المستوى الثالث
التوجيهي

المتميز في الرياضيات

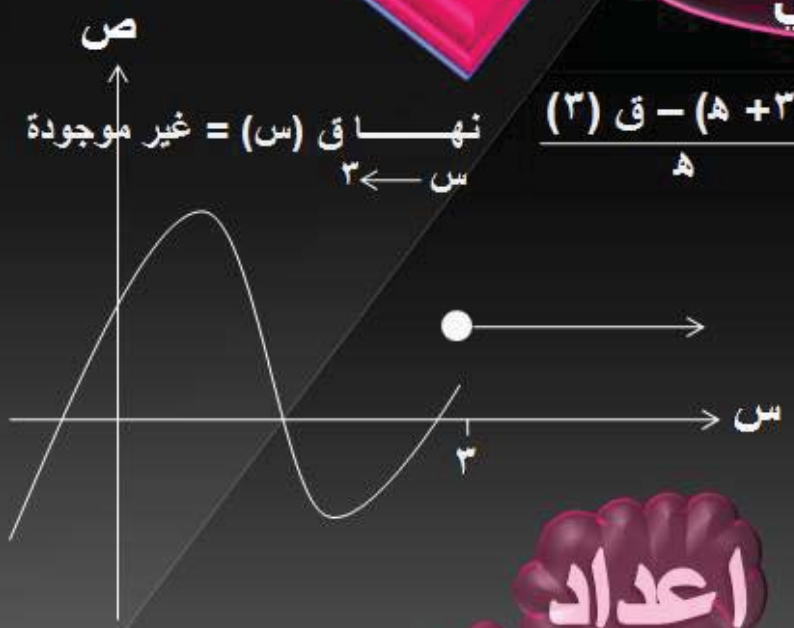
الادبـي

الادارة المعلوماتية

التعليم الشرعي/الصحي

$$ق'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٣+هـ) - ق(٣)}{هـ}$$

$$\lim_{س \to ٣} ق(س) = \text{غير موجودة}$$



إعداد

محمود الجزار
٠٧٨٦٩٠٩١٢١ ـ ٠٧٩٧٢٦٦٣٩٩

مصطفى المصري
٠٧٨٨٨٩٩٧٨٣ ـ ٠٧٩٩١٧١٥٣٥

تطلب من

مركز الاسطوره الثقافي
كلية حطين
٠٦٤٧٧٧٩٩٢

مركز إبن سيرين الثقافي
كلية حطين - فوق حلويات حبيبة
٠٧٨٧٥٠٦٠٣٨

مركز طوقان الثقافي
الياسمين/ دوار الخريطة

مكتبة أم القرى
مرج الحمام
٠٧٨٨٦٣٢٠٣٨/٠٧٩٩٨٥٢١٨٨

مكتبة طارق بن زياد
حي نزال / مثلث المدارس
٠٦٤٣٩٢٦٢٢

مكتبة قصص ١
حي أم تينة - شارع بنك الدم
٠٧٩٦٤٠٢٠٤٢

مكتبة القصص ٢
الأشرفية/ بجانب مدارس صلاح الدين
٠٧٩٦٤٠٢٠٤٢

مكتبة الإسراء
الأشرفية/ بجانب مدارس صلاح الدين
٠٧٩٦١٦٠٩٣٠

مكتبة حمزة
الوحدات / دخلة السهل
الاخضر
٠٦٤٧٤٨٠٧٨

مكتبة الشعاع
الزهور/ بجانب مسجد
الرواس
٠٧٨٨٣٥٧٣٠٤

مكتبة القناص
المقابلين
٠٧٩٥٣٥٤٣١٣

مكتبة اوراق الخريف
المقابلين
٠٧٨٨٣٢٦٤٣٤

مكتبة عاصم
كلية حطين
٠٧٩٩٨٨٩٨٠٤

مكتبة الشعاع
ضاحية الحاج حسن/ امام مدرسة
رقية للبنات
٠٧٨٥٩٨١٩٣١

الوحدة الاولى

النهايات والإتصال

مراجعة

الإقترانات:

أ) الإقتران الثابت ق(س)=جـ

أمثلة :-

1) ق(س)=٧ جد ق(٠) ، ق(١) ، ق(-٣)

الحل :- ق(٠) = ٧

ق(١) = ٧

ق(-٣) = ٧

2) إذا كان ق(س) = √٥ فجد ق(-٢)، ق(٣)

3) إذا كان ق(س) = -٣ فجد ق(-١) ، ق(٥)

ب) الإقتران الخطي ق(س)=أس+جـ

أمثلة :-

1) ق(س) = س فجد ق(٠) ، ق(١) ، ق(-١)

الحل :- ق(٠) = ٠

ق(١) = ١

ق(-١) = -١

2) ق(س) = ٧ - ٥ س ، فجد ق(١) ، ق(-٢)

الحل :- ق(١) = ٧ - ٥ × ١ = ٧ - ٥ = ٢

ق(٢) = ٧ - ٥ × ٢ = ٧ - ١٠ = -٣

3) ق(س) = ٤ س - ٧ ، فجد ق(-٢)، ق(٠)

4) ق(س) = ½ س - ١ ، فجد ق(١) ، ق(½)

ج) الإقتران التربيعي

ق(س) = أ س² + ب س + جـ

أمثلة :-

1) ق(س) = ٤ س² - ٧ فجد ق(٠)، ق(-١)

الحل :- ق(٠) = ٤ × ٠² - ٧ = ٠ - ٧ = -٧

ق(-١) = ٤ × (-١)² - ٧ = ٤ - ٧ = -٣

2) ق(س) = س² - ٢ س + ١ فجد ق(١)

3) ق(س) = س² - ٥ فجد ق(-٢)، ق(٠)

تحليل الإقتران التربيعي

س² - م² = (س - م)(س + م)

س² - ٤ = (س - ٢)(س + ٢)

س² - ٩ = (س - ٣)(س + ٣)

س² - ¼ = (س - ½)(س + ½)

٢س² - ٣٢ = ٢(س² - ١٦) = ٢(س - ٤)(س + ٤)

تمارين

1) س² - ٨١ =

2) س² - ٤٩ =

3) ٣ س² - ١٢ =

4) ٢س² - ٢٧ =

د) الإقتران النسبي، الكسري

أمثلة :

1) اذا كان ق(س) = (٢س² - ٧) / (س + ٥) اوجد ق(٠)، ق(١)

الحل: ق(٠) = (٢ × ٠² - ٧) / (٠ + ٥) = -٧/٥

ق(١) = (٢ × ١² - ٧) / (١ + ٥) = -٥/٦

2) ق(س) = (٢س³ - ٣س² + ١) / (س - ١) فجد ق(٢) ، ق(٠)

3) ق(س) = (٤ - ٢س) / س ، فجد ق(١)، ق(٢)

4) ق(س) = (٣س² - ١) / (٣ - س) ، فجد ق(-١)، ق(٣)

هـ) الاقترانات العليا

امثلة:

1) ق(س) = س³ - ٥ س + ١ ، فجد ق(١) ، ق(٠)

الحل :- ق(١) = (١)³ - ٥ × ١ + ١ = ١ - ٥ + ١ = -٣

ق(٠) = ٠³ - ٥ × ٠ + ١ = ١

2) ق(س) = ٢س - ٥ س³ + ٢ فجد ق(-١)، ق(٠)

3) ق(س) = س³ - ١ فجد ق(-٢) ، ق(٢)

4) ق(س) = س⁴ - ١٦ فجد ق(١)

٥ إذا كان ق(س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ٥س + ١
فجد ق(١) ، ق(-١) ، ق(٠)

٦ إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٣}-١}{٢س-٢}$

فجد ق(٠) ، ق(-٢) ، ق(٢)

٧ إذا كان ق(س) = ٣س^{٣} - ٢س + ١
فجد ق(١) ، ق(٢) ، ق(-٣)

و) الإقتران المتشعب يكون له اكثر من قاعدة

أمثلة :-

١ ق(س) = { س^{٢} - ٧س ، س < ١
{ $\sqrt{س+٣}$ ، ١ ≤ س ≤ ٣
{ ١٧ ، س > ٣

فجد ق(-١) ، ق(٢) ، ق(٣) ، ق(١) ،ق(٥)

الحل :-

ق(-١) = -(-١)^{٢} - ٧×-١ = (+٧+١ = ٨ القاعدة (١)

ق(٢) = $\sqrt{٢+٢}$ = $\sqrt{٥}$ القاعدة (١)

ق(٣) = $\sqrt{٣+٣}$ = $\sqrt{٦}$ القاعدة (٢)

ق(١) = $\sqrt{١+٣}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢ القاعدة (٢)

ق(٥) = ١٧ القاعدة (٣)

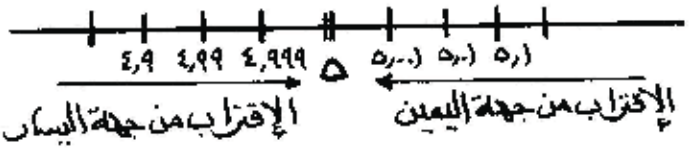
٢ ق(س) = { س - ١ ، س ≤ -١
{ س^{٢} + ٤ ، -١ < س < ٢
{ ٢س ، ١ ≤ س < ٥
{ ٣ ، س = ٥

فجد ق(١) ، ق(-٢) ، ق(٥) ، ق(-١)
ق(٢) ، ق(٠) .

إنتهت المراجعة

النهاية عند نقطة :- يرمز للنهاية بالرمز (نهـا)

مفهوم النهاية



نهـا ق(س) تعني النهاية عندما س تقترب من اليمين
س ← ٥+

نهـا ق(س) تعني النهاية عندما س تقترب من اليسار
س ← ٥-

نهـا ق(س) تعني النهاية عندما س تقترب من ٥
س ← ٥

ملاحظة س ← P هذا يعني ان س تقترب من العدد P ولكن س ≠ P .

النظرية الأساسية النهايات .

النهاية للاقتران ق(س) عند س ← P موجودة اذا كان للإقتران نفس النهاية من اليمين واليسار للعدد P .

بالرموز

* اذا كانت نهـا ق(س) = نهـا ق(س) = ل
س ← P+ ، س ← P-

فإن نهـا ق(س) = ل موجودة
س ← P

* اما إذا كانت نهـا ق(س) ≠ نهـا ق(س)
س ← P+ ، س ← P-

فإن نهـا ق(س) غير موجودة
س ← P

أ) الجدول التالي يبين سلوك ق(س) عندما س تقترب الى ٣ من الجانبين ، اليمين واليسار.

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	٣	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩
ق(س)	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١		١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩

إعتماداً على الجدول جد مايلي:

أ) $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) ب) $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) جـ) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

الحل:

أ) $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = ٤

ب) $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = ٢

جـ) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = غير موجودة

ج) جد $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) بإستخدام الجدول إن وجدت

س	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١	٤	٣,٩٩٩	٣,٩٩	٣,٩
ق(س)	٥,٢	٥,٠٢	٥,٠٠٢		-٣	-٣	-٣

الحل:

$\lim_{س \to ٤^+}$ ق(س) = ٥

$\lim_{س \to ٤^-}$ ق(س) = -٣

$\lim_{س \to ٤}$ ق(س) = غير موجودة

تمرين

ب) إعتماداً على الجدول التالي والذي يبين سلوك ق(س) عندما س ← ٢ جد مايلي:

س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩
ق(س)	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١		٤,٩٩٩	٤,٩٩	٤,٩

أ) ق(٢) ب) $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) جـ) $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س)

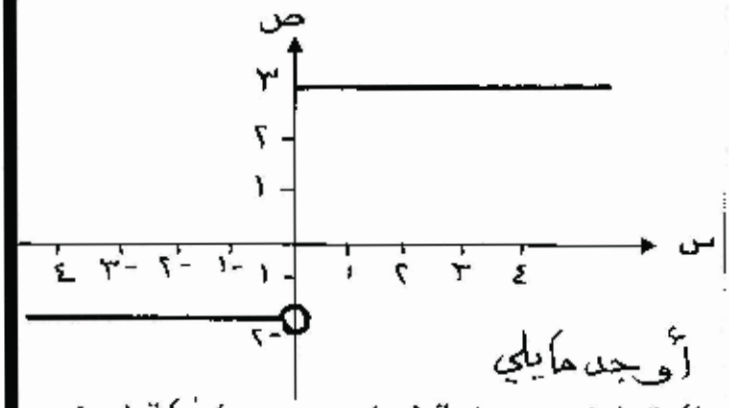
د) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

تمرين

د) بالاعتماد على الجدول الاتي الذي يبين قيم ق(س) عندما س ← ٣ جد $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س)

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	٣	٢,٩٩	٢,٩٨	٢,٩٠
ق(س)	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١		٥,٩٩	٥,٩٨	٥,٩

ب)



أوجد مايلي

١) ق(٠) ٢) ق(٣) ٣) $\lim_{س \to ٣} ق(س)$

٤) $\lim_{س \to ٠^+} ق(س)$ ٥) $\lim_{س \to ٠^-} ق(س)$ ٦) $\lim_{س \to ٠} ق(س)$

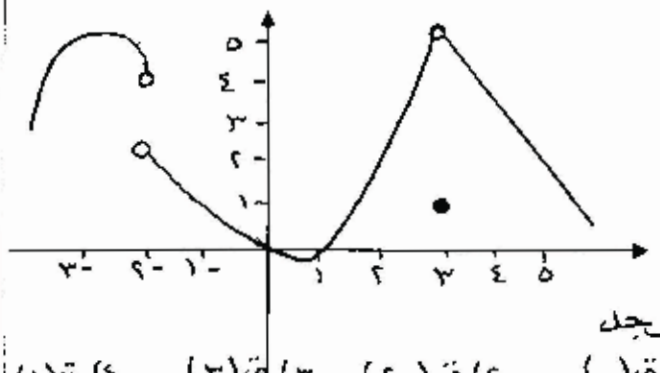
الحل:

١) ق(٠) = ٣ لأنها مخلفة عند ٣

٢) ق(٣) = ٣ ، ٣) $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ = ٣

٤) $\lim_{س \to ٠^+} ق(س)$ = ٣ ، ٥) $\lim_{س \to ٠^-} ق(س)$ = -٢

٦) $\lim_{س \to ٠} ق(س)$ غ ٣٠ لأن $\lim_{س \to ٠^+} ق(س) \neq \lim_{س \to ٠^-} ق(س)$



أوجد

١) ق(٠) ٢) ق(-٢) ٣) ق(٣) ٤) ق(١)

٥) $\lim_{س \to ٣^+} ق(س)$ ٦) $\lim_{س \to ٣^-} ق(س)$ ٧) $\lim_{س \to ٣} ق(س)$

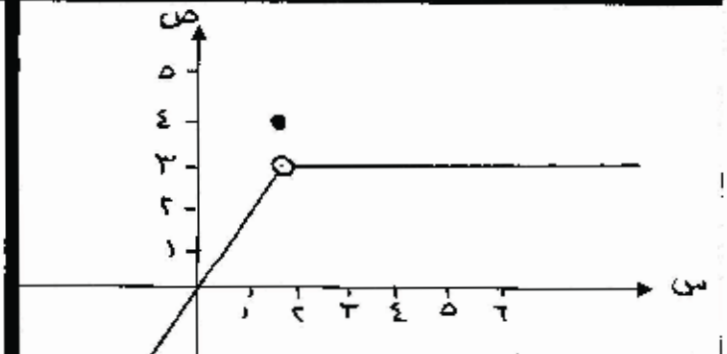
٨) $\lim_{س \to ١} ق(س)$ ٩) $\lim_{س \to -٢^-} ق(س)$ ١٠) $\lim_{س \to -٢^+} ق(س)$ ١١) $\lim_{س \to -٢} ق(س)$

الحل:- ١) ق(٠) = ٠ ، ٢) ق(-٢) = غ معرف

٣) ق(٣) = (، ٤) ق(١) = ٠ ، ٥) $\lim_{س \to ٣^+} ق(س)$ = ٥

٦) $\lim_{س \to -٣} ق(س)$ = ٥ ، ٧) $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ = ٥ ، ٨) $\lim_{س \to ١} ق(س)$ = ٠

٩) $\lim_{س \to -٢^-} ق(س)$ = ٤ ، ١٠) $\lim_{س \to -٢^+} ق(س)$ = ٢ ، ١١) $\lim_{س \to -٢} ق(س)$ غ



اوجد ١) $\lim_{س \to ٢^+} ق(س)$ ٢) $\lim_{س \to ٢^-} ق(س)$

٣) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ ، ٤) ق(٢) ، ٥) ق(١)

الحل:-

١) $\lim_{س \to ٢^+} ق(س)$ = ٢

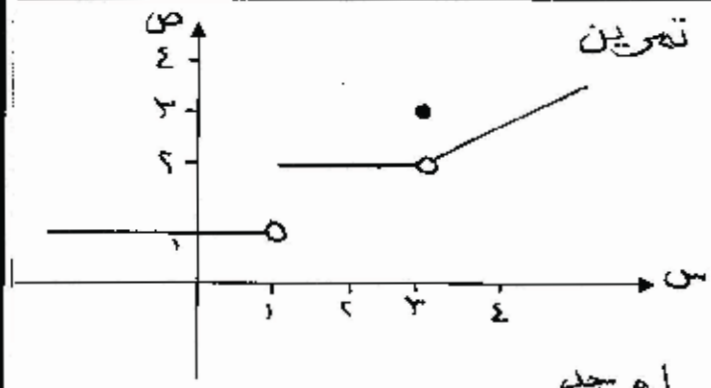
٢) $\lim_{س \to ٢^-} ق(س)$ = ٣

٣) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ = ٢

٤) ق(٢) = ٤

٥) ق(١) = (

تمرين

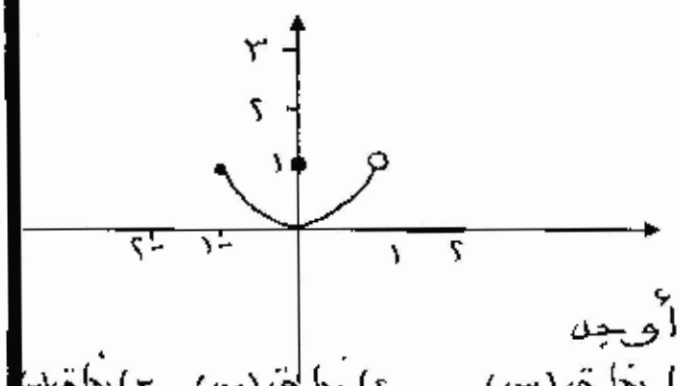


أوجد

١) $\lim_{س \to ١^+} ق(س)$ ٢) $\lim_{س \to ١^-} ق(س)$

٣) $\lim_{س \to ١} ق(س)$ ٤) $\lim_{س \to ٣^+} ق(س)$

٥) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ ٦) $\lim_{س \to ٠} ق(س)$



أوجد

١) $\lim_{س \to 1^+} ق(س)$

٢) $\lim_{س \to 0^-} ق(س)$

٣) $\lim_{س \to 0^+} ق(س)$

٤) $\lim_{س \to 0} ق(س)$

٥) $\lim_{س \to 1^+} ق(س)$

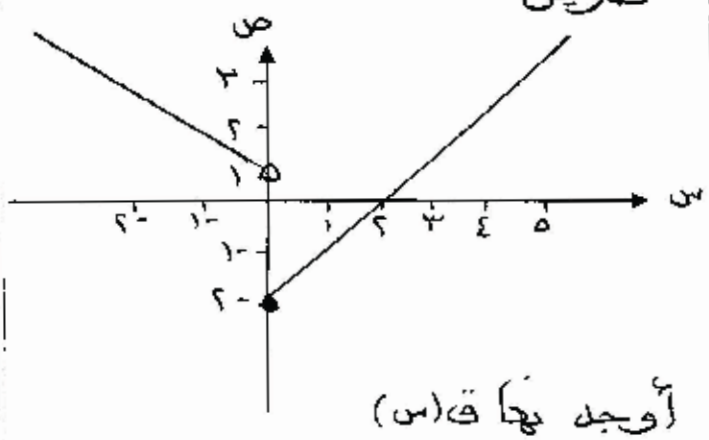
٦) $\lim_{س \to 1^-} ق(س)$

٧) $\lim_{س \to 2^+} ق(س)$

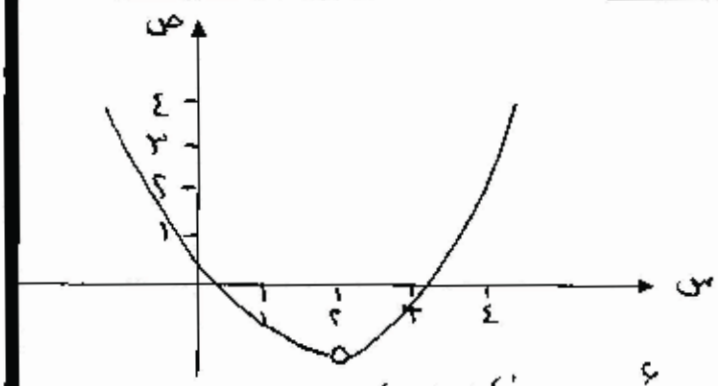
٨) $\lim_{س \to -2} ق(س)$

٩) $\lim_{س \to 2} ق(س)$

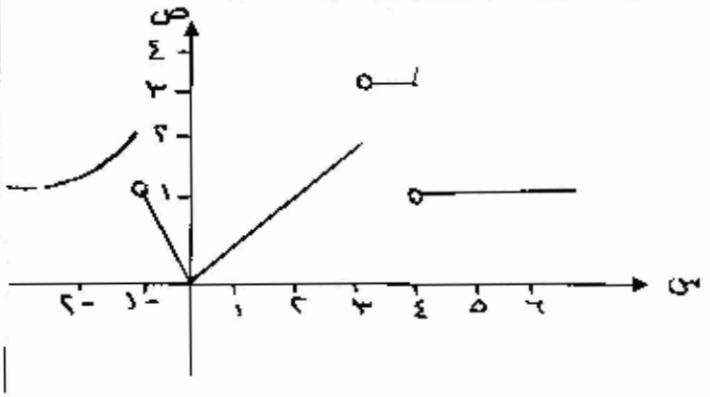
تمرين



أوجد $\lim_{س \to 0^+} ق(س)$



أوجد $\lim_{س \to 2} ق(س)$



جد قيم P التي تكون عندها

$\lim_{س \to P} ق(س)$ غ.م

ج) حساب النهاية بالتعويض

١ نهاية الاقتران الثابت

$\lim_{س \to ج} ق(س) = ق(ج) = ب$

أمثلة:

١ $\lim_{س \to ٢} ٣ = ٣$ ٢ $\lim_{س \to ٥} -٢ = -٢$

٣ $\lim_{س \to ٩} ٤ = ٤$ ٤ $\lim_{س \to ٣} ق = ق$

٥ $\lim_{س \to ٥} \sqrt{٣} = \sqrt{٣}$ ٦ $\lim_{س \to ١} \sqrt{٣} = \sqrt{٣}$

٢ نهاية الاقترانات

نعوض العدد بدلاً من س.

أمثلة:

١ $\lim_{س \to ٢} س - ١ = ٢ - ١ = ١$

٢ $\lim_{س \to ٣} س^٢ - ١ = ٣^٢ - ١ = ٩ - ١ = ٨$

٣ $\lim_{س \to ١} س^٣ + ٣س = ١^٣ + ٣ \times ١ = ٤$

٤ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ٩}{س + ٣} = \frac{٤^٢ - ٩}{٤ + ٣} = \frac{٧}{٧} = ١$

٥ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س + ٣} = \frac{٣^٢ - ٩}{٣ + ٣} = \frac{٠}{٦} =$ صفر

٦ $\lim_{س \to ٢} (س^٣ + ٤س^٢ - ٥س + ٤)$ ؟

الحل: $\lim_{س \to ٢} س^٣ + ٤س^٢ - ٥س + ٤ = ٨ + ١٦ - ١٠ + ٤ = ١٨$

٧ $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٢س - ١} + ٧}{س^٢ - ٥} = \frac{\sqrt{٢ \times ٥ - ١} + ٧}{٥ - ٥^٢} = \frac{١٠}{٢٠} = \frac{١}{٢}$

٨ $\lim_{س \to -٢} (٢س^٣ - ٥س)(س - ٢) = (٢ \times -٢^٣ - ٥ \times -٢)(-٢ - ٢)$
$= -١٦ + ٣٠ = ١٤$

٩ تمرين $\lim_{س \to ٣} (س^٢ - ٤)^٢$

١٢٥

١٠ $\lim_{س \to ١} (٣س + ٥)(س^٢ - ٢س + ٣)$

تمرين ١٦

١١ $\lim_{س \to ٢} (\frac{١}{س + ١} + س^٢ - ١)$

تمرين ٤

١٢ $\lim_{س \to ٣} (٢س - ٦)$

٠

١٣ $\lim_{س \to ٠} (٣س + ٢)^٤$

١٦

١٤ $\lim_{س \to -٢} (س^٣ + ٢س^٢ - ٩)$

-١٩

١٥ $\lim_{س \to ٨} (٣س + ٥) = ٢١$ جد قيمة (م)

الحل: $\lim_{س \to ٨} (٣س + ٥) = ٢١$

$٣ \times ٨ + ٥ = ٢١$

$٢٤ - ٥ = ٣ \times ٨$

$\frac{١٦}{٨} = \frac{٣ \times ٨}{٨} \Leftarrow ٣ = ٢$

١٦ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٤س + م}{س + ٣} = ٣$ فما قيمة م

الحل: $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٤س + م}{س + ٣} = ٣$

$\frac{١ + ٤ + م}{١ + ٣} = ٣$

$\frac{م + ٥}{٤} \times \frac{٣}{١} \Leftarrow ١٢ = م + ٥$

$م = ١٢ - ٥ = ٧$

١٧ تمرين

$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٢س + ١٢} - ٣}{م + ١} = \frac{١}{٢}$ جد قيمة م

١٨ $\lim_{س \to ١} \frac{٢س - ١}{م - س} = ١$

م = ١٢

١٩ $\lim_{س \to م} ٢س + ١ = ٥$

نهاية الجذور الزوجية

اذا كان الناتج بعد التعويض =-
نجد النهاية الاقتران من اليمين ثم نجدها اليسار

أمثلة

1) $\lim_{س\to ٢} \sqrt{س+٢} = \sqrt{٤} = ٢$

2) $\lim_{س\to ٣} \sqrt{٥-س} = \sqrt{-١} = -٣$ غير معرفة لان ماتحت الجذر سالب النهاية غير موجودة

3) $\lim_{س\to ٥} \sqrt{٥-س} = \sqrt{٥-٥} = ٠$ يجب تحديد المجال

الحل: $٥-س = ٠ \Leftarrow س = ٥$

	٥	
	٠	
خارج المجال	- - - -	+ + + +

$\lim_{س\to ٥^+} \sqrt{٥-س} = غ.م$

$\lim_{س\to ٥^-} \sqrt{٥-س} = ٠$ $\lim_{س\to ٥} \sqrt{٥-س} = غ.م$

4) $\lim_{س\to ٤} \sqrt{س-١}$ يجب تحديد المجال

الحل: $س-١ = ٠ \Leftarrow س = ١$

	١	
	٠	
خارج المجال	- - - -	+ + + +

$\lim_{س\to ١^+} \sqrt{س-١} = ٠$

$\lim_{س\to ١^-} \sqrt{س-١} = غ.م$ $\lim_{س\to ١} \sqrt{س-١} = غ.م$

5) $\lim_{س\to -٢} \sqrt{٤-س^٢}$ يجب تحديد المجال

6) $\lim_{س\to ٤} \sqrt{٣س-٥}$

7) $\lim_{س\to ٣} \sqrt{س-٣} = ٠$ الجذر الفردي لاتحدد المجال

8) $\lim_{س\to ١} \sqrt[٥]{٢س-٢}$

نهاية الإقترانات المتشعبة

يجب في هذه الحالة معرفة نوع النقطة المراد تعويضها اذا كانت

١- نقطة عادية نعوضها في القاعدة المقابلة مباشرة

٢- نقطة تحول ، تشعب
يجب ايجاد النهاية من اليمين واليسار لهذه النقطة

امثلة 1) $ق(س) = \begin{cases} س^٢+١ & ، س < ٤ \\ ٢س & ، س > ٤ \end{cases}$

أوجد ١- $\lim_{س\to ٥} ق(س)$ ، ٢- $\lim_{س\to ١} ق(س)$ ، ٣- $\lim_{س\to ٤} ق(س)$

الحل:

١- $\lim_{س\to ٥} س^٢+١ = ٥^٢+١ = ٢٦$ نقطة عادية

٢- $\lim_{س\to ١} ٢س = ٢\times ١ = ٢$ نقطة عادية

٣- $\lim_{س\to ٤} ق(س)$ نقطة تحول

$\lim_{س\to ٤^+} ٢س = ٢\times ٤ = ٨$

$\lim_{س\to ٤^-} س^٢+١ = ٤^٢+١ = ١٧$

لان $\lim_{س\to ٤^+} ق(س) \neq \lim_{س\to ٤^-} ق(س)$ $\lim_{س\to ٤} ق(س) = غ.م$

2) $ق(س) = \begin{cases} ٣س^٢-٢س & ، س < ٥ \\ ٢س+٣ & ، س \geq ٥ \end{cases}$ اوجد $\lim_{س\to ٥} ق(س)$

الحل: نقطة تحول

$\lim_{س\to ٥^-} ٣س^٢-٢س = ٣\times ٥^٢-٢\times ٥ = ٧٥-١٠ = ٦٥$

$\lim_{س\to ٥^+} ٢س+٣ = ٢\times ٥+٣ = ١٠+٣ = ١٣$

$\lim_{س\to ٥} ق(س) = غ.م$

٣) ق(س) = { س²-١ ، س < ٢ ; ٥ ، س = ٢ ; √(س+٧) ، س > ٢ }

فجد نهـا ق(س) ، نهـا ق(س) تمرين
س←٢ ، س←٣

٤) ق(س) = { ٢س²+٥ ، س < ٣ ; ١٧ ، ٣ ≤ س ≤ ٦ ; ٣س-١ ، س > ٦ }

فجد نهـا ق(س) ، نهـا ق(س) تمرين
س←٣ ، س←٦

٥) ق(س) = { ٢س-١ ، س ≤ ٢ ; ١ ، س > ٢ }

فجد نهـا ق(س) ، نهـا ق(س) تمرين
س←٢ ، س←١

٦) ق(س) = { س²-١ ، س < ١ ; ٢ ، ١ ≤ س < ٣ ; س-١ ، س > ٣ }

فجد نهـا ق(س) ، نهـا ق(س)
س←١ ، س←٣

٧) ق(س) = { √(س²+١) ، س < ٢ ; √(س+١٣) ، ٣ ≤ س < ٥ ; س-١ ، س > ٥ }

فجد نهـا ق(س) ، نهـا ق(س)
س←٣ ، س←٥

الثوابت

١) هـ(س) = { س²+٥ ، س < ٣ ; ٢٠ ، س = ٣ ; ٢س+٢ ، س > ٣ }

جد قيمة أ علماً بأن نهـا ق(س) موجودة
س←٣

الحل:

نهـا ق(س) = نهـا ق(س)
س←٣+ ، س←٣-

نهـا أ س + ٢ = نهـا س² + ٥
س←٣+ ، س←٣-

٣أ + ٢ = ٩ + ٥

٣أ + ٢ = ١٤

٣أ = ١٤ - ٢

٣أ = ١٢ ⇐ أ = ٤

٢) ق(س) = { ٥ س²-ل ، س < ٢ ; ل س + ٢ ، س ≥ ٢ }

وكانت نهـا ق(س) موجودة فما قيمة أ ؟
س←٢

الحل:

نهـا ل س + ٢ = نهـا ٥ س²-ل
س←٢+ ، س←٢-

٢ل + ٢ = ٢٠ - ل

٢ل + ل = ٢٠ - ٢

٣ل = ١٨

ل = ٦

٣) ل(س) = { ٢س - د ، س < ٤ ; د + س² ، س > ٤ }

جد قيمة د التي تجعل نهـا ق(س) موجودة
س←٤

د = -٤

د) إذا كان ناتج التعويض ← نقوم بما يلي :
١- التحليل أو التبسيط أو الضرب بالمرافق في حالة الجذور ثم نقوم بعد ذلك بالإختصار ثم التعويض مرة أخرى

أمثلة
[١] $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \frac{٣^٢ - ٩}{٣ - ٣} = \frac{٠}{٠}$ نحلل
الحل: $\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣} = ٦$

[٢] $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢} = \frac{٠}{٠}$
الحل: $\lim_{س \to -٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س + ٢)} = -٢ - ٢ = -٤$

[٣] $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٦}{س^٢ - ٩} = \frac{٦ - ٦}{٩ - ٩} = \frac{٠}{٠}$
الحل: $\lim_{س \to ٣} \frac{٢(س - ٣)}{(س - ٣)(س + ٣)} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

[٤] $\lim_{س \to -١} \frac{س^٢ + س}{س + ١} = \frac{١ - ١}{-١ + ١} = \frac{٠}{٠}$
الحل: $\lim_{س \to -١} \frac{س(س + ١)}{(س - ١)(س + ١)} = \frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$

[٥] تمرين
$\lim_{س \to ٠} \frac{س^٣ - س}{س^٣ - ٢س}$

[١/٢]

[٦] تمرين $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س^٢ - ٤}$

[١/٤]

[٧] $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٧س + ١٠}{س^٢ - ٥}$
الحل: $\lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(س - ٢)}{(س - ٥)(س + ٥)} = \frac{٥ - ٢}{٥ + ٥} = \frac{٣}{١٠}$

[٨] $\lim_{س \to ٢} \frac{٢ - س}{س^٢ - ٢س - ٣}$

[١/٣]

[٩] $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + س - ١٢}{س - ٣}$

[٧]

[١٠] $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^٢ - ٨}{٦ - ٣س}$

[٨/٣]

[١١] $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$

[٢]

[١٢] $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + س}{س}$

[١]

[١٣] $\lim_{س \to -١} \frac{س^٢ - ١}{س + ١}$

[-٢]

١٤) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٤}}{٤ - س} = \frac{\frac{١}{٤} - \frac{١}{٤}}{٤ - ٤} = \frac{٠}{٠}$ توحد المقامات

الحل :- $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{٤ - س}{٤س}}{٤ - س}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(٤ - س)}{٤س(٤ - س)}$

$= \frac{١}{٤ \times ٤} = \frac{١}{١٦}$

١٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - ٣ + \frac{٤}{س + ٦}}{س} = \frac{٠}{٠}$ توحد المقامات

الحل :- $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ٤س - ١٤}{(س - ٣)(س + ٦)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢س}{(س - ٣)(س + ٦)} = \frac{٢}{-٣ \times ٦}$

$= -\frac{١}{٩}$

١٦) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س + ١} - \frac{٢}{س + ٣}}{س^٢ - ١} = \frac{٠}{٠}$

الحل :- $\lim_{س \to ١} \frac{(س + ٣) - ٢(س + ١)}{(س + ١)(س + ٣)}$

$\lim_{س \to ١} \frac{س + ٣ - ٢س - ٢}{(س + ١)(س + ٣)}$

$\lim_{س \to ١} \frac{-(س - ١)}{(س + ١)(س + ٣)} = \frac{-١}{٨}$

١٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س^٢} - \frac{١}{٤}}{س - ٢}$

[١/١٤]

١٨) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{٣س + ١} - \frac{١}{٥}}{٣س - ٦}$

[-٢/٧٥]

١٩) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{١}{س - ٢} - \frac{٤}{س^٢ - ٤} \right)$

الحل :- $\lim_{س \to ٢} \frac{(س + ٢) ١}{(س + ٢)(س - ٢)} - \frac{٤}{س^٢ - ٤}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س + ٢ - ٤}{(س - ٢)(س + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{(س - ٢)(س + ٢)} = \frac{١}{٤}$

٢٠) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{س}{س - ٢} - \frac{س + ٢}{س - ١}}{س - ٤}$

[-١/٦]

٢١) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س^٣} - ١}{س - ١}$

[-٣/١]

٢٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{س^٢} - \frac{١}{٩}}{٣ - س}$

[-١/٩]

٢٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{٢}{س^٣} - \frac{١}{٤}}{س - ٢}$

[-١/٨]

الضرب بالمرافق

نضرب بالمرافق التربيعي للتخلص من الجذر
المرافق التربيعي لـ $(\sqrt{س}-م)$ هو $(\sqrt{س}+م)$
المرافق التربيعي لـ $(\sqrt{س}+م)$ هو $(\sqrt{س}-م)$
ناتج الضرب هو $س - م^2$

أمثلة

[1] $\lim_{س \to 2} \frac{\sqrt{2س}-2}{س-2}$ = $\frac{0}{0}$ نضرب بالمرافق

الحل:- $\lim_{س \to 2} \frac{\sqrt{2س}-2}{س-2} \times \frac{\sqrt{2س}+2}{\sqrt{2س}+2}$

$\lim_{س \to 2} \frac{2س-4}{(س-2)(\sqrt{2س}+2)}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{2(س-2)}{(س-2)(\sqrt{2س}+2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

[2] $\lim_{س \to 7} \frac{\sqrt{س-3}-2}{س-7}$ = $\frac{0}{0}$

الحل:- $\lim_{س \to 7} \frac{\sqrt{س-3}-2}{س-7} \times \frac{\sqrt{س-3}+2}{\sqrt{س-3}+2}$

$\lim_{س \to 7} \frac{س-3-4}{(س-7)(\sqrt{س-3}+2)}$

$\lim_{س \to 7} \frac{(س-7)}{(س-7)(\sqrt{س-3}+2)} = \frac{1}{4}$

[3] $\lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{س+1}-2}{س-3}$ = $\frac{0}{0}$

الحل:- $\lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{س+1}-2}{س-3} \times \frac{\sqrt{س+1}+2}{\sqrt{س+1}+2}$

$\lim_{س \to 3} \frac{س+1-4}{(س-3)(\sqrt{س+1}+2)}$

$\lim_{س \to 3} \frac{س-3}{(س-3)(\sqrt{س+1}+2)}$

$\lim_{س \to 3} \frac{1}{(\sqrt{س+1}+2)} = \frac{1}{4}$

[4] $\lim_{س \to 8} \frac{س-16}{\sqrt{س+1}-3}$

[5] $\lim_{س \to 4} \frac{س}{\sqrt{4س+16}-4}$

[6] $\lim_{س \to 2} \frac{\sqrt{س}-\sqrt{4-س}}{س-2}$

[7] $\lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{2س+3}-3}{س^2-9}$ = $\frac{0}{0}$

الحل:- $\lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{2س+3}-3}{(س-3)(س+3)} \times \frac{\sqrt{2س+3}+3}{\sqrt{2س+3}+3}$

$\lim_{س \to 3} \frac{2س+3-9}{(س-3)(س+3)(\sqrt{2س+3}+3)}$

$\lim_{س \to 3} \frac{2(س-3)}{(س-3)(س+3)(\sqrt{2س+3}+3)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

[8] $\lim_{س \to 5} \frac{\sqrt{س-1}-2}{\sqrt{س+4}-3}$

نظريات في النهايات

تتوزع النهاية في حالات الجمع والطرح والضرب والقسمة بشرط ان تكون النهاية موجودة

أي أنه اذا كانت :

$\lim_{س \to ب} ق(س) = ل$ ، $\lim_{س \to ب} هـ(س) = م$ فإن

١- $\lim_{س \to ب} (ق(س) \pm هـ(س)) = \lim_{س \to ب} ق(س) \pm \lim_{س \to ب} هـ(س) = ل \pm م$

٢- $\lim_{س \to ب} (جـ ق(س)) = جـ \times \lim_{س \to ب} ق(س) = جـ \times ل$

٣- $\lim_{س \to ب} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to ب} ق(س)}{\lim_{س \to ب} هـ(س)} = \frac{ل}{م}$ ، حيث $م \neq ٠$

٤- $\lim_{س \to ب} (ق(س) \times هـ(س)) = \lim_{س \to ب} ق(س) \times \lim_{س \to ب} هـ(س) = ل \times م$

٥- $\lim_{س \to ب} (ق(س))^{ن} = (\lim_{س \to ب} ق(س))^{ن} = ل^{ن}$

أمثلة :-

[١] إذا كانت $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٣$ فجد

$\lim_{س \to ٣} (٢ ق(س))$

الحل:- $\lim_{س \to ٣} (٢ ق(س)) = ٢ \times \lim_{س \to ٣} ق(س) = ٢ \times ٤ = ٨$

[٢] إذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س) = -٢$ ، $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ١$ فجد

$\lim_{س \to ٢} ٢ق(س) - \lim_{س \to ٢} ٣هـ(س)$

الحل:- $\lim_{س \to ٢} ٢ق(س) - \lim_{س \to ٢} ٣هـ(س) = ٢\lim_{س \to ٢} ق(س) - ٣\lim_{س \to ٢} هـ(س)$

$= ٢ \times -٢ - ٣ \times ١ = -٤ - ٣ = -٧$

[٣] $\lim_{س \to ٢} ق(س) = -٢$ ، $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٢$

فجد $\lim_{س \to ٣} ٢ق(س) + \lim_{س \to ٣} -٣هـ(س) + ٧$

الحل:-

$\lim_{س \to ٣} ٢ق(س) + \lim_{س \to ٣} -٣هـ(س) + ٧$

$= ٢\lim_{س \to ٣} ق(س) - ٣\lim_{س \to ٣} هـ(س) + \lim_{س \to ٣} ٧$

$= ٢ \times -٢ - ٣ \times ٢ + ٧ = -٤ - ٦ + ٧ = -٣$

[٤] إذا كانت $\lim_{س \to ١} ق(س) = -٣$ ، $\lim_{س \to ١} هـ(س) = -٢$ فجد

$\lim_{س \to ٢} (٢هـ(س) + س^{٢} - ٣س + ١)$

الحل:- $\lim_{س \to ٢} ٢هـ(س) + س^{٢} - ٣س + ١$

$= \lim_{س \to ٢} ٢هـ(س) + \lim_{س \to ٢} س^{٢} - \lim_{س \to ٢} ٣س + \lim_{س \to ٢} ١$

$= ٢ \times -٢ + ٤ - ٣ + ١ = -٤ + ٤ - ٣ + ١ = -٥$

[٥] اذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٥$ فما قيمة

$\lim_{س \to ٢} \sqrt[٣]{ق(س) + هـ(س)}$

الحل:- $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٣]{ق(س)+هـ(س)} = \sqrt[٣]{\lim_{س \to ٢} ق(س) + \lim_{س \to ٢} هـ(س)}$

$= \sqrt[٣]{٣ + ٥} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

[٦] إذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = -١$ فجد

$\lim_{س \to ٢} \frac{٢ق(س) + ٦}{هـ(س)}$

الحل:- $\lim_{س \to ٢} \frac{٢ق(س)+٦}{هـ(س)} = \frac{٢\lim_{س \to ٢} ق(س) + \lim_{س \to ٢} ٦}{\lim_{س \to ٢} هـ(س)}$

$= \frac{٢ \times ٤ + ٦}{-١} = \frac{٨ + ٦}{-١} = -١٨$

تمرين: اذا كانت $\lim_{س \to ١} ق(س) = -٢$ ، $\lim_{س \to ١} هـ(س) = ١$

فجد

[١] $\lim_{س \to ١} \frac{٢ق(س) + ٣}{هـ(س) + ٢}$

[٢] $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س)}{٣} + ٢هـ(س) - ٤س + ٣$

[٣] $\lim_{س \to ١} \sqrt{\frac{٤ق(س)}{٣هـ(س)}}$

[٤] $\lim_{س \to ١} (ق(س) \times هـ(س) + ٣س - ٥)$

[٥] $\lim_{س \to ١} (ق(س))^{٢}$

[٦] $\lim_{س \to ١} (٣هـ(س) + ٣س^{٢} - ٢س - ١)$

[٧] $\lim_{س \to ١} ق(س) - ٣هـ(س)$

[٨] $\lim_{س \to ١} (٤ق(س) - س + ٣س^{٢})$

٧ اذا كانت $\lim_{س \to ٥} (٤ق(س) - ٢س + ٣) = ٥$ فجد $\lim_{س \to ٥} ق(س)$

الحل:- نوزع النهاية

$٤ \lim_{س \to ٥} ق(س) - \lim_{س \to ٥} ٢س + \lim_{س \to ٥} ٣ = ٥$

$٤ \lim_{س \to ٥} - ١٠ + ٣ = ٥ \Leftarrow \lim_{س \to ٥} - ٧ = ٥$

$٤ \lim_{س \to ٥} = ١٢$ ← بالقسمة على ٤ ← $\lim_{س \to ٥} = ٣$

٨ اذا كانت $\lim_{س \to ٣} ٥ق(س) + ٣س - ٢ = ٧$ فجد

$\lim_{س \to ٣} (ق^{٢}(س) + ٤س + ١)$

الحل:- $٥ \lim_{س \to ٣} ق(س) + \lim_{س \to ٣} ٣س - \lim_{س \to ٣} ٢ = ٧$

$٥ \lim_{س \to ٣} ق(س) + ٩ - ٢ = ٧ \Leftarrow ٥ \lim_{س \to ٣} ق(س) = ٠$

$\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٠$

$\lim_{س \to ٢} ق^{٢}(س) + ٤س + ١ = (\lim_{س \to ٣} ق(س))^{٢} + \lim_{س \to ٣} ٤س + \lim_{س \to ٣} ١$

$= ٠ + ١٢ + ١ = ١٣$

٩ إذا كانت $\lim_{س \to ١} ق(س) + ٢هـ(س) - ٤ = ١٢$

وكانت $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٣$ ، فجد $\lim_{س \to ١} هـ(س)$

الحل:

١٠ إذا كان ق(س) كثير حدود بحيث أن

ق(٢) = ٦ فجد $\lim_{س \to ٢} (ق(س) - ٣س + ٤)$

الحل:-

١١ اذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٥$

فجد $\lim_{س \to ٢} ٦س ق(س) + ٣$

٦٣

١٢ اذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٤$ ، فإن $\lim_{س \to ٤} (س ق(س))$

٥٦

النهاية عندما الانهاية " ∞ "

● اولاً كثيرات الحدود

$(\pm ∞)^{ن} = +∞$ اذا كان ن عدد زوجي

$(-∞)^{ن} \leftarrow ∞$ اذا كان ن عدد زوجي

$-∞$ اذا كان ن عدد فردي

امثلة

١ $\lim_{س \to ∞} ٤ = ٤$

$\lim_{س \to ∞} \sqrt{س} = ∞$

$\lim_{س \to ∞} ثابت = ثابت$.

٢ $\lim_{س \to ∞} س^{٢} - ٥س + ٤$ نأخذ اكبر اس

الحل:- $\lim_{س \to ∞} س^{٢} = ∞$

٣ $\lim_{س \to ∞} (س^{٣} - ٢س^{٢} + س - ٧)$

الحل:- $\lim_{س \to ∞} س^{٣} = (-∞)^{٣} = -∞$

٤ $\lim_{س \to ∞} (٤ - ٥س - س^{٢})$

الحل:- $\lim_{س \to ∞} - س^{٢} = -(-∞)^{٢} = -(-∞) = ∞$

٥ $\lim_{س \to ∞} (١ - س^{٢} - ٤س^{٣})$

الحل:- $\lim_{س \to ∞} - ٤س^{٣} = -٤(∞) = -∞$

٦ $\lim_{س \to ∞} (٢س + ١)^{٥} - ٤س + ٨)$

الحل:- $\lim_{س \to ∞} (٢س)^{٥} = -∞$

الإقتران النسبي " الكسري "

نأخذ $\frac{\text{الحد الاعلى قوة في البسط}}{\text{الحد الاقل قوة في المقام}}$

ثم نختصر قدر الامكان

ملاحظة $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}} = \text{صفر}$

$\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}} = \text{صفر}$

[1] $\lim_{س \to صفر} \frac{٤س^٢ + ٣س - ٧}{٢س^٣ - ٣س^٢ + ٢}$

الحل: $\lim_{س \to صفر} \frac{٤س^٢}{٢س^٣} = \lim_{س \to صفر} \frac{٢}{س}$

$= \frac{٢}{صفر} = صفر$

[2] $\lim_{س \to صفر} \frac{س^٢ + ٣س - ٦}{٤س^٣ + ٥}$

$\frac{-٦}{٥}$

[3] $\lim_{س \to صفر} \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{٥س^٣ + ٣س - ٢}$

الحل: $\lim_{س \to صفر} \frac{٢}{٥} = \frac{٢}{٥}$

[4] $\lim_{س \to صفر} \frac{س^٢ + ٢س - ٥}{٣س^٢ - ٢س + ٢}$

تمرين

$\frac{-١}{٣}$

[5] $\lim_{س \to صفر} \frac{٣ - ٢س^٥}{س - ١}$

تمرين

-٥

[6] $\lim_{س \to صفر} \frac{٤س^٥ + ٣س - ٧}{٢س^٣ - ٣س^٢ + ٢}$

الحل: $\lim_{س \to صفر} \frac{٤س^٥}{٢س^٣} = \lim_{س \to صفر} ٢س^٢$

$= صفر$

[7] $\lim_{س \to صفر} \frac{س^٣ + ٣س - ٦}{٤س^٣ + ٥}$

$\frac{-٦}{٥}$

[8] جد $\lim_{س \to صفر} \frac{س^٣ - ٣س - ٢}{س^٢ - ٢س}$

[9] $\lim_{س \to صفر} \frac{س^٥ + ٤س^٢}{٧س^٥ - ٣س^٢}$

الحل:

$\lim_{س \to صفر} \frac{س^٥}{٧س^٥} = \lim_{س \to صفر} \frac{١}{٧}$

$= \frac{١}{صفر} = صفر$

[10] $\lim_{س \to صفر} \frac{س^٢ - (٢س + ١)^٤}{٢س^٣ + س^٢}$

الحل: $\lim_{س \to صفر} \frac{-(٢س)^٤}{٢س^٣}$

$= \lim_{س \to صفر} \frac{-١٦س^٤}{٢س^٣} = \lim_{س \to صفر} -٨س = صفر$

[11] $\lim_{س \to صفر} \frac{(٢س - ٣س^٢)^٢}{٢س^٤ + ٥س - ١}$

$\frac{٩}{٢}$

١٢ $\lim_{س \to -\infty} \frac{(٢س + ٣س^{٢})^{٢}}{٦س - س^{٦}}$

-٩

١٣ $\lim_{س \to -\infty} \frac{(س - ٣س^{٢})^{٣}}{٢س^{٦} - ١}$

$\frac{-٢٧}{٤}$

١٤ اذا كان ق(س) = $\frac{٧}{س-٢}$ فجد $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

الحل: نبحث اشارة ق حول العدد (٢)

$\lim_{س \to ٢^{+}} \frac{٧}{س-٢} = \infty$

$\lim_{س \to ٢^{-}} \frac{٧}{س-٢} = -\infty$

∴ $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ = غ.م

١٥ اذا كان ق(س) = $\frac{١}{س-٣}$ فجد $\lim_{س \to ٣^{+}} ق(س)$

الحل:

$\lim_{س \to ٣^{+}} \frac{١}{س-٣} = \infty$

١٦ اذا كان ق(س) = $\frac{١}{٢-س}$ فجد $\lim_{س \to ٢^{+}} ق(س)$

الحل:

$\lim_{س \to ٢^{+}} \frac{١}{٢-س} = -\infty$

١٧ ق(س) = $\frac{١}{٣س-٣}$ ، فجد $\lim_{س \to ١} ق(س)$

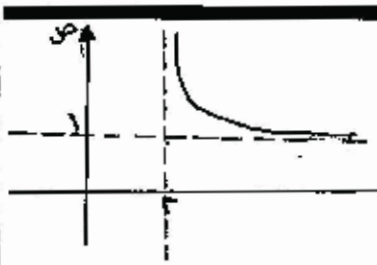
١٨ $\lim_{س \to ٣^{+}} \frac{١}{٢س-٦}$

١٩ $\lim_{س \to ١^{+}} \frac{١}{١-س}$

٢٠ $\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^{-}} \frac{١}{س - -\frac{١}{٢}}$

٢١ $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^{٢}}$

٢٢ بالاعتماد على الشكل المجاور جد $\lim_{س \to \infty} ق(س)$



٢٣ $\lim_{س \to -١^{+}} \frac{١}{س+١}$

الإتصال

1. الإتصال عند نقطة
2. الاتصال على ح
3. نظريات في الاتصال

1 الإتصال عند نقطة

يكون الاتصال عند نقطة عندما يتحقق الشرط التالي

$$\lim_{س \to P^+} ق(س) = \lim_{س \to P^-} ق(س) = ق(P)$$

عند عدم تحقق الشرط فإن الإقتران يصبح غير متصل عند $س = P$

ملاحظة: كثيرات الحدود دائماً متصلة

أمثلة

1) $ق(س) = \begin{cases} 3س^2 + 1 & ، س < -1 \\ 2س - 1 & ، -1 \leq س \leq 2 \\ \sqrt{5س - 1} & ، س > 2 \end{cases}$

إبحث الإتصال عند P- $س = -1$

ب- $س = 2$

جـ- $س = 1$

الحل :-

P- عند $س = -1$ نقطة تحول

$$\lim_{س \to -1^+} ق(س) = \lim_{س \to -1^+} 2س - 1 = 2 \times -1 - 1 = -3$$

$$\lim_{س \to -1^-} ق(س) = \lim_{س \to -1^-} 3س^2 + 1 = 3 \times (-1)^2 + 1 = 4$$

$ق(-1) = 2 \times -1 - 1 = -3$

$\lim_{س \to -1^+} ق(س) \neq \lim_{س \to -1^-} ق(س) \neq ق(-1)$

ب- عند $س = 2$

$$\lim_{س \to 2^+} ق(س) = \lim_{س \to 2^+} \sqrt{5س - 1} = \sqrt{5 \times 2 - 1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lim_{س \to 2^-} ق(س) = \lim_{س \to 2^-} 2س - 1 = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$ق(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$

$\lim_{س \to 2^+} ق(س) = \lim_{س \to 2^-} ق(س) = ق(2)$

ق(س) متصل عند $س = 2$

جـ- $س = 1$ نقطة عادية في القاعدة الثانية

$$\lim_{س \to 1^+} ق(س) = \lim_{س \to 1^+} 2س - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = \lim_{س \to 1^-} 2س - 1 = 2 \times -1 - 1 = -3$$

$ق(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$

$\lim_{س \to 1^+} ق(س) = \lim_{س \to 1^-} ق(س) = ق(1)$

2 الاتصال على ح

تمرين: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 - 3 & ، س < -1 \\ 2 & ، -1 \leq س \leq 3 \\ 4 & ، س > 3 \end{cases}$

إبحث الاتصال عند $س = -1$ ، $س = 3$

$س = 2$ ، $س = 0$

٣ اذا كان ق(س) = { س² - ٥ ، س ≤ ٣ ; ٣س - ٥ ، س > ٣

ابحث الاتصال عند س = ٣

الحل :- $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣^+}$ س² - ٥ = ٩ - ٥ = ٤

$\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣^-}$ ٣س - ٥ = ٩ - ٥ = ٤

ق(٣) = ٣² - ٥ = ٤

$\lim_{س \to ٣^+}$ س² - ٥ = $\lim_{س \to ٣^-}$ ٣س - ٥ = ق(٣) ∴ متصل عند س = ٣

٤ إذا كان ق(س) = { (س² - ٩)/(س - ٣) ، س ≠ ٣ ; ٥ ، س = ٣

هل ق(س) متصل عند س = ٣

الحل :- $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣}$ (س² - ٩)/(س - ٣)

= $\lim_{س \to ٣}$ (س - ٣)(س + ٣)/(س - ٣) = ٣ + ٣ = ٦

ق(٣) = ٥

$\lim_{س \to ٣}$ ق(س) ≠ ق(٣)

ق(س) غير متصل عند س = ٣

٥ اذا كان ق(س) = { س² ، س < ١ ; ٣س + ١ ، س ≥ ١

ابحث الاتصال عند س = ١

٦ اذا كان ق(س) = { (س² - ٤)/(س - ٢) ، س ≠ ٢ ; ٤ ، س = ٢

ابحث الاتصال عند س = ٢

٧ ق(س) = { ٩ - س² ، إذا س < ٢ ; ٤ - س ، إذا س ≥ ٢

ابحث الإتصال عند س = ٢

الحل :-

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^+}$ ٤ - س = ٤ - ٢ = ٢

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ ٩ - س² = ٩ - ٨ = ١

ق(٢) = ٤ - ٢ = ٢

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) ≠ ق(٢)

ق(س) غير متصل عند س = ٢

٨ ق(س) = { س² - ٤ ، س ≤ ٢ ; س + ٣ ، س > ٢

إبحث الاتصال عند س = ٢

٩ اذا كان ق(س) = { ٢س - ٥ ، س ≥ ١ ; ١ ، س < ١

ابحث اتصال ق(س) عند س = ١

١٠ اذا كان ق(س) = { س - ٢ ، س < ٣ ; ٢س - ٥ ، س ≥ ٣

ابحث اتصال ق(س) عند س = ٣

[1] الاتصال على ح ، جميع الاعداد الحقيقية

١- كثيرات الحدود متصلة على ح

٢- الاقترانات النسبية متصلة على ح ماعدا اصفار المقام لانها غير معرفة عند اصفار المقام .

أمثلة :-

[1] اذا كان ق(س) = س² - ٥س - ٧ إبحث اتصال الإقتران ق(س) على ح

الحل :-

ق(س) متصل على ح لانه كثير حدود

[2] ق(س) = $\frac{٥}{س-٧}$ ابحث الاتصال على ح

الحل :-

ق(س) متصل على ح بإستثناء س = ٧ لانه صفر مقام ق(س) غير معرف عند س = ٧

ق متصل على ح بإستثناء {٧}

[3] ق(س) = $\frac{س-٢}{س^٢-٥}$ إبحث الاتصال على ح

[4] ق(س) = $\frac{س-٩}{س^٢-٣س}$ ابحث الاتصال على ح

[5] ق(س) = $\frac{١-٢س}{س^٢+٩}$ ابحث الاتصال على ح

الحل :-

$س^٢ + ٩ = ٠$ لا تتحلل

لا يوجد اصفار مقام

ق(س) متصل على ح

[6] اذا كان ق(س) = { ١ ، س = ٣ ؛ $\frac{١+س٢}{س-١}$ ، ٣ < س < ٥ ؛ ٤ ، س = ٥

ابحث الاتصال على الفترة [٣ ، ٥]

الحل :- ● عند س = ٣ طرف بداية فترة يمين فقط

$نها_{س \to ٣^+} \frac{١+س٣}{١-س} = \frac{١+٩}{١-٣} = ٥$

ق(٣) = ؟

نها ق(س) ≠ ق(٣) غير متصل عند س = ٣

$س \to ٣^+$

● عند س = ٥ طرف نهاية فترة يسار فقط

$نها_{س \to ٥^-} \frac{١+س٣}{١-س} = \frac{١+١٥}{١-٥} = \frac{١٦}{٤} = ٤$

ق(٥) = ٤ ≠ نها ق(س) = ق(٥) متصل عند س = ٥

$س \to ٥^-$

● ق(س) متصل على الفترة [٣ ، ٥] بإستثناء س = ٣

[7] اذا كان ق(س) = { ٩ - س² ، ١ ≤ س < ٢ ؛ ٤ - س ، ٢ ≤ س ≤ ٣

ابحث في إتصال ق(س) على الفترة [١ ، ٣]

الحل :- ● عند س = ١ طرف

نها ٩ - س² = ٩ - ١ = ٨ نها ق(س) = ق(١)

$س \to ١^+$ $س \to ١^+$

ق(١) = ٩ - ١ = ٨ ق متصل عند س = ١

● عند س = ٣ طرف

نها ٤ - س = ٤ - ٣ = ١ نها ق(س) = ق(٣)

$س \to ٣^-$ $س \to ٣^-$

ق(٣) = ٤ - ٣ = ١ ق متصل عند س = ٣

● عند س = ٢ نحول

نها ٤ - س = ٤ - ٢ = ٢

$س \to ٢^+$

نها ٩ - س² = ٩ - ٨ = ١

$س \to ٢^-$

ق(٢) = ٤ - س = ٢

نها ق(س) ≠ نها ق(س) ≠ ق(٢)

$س \to ٢^+$ $س \to ٢^-$

ق غير متصل عند س = ٢

ق(س) متصل على [١ ، ٣] بإستثناء س = ٢

٨ ما نقط عدم الاتصال للإقتران

$ق(س) = \frac{1}{س} + \frac{س+1}{س+3}$

الحل :- نبحث عن الأعداد التي تجعل المقام صفر

$س = 0$ ، $س + 3 = 0$

$س = -3$

٩ $هـ(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، س < 4 \\ 6 & ، س = 4 \\ س + 2 & ، س > 4 \end{cases}$

ما نقط عدم الاتصال

الحل :-

$\lim_{س \to 4^+} س + 2 = 4 + 2 = 6$

$\lim_{س \to 4^-} س^2 + 1 = 4^2 + 1 = 17$

$ق(4) = 6$

$\lim_{س \to 4^+} ق(س) = \lim_{س \to 4^-} ق(س) = ق(4)$

ق(س) غير متصل عند س = 4

١٠ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 5 & ، س < 3 \\ ل & ، س \geq 3 \end{cases}$

فما قيمة الثابت ل التي تجعل ق متصلاً ؟

الحل : بما ق متصل عند س = 3 فإن

$\lim_{س \to 3^+} ق(س) = \lim_{س \to 3^-} ق(س) = ق(3)$

$\lim_{س \to 3^+} ل = \lim_{س \to 3^-} س^2 + 5$

$ل = 9 + 5 \Leftarrow ل = 14$

١١ $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 7 & ، س \leq -2 \\ أ س + 1 & ، س > -2 \end{cases}$

وكان ق(س) متصل عند س = -2 فما قيمة أ ؟

أ = -5

١٢ $ق(س) = \begin{cases} أ س^2 + 3 & ، -1 \leq س < 2 \\ 2س - ب & ، 2 \leq س \leq 5 \\ 5 & ، س = 2 \end{cases}$

جد قيمة أ ، ب علماً بأن ق(س) متصل على ح ؟

الحل :-

$\lim_{س \to 2^+} ق(س) = \lim_{س \to 2^-} ق(س) = ق(2)$

$\lim_{س \to 2^+} 2س - ب = \lim_{س \to 2^-} أ س^2 + 3 = 5$

$4 - ب = 5 \Leftarrow -ب = 1 \Leftarrow ب = -1$

$أ \times 4 + 3 = 5 \Leftarrow 4أ = 5 - 3 = 2 \Leftarrow أ = \frac{2}{4}$

$أ = \frac{1}{2}$

١٣ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أ س + 1 & ، س \neq 2 \\ 7 & ، س = 2 \end{cases}$

جد قيمة الثابت (أ) التي تجعل الاقتران ق متصلاً عند س = 2

أ = 3

١٤ $ق(س) = \begin{cases} س^2 - 4 & ، س < 2 \\ أ س + 3 & ، س \geq 2 \end{cases}$

جد قيمة أ التي تجعل ق متصلاً عند س = 2

نظريات في الإتصال

إذا كان ق(س) ، هـ(س) إقترانين متصلين عند س = أ فإن

١- (ق + هـ)(س) متصل عند س = أ

٢- (ق - هـ)(س) متصل عند س = أ

٣- (ق . هـ)(س) متصل عند س = أ

٤- $\frac{ق}{هـ}$ (س) متصل عند س = أ

أما إذا كان أحدهما أو كليهما غير متصل فإننا ننفذ العمليات الموجودة ثم نبحث إتصال الاقتران الناتج عن هذه العمليات

أمثلة

1 ق(س) = ٥ + ٢س

هـ(س) = { س² - ٥ ، س ≤ ٣
{ س + ١ ، س > ٣

إبحث في إتصال (ق + هـ)(س) عند س = ٣

الحل :-

ق(س) متصل عند س = ٣ لانها كثير حدود

هـ(س)

نهـا هـ(س) = نهـا س + ١ = ٣ + ١ = ٤
س→٣+ س→٣+

نهـا هـ(س) = نهـا س² - ٥ = ٩ - ٥ = ٤
س→٣- س→٣-

هـ(٣) = ٩ - ٥ = ٤

هـ(س) متصل عند س = ٣

بما ان ق ، هـ متصلين عند س = ٣ فإن

(ق + هـ)(س) متصل عند س = ٣ حسب النظرية

2 إذا كان ق(س) = { ١ ، س > ٥
{ ٠ ، س = ٥
{ -١ ، س < ٥

هـ(س) = س - ٥

وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س) ابحث اتصال ل(س) عند س = ٥

الحل :. هـ(س) متصل عند س = ٥ لانه كثير حدود

ق(س) عند س = ٥

نهـا ق(س) = نهـا ١ = ق(٥)
س→٥+ س→٥-

-١ ≠ ١ ≠ ٠ . غير متصل تنفذ العملية

(ق × هـ)(س) = { ١ × (س - ٥) ، س > ٥
{ ٠ × (س - ٥) ، س = ٥
{ -١ × (س - ٥) ، س < ٥

نهـا (ق × هـ)(س) = نهـا (ق × هـ)(س) = (ق × هـ)(٥)
س→٥+ س→٥-

٠ = ٠ = ٠

ل(س) متصل عند س = ٥

3 ق(س) = س² + ١

هـ(س) = { ٢س + ٣ ، س ≤ ٢
{ ٥ - ٣س² ، س > ٢

ابحث في اتصال ل(س) = (ق - هـ)(س) عند س = ٢

4 ق(س) = س² - س - ١

هـ(س) = { (س² - ٤) / (س - ٢) ، س ≠ ٢
{ ٢س ، س = ٢

ابحث اتصال (ق × هـ)(س) عند س = ٢