الملاذ في مهارات الرياضيات

اجابة اسئلة التمارين

العلمي

المستوى الثالث

وحدة النهايات

٢٠١٦

07722595O3

الاستاذ حمزة ابو الفول

NEW

الاستاذ حمزة ابو الفول
0772259503

الملاذ في مهارات الرياضيات
الصف الثاني الثانوي العلمي /المستوى الثالث
حل التمارين لوحدة النهايات والاتصال
رقم الصفحة ( )

الموضوع : نهاية اقتران عند نقطة

السؤال الأول

أ) $\lim_{س \to ١^+}$ ق (س) = صفرًا ، $\lim_{س \to ١^-}$ ق (س) = ١

بما أن $\lim_{س \to ١^+}$ ق (س) ≠ $\lim_{س \to ١^-}$ ق (س) فإن $\lim_{س \to ١}$ ق (س) غير موجودة

ب) $\lim_{س \to ٢^+}$ ق (س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ ق (س) = ١

$\lim_{س \to ٢}$ ق (س) = ١

جـ) $\lim_{س \to ٣^+}$ ق (س) = $\lim_{س \to ٣^-}$ ق (س) = ١

$\lim_{س \to ٣}$ ق (س) = صفرًا

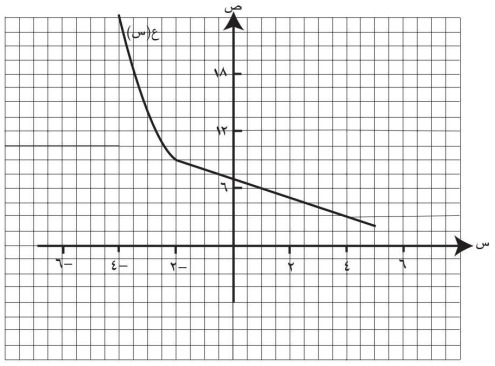
د) $\lim_{س \to ٠^+}$ ق (س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ ق (س) = صفرًا

$\lim_{س \to ٠}$ ق (س) = صفرًا

السؤال الثاني

أ) {−١، ٣، ٤، ٥، ٦} ب) {س : ٣ < س< ٤}

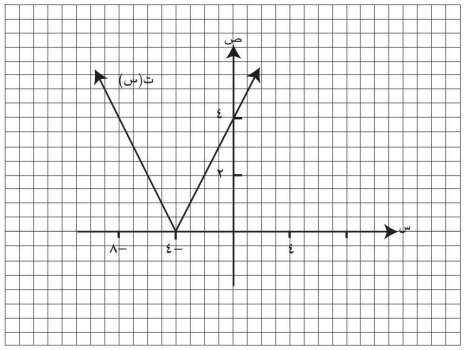
السؤال الثالث



أ) $\lim_{س \to -٢^+}$ ع (س) = ٩

$\lim_{س \to -٢^-}$ ع (س) = ٩

$\lim_{س \to ٢}$ ع (س) = ٩

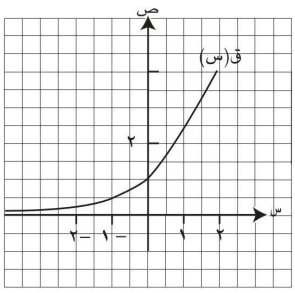


ب) $\lim_{س \to -٤^+}$ ت (س) = صفرًا

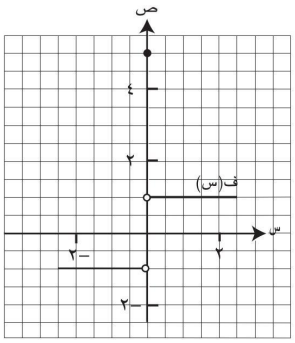
$\lim_{س \to -٤^-}$ ت (س) = صفرًا

$\lim_{س \to -٤}$ ت (س) = صفرًا

السؤال الرابع



أ) $\lim_{س \to -١^+}$ ق (س) = $\lim_{س \to -١^-}$ ق (س) = $\frac{١}{٢}$

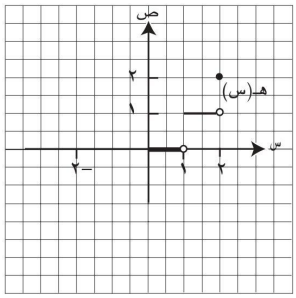


ب) نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$ف(س) = \begin{cases} ١ & ، س > ٠ \\ -١ & ، س < ٠ \\ ٥ & ، س = ٠ \end{cases}$$

$\lim_{س \to ٠^+}$ ف (س) = ١ ، $\lim_{س \to ٠^-}$ ف (س) = -١

$\lim_{س \to ٠}$ ف (س) غير موجودة



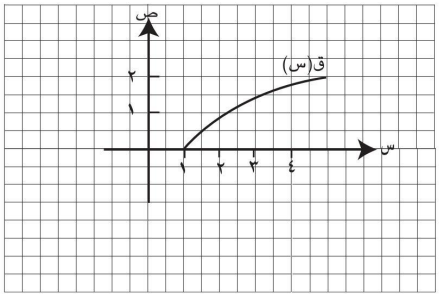
جـ) نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز الصحيح

$$ق(س) = \begin{cases} ٠ & ، ٠ \leq س < ١ \\ ١ & ، ١ \leq س < ٢ \\ ٢ & ، س = ٢ \end{cases}$$

$\lim_{س \to ١^+}$ هـ (س) = ١ ، $\lim_{س \to ١^-}$ هـ (س) = صفرًا

$\lim_{س \to ١}$ هـ (س) غير موجودة

السؤال الخامس



أ) $\lim_{س \to ٢^+}$ ق (س) = ١

ب) $\lim_{س \to ٢^-}$ ق (س) = ١

جـ) $\lim_{س \to ٢}$ ق (س) = ١

د) $\lim_{س \to ١}$ ق (س) غير موجودة لأن $\lim_{س \to ١^-}$ ق (س) غير موجودة

السؤال الأول

أ) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \left((ق(س) - \frac{١}{هـ(س)} \right) = \text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} ق(س) - \text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{١}{هـ(س)} = \frac{١}{٢} - (-\frac{١}{٢}) = ١$

ب) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \sqrt[٣]{ق(س) - \frac{١}{٢}} = \sqrt[٣]{\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} ق(س) - \frac{١}{٢}}$

$= \sqrt[٣]{\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} ق(س) - \frac{١}{٢}} = \sqrt[٣]{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}} =$ صفرًا

السؤال الثاني

وزّع النهاية على حدود الطرف الأيمن لتحصل على:

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} س^٢ - \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} ٢أس + \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} ٥ = -٤$

$٩ - ٦أ + ٥ = -٤$ ومنه $أ = ٣$

السؤال الثالث

وزّع النهاية على الحدود لتحصل على:

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} \frac{س^٣ - ٢}{س - ١} + \text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} س^٢ + \text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} ١ = \frac{٢٩}{٤} + ٩ + ١ = ١٧,٢٥$

السؤال الرابع

أ) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} د(س) = \text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} ٥ = ٥$

ب) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣^+} د(س) = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣^+} (٢س^٢ - ١٥) = ١٨ - ١٥ = ٣$

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} د(س)$ غير موجودة

جـ) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} د(س) = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} ٥ = ٥$

د) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} د(س) = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} (٢س^٢ - ١٥) = ٣٢ - ١٥ = ١٧$

السؤال الخامس

أ) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١^+} ق(س) = \sqrt{\frac{س - ١}{س + ١}} =$ صفرًا

لاحظ أن ق (س) غير معرف على يسار العدد ١ وعليه فإن $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١}$ ق (س) غير موجودة.

ب) $\lim_{س \to \frac{1}{2}^+} هـ(س) = \lim_{س \to \frac{1}{2}^+} [1 + 2س] = 2$

$\lim_{س \to \frac{1}{2}^-} هـ(س) = \lim_{س \to \frac{1}{2}^-} [1 + 2س] = 1$

$\lim_{س \to \frac{1}{2}} هـ(س)$ غير موجودة

عندما $س \to \frac{1}{3}$

$\lim_{س \to \frac{1}{2}^+} هـ(س) = \lim_{س \to \frac{1}{2}^+} [1 + 2س] = 1$

$\lim_{س \to \frac{1}{3}^-} هـ(س) = \lim_{س \to \frac{1}{3}^-} [1 + 2س] = 1$

$\lim_{س \to \frac{1}{3}} هـ(س) = 1$

جـ) نعيد تعريف الاقتران دون استخدام القيمة المطلقة

$$م(س) = \begin{cases} 1 - س^2 \ ، \ -1 \geq س \geq 1 \\ س^2 - 1 \ ، \ 1 < س \ ، \ س < -1 \end{cases}$$

$\lim_{س \to -1^+} م(س) = \lim_{س \to -1^+} (1 - س^2) =$ صفرًا

$\lim_{س \to -1^-} م(س) = \lim_{س \to -1^-} (س^2 - 1) =$ صفرًا

$\lim_{س \to -1} م(س) =$ صفرًا

السؤال الأول

أ) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٨} \frac{(س+١)^{٢}-٨١}{٨-س} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٨} \frac{(س+١-٩)(س+١+٩)}{٨-س}$

$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٨} \frac{(س-٨)(س+١٠)}{٨-س} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٨} -(س+١٠) = -١٨$

ب) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \frac{١}{٢}} \frac{٨س^{٣}-١}{س-\frac{١}{٢}} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow \frac{١}{٢}} \frac{(٢س-١)(٤س^{٢}+٢س+١)}{س-\frac{١}{٢}} = ٢ \text{ نهـــا}_{س \leftarrow \frac{١}{٢}} (٤س^{٢}+٢س+١) = ٦$

جـ) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \frac{٧}{٢}} \frac{\sqrt{٢س+٩}-٤}{٢س-٧} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow \frac{٧}{٢}} \frac{\sqrt{٢س+٩}-٤}{٢س-٧} \times \frac{\sqrt{٢س+٩}+٤}{\sqrt{٢س+٩}+٤}$

$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow \frac{٧}{٢}} \frac{٢س+٩-١٦}{(٢س-٧)(\sqrt{٢س+٩}+٤)} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow \frac{٧}{٢}} \frac{٢س-٧}{(٢س-٧)(\sqrt{٢س+٩}+٤)}$

$= \frac{١}{\sqrt{١٦}+٤} = \frac{١}{٨}$

د) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{\sqrt[٣]{٢س+٢٥}-٣}{س-٢} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{\sqrt[٣]{س+٢٥}-٣}{س-٢} \times \frac{(س+٢٥)^{\frac{٢}{٣}}+٣(س+٢٥)^{\frac{١}{٣}}+٩}{(س+٢٥)^{\frac{٢}{٣}}+٣(س+٢٥)^{\frac{١}{٣}}+٩}$

$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س+٢٥-٢٧}{(س-٢)((س+٢٥)^{\frac{٢}{٣}}+٣(س+٢٥)^{\frac{١}{٣}}+٩)}$

$= ٢ \text{ نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{١}{(س+٢٥)^{\frac{٢}{٣}}+٣(س+٢٥)^{\frac{١}{٣}}+٩} = \frac{١}{٩+٩+٩} = \frac{١}{٢٧}$

هـ) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} (\frac{١}{س}(\frac{١}{٥+س}-\frac{١}{٥-س})) = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{س} \times \frac{٥-س-(٥+س)}{(٥+س)(٥-س)}$

$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{س} \times \frac{-٢س}{(٥+س)(٥-س)} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{-٢}{(٥+س)(٥-س)} = \frac{-٢}{٢٥}$

و) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{س^{٣}+٣س-٤}{س^{٢}-١} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{(س-١)(س^{٢}+س+٤)}{(س-١)(س+١)}$

$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٢}+س+٤}{س+١} = ٣$

ز) $\lim_{س \to -٣} \frac{\sqrt[٣]{س - ٥} + ٢}{س^٣ + ٢٧} = \lim_{س \to -٣} \frac{\sqrt[٣]{س - ٥} + ٢}{س^٣ + ٢٧} \times \frac{(س - ٥)^{\frac{٢}{٣}} - ٢ (س - ٥)^{\frac{١}{٣}} + ٤}{(س - ٥)^{\frac{٢}{٣}} - ٢ (س - ٥)^{\frac{١}{٣}} + ٤}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{س + ٣}{(س + ٣)(س^٢ - ٣ س + ٩)((س - ٥)^{\frac{٢}{٣}} - ٢ (س - ٥)^{\frac{١}{٣}} + ٤))}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{س + ٣}{(س^٢ - ٣ س + ٩)((س - ٥)^{\frac{٢}{٣}} - ٢ (س - ٥)^{\frac{١}{٣}} + ٤))}$

$= \frac{١}{(٩ + ٩ + ٩)(٤ + ٤ + ٤)} = \frac{١}{٤٣٢}$

السؤال الثاني

بما أن $\lim_{س \to ١} ل (س)$ موجودة، إذن $\lim_{س \to ١^+} ل (س) = \lim_{س \to ١^-} ل (س)$

$\lim_{س \to ١^+} \frac{(س - ١)(٣ س - ٢)}{(س - ١)(٢ س - ١)} = ب \Leftarrow ب = ١$

السؤال الثالث

أ) $\lim_{س \to ٢} \frac{|س - ٣| - ١}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{٣ - س - ١}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{٢ - س}{س - ٢} = -١$

ب) $\lim_{س \to \frac{٥}{٢}^+} \frac{٢ س - [٢س]}{٤ س^٢ - ٢٥} = \lim_{س \to \frac{٥}{٢}^+} \frac{٢ س - ٥}{٤ س^٢ - ٢٥} = \lim_{س \to \frac{٥}{٢}^+} \frac{١}{٢ س + ٥} = \frac{١}{١٠}$

$\lim_{س \to \frac{٥}{٢}^-} \frac{٢ س - [٢س]}{٤ س^٢ - ٢٥} = \lim_{س \to \frac{٥}{٢}^-} \frac{٢ س - ٤}{٤ س^٢ - ٢٥} = \frac{١}{\text{صفر}^-}$

إذن $\lim_{س \to \frac{٥}{٢}} \frac{٢ س - [٢س]}{٤ س^٢ - ٢٥}$ **غير موجودة**

جـ) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤ - ٤ س + س^٢}}{٢ - س} = \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{(س - ٢)^٢}}{٢ - س} = \lim_{س \to ٢} \frac{|س - ٢|}{٢ - س}$

نعيد تعريف $\frac{|س - ٢|}{٢ - س}$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$\frac{|س - ٢|}{٢ - س} = \begin{cases} -١ & ، س > ٢ \\ ١ & ، س < ٢ \end{cases}$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢^+} \frac{\sqrt{س^٢ + ٤ س - ٤}}{٢ - س} = \text{نهـــا}_{س \to ٢^+} (-١) = -١$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢^-} \frac{\sqrt{س^٢ + ٤ س - ٤}}{٢ - س} = \text{نهـــا}_{س \to ٢^-} ١ = ١$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س^٢ + ٤ س - ٤}}{٢ - س}$$ غير موجودة

د) بما أن كلاً من البسط والمقام غير معرفين على يسار العدد ٧ فإن النهاية غير موجودة.

هـ) $$\text{نهـــا}_{ص \to ١} \frac{ص - ٤\sqrt{ص} + ٣}{ص^٢ - ١} = \text{نهـــا}_{ص \to ١} \frac{(ص + ٣) - ٤\sqrt{ص}}{ص^٢ - ١} \times \frac{(ص + ٣) + ٤\sqrt{ص}}{(ص + ٣) + ٤\sqrt{ص}}$$

$$= \text{نهـــا}_{ص \to ١} \frac{(ص + ٣)^٢ - ١٦ ص}{(ص^٢ - ١)(ص + ٣ + ٤\sqrt{ص})} = \text{نهـــا}_{ص \to ١} \frac{ص^٢ + ٦ ص - ١٦ ص + ٩}{(ص^٢ - ١)(ص + ٣ + ٤\sqrt{ص})}$$

$$= \text{نهـــا}_{ص \to ١} \frac{(ص + ١)(ص - ٩)}{(ص - ١)(ص + ١)(ص + ٣ + ٤\sqrt{ص})} = \text{نهـــا}_{ص \to ١} \frac{ص - ٩}{(ص + ١)(ص + ٣)(ص + ٣ + ٤\sqrt{ص})}$$

$$= -\frac{٨-}{١٦} = -\frac{١}{٢}$$

السؤال الرابع

$$\text{نهـــا}_{س \to ٨} \frac{س\sqrt[٣]{س} - ١٦}{س - ٨} = \text{نهـــا}_{س \to ٨} \frac{س^{\frac{٤}{٣}} - ١٦}{س - ٨} \times \frac{س^{\frac{٨}{٣}} + ١٦ س^{\frac{٤}{٣}} + ٢٥٦}{س^{\frac{٨}{٣}} + ١٦ س^{\frac{٤}{٣}} + ٢٥٦} = \text{نهـــا}_{س \to ٨} \frac{س^٤ - ٢٦٤}{(س - ٨)(س^{\frac{٨}{٣}} + ١٦ س^{\frac{٤}{٣}} + ٢٥٦)}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٨} \frac{(س^٢ - ٦٤)(س^٢ - ٦٤)}{(س - ٨)(س^{\frac{٨}{٣}} + ١٦ س^{\frac{٤}{٣}} + ٢٥٦)} = \text{نهـــا}_{س \to ٨} \frac{(س - ٨)(س + ٨)(س^٢ + ٦٤)}{(س - ٨)(س^{\frac{٨}{٣}} + ١٦ س^{\frac{٤}{٣}} + ٢٥٦)}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٨} \frac{(س + ٨)(س^٢ + ٦٤)}{(س^{\frac{٨}{٣}} + ١٦ س^{\frac{٤}{٣}} + ٢٥٦)} = \frac{١٢٨ \times ١٦}{٣ \times ٢٥٦} = \frac{٨}{٣}$$

السؤال الخامس

$$[٢ س] = \begin{cases} ٢ & ، \quad ١ \le س < \frac{٣}{٢} \\ ٣ & ، \quad \frac{٣}{٢} \le س < ٢ \\ ٤ & ، \quad ٢ \le س < \frac{٥}{٢} \end{cases}$$

$\text{نهـــا}_{س \to أ} [٢ س] = ٣$، عندما $\frac{٣}{٢} < أ < ٢$

السؤال السادس

$$\text{نهـــا}_{س \to ك^+} د(س) = \text{نهـــا}_{س \to ك^+} \frac{س^2 - ٤}{س + ٢} = \text{نهـــا}_{س \to ك^+} \frac{(س + ٢)(س - ٢)}{س + ٢} = ك - ٢$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ك^-} د(س) = \text{نهـــا}_{س \to ك^-} ٣س = ٣ ك$$

تكون $\text{نهـــا}_{س \to ك} د(س)$ موجودة إذا كان $\text{نهـــا}_{س \to ك^+} د(س) = \text{نهـــا}_{س \to ك^-} د(س)$

أي أن $ك - ٢ = ٣ ك$ ومنه $ك = -١$

السؤال السابع

$$\text{نهـــا}_{س \to ٣} \left(\frac{س}{٩ - س^2} + \frac{٣ س}{س^3 - ٩ س} \right) = \text{نهـــا}_{س \to ٣} \frac{- س^2 + ٣ س}{س (س^2 - ٩)}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٣} \frac{- س (س - ٣)}{س (س - ٣)(س + ٣)} = \text{نهـــا}_{س \to ٣} \frac{-١}{س + ٣} = -\frac{١}{٦}$$

السؤال الثامن

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{٤٩^{س} - ٧^{س}}{١ - ٧^{س}} = \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{٧^{٢س} - ٧^{س}}{١ - ٧^{س}}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{٧^{س}(٧^{س} - ١)}{١ - ٧^{س}} = \text{نهـــا}_{س \to ٠} - ٧^{س} = -١$$

السؤال التاسع

بما أن $\text{نهـــا}_{س \to ١} ق(س)$ موجودة، إذن $\text{نهـــا}_{س \to ١^+} ق(س) = \text{نهـــا}_{س \to ١^-} ق(س)$

إذن يجب أن يكون (س − ١) عاملاً من عوامل البسط $س^3 - أ س + ٣$

أي أن $ق(١) = ١ - أ + ٣ =$ صفر ومنه $أ = ٤$

$$\text{نهـــا}_{س \to ١^+} ق(س) = \text{نهـــا}_{س \to ١^-} ق(س)$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ١^-} \frac{س^3 - ٤ س + ٣}{س - ١} = \text{نهـــا}_{س \to ١^-} (ب س - ٥)$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ١^+} \frac{(س - ١)(س^2 + س - ٣)}{س - ١} = \text{نهـــا} (ب س - ٥)$$

$-١ = ب - ٥$ ومنه $ب = ٤$

السؤال العاشر

نفرض أن ق (س) = أ س^{٢} − ب س − ٦

بما أن النهاية موجودة، إذن س − ٢ عامل من عوامل البسط، أي أن ق (٢) = صفرًا (نظرية العوامل)

إذن ق (٢)= ٤ أ − ٢ ب − ٦ = صفر ومنه ب = ٢ أ − ٣

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} \frac{\text{أ س}^{٢} - \text{ب س} - ٦}{\text{س} - ٢} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} \frac{\text{أ س}^{٢} - (٢\text{ أ} - ٣)\text{س} - ٦}{\text{س} - ٢}$$

$$= \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{أ س} + ٣)}{\text{س} - ٢} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow ٢} (\text{أ س} + ٣) = ٢\text{ أ} + ٣$$

اذن ٢ أ + ٣ = ٥ ومنه أ = ١

ب = ٢ × ١ − ٣ = − ١

السؤال الحادي عشر

بما أن $\text{نهـــا}_{س\leftarrow -٢} \frac{\text{ق (س)} + ٥}{\text{س} + ٢}$ موجودة وناتج تعويض − ٢ في المقام يساوي صفرًا فإن ناتج تعويض − ٢ في البسط يساوي صفرًا .

أي أن ق (−٢) + ٥ = ٠ ومنه ق (−٢) = − ٥

وبما أن ق كثير حدود فإن $\text{نهـــا}_{س\leftarrow -٢}$ ق (س) = ق (−٢)

إذن $\text{نهـــا}_{س\leftarrow -٢}$ ق (س) = − ٥

أ) $\text{نهـــا}_{س\leftarrow -٢}$ (ق (س) + ٢ س) = $\text{نهـــا}_{س\leftarrow -٢}$ ق (س) + $\text{نهـــا}_{س\leftarrow -٢}$ ٢ س = − ٥ − ٤ = − ٩

ب) $\text{نهـــا}_{س\leftarrow -٢}$ (ق^{٢} (س) + ٢ س) = $\text{نهـــا}_{س\leftarrow -٢}$ ق^{٢} (س) + $\text{نهـــا}_{س\leftarrow -٢}$ ٢ س = ٢٥ − ٤ = ٢١

الموضوع : نهاية الاقترانات الدائرية

السؤال الأول

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\text{حا س}}{س} = \frac{\text{حا}\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

السؤال الثاني

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} (\text{قاس} + \text{ظا } 4 س) = \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \text{قاس} + \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \text{ظا } 4 س = 1 + 0 = 1$$

السؤال الثالث

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{حا } 5 س}{8 س} = \frac{5}{8}$$

السؤال الرابع

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{حا}^2 3س}{س^2} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} (\frac{\text{حا } 3 س}{س})^2 = (\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{حا } 3 س}{س})^2 = 3^2 = 9$$

السؤال الخامس

نفرض أن $2 س^2 = هـ$ ، عندما $س \leftarrow 0$ فان $هـ \leftarrow 0$.

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{ظا } 2 س^2}{4 س^2} = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{\text{ظا هـ}}{2 هـ} = \frac{1}{2}$$

السؤال السادس

نفرض أن $س + 5 = هـ$.

عندما $س \leftarrow -5$ فإن $هـ \leftarrow 0$.

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -5} \frac{\text{حا}(س + 5)}{25 - س^2} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow -5} \frac{\text{حا}(س + 5)}{(5 - س)(5 + س)} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow -5} \frac{\text{حا}(س + 5)}{س + 5} \times \text{نهـــا}_{س \leftarrow -5} \frac{1}{5 - س}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{\text{حا هـ}}{هـ} \times \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{1}{10 - هـ} = 1 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

السؤال السابع

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{س - \text{حا } 3 س + \text{ظا } 5 س}{2 س - \text{ظا}^2 س} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\frac{س}{س} - \frac{\text{حا } 3 س}{س} + \frac{\text{ظا } 5 س}{س}}{\frac{2 س}{س} - \frac{\text{ظا}^2 س}{س}}$$

$$= \frac{\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} (\frac{س}{س} - \frac{\text{حا } 3 س}{س} + \frac{\text{ظا } 5 س}{س})}{\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} (\frac{2 س}{س} - \frac{\text{ظا } س}{س} \times \text{ظا } س)} = \frac{1 - 3 + 5}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$

السؤال الثامن

$$\text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{1-\text{جتا}\,2س}{2س^2} = \text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{1-(1-2\,\text{حا}^2 س)}{2س^2} = \text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{2\,\text{حا}^2 س}{2س^2}$$

$$= \text{نهـــا}_{س\to 0} \left(\frac{\text{حا}\,س}{س}\right)^2 = \left(\text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{\text{حا}\,س}{س}\right)^2 = 1$$

السؤال التاسع

السؤال العاشر

نفرض أن $\frac{س}{3} - \pi = هـ$ ، ومنه $س = 3هـ + 3\pi$ ، عندما $س \to 3\pi$ فإن $هـ \to 0$

$$\text{نهـــا}_{س\to 3\pi} \frac{\text{حا}\,س}{\pi - \frac{س}{3}} = \text{نهـــا}_{هـ\to 0} \frac{\text{حا}\,(3هـ + 3\pi)}{هـ}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ\to 0} \frac{\text{جا}\,3هـ\,\text{جتا}\,3\pi + 3\text{جتا}\,هـ\,\text{جا}\,3\pi}{هـ}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ\to 0} \frac{-\text{حا}\,3هـ}{هـ} = -3$$

السؤال الحادي عشر

$$\frac{\sqrt{1-\text{جتا}\,س}}{س} = \frac{\sqrt{1-(1-2\,\text{جا}^2\frac{س}{2})}}{س} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\text{جا}^2\frac{س}{2}}}{س} = \sqrt{2} \times \frac{|\text{جا}\frac{س}{2}|}{س}$$

$$\frac{|\text{جا}\frac{س}{2}|}{س} = \begin{cases} \frac{\text{جا}\frac{س}{2}}{س} & ، \quad س > 0 \\ \frac{-\text{جا}\frac{س}{2}}{س} & ، \quad س < 0 \end{cases}$$

$$\text{نهـــا}_{س\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\text{جتا}\,س}}{س} = \text{نهـــا}_{س\to 0^+} \frac{\sqrt{2}\,|\text{حا}\frac{س}{2}|}{س} = \sqrt{2}\,\text{نهـــا}_{س\to 0^+} \frac{\text{جا}\frac{س}{2}}{س} = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{نهـــا}_{س\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\text{جتا}\,س}}{س} = \text{نهـــا}_{س\to 0^-} \frac{\sqrt{2}\,|\text{حا}\frac{س}{2}|}{س} = \sqrt{2}\,\text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{-\text{جا}\frac{س}{2}}{س} = -\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{نهـــا}_{س\to 0} \frac{\sqrt{1-\text{جتا}\,س}}{س} \text{ غير موجودة}$$

الموضوع : نهاية الاقترانات الدائرية

السؤال الثاني عشر

نفرض أن $س^{٢} - ٦٤ = هـ$ ومنه $س^{٢} = هـ + ٦٤$

عندما $س \to ٨$ فان $هـ \to ٠$

$$\text{نهـا}_{س \to ٨} \frac{\text{جا}(س^{٢} - ٦٤)}{س - ٨} = \text{نهـا}_{س \to ٨} \frac{(س + ٨)\,\text{جا}(س^{٢} - ٦٤)}{س^{٢} - ٦٤}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{(\sqrt{هـ + ٦٤} + ٨)\,\text{جا}\,هـ}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} (\sqrt{هـ + ٦٤} + ٨) \times \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\text{جا}\,هـ}{هـ} = ١٦$$

السؤال الثالث عشر

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١ + \text{جا}\,٤س - \text{جتا}^{٢}\,٢س}{س} = \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}^{٢}\,٢س + \text{جتا}^{٢}\,٢س + ٢\,\text{جا}\,٢س\,\text{جتا}\,٢س - \text{جتا}^{٢}\,٢س}{س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{حا}\,٢س\,(\text{جا}٢س + ٢\,\text{جتا}\,٢س)}{س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}\,٢س}{س} \times \text{نهـا}_{س \to ٠} (\text{حا}\,٢س + ٢\,\text{جتا}\,٢س) = ٢ + ٢ = ٤$$

السؤال الرابع عشر

$$\text{نهـا}_{س \to أ} \frac{\text{جا}\,س - \text{حا}\,أ}{س - أ} = \text{نهـا}_{س \to أ} \frac{٢\,\text{جتا}\frac{س + أ}{٢}\,\text{جا}\frac{س - أ}{٢}}{س - أ}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to أ} \frac{\text{جا}\frac{س - أ}{٢}}{\frac{س - أ}{٢}} \times \text{نهـا}_{س \to أ} \text{جتا}\left(\frac{س + أ}{٢}\right) = ١ \times \text{جتا}\,أ = \text{جتا}\,أ$$

السؤال الخامس عشر

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\text{حا}\,أس}{٦س} = ٢ \Leftarrow \frac{أ}{٦} = ٢ \text{ ومنه } أ = ١٢$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}\,٥س}{ب\,س - س} = ٢ \Leftarrow \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\frac{\text{ظا}\,٥س}{س}}{\frac{ب\,س}{س} - \frac{س}{س}} = ٢$$

$$\frac{\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}\,٥س}{س}}{ب - ١} = ٢ \Leftarrow \frac{٥}{ب - ١} = ٢ \text{ ومنه } ب = \frac{٧}{٢}$$

الاستاذ حمزة ابو الفول
0772259503

الملاذ في مهارات الرياضيات
الصف الثاني الثانوي العلمي /المستوى الثالث
حل التمارين لوحدة النهايات والاتصال
رقم الصفحة ( )

الموضوع : النهاية في المالانهاية

السؤال الأول

أ) $\lim_{س \to \infty}$ ق (س) = صفرًا ب) $\lim_{س \to -\infty}$ ق (س) = ٢

السؤال الثاني

أ) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣ س - س^{٢}}{٦ + س^{٣}} = \lim_{س \to \infty} \frac{-س^{٢}}{س^{٣}} = \lim_{س \to \infty} \frac{-١}{س}$ = صفر

ب) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ س - ٩ س^{٤} - س^{٣}}{١ - ٥ س^{٤}} = \lim_{س \to \infty} \frac{-٩ س^{٤}}{-٥ س^{٤}} = \frac{٩}{٥}$

جـ) $\lim_{س \to -\infty} \frac{(١ + ٢ س^{٢})^{٢} + س^{٣}}{١ - س^{٣}} = \lim_{س \to -\infty} \frac{٤ س^{٤}}{-س^{٣}} = -٤ \lim_{س \to -\infty}$ س = ∞

د) $\lim_{س \to -\infty} \frac{س^{٥} - ٦ س + ٧}{(٦ - س)^{٣} + ٣ س^{٥}} = \lim_{س \to -\infty} \frac{س^{٥}}{٣ س^{٥}} = \frac{١}{٣}$

هـ) $\lim_{س \to \infty} \frac{س (٥ + ٢ س^{٣}) - ٧ س^{٤}}{٣ - \frac{١}{٢} س^{٤}} = \lim \frac{-٥ س^{٤}}{-\frac{١}{٢} س^{٤}} = ١٠$

و) $\lim_{س \to -\infty} \frac{|س^{٣}| - ٣ س^{٣}}{٨ س^{٣}} = \lim_{س \to -\infty} \frac{-س^{٣} - ٣ س^{٣}}{٨ س^{٣}} = \lim_{س \to -\infty} \frac{-٤ س^{٣}}{٨ س^{٣}} = -\frac{١}{٢}$

ز) $\lim_{س \to -\infty} \left(\frac{س^{٢} - ٢ س}{٣ + س^{٢}} - \frac{٧ س^{٤}}{٣ + س^{٦}} \right) = \lim_{س \to -\infty} \frac{س^{٢} - ٢ س}{٣ + س^{٢}} - \lim_{س \to -\infty} \frac{٧ س^{٤}}{٣ + س^{٦}}$

$= \lim_{س \to -\infty} \frac{س^{٢}}{س^{٢}} - \lim_{س \to -\infty} \frac{٧ س^{٤}}{س^{٦}} = ١ - \lim_{س \to -\infty} \frac{٧}{س^{٢}} = ١$

ح) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س^{٢}}{٢ + س} - \frac{٢ س^{٢}}{س + ٣} \right) = \lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢} (س + ٣) - ٢ س^{٢} (٢ + س)}{(٢ + س) (س + ٣)}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^{٣} + ٣ س^{٢} - ٤ س^{٢} - ٢ س^{٣}}{س^{٢} + ٥ س + ٦} \lim_{س \to \infty} \frac{-س^{٣}}{س^{٢}} = \lim_{س \to \infty}$ س = −∞

ط) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س + ٣}{١ - ٣ س} \right)^{-٢} = \lim_{س \to \infty} \left(\frac{١ - ٣ س}{س + ٣} \right)^{٢} = \lim_{س \to \infty} \frac{٩ س^{٢}}{س^{٢}} = ٩$

السؤال الثالث

بما أن النهاية موجودة ولا تساوي صفرًا

فإن درجة البسط = درجة المقام أي أن ن = ٦

$\lim_{س \to -\infty} \frac{-أ س^{٦}}{-٢ س^{٦}} = ٢$ ومنه $\frac{أ}{٢} = ٢$ إذن أ = ٤

السؤال الأول

قيم س التي عندها ق غير متصل هي س = ٠ ، س = ٢

السؤال الثاني

أولا: عندما س = −٢

نهـــــا د (س) = نهـــــا (٣ س^{٢} − ٥) = ١٢ − ٥ = ٧
س ← −٢$^{+}$ ، س ← −٢$^{+}$

نهـــــا د (س) = نهـــــا (١ − ٤س) = ١ + ٨ = ٩
س ← −٢$^{-}$ ، س ← −٢$^{-}$

نهـــــا د (س) غير موجودة وعليه فإن د غير متصل عند س = − ٢
س ← −٢

ثانيًا: عندما س = ٠

نهـــــا د (س) = نهـــــا (٣س^{٢} − ٥) = − ٥
س ← ٠ ، س ← ٠

د (٠) = − ٥

بما أن نهـــــا د (س) = د (٠)، فإن د (س) متصل عند س = ٠
س ← ٠

السؤال الثالث

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

ق (س) = { ظاس / س ، س < ٠ ؛ ١ − ٢ جتا س ، س ≤ ٠ }

نهـــــا ق (س) = نهـــــا (١− ٢ جتا س) = − ١
س ← ٠$^{+}$ ، س ← ٠$^{+}$

نهـــــا ق (س) = نهـــــا − ظاس / س = −١
س ← ٠$^{-}$ ، س ← ٠$^{-}$

نهـــــا ق (س) = − ١ ، ق (٠) = − ١
س ← ٠

بما أن نهـــــا ق (س) = −١ = ق (٠) ، إذن ق متصل عند س = ٠
س ← ٠

السؤال الرابع

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

ك (س) = { √(س − ٢) ، س > ٢ ؛ ٢ س − س^{٢} ، ٠ ≤ س ≤ ٢ ؛ س^{٢} − ٢ س ، س < ٠ }

أولا: عندما س = ٠

نهـــــا ك (س) = نهـــــا (٢ س − س^{٢}) = صفر
س ← ٠$^{+}$ س ← ٠$^{+}$

نهـــــا ك (س) = نهـــــا (س^{٢} − ٢ س) = صفر، ك (٠) = ٠
س ← ٠$^{-}$ س ← ٠$^{-}$

بما أن نهـــــا ك (س) = ك (٠) فإن ك متصل عند س = ٠
س ← ٠

ثانيًا: عندما س = ٢

نهـــــا ك (س) = نهـــــا $\sqrt{\text{س} - ٢}$ = صفرًا
س ← ٢$^{+}$ س ← ٢$^{+}$

نهـــــا ك (س) = نهـــــا (٢س − س^{٢}) = صفرًا
س ← ٢$^{-}$ س ← ٢$^{-}$

نهـــــا ك (س) = صفرًا، ك (٢) = صفرًا
س ← ٢

بما أن نهـــــا ك (س) = ك (٢) فإن ك متصل عند س = ٢
س ← ٢

السؤال الخامس

أولا: عندما س = ١

نهـــــا ق (س) = صفر، نهـــــا ق (س) = صفرًا
س ← ١$^{+}$ س ← ١$^{-}$

نهـــــا ق (س) = صفرًا، ق (١) = صفرًا،
س ← ١

إذن ق متصل عند س = ١ لأن نهـــــا ق (س) = ق (١)
س ← ١

ثانيًا: عند س = ٣

نهـــــا ق (س) = ١، نهـــــا ق (س) = ١
س ← ٣$^{+}$ س ← ٣$^{-}$

إذن نهـــــا ق (س) = ١ ، ق (٣) = ١
س ← ٣

ق متصل عند س = ٣ لأن نهـــــا ق (س) = ق (٣)
س ← ٣

السؤال السادس

نعيد تعريف الاقتران ك ٠ لاحظ أن $\sqrt{\text{س}^{٢}}$ = |س|

$$\text{ك (س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{حا س}}{\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \\ -\dfrac{\text{حا س}}{\text{س}} & ، \text{س} < ٠ \\ ١ & ، \text{س} = ٠ \end{cases}$$

نهـــــا ك (س) = نهـــــا $\dfrac{\text{حا س}}{\text{س}}$ = ١
س ← ٠$^{+}$ س ← ٠$^{+}$

نهـــــا ك (س) = نهـــــا $\dfrac{\text{حا س}}{\text{س}}$ = − ١
س ← ٠$^{-}$ س ← ٠$^{-}$

نهـــــا ك (س) غير موجودة وبناء عليه ك غير متصل عند س = ٠
س ← ٠

السؤال السابع

$$\text{نهـــا}_{س \to 1^+} \text{ د (س)} = \text{نهـــا}_{س \to 1^+} \frac{س\sqrt{س} - 1}{س - 1} \times \frac{س\sqrt{س} + 1}{س\sqrt{س} + 1}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to 1^+} \frac{س^3 - 1}{(س - 1)(س\sqrt{س} + 1)} = \text{نهـــا}_{س \to 1^+} \frac{س^2 + س + 1}{س\sqrt{س} + 1} = \frac{3}{2}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to 1^-} \text{ د (س)} = 2 \text{ أ}$$

بما أن د (س) متصل عند س = ١ فإن $\text{نهـــا}_{س \to 1}$ د (س) موجودة

$$\text{نهـــا}_{س \to 1^+} \text{ د (س)} = \text{نهـــا}_{س \to 1^-} \text{ د (س)}$$

$$\frac{3}{2} = 2 \text{ أ} \quad \text{ومنه أ} = \frac{3}{4}$$

$$\text{د (١)} = \text{نهـــا}_{س \to 1} \text{ د (س)} \text{ لأن د متصل عند س = ١ ومنه ب} = \frac{3}{2}$$

السؤال الثامن

أولا: نبحث في اتصال م (س) عند س = − ٢

$$\text{نهـــا}_{س \to -2^+} \text{ م (س)} = \text{نهـــا}_{س \to -2^+} \frac{\frac{1}{8} س^3 + 1}{س + 2} = \text{نهـــا}_{س \to -2^+} \frac{(\frac{1}{2} س + 1)(\frac{1}{4} س^2 - \frac{1}{2} س + 1)}{(س + 2)}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to -2^+} \frac{1}{2} (\frac{1}{4} س^2 - \frac{1}{2} س + 1) = \frac{3}{2}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to -2^-} \text{ م (س)} = \frac{3}{2}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to -2} \text{ م (س)} = \frac{3}{2} \text{ ، م (− ٢)} = \frac{3}{2}$$

م (س) متصل عند س = − ٢ لأن $\text{نهـــا}_{س \to -2}$ م (س) = م (− ٢)

ثانياً: نبحث اتصال هـ (س) عند س = − ٢

$$\text{نهـــا}_{س \to -2} \text{ هـ (س)} = \text{نهـــا}_{س \to -2} \frac{\text{جتا} \frac{\pi س}{4}}{س} = \text{صفرًا}$$

هـ (− ٢) = صفرًا

هـ (س) متصل عند س = − ٢ لأن $\text{نهـــا}_{س \to -2}$ هـ (س) = هـ (− ٢)

بما أن م ، هـ متصلان عند س = − ٢ فإن م + هـ متصل عند س = − ٢

السؤال التاسع

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} س^2 & ، \ س \geq 3 \\ 4 + 2 س & ، \ س < 3 \end{cases} \quad ، \quad \text{د (س)} = \begin{cases} 2 س & ، \ س \geq 3 \\ 5 & ، \ س < 3 \end{cases}$$

ق، د غير متصلين عند س = ٣ بينما ق + هـ متصل عند س = ٣

السؤال الأول

أولاً: عندما س > ١

د (س) = $\frac{١}{س}$ + ٥ = $\frac{٥ س + ١}{س}$ اقتران نسبي متصل على مجاله.

ثانيًا: عندما س < ١

د (س) = ٢ $س^{٢}$ + ٤ كثير حدود متصل على محاله.

ثالثًا: نبحث اتصال د عند س = ١

نهـــا د (س) = نهـــا ($\frac{١}{س}$ + ٥) = ٦، نهـــا د (س) = نهـــا (٢ $س^{٢}$ + ٤) = ٦
س ← ١+ س ← ١+ س ← ١- س ← ١-

إذن نهـــا د (س) = ٦ ، د (١) = ٦
س ← ١

د متصل عند س = ١ لأن نهـــا د (س) = د (١)
س ← ١

مما سبق د متصل على ح

السؤال الثاني

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

ف (س) = $\begin{cases} -(٢ س + ٧) & ، -٥ \geq س < -\frac{٧}{٢} \\ ٢ س + ٧ & ، -\frac{٧}{٢} \leq س \leq ٠ \end{cases}$

أولاً: ف (س) على صورة كثير حدود في الفترة [− ٥، $-\frac{٧}{٢}$) وفي الفترة (− $\frac{٧}{٢}$ ، ٠] فهو متصل في هاتين الفترتين.

ثانيًا: نبحث اتصال عندما س = − $\frac{٧}{٢}$

نهـــا ف (س) = نهـــا (٢ س + ٧) = صفرًا
س ← − $\frac{٧}{٢}$+ س ← − $\frac{٧}{٢}$+

نهـــا ف (س) = نهـــا − (٢ س + ٧) = صفرًا
س ← − $\frac{٧}{٢}$- س ← − $\frac{٧}{٢}$-

إذن نهـــا ف (س) = صفرًا ، ف (− $\frac{٧}{٢}$) = صفرًا
س ← − $\frac{٧}{٢}$

ف (س) متصل عند س = − $\frac{٧}{٢}$ لأن نهـــا ف (س) = ف (− $\frac{٧}{٢}$)
س ← − $\frac{٧}{٢}$

مما سبق ف متصل على [−٥ ، ٠]

السؤال الثالث

اولاً: في الفترة (– ٣، ∞) يكون ٢ س + ٦ > صفر، وكذلك نهـــا ك (س) = ك (أ)، وعليه يكون ك متصلاً على (–٣، ∞).
س ← أ

ثانيًا: نبحث اتصال ك عندما س = – ٣

نهـــا ك (س) = صفر، ك (– ٣) = صفرًا
س ← – ٣+

إذن ك متصل عند س = – ٣ من اليمين

مما سبق يكون ك (س) متصلاً على [– ٣ ، ∞)

السؤال الرابع:

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز الصحيح

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} -2 & ، -1 \geq س > -\frac{1}{2} \\ -1 & ، -\frac{1}{2} \geq س > 0 \\ 0 & ، س = 0 \\ 2س - 1 & ، 0 < س \leq 2 \end{cases}$$

أولاً: ق على شكل كثير حدود في الفترات [– ١، – $\frac{1}{2}$) ، (– $\frac{1}{2}$ ، ٠)، [٠ ، ٢] فهو متصل على هذه الفترات.

ثانيًا: نبحث اتصال ق عند س = – $\frac{1}{2}$.

نهـــا ق (س) = – ١، نهـــا ق (س) = – ٢
س ← – $\frac{1}{2}$+ س ← – $\frac{1}{2}$–

نهـــا ق (س) غير موجودة، وعليه فإن ق غير متصل عند س = – $\frac{1}{2}$
س ← – $\frac{1}{2}$

ثالثاً: نبحث اتصال ق عند س = ٠

نهـــا ق (س) = – ١ ، نهـــا ق (س) = – ١
س ← ٠+ س ← ٠–

نهـــا ق (س) = – ١ ، ق (٠) = ٠
س ← ٠

ق غير متصل عند س = ٠ لأن نهـــا ق (س) ≠ ق (٠)
س ← ٠

مما سبق ق متصل على [– ١ ، ٢] / {- $\frac{1}{2}$ ، ٠ }.

السؤال الخامس:

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$\text{د (س)} = \begin{cases} -1 & ، س < 0 \\ 1 & ، 0 < س < 1 \\ \frac{1}{2}س + \frac{1}{2} & ، س \leq 1 \end{cases}$$

اولاً: د (س) على شكل كثير حدود في الفترات (– ∞، ٠)، (٠ ، ١)، (١ ، ∞) فهو متصل على هذه الفترات .

ثانيًا: وغير معرف عند س = ٠ فهو غير متصل عند هذه النقطة.

نهـــــــا ك (س) = صفر، ك (– ٣) = صفرًا

ثالثاً: نبحث اتصال وعند س = ١

$\lim_{س \to ١^-}$ د (س) = ١، $\lim_{س \to ١^+}$ د (س) = ١

$\lim_{س \to ١}$ د (س) = ١، د (١) = ١

د متصل عند س = ١ لأن د (١) = $\lim_{س \to ١}$ د (س)

مما سبق د متصل على ح / {٠}

السؤال السادس

بما أن د متصل على ح، فهو متصل عند س = ٦

$\lim_{س \to ٦^+}$ د (س) = $\lim_{س \to ٦^+}$ $\frac{(س - ٦)(س + ٥)}{أ (س - ٦)}$ = $\frac{١١}{أ}$

$\lim_{س \to ٦^-}$ د (س) = ٦ ب

بما أن د متصل على ح، فإن $\lim_{س \to ٦^+}$ د (س) = $\lim_{س \to ٦^-}$ د (س) = د (١) ومنه

$\frac{١١}{أ}$ = ٦ ب = ١ ومنه أ = ١١ ، ب = $\frac{١}{٦}$

السؤال السابع

ق متصل على ح فهو متصل عند س = ٣ ٠ $\lim_{س \to ٣}$ ق (س) = ق (٣) = ١١

$\lim_{س \to ٣}$ $\frac{س^٢ - (٣ - ٢ جـ) س - ٦ جـ}{س - ٣}$ = $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{(س - ٣)(س + ٢ جـ)}{س - ٣}$ = ١١

إذن ٣ + ٢ جـ = ١١ ومنه جـ = ٤

السؤال الثامن

بما أن ق متصل على ح فهو معرف عند جميع قيم س ∋ ح

بما أن المقام ليس له جذور (المميز سالب)، إذن:

أ^٢ – ١٢ < ٠ ومنه أ^٢ < ١٢

$\sqrt{أ^٢}$ < $\sqrt{١٢}$ ومنه | أ | < $\sqrt{١٢}$ أي أن – $\sqrt{١٢}$ < أ < $\sqrt{١٢}$

الموضوع : حل اسئلة المراجعة

السؤال الأول

أ) $\lim_{س \to ٠} ق(س) =$ صفر ، $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٣$

$\lim_{س \to \infty} ق(س) = ١$ ، $\lim_{س \to -\infty} ق(س) = ١$

ب) $\{س: ٢ < س > ٣\}$ جـ) $\{-١ ، ٢ ، ٣\}$ د) $\{-١ ، ٠ ، ٢ ، ٣\}$

السؤال الثاني

أ) $\lim_{س \to ٤} \frac{٤٨ - ٣ س^٢}{س^٣ - ٦٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{-٣ (س - ٤)(س + ٤)}{(س - ٤)(س^٢ + ٤ س + ١٦)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{-٣ (س + ٤)}{س^٢ + ٤ س + ١٦} = \frac{-٣ \times ٨}{٤٨} = -\frac{١}{٢}$

ب) $\lim_{س \to -١} \frac{١}{س - ١} (\frac{١}{\sqrt{س}} - ١) = \lim_{س \to ١} \frac{١}{(\sqrt{س} - ١)(\sqrt{س} + ١)} \times \frac{١ - \sqrt{س}}{\sqrt{س}}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{١}{\sqrt{س}(\sqrt{س} + ١)} = -\frac{١}{٢}$

جـ) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢\sqrt{س} - ١}{س - ١} \lim_{س \to ١} \frac{س^٢\sqrt{س} - ١}{س - ١} \times \frac{س^٢\sqrt{س} + ١}{س^٢\sqrt{س} + ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س^٥ - ١}{(س - ١)(س٢\sqrt{س} + ١)} = \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^٤ + س^٣ + س^٢ + س + ١)}{(س - ١)(س\sqrt{س} + ١)} = \frac{٥}{٢}$

د) $\frac{\sqrt{١ + ٤ س^٢ + ٤ س^٢}}{٢ س + ١} = \frac{\sqrt{(٢ س + ١)^٢}}{٢ س + ١} = \frac{|٢ س + ١|}{٢ س + ١} = \begin{cases} ١ & ، س > -\frac{١}{٢} \\ -١ & ، س < -\frac{١}{٢} \end{cases}$

$\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^+} \frac{\sqrt{١ + ٤ س + ٤ س^٢}}{٢ س + ١} = \lim_{س \to -\frac{١}{٢}^+} (١) = ١$

$\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^-} \frac{\sqrt{١ + ٤ س + ٤ س^٢}}{٢ س + ١} = \lim_{س \to -\frac{١}{٢}^-} (١) = ١$

إذن $\lim_{س \to -\frac{١}{٢}} \frac{\sqrt{١ + ٤ س + ٤ س^٢}}{٢ س + ١}$ غير موجودة

هـ) $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{|س-3|-|2س+3|}{س} = \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{-(س-3)+(2س+3)}{س} = \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{س}{س} = 1$

و) $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{جتا}س - \text{جتا}\,5س}{س\ \text{جا}\,2س} = \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{-2\ \text{جا}\,3س\ \text{جا}(-2س)}{س\ \text{جا}\,2س}$

$= \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{2\ \text{حا}\,3س\ \text{حا}\,2س}{س\ \text{حا}\,2س} = \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{\text{حا}\,3س}{س} = 2\times 3 = 6$

ز) $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{س-1}{\text{حا}(س^3-1)} = \text{نهـا}_{س\to 1} \frac{(س-1)(س^2+س+1)}{(س^2+س+1)\ \text{حا}(س^3-1)}$

$= \text{نهـا}_{س\to 1} \frac{س^3-1}{(س^2+س+1)\ \text{جا}(س^3-1)}$

نفرض أن $س^3-1 = هـ$ ، عندما $س \to 1$ فإن $هـ \to 0$

$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{س-1}{\text{حا}(س^3-1)} = \text{نهـا}_{س\to 1} \frac{1}{س^2+س+1} \times \text{نهـا}_{س\to 1} \frac{س^3-1}{\text{حا}(س^3-1)}$

$= \frac{1}{3}\ \text{نهـا}_{هـ\to 0} \frac{هـ}{\text{جا}هـ} = \frac{1}{3}\times 1 = \frac{1}{3}$

ح) $\text{نهـا}_{س\to 0} \frac{1-\text{قا}س}{\text{ظا}^2 س} = \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{1-\text{قا}س}{\text{قا}^2 س - 1} = \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{1-\text{قا}س}{(\text{قا}س-1)(\text{قا}س+1)}$

$= \text{نهـا}_{س\to 0} \frac{-1}{\text{قا}س+1} = -\frac{1}{2}$

ط) $\text{نهـا}_{س\to 124} \frac{\sqrt[3]{س+1}-5}{س-124} = \text{نهـا}_{س\to 124} \frac{(س+1)^{\frac{1}{3}}-5}{س-124} \times \frac{(س+1)^{\frac{2}{3}}+5(س+1)^{\frac{1}{3}}+25}{(س+1)^{\frac{2}{3}}+5(س+1)^{\frac{1}{3}}+25}$

$= \text{نهـا}_{س\to 124} \frac{س+1-125}{س-124} \times \frac{1}{(س+1)^{\frac{2}{3}}+5(س+1)^{\frac{1}{3}}+25}$

$= \text{نهـا}_{س\to 124} \frac{1}{(س+1)^{\frac{2}{3}}+5(س+1)^{\frac{1}{3}}+25} = \frac{1}{75}$

ي) $\text{نهـا}_{س\to 2^+} \frac{س-[س]}{س^2-4} = \text{نهـا}_{س\to 2^+} \frac{س-2}{س^2-4} = \frac{1}{2}$

السؤال الثالث

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow 1} \frac{س^2+2س-3}{ق(س)-6} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow 1} \frac{\frac{س^2+2س-3}{س-1}}{\frac{ق(س)-6}{س-1}} = \frac{\text{نهـــا}_{س\leftarrow 1} \frac{س^2+2س-3}{س-1}}{\text{نهـــا}_{س\leftarrow 1} \frac{ق(س)-6}{س-1}}$$

$$= \frac{1}{8} \text{نهـــا}_{س\leftarrow 1} \frac{س2+2س-3}{س-1} = \frac{1}{8} \text{نهـــا}_{س\leftarrow 1} \frac{(س-1)(س+3)}{س-1} = \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2}$$

السؤال الرابع

أ) $\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{9-2س^3-(3+س)^3}{س^2+س^3+1} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{-3س^3}{س^3} = -3$

ب) $\text{نهـــا}_{س\leftarrow-\infty} \frac{6+س-س^4}{(1-س^2)^3} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow-\infty} \frac{-س^4}{-س^6} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow-\infty} \frac{1}{س^2} =$ صفر

جـ) $\text{نهـــا}_{س\leftarrow-\infty} \frac{9-2س^5}{7+س^4} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow-\infty} \frac{-2س^5}{س^4} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow-\infty} (-2س) = \infty$

د) $\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} (\frac{-س^2}{س+2} + \frac{2س^2}{3س+1})$

$$= \text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{-س^2(3س+1)+2س^2(س+2)}{(س+2)(3س+1)} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{-س^3+3س^2}{(س+2)(3س+1)}$$

$$= \text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{-س^3}{3س^2} = -\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{س}{3} = -\infty$$

السؤال الخامس

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{(1+2س^2)^2}{أس^2(1+س)^ن} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{4س^4}{(أس^2)(س^ن)} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{4س^4}{أس^{ن+2}} = -2$$

بما أن النهاية موجودة ولا تساوي صفرًا فإن درجة البسط = درجة المقام.

إذن (ن + ٢) = ٤ ومنه ن = ٢

كذلك $\frac{4}{أ} = -2$ ومنه أ = − ٢

السؤال السادس

بما أن د متصل عند س = ٠ فإن نهـــا د (س) = د (٠) = ٢
س ← ٠

ومنه نهـــا د (س) = ٢
س ← ٠+

نهـــا $\frac{س^{٢}+(١-أ)س}{أ س}$ = نهـــا $\frac{س(س+١-أ}{أ س}$ = $\frac{١-أ}{أ}$
س ← ٠+ س ← ٠+

$\frac{١-أ}{أ}$ = ٢ ومنه أ = $\frac{١}{٣}$

نهـــا د (س) = ٢
س ← ٠-

نهـــا $\frac{جا^{٢}(ب س)-س^{٢}}{س جا ٢ س}$ = نهـــا ($\frac{جا ب س}{س} \times \frac{جا ب س}{جا ٢ س} - \frac{س^{٢}}{س حا ٢ س}$)
س ← ٠- س ← ٠-

$= ب \times \frac{ب}{٢} - \frac{١}{٢} = \frac{ب-١}{٢}$

$\frac{ب^{٢}-١}{٢}$ = ٢ ومنه ب = $\pm \sqrt{٥}$

السؤال السابع

أولاً: عندما س > ٥، ل (س) اقتران نسبي معرف على مجاله فهو متصل على هذه الفترة

ثانيًا: عندما س < ٥، ٥ – س > ٠

كذلك نهـــا $\sqrt{٥-س}$ = ق (أ) لجميع قيم س في هذه الفترة، وعليه فإن ل (س) متصل على هذه الفترة،
س ← أ

وعليه فإن ل (س) متصل على هذه الفترة.

ثالثًا: نبحث اتصال ل عند س = ٥

نهـــا ل (س) = نهـــا $\sqrt{٥-س}$ = صفرًا
س ← ٥- س ← ٥-

نهـــا ل (س) = نهـــا ($\frac{س^{٢}-٢س-١٥}{٥س-س^{٢}} + \frac{٨}{٥}$)
س ← ٥+ س ← ٥+

= نهـــا ($\frac{(س-٥)(س+٣)}{س(٥-س)} + \frac{٨}{٥}$) = - $\frac{٨}{٥} + \frac{٨}{٥}$ = صفرًا
س ← ٥+

نهـــا ل (س) = ل (٥) وعليه فإن ل متصل عند س = ٥ وبالتالي ل متصل على ح .
س ← ٥

مما سبق ل (س) متصل على ح / {٥}.

السؤال الثامن

نعيد تعريف الاقتران ع دون استخدام رمزي القيمة المطلقة والصحيح.

$$ع(س) = \begin{cases} ١ - ٢س & ، -١ \geq س < \frac{١}{٢} \\ ٢س - ١ & ، \frac{١}{٢} \geq س \geq ١ \\ ٢ & ، ١ < س < ٢ \\ ٣ & ، ٢ \geq س < ٣ \end{cases}$$

أولًا: ع (س) على شكل كثير حدود في الفترات [− ١، $\frac{١}{٢}$)، [$\frac{١}{٢}$ ، ١)، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣] فهو متصل على هذه الفترات.

ثانيًا: نبحث اتصال ع عند س = $\frac{١}{٢}$

$$نهـــا_{س \leftarrow \frac{١}{٢}^{+}} ع(س) = نهـــا_{س \leftarrow \frac{١}{٢}^{+}} (٢س - ١) = صفرًا$$

$$نهـــا_{س \leftarrow \frac{١}{٢}^{-}} ع(س) = نهـــا_{س \leftarrow \frac{١}{٢}^{-}} (١ - ٢س) = صفرًا$$

$$نهـــا_{س \leftarrow \frac{١}{٢}} ع(س) = صفرًا، ع(\frac{١}{٢}) = صفرًا$$

بما أن $نهـــا_{س \leftarrow \frac{١}{٢}} ع(س) = ع(\frac{١}{٢})$ فإن ع (س) متصل عند س = $\frac{١}{٢}$.

ثالثاً: نبحث اتصال ع عند س = ١

$$نهـــا_{س \leftarrow ١^{+}} ع(س) = ٢، \quad نهـــا_{س \leftarrow ١^{-}} (س) = ١$$

$$نهـــا_{س \leftarrow ١} ع(س)$$ غير موجودة، وعليه فإن ع غير متصل عند س = ١

رابعاً: نبحث اتصال ع عند س = ٢

$$نهـــا_{س \leftarrow ٢^{+}} ع(س) = ٣ \quad ، \quad نهـــا_{س \leftarrow ٢^{-}} ع(س) = ٢$$

∴ $نهـــا_{س \leftarrow ٢} ع(س)$ غير موجودة، وعليه فإن ع غير متصل عند س = ٢

مما سبق الاقتران ع متصل على [− ١، ٣] / {١ ، ٢}.

السؤال الأول

أ) -2 ب) صفر٢ جـ) ٢ د) ∞ هـ) $\{-2، -1، 2\}$ و) $\{0، 2، -4\}$

السؤال الثاني

(١) جـ (١,٥) (٤) جـ $(-\frac{2}{3})$

(٢) أ (-10) (٥) د $(-\frac{1}{2})$

(٣) ب (٥٠) (٦) ب (٠ ، ٤)

السؤال الثالث

أ) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{1 - \text{ظتا س}}{\text{قتا س}} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{1 - \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}}{\frac{1}{\text{جا س}}} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\frac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{جا س}}}{\frac{1}{\text{جا س}}}$

$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} (\text{جا س} - \text{جتا س}) = -1$

ب) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow 1^-} \frac{\frac{1}{س+3} - \frac{1}{4}}{|س - 1|} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow 1^-} \frac{\frac{1}{س+3} - \frac{1}{4}}{1 - س} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow 1^-} \frac{\frac{4 - (س+3)}{4(س+3)}}{1 - س}$

$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow 1^-} \frac{1 - س}{4(1 - س)(س+3)} = \frac{1}{16}$

جـ) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -\infty} \left((\frac{1 + 2س}{س+3})^{-3} - \frac{9 + س^2}{س^2 - س^3} \right) = \text{نهـــا}_{س \leftarrow -\infty} \left(\frac{(س+3)^3}{(1+2س)^3} - \frac{9 + س^2}{س^2 - س^3} \right)$

$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow -\infty} \frac{س^3}{8 س^3} - \text{نهـــا}_{س \leftarrow -\infty} \frac{س^2}{-س^3} = \frac{1}{8} - \text{صفر} = \frac{1}{8}$

السؤال الرابع

نعيد كتابة ق دون استخدام رمز الصحيح

ق (س) =
$\begin{cases} -2 & ، -1 \geq س < -\frac{2}{3} \\ -1 & ، -\frac{2}{3} \geq س < -\frac{1}{3} \\ 0 & ، -\frac{1}{3} \geq س > 0 \\ 1 & ، س = 0 \\ 3س^2 + س & ، 0 < س \leq 4 \end{cases}$

أولاً: عندما س = $-\frac{١}{٣}$

نهـــــا ق (س) = صفرًا ، نهـــــا ق (س) = − ١
س ← $-\frac{١}{٣}^{+}$ ، س ← $-\frac{١}{٣}^{-}$

نهـــــا ق (س) غير موجودة، وبناءً عليه ق غير متصل عند س = $-\frac{١}{٣}$
س ← $-\frac{١}{٣}$

ثانيًا: عندما س = ٠

نهـــــا ق (س) = نهـــــا (٣ س^{٢} + س) = صفرًا، نهـــــا ق (س) = صفرًا
س ← ٠$^{+}$ ، س ← ٠$^{-}$

إذن نهـــــا ق (س) = صفرًا، ق (٠) = ١
س ← ٠

ق غير متصل عند س = ٠ لأن نهـــــا ق (س) ≠ ق (٠)
س ← ٠

السؤال الخامس

أولاً: الاقتران د اقتران نسبي ومعرف في الفترتين (− ∞ ، ٢)، (٢ ، ∞) فهو متصل عليهما.

ثانيًا: نبحث اتصال الاقتران د (س) عند س = ٢

نهـــــا د (س) = نهـــــا $\frac{\frac{١}{٢}\text{ س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} - ٢}$ = نهـــــا $\frac{\frac{١}{٢}\text{ س (س} - ٢)}{\text{س} - ٢}$ = ١
س ← ٢$^{-}$ س ← ٢$^{-}$ س ← ٢$^{-}$

= نهـــــا د (س) = نهـــــا $\frac{٥\text{ س} - ٨}{\text{س}}$ = $\frac{١٠ - ٨}{٢}$ = ١
س ← ٢$^{+}$ س ← ٢$^{+}$

نهـــــا د (س) = ١ ، د (٢) = ١
س ← ٢

د (س) متصل عند س = ٢ لأن نهـــــا د (س) = د (٢)
س ← ٢

مما سبق د (س) متصل على ح.

الأستاذ: حمزة أبو الفول
٠٧٧٢٢٥٩٥٠٣

الملاذ في مهارات الرياضيات
الصف الثاني الثانوي
التوجيهي
كورسات الملاذ في مهارات الرياضيات

جميع الفروع

كورسات الملاذ في الرياضيات للتوجيهي

الملاذ في الرياضيات / كورسات الفرع العلمي

١) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة النهايات والاتصال
٢) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة التفاضل
٣) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة تطبيقات التفاضل
٤) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة التكامل
٥) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / وحدة القطوع المخروطية
٦) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول للمستوى الثالث
٧) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول للمستوى الرابع
٨) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة للمستوى الثالث
٩) الملاذ في الرياضيات للفرع العلمي / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة للمستوى الرابع

لتحميل https://www.facebook.com/mathstawjehee الاجابات

الملاذ في الرياضيات / كورسات الفروع المشتركة

(الأدبي ، الشرعي ، الإدارة المعلوماتية ، الصحي ، الصناعي ، الفندقي)

١) الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / المستوى الثالث
٢) الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / المستوى الرابع
٣) الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول / للمستوى الثالث
٤) الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول / للمستوى الرابع
٥) الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة / للمستوى الثالث
٦) الملاذ في الرياضيات للفروع المشتركة / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة / للمستوى الرابع

لتحميل https://www.facebook.com/mathstawjehee الاجابات

الملاذ في الرياضيات / كورسات الفرع الصناعي

١) الملاذ في الرياضيات للفرع الصناعي / رياضيات اساسي
٢) الملاذ في الرياضيات للفرع الصناعي / رياضيات اساسي / اسئلة التدريبات والتمارين مع الحلول
٣) الملاذ في الرياضيات للفرع الصناعي / رياضيات اساسي / اسئلة الوزارة من ٢٠٠٧ الى اخر دورة

الملاذ في الرياضيات / ملخصات واسئلة متوقعة