مراجعة نهائية

الرياضيات

للصف الثاني الثانوي الادبي والمعلوماتية

إعداد الأستاذ

إيـــاد عمـــاد عـبـــاد

(٠٧٩٩٣٦٦٦١١)

التكامل - الاستاذ اياد عباد

الاقترن	تكاملة
∫ العدد دس	العدد س +جـ
∫ س قوه دس	س القوة+١ / القوه+١ +جـ
∫ جاس دس	ـ جتاس +جـ
∫جتاس دس	جاس +جـ
∫ قا٢ س دس	ظاس +جـ
∫ هـ س دس	هـ س +جـ
∫ عدد دس / س	العدد لو|س| +جـ
∫ عدد / جتا٢ س	العدد ظاس +جـ
∫جتاس ظاس	ـ جتاس +جـ

الاقترن	تكاملة
∫ جا أ س+ب دس	ـ جتا أس+ب / أ
∫ جتا أس+ب دس	جا أس+ب / أ
∫ قا٢ أس+ ب دس	ظا أس +ب / أ
∫ هـ أس +ب دس	هـ أس +ب / أ
∫عدد دس / أس+ب	العدد لو|أس+ب| +جـ / أ
(أس+ب) قوة	(أس+ب) قوة+١ / القوة+١ أ

مشتقة التكامل المحدود = صفر
مشتقة غير محدود = ما بداخل التكامل نفسة
عند قلب حدود التكامل نعكس اشارة الجواب
اذا كان تكامل محدود والحدود نفسها فالجواب صفر

التكامل بالتعويض (الحالات التي نفرض فيها ص)
∫(سينات) (**سينات**) قوة دس
∫ (سينات) هـ سينات دس
∫ (سينات) جا(**سينات**) دس
∫ (سينات) ق(**سينات**) دس

الميل او قاعدة الاقتران ⟸ ق(س)=∫ ق(س) دس
نكامل عادي ⟸
ثم التخلص من جـ من النقطة المساعدة بالسؤال

فعت ⟸ ف(ن)=∫ ع(ن) دن
ع(ن)=∫ ت(ن) دن ⟸ نكامل عادي
ثم التخلص من جـ من النقطة المساعدة بالسؤال

الايراد الكلي =∫ الحدي دس
د(س)= ∫ د(س) دس ⟸ نكامل عادي ولا نضع +جـ

المساحات

ق(س)=.....، ومحور السينات و س=أ، س =ب	نساوي السؤال بالصفر ونجد قيمة س وتكون تقع بالفترة ام لا تقع
ق(س)=.....، ومحور السينات	نساوي السؤال بالصفر ونجد قيم س وتكون حدود التكامل
ق(س)=.....، هـ(س)=.....	ق=هـ ونجد قيم س التي تكون حدود التكامل
رسمة جاهزة لاقتران مع محور سينات	فوق السينات موجب وتحت السينات سالب
رسمة جاهزة لاقترانين ق،هـ	المساحة= الفوق ـ التحت

ف ك = فائض المستهلك / ف ج= فائض المنتج/ س =كمية التوازن/ ع=سعر التوازن
ف ك = (∫ س ق(س)دس) ـ(ع×س)
ف ج=(ع×س) ـ (∫ س هـ(س)دس)

١) أحسب قيمة التكاملات التالية

١) $\int 2س^{\frac{5}{2}} + 7س^{-2} + 6س^{\frac{9}{5}} - 9 \, دس$

$= \frac{4}{7}س^{\frac{7}{2}} + \frac{7}{-1}س^{-1} + 6 \times \frac{5}{14}س^{\frac{14}{5}} + 9س + ج$

٢) $\int (3س+2)(س-1) \, دس$

$= \int 3س^2 - س - 2 \, دس$

$= \frac{3س^3}{3} - \frac{س^2}{2} - 2س + ج$

٣) $\int (-ع+3)^2 \, دع$

$= \int (-ع+3)(-ع+3) \, دع$

$= \int ع^2 - 3ع - 3ع + 9 \, دع$

$= \frac{ع^3}{3} - \frac{3ع^2}{2} + 9ع + ج$

٤) $\int \frac{س^3 + 3س^2 + 3س + 1}{س^2} \, دس$

$= \int س + 3 + \frac{3}{س} + \frac{1}{س^2} \, دس$

$= \frac{س^2}{2} + 3س + 3\ln|س| - \frac{1}{س} + ج$

٥) $\int \frac{س^2 - 5}{\sqrt{س}} \, دس$

$= \int س^{\frac{3}{2}} - 5س^{-\frac{1}{2}} \, دس$

$= \frac{2}{5}س^{\frac{5}{2}} - 10س^{\frac{1}{2}} + ج$

٦) $\int \frac{س^2 - 5}{س^2} \, دس = \int 1 - \frac{5}{س^2} \, دس$

$= س + \frac{5}{س} + ج$

٧) $\int 2جتا^2س + 6جتاس + 3قا^2س + 7ظاس + ج$

$= 2جاس + 6جتاس + 3ظاس + 7س + ج$

٨) $\int \frac{9}{س^2} + \frac{3}{جتا^2س} + 19جتاسظاس \, دس$

$= -\frac{9}{س} + 3ظاس + 19(-جتاس) + ج$

٩) $\int جا9س + جتا8س + قا^2 8س \, دس$

$= -\frac{جتا9س}{9} + \frac{جا8س}{8} + \frac{ظا8س}{8} + ج$

١٠) $\int \frac{8س+7}{\sqrt{4س+11}} + \frac{(2س+7)^{19}}{(2س+7)^{20}} \, دس$

$= \int \frac{8س+7}{\sqrt{4س+11}} + \frac{1}{(2س+7)} \, دس$

$= \frac{8}{4}\sqrt{4س+11} + \ln|2س+7| + ج$

١١) $\int \frac{3}{\sqrt{4س+11}} \, دس = \int 3(4س+11)^{-\frac{1}{2}} \, دس$

$= 3 \times \frac{2}{1}(4س+11)^{\frac{1}{2}} + ج$

١٢) $\int س(3ع+2)^4 \, دع$

$ص = 3ع+2$

$دص = 3 \, دع$

$\int س \frac{دص}{3} ص^4$

$\frac{1}{3}\int (ص-2)ص^4 \, دص$

$\frac{1}{3}\int ص^5 - 2ص^4 \, دص$

$\frac{1}{3}\left(\frac{ص^6}{6} - \frac{2ص^5}{5}\right) + ج$

$\frac{1}{18}(3ع+2)^6 - \frac{2}{15}(3ع+2)^5 + ج$

١٣) $\int س جا^2س + 3 \, دس$

$ص = س$

$دص = دس$

$\int جا^2ص \, دص$

$\int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}جتا2ص \, دص$

$\frac{1}{2}ص - \frac{1}{4}جا2ص + ج$

$= -جتاسجاس + 3 + ج$

١٤) $\int (4س+6)\sqrt{2س^2+3س+1} \, دس$

$ص = 2س^2+3س+1$

$دص = (4س+3) \, دس$

$\int \sqrt{ص} \, دص$

$\frac{2}{3}ص^{\frac{3}{2}} + ج$

$\frac{2}{3}(2س^2+3س+1)^{\frac{3}{2}} + ج$

١٥ اذا كان $ق(٤)=١٢$ / $ق(١)=-٨$

غما قيمة $\int_{١}^{٢} ٢س\, ق(س^{٢})\, دس$

الحل

$ص = س^{٢}$

$دص = ٢س\, دس$

$\int_{١}^{٢} ق(ص)\, دص$

$= ق(ص) + ج$

$= ق(س^{٢}) \Big|_{١}^{٢}$

العلوي - السفلي

$= ق(٤) - ق(١)$

من السؤال $= ١٢ - (-٨) = ٢٠$

١٦ اذا كان ميل المماس لمنحنى $ص$ هو $(٤س-٣)^{٣}$ اكتب قاعدة الاقتران علما بانه يمر بالنقطة $(١،١)$

الحل $ص = \int ق(س)$

$= \int (٤س-٣)^{٣}\, دس = \frac{(٤س-٣)^{٤}}{٤ \times ٤} + ج$

التعويض في $(١،١)$ ← الجواب.

$١ = \frac{(٤ \times ١ - ٣)^{٤}}{١٦} + ج$

$١ = \frac{١}{١٦} + ج \Leftarrow ج = \frac{١٥}{١٦}$

$ص = \frac{(٤س-٣)^{٤}}{١٦} + \frac{١٥}{١٦}$

١٧ اذا كان $ق(س) = \frac{دص}{دس} = (٣س^{٢}+٣)$

اجب قاعدة الاقتران علما بان النقطة $ق(٠)=١٨$

الحل $ص = \int ق(س)\, دس$

$= \int س(٣س^{٢}+٣)\, دس = \int ٣س^{٣} + ٣س\, دس$

$= \frac{٣س^{٤}}{٤} + \frac{٣س^{٢}}{٢} + ج$

التعويض في $ق(٠)=١٨$

$١٨ = ٠ + ٠ + ج \Leftarrow ج = ١٨$

$ق = \frac{٣}{٤}س^{٤} + \frac{٣}{٢}س^{٢} + ١٨$

١٨ يتحرك جسيم حسب العلاقة $ع = \frac{٣}{٢ن-١}$ اجب المسافة المقطوعة علما بانه $ف(١)=٢٨$

الحل $ف = \int ع\, دن$

$= \int \frac{٣}{٢ن-١}\, دن$

$ف = \frac{٣}{٢} لو|٢ن-١| + ج$

التعويض في $ف(١)=٢٨$

$٢٨ = \frac{٣}{٢} لو|٢ \times ١ - ١| + ج$ ← لو١ = صفر

$٢٨ = \frac{٣}{٢} لو١ + ج \Leftarrow ٢٨ = ٠ + ج$

$ج = ٢٨$

$ف = \frac{٣}{٢} لو|٢ن-١| + ٢٨$

١٩ اذا كان $ق = \int_{١}^{٢} ٠,٣ دس$ ، $ق = \int_{١}^{٢} ٠,٥ دس$

اجب $\int_{١}^{٢} ق(س)\, دس$

الحل $= \int_{١}^{٢} ٢س^{٢} + ٣س\, دس$

$= \frac{٢س^{٣}}{٣} + \frac{٣س^{٢}}{٢} \Big|_{١}^{٢}$

$= (\frac{٢ \times ٨}{٣} + \frac{٣ \times ٤}{٢}) - (\frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٢})$

$= ق_{٢} - ق_{١} = ٠,٥ - ٠,٣ = ٠,٢$

٢٠ اذا كان $\int_{١}^{٢} ق(س)\, دس = ٩$ ، $\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس = ٢$

فإن $\int_{١}^{٣} ٣ق(س) - ٢ق(س) + ٣ - ٤س\, دس$ يساوي

الحل $= ٣ \times ٩ - ٢ \times ٢ + \frac{٣}{٢}س^{٢} - ٤س \Big|_{١}^{٣}$

$= ٢٧ + ٦ + (٨ - ١) = ٣٣ + ٧ = ٤٠$

٢١ $\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس = ٨$ ، $\int_{٢}^{٣} ق(س)\, دس = -٢$

فإن $\int_{١}^{٢} ق(س)\, دس$ يساوي

الحل $\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس = \frac{٨}{٢} = ٤$

الحل ب: $\int_{١}^{٢} ق(س)\, دس + \int_{٢}^{٣} ق(س)\, دس = \int_{١}^{٣} ق(س)\, دس$

$= (٤) + (-٢)$

$= ٦$

٢٢ اذا كانت $ق(س) = \int \frac{٤س^{٢}+٩س+٧}{س^{٢}} د س$
فجد $ق(س)$ علما ان $ق(١) = صفر + \frac{٧}{٢}$

الحل $ق(س) = \int \frac{٤س^{٢}+٩س+٧}{س^{٢}} د س$

$= \int (٤ + ٩س^{-١} + ٧س^{-٢}) د س$

$= ٤س + ٩ لو|س| + \frac{٧س^{-١}}{-١} + ث$

$= ٤س + ٩ لو|س| - \frac{٧}{س} + ث$

$ق(١) = ٤ + ٩ لو ١ - ٧ + ث = \frac{٧}{٢}$

$ث = \frac{٧}{٢} + ٣ = \frac{١٣}{٢}$

$ق(س) = ٤س + ٩ لو|س| - \frac{٧}{س} + \frac{١٣}{٢}$

٢٣ اذا كانت $ق(س) = \int (٦س^{٢} + ٤س + ٣) د س$
فما قيمة $ق(١)$

الحل $ق(س) = \int (٦س^{٢} + ٤س + ٣) د س$

$= ٢س^{٣} + ٢س^{٢} + ٣س + ث$

$ق(١) = ٢ + ٢ + ٣ + ث = ١٤$

$ث = ٧$

٢٤ ما قيمة $جـ$ في كل من التكاملات التالية

(أ) $\int_{١}^{جـ} ٨ د س = ٨$

الحل $٨س|_{١}^{جـ} = ٨ \Leftarrow ٨جـ - ٨ = ٨$

$٨جـ = ١٦ \Leftarrow ٨جـ = ٨ + ٨$

$جـ = ٢$ أو $جـ = -٢$ (مرفوض)

(ب) $\int_{١}^{جـ} ٥ د س = \int_{٢}^{٣} ٧ د س$

الحل $٥س|_{١}^{جـ} = ٧س|_{٢}^{٣}$

$٥جـ - ٥ = ٢١ - ١٤ \Leftarrow ٥جـ - ٥ = ٧$

$٥جـ = ١٢ \Leftarrow جـ = \frac{١٢}{٥}$

(ج) $\int_{١}^{جـ} (٢س + ٣) د س = صفر$

الحل $س^{٢} + ٣س|_{١}^{جـ} = صفر$

$(جـ^{٢} + ٣جـ) - (١ + ٣) = صفر$

$جـ^{٢} + ٣جـ - ٤ = صفر$

$(جـ + ٤)(جـ - ١) = صفر \Leftarrow جـ = -٤ ، ١$

٢٥ اذا كانت $ق(٢) = ١١$ ، $ق(٧) = ٢٥$
فما قيمة $\int_{٢}^{٧} ق(س) د س$

الحل $= ق(العلوي) - ق(السفلي)$

$= ق(٧) - ق(٢)$

$= ٢٥ - ١١$

$= ١٤$

٢٦ اذا كانت $هـ(س) = ٦س$
في منطقة التقارب على $[-٢، ٣]$
فما قيمة $\int_{-٢}^{٣} هـ(س) د س$

الحل بحاصل السؤال على $[-٢، ٣]$

$\int_{-٢}^{٣} ٦س د س$

$٣ \quad -٢$

$٦س^{٢}/٢$

$\frac{٦(٣)^{٢}}{٢} - \frac{٦(-٢)^{٢}}{٢} = ٢٧ - ١٢ = ١٥$

٢٧ اذا كانت $\int_{١}^{٢} ٣ق(س) د س - ٢ = ٨$
فما قيمة $\int_{١}^{٢} ق(س) د س$

الحل بجمع المعطيات: $\int_{١}^{٢} ٣ق(س) د س - ٢ = ٨$

$\int_{١}^{٢} ٣ق(س) د س - ٢س|_{١}^{٢} = ٨$

$\int_{١}^{٢} ٣ق(س) د س - (٤ - ٢) = ٨$

$\int_{١}^{٢} ٣ق(س) د س - ٢ = ٨$

$\int_{١}^{٢} ٣ق(س) د س = ١٠ \Leftarrow \int_{١}^{٢} ق(س) د س = \frac{١٠}{٣}$

الحل البديل: $\int_{١}^{٢} ق(س) د س = \frac{١٠}{٣}$.

٢٨ اذا كان الايراد الحدي هو
$د(س) = \frac{٤س - ٦}{جتا(س^{٢} - ٣س + ٢)}$ حيث الايراد الكلي

الحل الايراد الكلي $= \int$ الايراد الحدي $د س$

$ر(س) = \int د(س) د س$

$= \int \frac{٤س - ٦}{جتا(س^{٢} - ٣س + ٢)} د س$

$= \int \frac{٤(س - ٣/٢)}{جتا(س^{٢} - ٣س + ٢)} د س$

نضع $ص = س^{٢} - ٣س + ٢$

$د ص = (٢س - ٣) د س$

$= ٢ \int \frac{د ص}{جتا ص}$

$= ٢ \int قا ص د ص + ث$

$= ٢ لو|قا ص + ظا ص| + ث$

$= ٢ لو|قا(س^{٢} - ٣س + ٢) + ظا(س^{٢} - ٣س + ٢)| + ث$

أجب إجابة الصحيح في الحالات التالية :-

١) $ق(س) = ٢س^٢ + ٢س$ ، $ق'(س) = ٤س + ٢$ ، $ق'(٣) = ١٤$

الحل $٤س + ٢ = صفر$ ← $س = -\frac{٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$ ← نهمل ← لا تقع

$= \int_{١}^{٣} (٤س + ٢)\, دس = |٢س^٢ + ٢س|_{١}^{٣} = (٩ + ٦) - (١ + ٢)$

$= ١٥ - ٣ = ١٢$

٢) $ق(س) = س^٢ - ٤س$ في الفترة $[١، ٣]$

الحل $٢س - ٤ = صفر$ ← $س = \frac{٤}{٢} = ٢$ ← تقع

$= \int_{١}^{٢} (٢س - ٤)\, دس + \int_{٢}^{٣} (٢س - ٤)\, دس$

$= \ldots\ldots$

٣) $ق(س) = ٩ - س^٢$ ومحور السينات

الحل $٩ - س^٢ = صفر$ ← $س^٢ = ٩$ ← $س = ٣$ ، $س = -٣$

$= \int_{-٣}^{٣} (٩ - س^٢)\, دس = |٩س - \frac{س^٣}{٣}|_{-٣}^{٣} = \ldots\ldots$

٤) $ق(س) = ٦س - ٣س^٢$ ومحور السينات

الحل $٦س - ٣س^٢ = صفر$

$٣س(٢ - س) = صفر$ ← $س = ٠$ ، $٢ - س = ٠$ ← $س = ٢$

$= \int_{٠}^{٢} (٦س - ٣س^٢)\, دس = |٣س^٢ - س^٣|_{٠}^{٢} = \ldots\ldots$

٥) $ق = س^٢ + ٢س - ٣$ ومحور السينات

الحل $س^٢ + ٢س - ٣ = صفر$

$(س + ٣)(س - ١) = صفر$ ← $س = ١$ ← $س = -٣$

$= \int_{-٣}^{١} (س^٢ + ٢س - ٣)\, دس = |\frac{س^٣}{٣} + س^٢ - ٣س|_{-٣}^{١}$

$= \ldots\ldots$

٦) أجب إجابة الصحيح بين $ق = ٦س$ ، $هـ = ٣ - س^٢$

الحل $ق = هـ$

$٦س = ٣ - س^٢$

$س^٢ + ٦س - ٣ = صفر$ ← $س = -٣$ ← $س = ١$

$= \int_{-٣}^{١} (٦س - (٣ - س^٢))\, دس = \ldots\ldots$

٧) $ق = ٢س - ٣$ ، $هـ = س^٢ - ٢س$

الحل $ق = هـ$

$٢س - ٣ = س^٢ - ٢س$

$س^٢ - ٤س + ٣ = صفر$ ← $س = ٣$ ← $س = ١$

$= \int_{١}^{٣} (٢س - ٣ - (س^٢ - ٢س))\, دس = \ldots\ldots$

٨) $ق = س^٢ + ٢$ ، $ص = ٣$

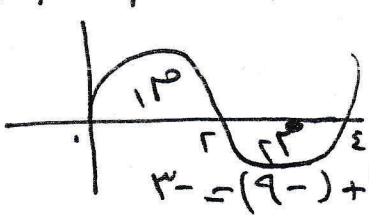
الحل $ق = ص$

$س^٢ + ٢ = ٣$

$س^٢ - ١ = صفر$ ← $س = ١$ ← $س = -١$

$= \int_{-١}^{١} (٣ - (س^٢ + ٢))\, دس = \ldots\ldots$

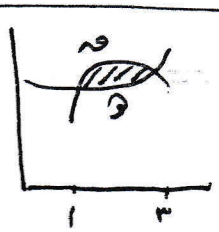
٩) أجب إجابة الصحيح في الشكل التالي



وكانت $م_١ = ٦$ ، $م_٢ = ٩$

الحل المساحة $= |(+٦) + (-٩)| = ٣$

١٠) $ق = س^٢ + ٨$



المساحة $= \int_{١}^{٣} ق\, دس - هـ\, دس$

$= \frac{٦}{٣}(٣) + ٨(٣) - (٣)^٢$

$= ٨ + ٣ = ١١$

١ اذا كانت ع = ق(س) = ٧٠ - ٤ س
يمثل اقتران السعر - الطلب وكانت
ع١ = ١٠ فما قيمة فائض المستهلك.
(ف ك)

الحل
ف ك = (∫ ق(س) د س) - (ع × س)
= (∫ (٧٠ - ٤ س) د س) - (١٠ × ١٥)
= (٧٠ س - ٤ س^٢/٢ |) - (١٥٠)
= (٧٠ س - ٢ س^٢ |) - (١٥٠)
= (٧٠ × ١٥ - ٢ (١٥)^٢) - (١٥٠)
= (١٠٥٠ - ٤٥٠) - (١٥٠) = ٤٥٠

٧٠ - ٤ س = ١٠
٧٠ - ١٠ = ٤ س
٦٠ = ٤ س
س = ١٥
كمية التوازن
س = ؟؟

٢ اذا كانت ق(س) = ١٦ - س/٤
وكانت ع١ = ١٣ احسب فائض المنتج

الحل
ف ن = (ع × س) - (∫ هـ(س) د س)
= (١٣ × ١٦) - (∫ (١٦ - س/٤) د س)
= (٢٠٨) - (١٦ س - س^٢/٨ |)
= (٢٠٨) - (١٦ × ١٦ - (١٦)^٢/٨)
= (٢٠٨) - (٢٥٦ - ٣٢)
= ٦٤

١٦ - س/٤ = ١٣
١٦ - ١٣ = س/٤
٣ = س/٤
س = ١٢
كمية التوازن
س = ؟؟

٣ اذا كانت اقتران السعر - الطلب هو
ق = ٣٦ - ٣ س^٢ واقتران السعر - العرض
هـ = ١٢ + ٦ س
احسب فائض المستهلك

الحل:
١ نجد قيمة س: ق = هـ
٣٦ - ٣ س^٢ = ١٢ + ٦ س
٣ س^٢ + ٦ س = ٣٦ - ١٢
٣ س^٢ + ٦ س - ٢٤ = ٠
س = ٢٤/٨
س = ٣
كمية التوازن

٢ لايجاد ع نعوض قيمة س في ق او هـ
ق(٣) = ٣٦ - ٣ × ٣^٢ = ٣٦ - ٢٧ = ٩
ع = ٩
هـ(٣) = ١٢ + ٦ × ٣ = ١٢ + ١٨ = ٣٠
ع = ٣٠
سعر التوازن ع = ٣٠

٣ ف ن = (∫ ق(س) د س) - (ع × س)
= (∫ (٣٦ - ٣ س^٢) د س) - (٣٠ × ٣)
= (٣٦ س - ٣ س^٣/٣ |) - (٩٠)
= (٣٦ س - س^٣ |) - (٩٠)
= (٣٦ × ٣ - (٣)^٣) - (٩٠)
= ١٠٨ - ٩٠
= ١٨

٤ اذا كانت
ع = ق(س) = ٤٣ - ٤ س
ع = هـ(س) = س + ٣
احسب فائض المنتج.

١ نجد قيمة س: ق = هـ
٤٣ - ٤ س = س + ٣
٤٠ = ٥ س
س = ٨
كمية التوازن

٢ نجد قيمة ع = سعر التوازن
هـ(٨) = ٨ + ٣ = ١١
ع = ١١
ق(٨) = ٤٣ - ٤ × ٨ = ١١
ع = ١١

٣ ف ن = (ع × س) - (∫ هـ(س) د س)
= (١١ × ٨) - (∫ (س + ٣) د س)
= (٨٨) - (س^٢/٢ + ٣ س |)
= (٨٨) - (٦٤/٢ + ٣ × ٨ - صفر)
= (٨٨) - (٣٢ + ٢٤)
= ٨٨ - ٥٦ = ٣٢