إعداد المعلم: محمد الجازي
0787904860

الإبداع في الرياضيات

أسئلة مراجعة في مادة الرياضيات
للمستوى الثالث

السؤال الأول:
جد قيمة النهايات التالية:

١) $\lim_{س \to ١} \frac{ا س^{٣} + ٣ ا س + ٧ - ٢}{س - ١}$

الحل: عند رؤية مقادير مختلفة في النوع نستخدم طريقة الفصل

$= \lim_{س \to ١} \frac{ا س^{٣} + ٣ ا س - ٢}{س - ١} - \lim_{س \to ١} \frac{ا س^{٣} + ٧ ا س - ٢}{س - ١}$

ا = عدد مرافقة تربيعي ، ا^{٢} = عدد مرافقة تكعيبي

$= \lim_{س \to ١} \frac{ا س^{٣} + ٣ ا س - ٢}{س - ١} \times \frac{ا س^{٢} + ٢ ا س + ٢}{ا س^{٢} + ٣ ا س + ٢} - \lim_{س \to ١} \frac{ا س^{٣} + ٧ ا س - ٢}{س - ١} \times \frac{(ا س^{٢} + ٧ ا س + ٢)^{٢} ا س^{٣} + ٢ (ا س^{٢} + ٧ ا س + ٢) ا س^{٣} + ٤}{(ا س^{٢} + ٧ ا س + ٢)^{٢} ا س^{٣} + ٢ (ا س^{٢} + ٧ ا س + ٢) ا س^{٣} + ٤}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(ا س^{٢} + ٤ ا س + ٢)}{(س - ١)(ا س^{٢} + ٣ ا س + ٢)} \times \lim_{س \to ١} \frac{١}{ا س^{٢} + ٢ ا س + ٢} - \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ٨)}{(س - ١)} \times \lim_{س \to ١} \frac{١}{(ا س^{٢} + ٧ ا س + ٢)^{٢} ا س^{٣} + ٢ (ا س^{٢} + ٧ ا س + ٢) ا س^{٣} + ٤}$

$= \frac{١}{٤} \times ١ - ١ \times \frac{١}{١٢}$

$= \frac{١ \times ٣}{٤ \times ٢} - \frac{١}{١٢} = \frac{٢}{١٢} = \frac{١}{٦}$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{ا س^{٣} (س + ١)^{٢} - ٨}{س - ١}$

الحل: عند رؤية مقادير مختلفة بالنوع لكن بينها (ضرب) نستخدم طرح وإضافة

نطرح ونضيف ٨ ا س

$= \lim_{س \to ١} \frac{ا س^{٣} (س + ١)^{٢} - ٨ ا س}{س - ١} + \lim_{س \to ١} \frac{٨ ا س - ٨}{س - ١}$

تابع الحل ←

صفحة (١)

الإبداع في الرياضيات

إعداد المعلم: محمد حجازي

$$= \lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} - 1}{س - 1} + \lim_{س \to 1} \frac{8\sqrt{س} - 8}{س - 1}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} - 1}{(س+1)^3 - 8} + \lim_{س \to 1} \frac{8(\sqrt{س} - 1)}{س - 1}$$

← ضرب المرافق التربيعي

ومرفقه بين قوسين للمقام

$$= \lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} - 1}{(س+1-2)((س+1)^2 + 2(س+1) + 4)} + \lim_{س \to 1} \frac{8(\sqrt{س} - 1)}{(\sqrt{س} - 1)(\sqrt{س} + 1)}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{8}{4}$$

$$12 + 4 = 16$$

$$\lim_{س \to 9} \frac{\sqrt{س + 1} - 4}{س - 9}$$

الحل: عند وجود جذر داخل جذر فإننا نفرض الجذر الداخلي بـ ص

$$ص = \sqrt{س} \Leftarrow س = ص^2$$

عندما $س \to 9$ فإن $ص \to 3$

$$\lim_{ص \to 3} \frac{\sqrt{ص + 1} - 4}{ص^2 - 9} \times \frac{\sqrt{ص + 1} + 4}{\sqrt{ص + 1} + 4}$$

$$\lim_{ص \to 3} \frac{ص + 1 - 16}{(ص - 3)(ص + 3)} * \lim_{ص \to 3} \frac{1}{\sqrt{ص + 1} + 4}$$

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{24}}$$

← كان حل السؤال السابق باستخدام الضرب بالمرافق التربيعي مرتين ←

٤) $\lim_{س \to -٢} \frac{١}{٣ك^{٢} - س - ١٤} \left(\frac{١}{س + ١} + \frac{١}{٥ + ٢ك} \right)$

الحل:- عند وجود كسور فإننا نستخدم توحيد المقامات

$$\lim_{س \to -٢} \frac{١}{٣ك^{٢} - س - ١٤} \left(\frac{س + ١ + ٥ + ٢ك}{(س + ١)(٥ + ٢ك)} \right)$$

$$\lim_{س \to -٢} \frac{١}{(٣ك - ٧)(س + ٢)} \left(\frac{٦ + ٣ك}{(س + ١)(٥ + ٢ك)} \right)$$

$$\lim_{ك \to ٢} \frac{٣}{(س + ١)(٥ + ٢ك)} * \frac{١}{١٣ - ١ \times ١} = \frac{٣}{١٣}$$

٥) $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{س^{٢} + ٧ك}{س^{٢} - ٩} - \frac{س + ٣}{س - ٣} \right)$

الحل: عند وجود كسور نقوم بتوحيد المقامات

$$= \lim_{س \to ٣} \left(\frac{س^{٢} + ٧ك}{س^{٢} - ٩} - \frac{س + ٣}{س - ٣} \times \frac{(س + ٣)}{(س + ٣)} \right)$$

$$= \lim_{س \to ٣} \left(\frac{س^{٢} + ٧ك - (س + ٣)^{٢}}{س^{٢} - ٩} \right)$$

$$= \lim_{س \to ٣} \left(\frac{س^{٢} + ٧ك - (س^{٢} + ٦ك + ٩)}{س^{٢} - ٩} \right)$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} + ٧ك - س^{٢} - ٦ك - ٩}{(س - ٣)(س + ٣)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{١ - ٦ك}{(س - ٣)(س + ٣)} = \lim_{س \to ٣} \frac{٦(\frac{١}{٦} - ك)}{(س - ٣)(س + ٣)} = \frac{-٦}{٦} = -١$$

٦) $\lim_{س \to ١} \frac{(ك س - ١)^{٥} - ١}{(س + ١)^{٦} - ٦٤}$

الحل بالقسمة المركبة أو باستخدام الخوارزمية

$$= \frac{(٥ \times ١) \times ٢}{(٦ \times ٢^{٥})} = \frac{\lim_{س \to ١} \frac{(ك س - ١ - ١)(ك^{٤}(ك س - ١)^{٤} + ك^{٣}(ك س - ١)^{٣} + ك^{٢}(ك س - ١)^{٢} + ك(ك س - ١) + ١)}{(س + ١ - ٢)(ج^{٥}(س + ١)^{٥} + ج^{٤}(س + ١)^{٤} + ج^{٣}(س + ١)^{٣} + ج^{٢}(س + ١)^{٢} + ج(س + ١) + ج^{٥})}}{}$$

$$= \frac{١٠}{١٩٢}$$

٧) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٤]{ك س + ١٢} - ٢}{س - ٢}$

الحل :-

عند وجود جذور مع والدرجة الزوجية فاننا نستخدم الـ $|$ استبدال بـ ص حيث ما داخل الجذر حفظي

$ص = \sqrt[٤]{ك س + ١٢} \Leftarrow ص^{٤} = ك س + ١٢ \Leftarrow س = \frac{ص^{٤} - ١٢}{ك}$

عندما $س \to ٣$ فإن $ص \to ٢$

$$= \lim_{ص \to ٢} \frac{ص - ٢}{\frac{ص^{٤} - ١٢}{ك} - ٣}$$ نسحب $\frac{١}{ك}$ عامل مشترك ونقوم بتوحيد المقامات

$$= \lim_{ص \to ٢} \frac{ص - ٢}{\frac{١}{ك}(ص^{٤} - ١٢ - ٤)} \Leftarrow \lim_{ص \to ٢} \frac{ص - ٢}{\frac{١}{ك}(ص^{٤} - ١٦)}$$

$$= \lim_{ص \to ٢} \frac{ص - ٢}{\frac{١}{ك}(ص - ٢)(ص + ٢)(ص^{٢} + ٤)} = \frac{١}{\frac{١}{٨} \times ٨} = \frac{١}{١٦}$$

٨) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك} - ٢}{س - ٢}$ لا حظ ما داخل الجذر ليس حفظي

الحل : $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك} - ٢}{س - ٢} \times \frac{\sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}}{\sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}}$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}{(س - ٢)\sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}^{٤} + \sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}^{٣} + \sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}^{٢} + \sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢} + ٢^{٤}}$$

$$\times \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}^{٤} + \sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}^{٣} + \sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}^{٢} + \sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢} + ٢^{٤}}{\sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}^{٤} + \sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}^{٣} + \sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}^{٢} + \sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢} + ٢^{٤}}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}{س - ٢} \times \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}^{٤} + \sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}^{٣} + \sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}^{٢} + \sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢} + ٢^{٤}}{\sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}^{٤} + \sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}^{٣} + \sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢}^{٢} + \sqrt[٥]{س^{٣} + ١٢ ك - ٣٢} + ٢^{٤}}$$

تابع ←

تابع س ٨) فرع (٨)

$$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س^٣ + ١٢ك} - ٢ك}{س - ٢} \times \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ١٢ك - ٣ك}{س - ٢}$$

نفرض ص = $\sqrt{س^٣ + ١٢ك}$ ⇐ ص^٢ = $س^٣ + ١٢ك$

عندما س ← ٢ ⇐ ص ← ٢

	س^٣	س^٢	س	ثابت
	١	٠	١٢	$-٣ك$
٢	١	٢	٤	٠
	١	٢	١٦	$٣ك$

$$\lim_{ص \to ٢} \frac{ص - ٢}{ص^٣ - ٣٢} \times \lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + ١٢ك - ٣ك}{س - ٢}$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ١٦)}{(س - ٢)}$$

	ص − ٢	
ص ← ٢	$(ص - ٢)(ص^٤ + ٢ص^٣ + ٤ص^٢ + ٨ص + ١٦)$	$\frac{٤ك}{١}$

$$\frac{١}{٥ \times ١ + ٢٤} \times \frac{٦}{\frac{٦}{١}} = \frac{٦}{٦٠} = \frac{٣}{١٠}$$

---

٢) جد قيمة أ، ب إذا علمت أن:

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{أ س^٣ - ب س - ٦}{س - ٢} = ٥$ فجد أ، ب

الحل: بما أن النهاية موجودة و $\lim_{س \to ٢}$ س − ٢ = ص ← ٠ فإن:

نفرض أ ص ٢

$\lim_{س \to ٢} أ س^٣ - ب س - ٦ = ص$ ← ٠

٤ أ − ٢ ب − ٦ = ص ← ①

ب) نستخدم طريقة الفصل

$\lim_{س \to ٢} \frac{أ س^٣ - ٤أ}{س - ٢} - \lim_{س \to ٢} \frac{ب س - ٢ب}{س - ٢} = ٥$

$\lim_{س \to ٢} \frac{أ(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{س - ٢} - \lim_{س \to ٢} \frac{ب(س - ٢)}{س - ٢} = ٥$

١٢ أ − ب = ٥

٤ أ − ٢ ب = ٦

− ب = ١ ⇒ ب = −١

نعوض في ① أو ②

فنجد أ = ١

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{س^{ن} + أ ك + ب}$ غير موجودة فإن أ ، ب

الحل: $\lim_{س \to ١} \frac{س^{ن} + أ س + ب}{س - ١} =$ صفر

النهاية موجودة و $\lim_{س \to ١} س - ١ =$ صفر

أ) $\therefore \lim_{س \to ١} س^{ن} + أ ك + ب =$ صفر

$١ + أ + ب =$ صفر ← ①

ب) ضرب المرافق

$$\lim_{س \to ١} \frac{س^{ن} - ١}{س - ١} + \lim_{س \to ١} \frac{أ ك - أ}{س - ١} =$$

$$\lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(\cancel{س^{ن-١} + \cdots + ١})}{\cancel{س - ١}} + \lim_{س \to ١} \frac{أ (س - ١)}{س - ١} =$$

$ن + أ =$ صفر

$\boxed{أ = -ن}$

بالعودة للمعادلة (١) فإن $\boxed{ب = ١}$

٣- $\lim_{س \to ١} \frac{(س^{٢}-١)^{ن}}{(س^{٤}-٤س+١)^{ن}} = ٨١$ فما قيمة ن

الحل: $\lim_{س \to ١} \frac{((س-١)(س+١))^{ن}}{((س-١)(س-١))^{ن}} = ٨١$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)^{ن}(س+١)^{ن}}{(س-١)^{ن}} = ٨١$

$= \lim_{س \to ١} (س+١)^{ن} = ٨$

$(٣)^{ن} = ٨١$

$(٩)^{ن} = ٩^{٢} \Leftarrow \boxed{ن = ٢}$

٤) إذا كانت $\lim_{ص \to ١} \frac{ص^{ن}-١}{ص-١} = ن$ حيث $ن \in ص^{+}$

فما قيمة الثابت ن الذي يجعل

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٤}+س-٦}{\sqrt{س^{٢}+س-٥}-١} = ٤$

الحل :- بما أن درجة الجذر غير معلومة فإننا نفرض أن الجذر ص

$ص = \sqrt{س^{٢}+س-٥}$ $\quad ص^{ن} = س^{٢}+س-٥$

$\lim_{ص \to ١} \frac{ص^{ن}-١}{ص-١} = ٤$ عندما $س \to ٢$ فإن $ص \to ١$

لاحظ أنه

$س^{٤}+س-٦ = \underbrace{س^{٢}+س-٥}_{ص^{ن}} - ١$

$\therefore ن = ٤$ #

٥) $د(س) = \begin{cases} [س+٣] & س \leq ٩ \\ -[س]-٩ & س > ٩ \end{cases}$

عين قيمة ٩ علماً بأن $\lim_{س \to ٩} د(س)$ موجودة

الحل :-

بما أن النهاية موجودة

$\lim_{س \to ٩^+} [س+٣] = \lim_{س \to ٩^-} -[س]-٩$

$[٩+٣] = -[٩]-٩$

$[٩] = -٩-[٩]$

$٢[٩] = -٩$

$[٩] = -٣ \Longleftarrow ٣ < ٩ < ٤$

نتأكد من الأعداد بالتعويض في النهاية

$\lim_{س \to ٣^+} [س+٣] \neq \lim_{س \to ٣^-} -[س]-٩$

كما أن $\lim_{س \to ٤^+} [س+٣] \neq \lim_{س \to ٤^-} -[س]-٩$

$\therefore ٩ \in (٣ ، ٤)$

٦) $د(س) = \begin{cases} |س-١| & ، س \leq ٣ \\ [س-١] & ، س > ٣ \end{cases}$

هل $\lim_{س \to ٣} د(س)$ موجودة

$\lim_{س \to ٣^+} د(س) = \lim_{س \to ٣^+} [س-١] = ٢$

$\lim_{س \to ٣^-} د(س) = \lim_{س \to ٣^-} |س-١| = ٢$

الحل :- نعم ← الاستمرار

$د(٣) = ٢$

$\lim_{س \to ٣} د(س) = ٢$

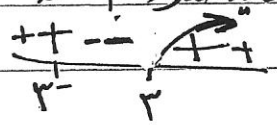
عين موجودة

$\lim_{س \to ٢^+} [س-١] = ١$

٧)

$$\lim_{س \to 3^+} \frac{س - [س]}{١ - س^2 - ١٩}$$

الحل نعيد تعريف المقام



نعيد تعريف البسط

$$ل = ١$$

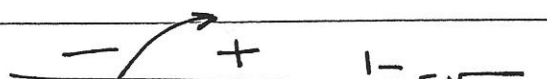
$$\lim_{س \to 3^+} \frac{١}{(س - ٣)(س + ٣)} = \boxed{\frac{١}{٦}}$$

٨) $\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^+} \frac{\sqrt{١ + ٤ك + ٤ك^2}}{ك + ١}$ ← لا حظ مربع كامل

$$\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^+} \frac{\sqrt{(ك + ٢)^2}}{ك + ١}$$

$$\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^+} \frac{\sqrt{٤(س^2 + س + \frac{١}{٤})}}{ك + ١}$$

$$\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^+} \frac{٢\sqrt{(س + \frac{١}{٢})(س + \frac{١}{٢})}}{ك + ١}$$



$$\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^+} \frac{٢|س + \frac{١}{٢}|}{ك + ١}$$

$$\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^+} \frac{٢(س + \frac{١}{٢})}{ك + ١} = \boxed{١}$$

س٥: جد نهاية الدوال التالية:-

١) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - \sqrt{١}}{س - ١}$

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^2 + ٥ + \sqrt{س + ٦}} - ٥}{\sqrt{س^2 + ١٣} - ٢}$

٣- $\lim_{س \to ٢^+} \frac{\sqrt{س + ٣} - [س]}{|س - ١| - ٢}$

تذكرة:-

في النهايات نعيد تعريف القيمة المطلقة فقط في حالة $\frac{\text{جس}}{\text{جس}}$

وكما دخل القيمة المطلقة جس

وأيضاً نعيد تعريف اقتراب أكبر عدد صحيح

س٤:- جد قيمة النهايات التالية:-

١) $\lim_{س \to \text{جس}} \frac{س^٤ + \text{جا}٥س - \text{ظا}٣س}{٤س + \text{جا}٧س}$

الحل: نقسم البسط والمقام على س

$$\lim_{س \to \text{جس}} \frac{\frac{س^٤}{س} + \frac{\text{جا}٥س}{س} - \frac{\text{ظا}٣س}{س}}{\frac{٤س}{س} + \frac{\text{جا}٧س}{س}} = \frac{\text{جس} + ٥ - ٣}{٧ + ٤} = \frac{٤}{٩}$$

٢) $\lim_{س \to \text{جس}} \frac{س^٣ \text{جا}س - \text{جا}^٢٤س + \text{ظا}^٢س \text{جا}س}{س^٢ - ٤\text{جا}^٢س \text{ظا}٤س}$

الحل: نقسم البسط والمقام على $س^٢$

$$\lim_{س \to \text{جس}} \frac{\frac{س^٣ \text{جا}س}{س^٢} - \frac{\text{جا}^٢٤س}{س^٢} + \frac{\text{ظا}^٢س \text{جا}س}{س^٢}}{\frac{س^٢}{س^٢} - \frac{٤\text{جا}^٢س \text{ظا}٤س}{س^٢}} = \frac{١ - (٤)^٣ + ١}{١ - (٤ \times ٤)}$$

$$= \frac{-٦٢}{-١٥} = \frac{٦٢}{١٥}$$

٣- تذكر أيضا نهاية ظتا، قتا، قا نحو الصفر أو ما يتطابقهم

$$\lim_{س \to -\frac{\pi}{2}} (2س + 6) \text{ قتا}(س+\frac{\pi}{2})$$

الحل: $\lim_{س \to -\frac{\pi}{2}} (س+\frac{\pi}{2}) \times \frac{1}{\text{جا}(س+\frac{\pi}{2})} = 2$

٤- $\lim_{س \to 0} \text{ظا} 5س \left(\text{قتا} س + \text{ظتا} 2س\right)$

$= \lim_{س \to 0} \text{ظا} 5س \left(\frac{1}{\text{جا} س} + \frac{1}{\text{ظا} 2س}\right)$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا} 5س}{\text{جا} س} + \frac{\text{ظا} 5س}{\text{ظا} 2س} = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$

٥- جتا - جتا متطابقة

$$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا} 3س - \text{جتا} 5س}{س^2}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{-2(\text{جا}(\frac{3س+5س}{2}))\ \text{جا}(\frac{3س-5س}{2})}{س^2}$$

$$= \lim_{س \to 0} -2 \text{جا} 4س \times \frac{\text{جا}(-س)}{س} = -4 \times 2 \times -1 = 8$$

٦- $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا} س}{\frac{\pi}{2} - س}$ تذكر نستخدم المتطابقات

جا / جتا / ظا ← جا(ناتج التعويض بالزاوية - الزاوية) نفسها

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{\frac{\pi}{2} - س}$

$ص = \frac{\pi}{2} - س$ $\quad س \to \frac{\pi}{2}$ $\quad ص \to 0$

$\lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا} ص}{ص} = 1$

ملاحظة: إذا كانت الزاوية π أو 2π حيث $ن$ عدد صحيح موجب أو سالب فإن

٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{ظا(س-٢)}{جا \pi س}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{ظا(س-٢)}{-جا(\pi س - ٢\pi)}$

لاحظ ان π حيثما ورد نزيلها

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ظا(س-٢)}{-جا \pi (س-٢)}$ $\quad ص = س-٢$ $\quad س \to ٢ \Rightarrow ص \to صفر$

$= \lim_{ص \to صفر} \frac{ص}{-جا \pi ص} = \frac{-١}{\pi}$

٨) $\begin{cases} ١ \pm جتا \\ ١ \pm جا س \\ جا \pm جتا \end{cases}$ نستخدم الضرب بالمرافق

$\lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}} \frac{١ + جتا ٢س}{(٢س + \pi)^٢}$

الحل نضرب بالمرافق أو نستخدم متطابقة $جتا ٢س$

$\lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}} \frac{١ + (٢جتا^٢ س - ١)}{(٢س + \pi)^٢}$

$\lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}} \frac{٢جتا^٢ س}{(٢س + \pi)^٢}$ ← تلاعب بالزاوية

$= \lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}} \frac{٢(جا(-\frac{\pi}{٢} - س))^٢}{٤(س + \frac{\pi}{٢})^٢} = \lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}} \frac{٢(-جا(\frac{\pi}{٢} + س))^٢}{٤(س + \frac{\pi}{٢})^٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

بعد التعويض بـ $ص = صفر$

٩- $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sqrt{1+جتاس}}{جاس}$ الحل بالمرافقة تحت الجذر

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sqrt{1+جتاس}}{جاس} \times \frac{\sqrt{1-جتاس}}{\sqrt{1-جتاس}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sqrt{1-جتا^2س}}{جاس} * \lim_{س \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sqrt{1-جتاس}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sqrt{جا^2س}}{جاس} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{|جاس|}{جاس} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ نعيد تعريف القيمة المطلقة

جاس = جاس

$س = 0 \quad \pi \quad 2\pi$

+++++ ------

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{-جاس}{جاس} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{-1}{\sqrt{2}}$

١٠- $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جاس - جتاس}{س - \frac{\pi}{4}}$ الحل بالمرافقة ثم التلاعب بالزاوية

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جاس - جتاس}{س - \frac{\pi}{4}} \times \frac{جاس + جتاس}{جاس + جتاس}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جا^2س - جتا^2س}{س - \frac{\pi}{4}} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{جاس + جتاس}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{-جتا2س}{س - \frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{-جا(\frac{\pi}{2} - 2س)}{س - \frac{\pi}{4}} * \frac{1}{\sqrt{2}}$

تابع سن) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}2(\frac{\pi}{4} - س)}{س - \frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$ص = \frac{\pi}{4} - س$

$س \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow ص \to صفر$

$\lim_{ص \to صفر} \frac{\text{جا}2ص}{-ص} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

ن) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{ظا}س - 1}{س - \frac{\pi}{4}}$

الحل: نبدأ ظا س إلى جا س / جتا س

أو باستعمال الاشتقاق

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{ظا}س - \text{ظا}\frac{\pi}{4}}{س - \frac{\pi}{4}}$

تذكير:

$\text{ظا}(أ \pm ب) = \frac{\text{ظا}أ \pm \text{ظا}ب}{1 \mp \text{ظا}أ \text{ظا}ب}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{ظا}(س - \frac{\pi}{4})(1 + \text{ظا}س \text{ظا}\frac{\pi}{4})}{س - \frac{\pi}{4}}$

$\text{ظا}أ \pm \text{ظا}ب = \text{ظا}(أ \pm ب)(1 \mp \text{ظا}أ \text{ظا}ب)$

$ص = س - \frac{\pi}{4}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{ظا}ص}{ص} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} (1 + \text{ظا}س \text{ظا}\frac{\pi}{4})$ $\quad س \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow ص \to صفر$

$1 \times 2 = 2$

ملحوظة

(يمكن حل السؤال بطريقة سهلة جداً وهي بضرب مرافق للبسط والمقام)

١٢- $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{ظا}^2 س}{\text{جتا} س - \text{جا} س}$

ولكن تم وضع هذا الحل كسؤالين مختلفين

الحل: نقسم البسط والمقام على $(س - \frac{\pi}{4})$ ونحل كل حد لوحده

عند دراستك للسؤال اعتبره كأنك تدرس سؤالين مختلفين

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{ظا}^2 س}{س - \frac{\pi}{4}} \qquad \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا} س - \text{جا} س}{س - \frac{\pi}{4}}$$

البسط

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{ظا}^2 س}{س - \frac{\pi}{4}}$$ نستبدل الثابت أو نضرب بالمرافق

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}^2 \frac{\pi}{2} - \text{جا}^2 س}{س - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} + س) \text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{س - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} + س)}{1} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{س - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \text{جتا}(\frac{\pi}{2} + س) \times \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{س - \frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \text{جتا}(\frac{\pi}{2} + س) \times \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{س - \frac{\pi}{4}}$$

$$٢ \times \text{صفر} \times -١ = \text{صفر}$$

حل المسائل السابقة بضرب مرافقين للبسط والمقام

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{جا}2س}{\text{جتا}س - \text{جا}س} \times \frac{1 + \text{جا}2س}{1 + \text{جا}2س} \times \frac{\text{جتا}س + \text{جا}س}{\text{جتا}س + \text{جا}س}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{جا}^2 2س}{\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}س + \text{جا}س}{1 + \text{جا}2س}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 2س}{\text{جتا}2س} \times \frac{2}{4} = \text{نهـ} \times \frac{1}{2} = \#\text{نهـ}$$

تابع ـــ ١٤) المقام

$$\text{نك}_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}س - \text{جا}س}{س - \frac{\pi}{4}}$$ تم حله في سؤال فرع ١٠

$$= -\sqrt{2}$$

∴ الجواب = $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}} = \frac{\text{جا}س}{-\sqrt{2}} = \text{جا}س$

١٣- $$\text{نك}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}س \ \text{جتا}٣س - ١}{س^{٢}}$$ الحل نستخدم الضرب والإضافة

$$= \text{نك}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}س \ \text{جتا}٣س - \text{جتا}س}{س^{٢}} + \text{نك}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}س - ١}{س^{٢}}$$

$$= \text{نك}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}س (\text{جتا}٣س - ١)}{س^{٢}} + \text{نك}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}س - ١}{س^{٢}}$$

$$= \text{نك}_{س \to 0} \text{جتا}س \left(\frac{\text{جتا}٣س - ١}{س^{٢}} \times \frac{\text{جتا}٣س + ١}{\text{جتا}٣س + ١} \right) + \text{نك}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}س - ١}{س^{٢}} \times \frac{\text{جتا}س + ١}{\text{جتا}س + ١}$$

$$= \text{نك}_{س \to 0} \text{جتا}س \left(\frac{\text{جا}^{٢}٣س - ١}{س^{٢}} \times \text{نك}_{س \to 0} \frac{١}{\text{جتا}٣س + ١} \right) + \text{نك}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}^{٢}س - ١}{س^{٢}} \times \text{نك}_{س \to 0} \frac{١}{\text{جتا}س + ١}$$

$$= \text{نك}_{س \to 0} \text{جتا}س \left(\frac{-\text{جا}^{٢}٣س}{س^{٢}} \times \frac{١}{٢} \right) + \text{نك}_{س \to 0} \frac{-\text{جا}^{٢}س}{س^{٢}} \times \frac{١}{٢}$$

$$= \text{نك}_{س \to 0} \text{جتا}س \left(\text{نك}_{س \to 0} -\frac{\text{جا}٣س}{س} \times \frac{٣}{١} \times \frac{١}{٢} \right) + \text{نك}_{س \to 0} -\frac{\text{جا}س}{س} \times \frac{١}{٢}$$

$$١ \times -\frac{٩}{٢} + -\frac{١}{٢} = -\frac{١٠}{٢} = -٥$$

*

حل

١٤- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{جاس - \sqrt{٣}\, جتاس}{١ - ٢\, جتاس}$

الحل: نقسم البسط والمقام على $س - \frac{\pi}{٣}$

عند دراستك للسؤال اعتبر كأنه سؤالين مختلفين بالنكهة

البسط

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{جاس - \sqrt{٣}\, جتاس}{س - \frac{\pi}{٣}}$ نستبدل $\sqrt{٣}$ بـ $\frac{ظا\frac{\pi}{٣}}{١}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{جاس - ظا\frac{\pi}{٣}\, جتاس}{س - \frac{\pi}{٣}}$ نقوم بتوحيد المقامات

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{جاس\, جتا\frac{\pi}{٣} - ظا\frac{\pi}{٣}\, جتاس}{جتا\frac{\pi}{٣}\,(س - \frac{\pi}{٣})}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{جاس\, جتا\frac{\pi}{٣} - جا\frac{\pi}{٣}\, جتاس}{جتا\frac{\pi}{٣}\,(س - \frac{\pi}{٣})}$ ← لاحظ متطابقة جا(أ-ب)

المقام $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{جا(س - \frac{\pi}{٣})}{جتا\frac{\pi}{٣}\,(س - \frac{\pi}{٣})}$ ← نفرض ص = $س - \frac{\pi}{٣}$ ، ص → صفر

$\lim_{ص \to ٠} \frac{جاص}{ص} = ١$ ← صفر $\frac{١}{٢}$ ص

المقام $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{١ - ٢\, جتاس}{س - \frac{\pi}{٣}}$ نقوم باستبدال الثابت

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{٢\, جتا\frac{\pi}{٣} - ٢\, جتاس}{س - \frac{\pi}{٣}} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{٢(جتا\frac{\pi}{٣} - جتاس)}{س - \frac{\pi}{٣}}$

← تابع حل السؤال

تابع حل ١٤ ← للتعويض

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{-٢ \left(جا\left(\frac{\pi}{3} - س\right) \right) جا\left(\frac{\pi}{3} + س\right)}{\frac{\pi}{3} - س}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{-٤ جا\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{3} - س\right)}{\frac{\pi}{3} - س} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{3}} جا\frac{١}{٢}\left(\frac{\pi}{3} + س\right)$$

$ص = \frac{\pi}{3} - س$

$س \to \frac{\pi}{3}$ ، $ص \to$ صفر

$$\lim_{ص \to صفر} \frac{-٤ جا\frac{١}{٢} ص}{-ص} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٢ = \sqrt{٣}$$

الجواب: $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

١٥- $$\lim_{س \to ٠} \frac{٣ جاس - جا٢س}{س^٣}$$

الحل: نستخدم متطابقة $جا٣س = ٣جاس - ٤جا^٣س$

أو حالتالي

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢جاس + جاس - جا٣س}{س^٣}$$ (متطابقة)

$$= \lim_{س \to صفر} \frac{٢جاس + ٢\left(جتا\left(\frac{س+٣س}{٢}\right)\right) جا\left(\frac{س-٣س}{٢}\right)}{س^٣}$$

تذكر $جا(-س) = -جاس$

$$= \lim_{س \to صفر} \frac{٢جاس + ٢جتا٢س \; جا(-س)}{س^٣}$$

$$= \lim_{س \to صفر} \frac{٢جاس - ٢جاس \; جتا٢س}{س^٣}$$ ← تابع حل السؤال

تابع حل-١٥-

$$= \text{نـ}_{س \to صفر} \frac{٢ جاس - ٢ جاس جتاس}{س^٣}$$

$$= \text{نـ}_{س \to صفر} \frac{٢ جاس (١ - جتاس)}{س^٣}$$ ← مرافقة أو مقترنة جتاس

$$\text{نـ}_{س \to صفر} \frac{٢ جاس}{س} \times \text{نـ}_{س \to صفر} \frac{١ - (١ - ٢ جا^٢ س)}{س^٢}$$

$$٢ \times \frac{٢ جا^٢ س}{س^٢}$$

$$٢ \times ٢ = \underline{\underline{٤}}$$

١٦- $\text{نـ}_{س \to \pi} \frac{جا^٣ س}{١ + جتا^٣ س}$ الحل بالتحليل

$$= \text{نـ}_{س \to \pi} \frac{١ - جتا^٣ س}{(١ + جتا س)(١ - جتا س + جتا^٢ س)}$$

$$\text{نـ}_{س \to \pi} \frac{(١ - جتا س)(١ + جتا س + جتا^٢ س)}{(١ + جتا س)(١ - جتا س + جتا^٢ س)} = \frac{٣}{٣}$$

١٧- جد قيمة النهاية التالية:

$\text{نـ}_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\frac{١}{٢} - جا س}{س - \frac{\pi}{٢}}$ الحل باستبدال الثابت $\frac{١}{٢}$ ب $جا \frac{\pi}{٢}$

حاول بحل

س٥ - إذا كانت د(س) = { (س٤ + ٢ك) / س ، -٢ < س < ٠ ؛ س = ٠ ؛ ٢ ، ٠ < س ≤ ٢ ؛ [س + ٢] }

أحسب قيم اتصال د(س) على مجاله

الحل :- مجال الاقتران (-٢ ، ٢]

نعيد تعريف الاقتران أكبر عدد صحيح

ل = ١

د(س) = { (س٤ + ٢ك) / س ، -٢ < س < ٠ ؛ ٢ ، س = ٠ ؛ ٢ ، ٠ < س < ١ ؛ ٣ ، ١ ≤ س < ٢ ؛ ٤ ، س = ٢ }

القواعد

(س٤ + ٢ك) / س متصل على ح - {٠} ولكن ٠ ∉ (-٢ ، ٢)

∴ (س٤ + ٢ك) / س متصل على (-٢ ، ٠)

٢ متصل على (٠ ، ١) لأنه كثير حدود

٣ متصل على (١ ، ٢) لأنه كثير حدود

← تابع حل السؤال

صفحة ١٠ -

تابع س ١ -

نقاط التحول

عند س = ٠ | عند س = ١

د (٠) = ٢ | د (١) = ٣

$\lim_{س \to ٠^+}$ د (س) = ٢ | $\lim_{س \to ١^+}$ د (س) = ٣

$\lim_{س \to ٠^-}$ د (س) = ٢ | $\lim_{س \to ١^-}$ د (س) = ٢

∴ د (س) متصل عند س = ٠ | ∴ د (س) غير متصل عند س = ١

الامتداد

عند س = ٢

د (٢) = ٤ $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ٣

∴ د (س) غير متصل عند س = ٢ من اليسار

الملخص : د (س) متصل على الفترة $(-\infty, ٢] - \{١\}$

أو $(-\infty, ٢) - \{١\}$

٢- د (س) = $\begin{cases} ٤ - |س - ١| & -١ \leq س \leq ١ \\ [\frac{١}{٢} س + ٢] & ١ < س \leq ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال د (س) على الفترة $[-١, ٣]$

٣- إذا كان ل (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س + ٢}$ ، هـ (س) = $[س]$

فابحث في اتصال ل (س) × هـ (س) على الفترة $[٠, ٢]$

صفحة -٢٢-

٤- $d(س) = \begin{cases} أ س^2 + ب س & ، س < 2 \\ 3ب & ، س = 2 \\ أ س + ب + 12 & ، س > 2 \end{cases}$

أوجد أ ، ب التي تجعل $d(س)$ متصل على ح .

٦- (أ) إذا كانت $ر_ك = \frac{d(س) - 4}{س^3 - 3س}$ = ٢

أوجد $ر_ك = \frac{س^3 d(س) - 36}{س^3 - 3س}$

الحل : نقوم بالطرح والإضافة

$= ر_ك \frac{س^3 d(س) - 9 d(3) + 9 d(3) - 36}{س^3 - 3س} = 2$

$= ر_ك \frac{d(س)(س - 3)(س + 3)}{س^3 - 3س} + ر_ك \frac{9(d(3) - 4)}{س^3 - 3س} = 4$

$+ 9 ر_ك \frac{d(3) - 4}{س^3 - 3س}$

لاحظ : من المعطى

أن $ر_ك \frac{d(س) - 4}{س^3 - 3س} = 4$

∴ $ر_ك \frac{س^3 - 3س}{س^3 - 3س}$ = موجود والنهاية موجودة

∴ $ر_ك \frac{d(س)}{س^3} = 4$

$= ر_ك \frac{d(س)}{س^3} \times ر_ك \frac{(س + 3)}{س^3 - 3س} + 9 \times 4$

$= 24 + 18 = 42$

إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٨}{س - ٢} = ٧$

فإن $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٨$

$\because \lim_{س \to ٢} (س - ٢) = ٠$

$\therefore \lim_{س \to ٢} ق(س) - ٨ = ٠$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٨$

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{ق(س) - ٨}{س}$

الحل نقوم باستخدام طريقة المقص أو نضيف ونطرح ٨

$\lim_{س \to ٠} \frac{ق(س) - ٨}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{ق(س) - ٨}{س} - \lim_{س \to ٠} \frac{٨ - ٨}{س}$

$= ٧ - \lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)(س + ٤)}{س}$

$= ٨ - ٧ = ١$ #

انتهت مراجعة الوحدة الأولى

إعداد المعلم: محمد الجازي
هاتف: 078/790486