دص}{دس} + ص \times -٢ = صفر$

$٢ - ٢ك \frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} + \frac{دص}{دس} \times -٢ + -٢ \frac{دص}{دس} = صفر$

$٢ - ٤ \frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} + -٤ \frac{دص}{دس} = صفر$

فجد $\frac{دص}{دس}$ عند النقطة (٤ ، ٥)

$$\frac{+٢س - ٢ص}{٢ك} = \frac{دص}{دس} \cdot$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{س - ص}{س}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{-٢}{٢} = -١$$

$٢ - ٤ \frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} - ٤ \times -١ = صفر$

$$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$$

---

٢) $\frac{٣}{س} + \frac{س}{ص} = ٣$ فجد $\frac{دص}{دس}$ نقطة تمر نقطة

$$\frac{٣ص + س^{٢}}{س ص} = ٣$$

$٣ص + س^{٢} = ٣ك ص$

$٣ص + ٢س ص = ٣ص + ص \times ٣$

$٣ص - ٣ص = ٣ص - ٢س ص$

$$ص (٣ - ٣ك) = \frac{٣ص - ٢س ص}{٣ - ٣ك}$$

٣- $\overrightarrow{أس} - \overrightarrow{أ.ص} = \overrightarrow{أ س ص}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ حيث $س > صفر$ و $ص > صفر$

٤- جد النقط على منحنى العلاقة

$\overrightarrow{أس} + \overrightarrow{أص} = ٣$ والتي يحصر $صَ = -٢$

$$\frac{١}{٢\overrightarrow{أس}} + \frac{صَ}{٢\overrightarrow{أص}} = صفر \Leftarrow \frac{صَ}{\overrightarrow{أص}} = \frac{-١}{\overrightarrow{أس}}$$

$$صَ = \frac{-٢\overrightarrow{أص}}{\overrightarrow{أس}} \Leftarrow \frac{\overrightarrow{أص}}{\overrightarrow{أس}} = ٢ \neq$$

ولكن $\overrightarrow{أص} = ٣ - \overrightarrow{أس}$

$$٢ = \frac{٣ - \overrightarrow{أس}}{\overrightarrow{أس}} \Leftarrow ٢\overrightarrow{أس} = ٣ - \overrightarrow{أس}$$

$$٣\overrightarrow{أس} = ٣ \Leftarrow س = ١$$

وعند $ص = ٤$ ∴ النقطة (١، ٤)

٥- $ص = جا٢ه$ $\quad س = ٣ جتا ه$ فجد $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ه} \times \frac{د ه}{د س} \qquad \frac{د س}{د ه} = -٣ جا ه$$

$$\frac{د ه}{د س} = \frac{-١}{٣ جا ه} \rightarrow \frac{د ص}{د س} = جتا ٢ه \times \frac{١}{-٣ جا ه}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-١}{٣} ظتا ه$$

لاحظ أن المشتقة ضمني بالنسبة لـ س

$$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{-١}{٣} \times -قتا^٢ ه \times \frac{د ه}{د س} =$$

$$= \frac{١}{٣} قتا^٢ ه * \frac{-١}{-٣ جا ه} = \frac{-١}{٩} قتا^٣ ه$$

٦- إذا كان

ص = $س^{م/ن}$ حيث م، ن عدد نسبي

أثبت أن $\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$

الحل: ص = $س^{\frac{م}{ن}}$ برفع الطرفين للأس ن

$ص^{ن} = س^{م}$ نشتق ضمني

$ن ص^{ن-١} \frac{د ص}{د س} = م س^{م-١}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} \frac{س^{م-١}}{ص^{ن-١}}$ ولكن ص = $س^{\frac{م}{ن}}$

$= \frac{م}{ن} \frac{س^{م-١}}{(س^{\frac{م}{ن}})^{ن-١}}$

$= \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{س^{م-\frac{م}{ن}}}$

$= \frac{م}{ن} \times س^{م-١-م+\frac{م}{ن}}$

$= \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$ #

٧- إذا كان $س^{ص} + ص^{س} = ٥$

أثبت أن $\frac{د ص}{د س} = \frac{-ص^{٢}}{س^{٢}}$

٨- $س + ص = س ص$ أثبت أن $ص' = \frac{ص^{٢}}{س^{٢}}$

٩- ص = جتا ٢س أثبت أن

$ص ص'' + (ص')^{٢} + ٤ص = ٠$

١٠- ص = جا٢ه ، س = ظاه فجد $\frac{د ص}{د س}$