■ لتكن ص = ق(س) ، إن :

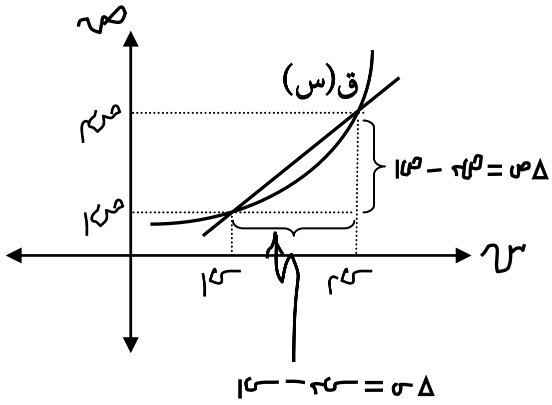
- Δ س هو مقدار التغير في س ، عندما تتغير س من $س_1$ إلـــى $س_2$ ، يعني : Δ س = $س_2 - س_1$.
- Δ ص هو مقدار التغير في ص ، عندما تتغير ص من $ص_1$ إلى $ص_2$ ، يعني : Δ ص = $ص_2 - ص_1$.
- متوسط التغير في الاقتران ص = ق (س) = ناتج قسمة التغير في ص على التغير في س .

وبالرمـوز : متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

- انظر الشكل المجاور :

ملاحظة ١ : $ص_1$ = ق($س_1$)

ملاحظة ٢ : $ص_2$ = ق($س_2$)



- **مثال** : إذا كان ق(س) = س + ٢ ، و تغيرت قيمة (س) من ٣ إلـــى ٥ ، احسب :

١) قيمة التغير في س   ٢) قيمة التغير في ص (يعني ق(س))   ٣) متوسط التغير في الاقتران ق(س)

الحل : ١) التغير في س = Δ س = $س_2 - س_1$

= ٥ − ٣ = ٢

٢) التغير في ص = Δ ص = $ص_2 - ص_1$

= ق($س_2$) − ق($س_1$)

= ٧ − ٥ = ٢

ق($س_2$) = ق(٥) = ٥ + ٢ = ٧

ق($س_1$) = ق(٣) = ٣ + ٢ = ٥

٣) متوسط التغير في ق = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٢}{٢} = ١$

- املأ الجدول التالـــي :

الاقتران	$س_1$	$س_2$	$\Delta س = س_2 - س_1$	$ص_1$	$ص_2$	$\Delta ص = ص_2 - ص_1$	$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$
١) ق(س) = ٣ − س	٢	٥					
٢) هـ(س) = $س^2$ + ١	٤	٣					
٣) ل(س) = ٥$س^2$ + س	١	٢					
٤) ك(س) = $\sqrt{س}$	١٦	٢٥					
٥) و (س) = $\frac{٣}{س}$	١	٣					

تمرين ١ : احسب متوسط التغير في الاقتران ق (س) = ٨ – ٣ س ، عندما تتغير س من ٣ إلــى ٥ .

تمرين ٢ : إذا علمت أن مقدار التغير في قيمة الاقتران ق (س) هو ١٢ ، وذلك عندما تتغير س من ٢ إلــى ٤ ، وكان ق(٢) = ٣ ،

احسب قيمة ق (٤) .

تمرين ٣ : إذا كان هـ (س) = ق (س) + ٤ س ، وكان متوسط التغير في الاقتران ق (س) في الفترة [٢ ، ٥] هو ٦

احسب متوسط التغير في هـ (س) .

- متوسط التغير في الاقتران ق(س) هو ميل القاطع لمنحنى هذا الاقتران . وهذا هو المقصود بالمعنى الهندسي لمتوسط التغير .

مثال١: احسب ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) الذي يمر في (٠ ، ٥) ، (٢ ، ٩)

الحل : ميل القاطع = متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

س١ = ٠　　ص١ = ٥

س٢ = ٢　　ص٢ = ٩

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٩ - ٥}{٢ - ٠} = ٢$$

- **مثال ٢ :** احسب ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣ س^{٢} – ٢ ، والذي يمر في النقطتين : (٠ ، ق(٠)) ، (١ ، ق(١))

الحل : ميل القاطع = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

ص٢ = ق(١) = ٣(١)^{٢} – ٢ = ١

ص١ = ق(٠) = ٣(٠)^{٢} – ٢ = -٢

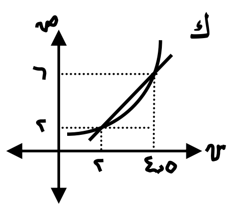
$$= \frac{١ - (-٢)}{١ - ٠} = ٣$$

تمرين١ : احسب ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) والذي يمر في النقطتين (-٢ ، ١) ، (٥ ، ١٥) .

تمرين٢ : احسب ميل القاطع لمنحنى الاقتران هـ (س) = ٤- س^{٢} ، إذا علمت أن : س١= ٠ ، س٢= ٣ .

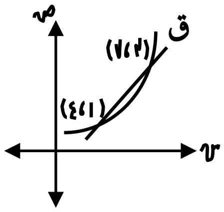
تمرين٣ : اعتمد الشكل المرافق في حساب

ميل القاطع لمنحنى الاقتران　ك (س) .



تمرين ٤ : اعتمد الشكل المرافق في حساب

ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق (س) .



تمرين ٥ : اذا كان متوسط التغير في الاقتران ق في الفترة [-٢ ، ١] يساوي ٣ ، و كان هـ (س) = $س^{٢}$ – ق(س) ،

جد متوسط التغير في الاقتران هـ (س) في الفترة [-٢ ، ١] .

الوحدة الثانية : حساب التفاضل / متوسط التغير (المعنى الفيزيائي) إعداد المعلم : يوسف أبو حامدة

متوسط التغير في اقتران المسافة هو السرعة المتوسطة أو متوسط السرعة ، ويرمز لها بالرمز $\bar{ع}$.

مثال : تتحرك سيارة على طريق مستقيم حسب العلاقة التالية : ف(ن) = $ن^{٢}$ + ٣ ، حيث :

ن الزمن بالدقائق ، ف المسافة بالكيلومتر . احسب السرعة المتوسطة للسيارة في الفترة الزمنية [٠ ، ٥]

الحل : السرعة المتوسطة $\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف_{٢} - ف_{١}}{ن_{٢} - ن_{١}}$

$= \frac{٢٨ - ٣}{٥ - ٠}$

= ٥ كلم / دقيقة

ف٢ = ف(٥) = ٢٥ +٣ = ٢٨

ف١ = ف(٠) = ٠ + ٣ = ٣

تمرين ١ : يتحرك جسيم حسب العلاقة : ف(ن) = ٤ن + $ن^{٢}$ ، حيث ن الزمن بالثواني ، ف المسافة بالأمتار ،

احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١ ، ٤] .

تمرين٢ : يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث يقطع مسافة قدرها (ف) كلم في زمن مقداره (ن) دقيقة ، فإذا كان مقدار التغير في المسافة هو ٣٠٠ كلم ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [٦ ، ١٦] .

تمرين٣ : قطع جسيم مسافة قدرها (٣٥) سم خلال (١٠) ثوان ، احسب السرعة المتوسطة لهذا الجسيم .

تمرين٤ : احسب مقدار التغير في المسافة التي قطعها جسيم في ٢٠ ثانية ، إذا كانت سرعته المتوسطة ٨٠ سم / ث .

تمرين٥ : إذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم أثناء سقوطه تعطى بالعلاقة ف(ن) = ١٠ ن – ن^{٢} ،

حيث (ف) المسافة بالأمتار ، (ن) الزمن بالثواني ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم

في الفترة الزمنية [١ ، ٣] .

المشتقة الأولى للاقتران ق هي نهاية متوسط التغير للاقتران ق ، ويرمز لها بالرمز : $\text{ق}'(\text{س})$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \lim_{\text{س}_2\to\text{س}_1} \frac{\text{ص}_2-\text{ص}_1}{\text{س}_2-\text{س}_1} = \boxed{\lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\Delta\text{س})-\text{ق}(\text{س})}{\Delta\text{س}}}$$

أو $\boxed{\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}}$

مثال ١ : أوجد $\text{ق}'(\text{س})$ ، إذا علمت أن $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} + ١$ باستخدام تعريف المشتقة .

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\Delta\text{س})-\text{ق}(\text{س})}{\Delta\text{س}}$

$$= \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{٢(\text{س}+\Delta\text{س})+١-(٢\text{س}+١)}{\Delta\text{س}}$$

$$= \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{٢\text{س}+٢\Delta\text{س}+١-٢\text{س}-١}{\Delta\text{س}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{٢\Delta\text{س}}{\Delta\text{س}} = ٢$$

مثال ٢ : ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢$ ، أوجد $\text{ق}'(٣)$ باستخدام تعريف المشتقة الأولـــى .

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\Delta\text{س})-\text{ق}(\text{س})}{\Delta\text{س}}$ تعريف المشتقة الأولـــى

$\text{ق}'(٣) = \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\text{ق}(٣+\Delta\text{س})-\text{ق}(٣)}{\Delta\text{س}}$ نعوض س = ٣

$= \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{(٣+\Delta\text{س})^٢-٩}{\Delta\text{س}}$ نعوض في قاعدة الاقتران

$= \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{٩+٦\Delta\text{س}+(\Delta\text{س})^٢-٩}{\Delta\text{س}}$ نفك الأقواس

$\text{ق}'(٣) = \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\Delta\text{س}(٦+\Delta\text{س})}{\Delta\text{س}} = ٦$ نخرج Δس عاملاً مشتركًا ، نختصر ، نعوض Δس = ٠

مثال ٣ : ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}$ ، أوجد $\text{ق}'(٩)$.

الحل : ضَعْ Δس = هـ للسهولة فقط .

$\text{ق}'(٩) = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(٩+\text{هـ})-\text{ق}(٩)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\sqrt{٩+\text{هـ}}-٣}{\text{هـ}} \times \frac{\sqrt{٩+\text{هـ}}+٣}{\sqrt{٩+\text{هـ}}+٣}$ ضربنا بمرافق الجذر التربيعي

$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\cancel{٩}+\cancel{\text{هـ}}-\cancel{٩}}{\cancel{\text{هـ}}(\sqrt{٩+\text{هـ}}+٣)} = \frac{١}{٣+٣} = \frac{١}{٦}$ اختصرنا ثم عوضنا هـ = ٠

تمرين١: ليكن ق(س) = ٢ – ٥ س ، أوجد :

١) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

٢) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ}$

تمرين٢ : إذا كان ك(س) = ٣ $س^٢$ + س جد :

١) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{ك(س + هـ) - ك(س)}{هـ}$

٢) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{ك(٠ + هـ) - ك(٠)}{هـ}$

٣) ٥ × $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{ك(١ + هـ) - ك(١)}{هـ}$

٤) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{هـ}{ك(س + هـ) - ك(س)}$

٥) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{ك(س + هـ) - ك(س)}{٤ هـ}$

٦) $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{٧ ك(س + هـ) - ٧ ك(س)}{٤ هـ}$

تمرين٣ : إذا كان ق(س) اقترانًا كثير حدود ، فجد قيمة المقدار التالـــي :

$$\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} \times \lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{هـ}{ق(س + هـ) - ق(س)}$$

تمرين٤ : أوجد قيمة النهاية الآتيـــة : $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{(س + هـ)^٢ - س^٢}{هـ}$

تمرين٥ : أوجد قيمة النهاية الآتيـــة : $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{(٥ + هـ)^{٢} - ٢٥}{هـ}$

تمرين٦ : أوجد قيمة النهاية الآتيـــة : $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{٣(١ + هـ) + ٢ - ٥}{هـ}$

تمرين٧ : أوجد قيمة $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{\sqrt{س + هـ} - \sqrt{س}}{هـ}$

تمرين٨ : احسب قيمة النهاية التالية : $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{\sqrt{٩ + هـ} - \sqrt{٩}}{هـ}$

تمرين٩ : جد قيمة النهاية التالية : $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{\dfrac{١}{س + هـ} - \dfrac{١}{س}}{هـ}$

فيما يلي قواعد الاشتقاق الواجب حفظها :

١) إذا كان ق(س) = جـ ، فإن قَ (س) = صفرًا . يعني مشتقة الثابت صفر .

٢) إذا كان ق(س) = س ، فإن قَ (س) = ١ .

٣) إذا كان ق(س) = أ س ، فإن قَ (س) = أ ، حيث أ ثابت .

٤) إذا كان ق(س) = س^{٢} ، فإن قَ (س) = ٢ س .

٥) إذا كان ك(س) = ق(س) ± هـ (س) ، فإن كَ (س) = قَ (س) ± هـَ (س) .

٦) إذا كان ق(س) = س^{ن} ، فإن قَ (س) = ن س$^{ن-١}$.

٧) إذا كان ق(س) = أ س^{ن} ، فإن قَ (س) = أ × ن س$^{ن-١}$

٨) إذا كان ك (س) = ق(س) × هـ (س) ، فإن : كَ (س) = ق(س) × هـَ (س) + قَ (س) × هـ(س)

(بالكلام : مشتقة حاصل ضرب اقترانين تساوي : الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول)

٩) إذا كان ك(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ فإن كَ (س) = $\frac{\text{هـ(س)} \times \text{قَ(س)} - \text{ق(س)} \times \text{هـَ(س)}}{(\text{هـ(س)})^{٢}}$

بالكلام : مشتقة ناتج قسمة اقترانين تساوي $\frac{\text{المقام × مشتقة البسط − البسط × مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$

١٠) نتائج هامة :

- إذا كان ق (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ فإن : قَ(س) = $\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$

- إذا كان هـ (س) = $\frac{\text{أ}}{\text{س}}$ فإن : هـَ (س) = $\frac{-\text{أ}}{\text{س}^{٢}}$ ، حيث أ عدد حقيقي ثابت

- إذا كان ل(س) = $\sqrt{\text{س}}$ فإن : لَ (س) = $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

- تذكر أن : $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ لذلك فإنه :

إذا كان ق(س) = $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}}$ فإن قَ (س) = $\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}} - ١}$

١ ليكن ق(س) = ٤ ، أوجد قَ(س) .

---

٢ إذا كان ل(س) = $(٣ + ٠,٥)^{٤}$ ، أوجد لَ(س) .

---

٣ ليكن و(س) = $س^{٠}$ ، فما قيمة وَ(س) ؟

---

٤ ليكن هـ (س) = - س ، جد هـَ(س) .

---

٥ إذا كان ل(س) = ٣ س + ٩ ، فما هي قيمة لَ(١) ؟

---

٦ إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ – س + ٥ ، فجد قَ(س) .

---

٧ إذا كان ق(س) = $٣س^{٢}$ – ٦س + ١١ ، فجد قَ(س).

---

٨ ق(س) = - ٧ $س^{٥}$ ، ما قيمة قَ(س) ؟

---

٩ هـ (س) = ٨ $س^{٩}$ + ١٥ $س^{٦}$ – ٣ $س^{٤}$ + ١٥٠٠ ، جد هـَ(س) .

---

١٠ ليكن ق (س) = س ($س^{٢}$ – ٥) ، فجد قَ(س) .

---

١١ هـ (س) = ٥ $س^{٢}$ (٣ $س^{٣}$ + س + ٢) ، أوجد هـَ(س) .

١٢ هـ (س) = (س + ١)(س ^{٢} – س) ، جد هـَ(١) .

١٣ ل (س) = (س ^{٢} – ٣ س + ٤)(س ^{٢} – ٩) ، احسب قيمة لَ (٠) .

١٤ ك (س) = (س – ٣)(س – ٣) ، أوجد كَ(س) .

١٥ ق (س) = (س + ٤)(س – ٤) ، جد قَ(س) .

١٦ هـ (س) = (س – ١)^{٢} ، جد هـَ(٥) .

١٧ و (س) = ٩ (س ^{٢} + ٥ س – ١١) ، ما قيمة وَ(٠) ؟

١٨ ق (س) = س ^{٣} (س – ٢)(٤ س + ٧) ، ما قيمة قَ(١) ؟

١٩ ق (س) = $\frac{٣}{س}$

٢٠ ق (س) = $\frac{١}{س^{٢}}$

٢١ ق (س) = $\frac{٤ س}{س - ٥}$

٢٢ ق (س) = $\frac{س}{س + ٢} + \frac{س + ٢}{س}$

٢٣ ق (س) = $\frac{١}{س^{٢} - ٣ س + ٥}$

٢٤ ق (س) = $\frac{س}{س^{٢} + ٥}$

٢٥ ق (س) = $\frac{س}{س^{٢} + ٥}$ + س٢ + س + ١

أوجد المشتقة الأولـى لكل من الاقترانات التالية :

١ ق (س) = $س^{\frac{٢}{٥}}$

٢ ك (س) = ٥ $س^{\frac{٣}{٢}}$

٣ ل (س) = ٣ $س^{\frac{١}{٥}}$

٤ هـ (س) = ٤ $س^{\frac{-٣}{٤}}$

٥ و (س) = ٣ $س^{\frac{١}{٣}}$

٦ ق (س) = ٢ $س^{\frac{-٥}{٧}}$

جد المشتقة الأولـى لكل من الاقترانات التالية : (مشتقات الجذور)

٧ ق(س) = $\frac{١}{\sqrt{س}}$

٨ ك(س) = $\frac{١}{س} + \sqrt{س}$

٩ هـ (س) = $\frac{\sqrt{س}}{س}$

١٠ ل (س) = $\frac{س + ١}{\sqrt{س}}$

١١ ق(س) = $\sqrt[٥]{٤ س^{٣}}$

سؤال عادي : إذا كان هـ (س) = $\frac{ق(س)}{٥ س + ٦}$ ، س ≠ $\frac{-٦}{٥}$ ، و كانت هـ (٣) = ١٥ ، قَ (٣) = $\frac{١}{٧}$

احسب قيمة هـَ (٣)

تعريف : لتكن ص = ق (ع)
و لتكن ع = ك (س)

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

قاعدة السلسلة

● بالرجوع إلى التعريف أعلاه ، يمكن كتابة ص كما يلي : ص = ق (ك(س)) ، بالتالي فإن القاعدة السابقة تصبح على الصورة :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

$$\boxed{\frac{د ص}{د س} = ق' (ك(س)) \times ك'(س)}$$

● **مثال** : لتكن ص = ٣ ع – ١ ، ع = س^٢ ، إن :

١) $\frac{د ص}{د ع} = ٣$ ٢) $\frac{د ع}{د س} = ٢$ س   ٣) $\frac{د ص}{د س} = ٣ \times ٢$ س = ٦ س .

● يمكن حل المثال السابق كما يلي :

ص = ٣ (س^٢) – ١   وضعنا س^٢ بدل ع قاعدة الاقتران ص .

ص = ٣ س^٢ – ١   تبسيط

∴ $\frac{د ص}{د س} = ٦$ س

● **مثال** : إذا كانت ص = ل^٢ + ٥ ل ، وكانت ل = ١ – س^٢ ، احسب $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٠}$

الحل : $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ل} \times \frac{د ل}{د س}$ القاعدة المباشرة

= (٢ ل + ٥) × (٠ – ٢ س)   قمنا باشتقاق كل من : ص ، ل

عندما تكون س = ٠ ، تكون ل = ١ – (٠)^٢ = ١

بالتالي : $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٠}$ = (٢ × ١ + ٥) × (٠) = صفرًا

مثالٌ هامٌ : إذا كان ق(س) = (س^{٢} – ٣)^{٥} ، فجد قَ(س)

الحل : نفرض ع = س^{٢} – ٣ ⟵ $\frac{دع}{دس}$ = ٢ س

لكن ق(س) = (س^{٢} – ٣)^{٥} = ع^{٥} = ق (ع) ⟵ قَ (ع) = ٥ ع^{٤} = $\frac{دق}{دع}$

⟵ قَ (س) = $\frac{دق}{دع}$ × $\frac{دع}{دس}$

⟵ قَ (س) = ٥ (ع)^{٤} × (٢ س)

= ٥ (س^{٢} – ٣)^{٤} × (٢ س)

عِوضًا عن ذلك نقوم بالإجراء التالي :

ق(س) = (س^{٢} – ٣)^{٥} ⟵ $\boxed{\text{قَ (س) = قوة القوسين × (ما بداخل القوسين)}^{\text{(القوة – ١)}}\text{ × مشتقة ما داخل القوسين}}$

لذا فإن قَ (س) = ٥ (س^{٢} – ٣)^{٤} × (٢ س)

مثال : لتكن ص = (٥ س^{٣} – ٢س + ١)^{٧} ، احسب قيمة صَ عندما س = ٠

الحل : صَ = ٧ (٥ س^{٣} – ٢ س + ١)^{٦} × (١٥ س^{٢} – ٢)   مباشرة حسب القاعدة

صَ |$_{س = ٠}$ = ٧ (١)^{٦} × (- ٢) = - ١٤

أوجد صَ أو $\frac{دص}{دس}$ في كل من التمرينات الآتيـــة :

(١) ص = (س^{٢} + ٥ س)^{١٠}

الحل :

(٢) ص = (٢ س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٨)$^{-٦}$

الحل :

(٣) ص = (س^{٢} – س)$^{\frac{٥}{٣}}$

الحل :

٤) ص = $\sqrt{س^{٣} + ٢}$

الحل:

٥) ص = $\sqrt[٣]{٢ س^{٢} - س + ١}$

الحل:

٦) ص = $(\sqrt{٢ س + ٥})^{٣}$

الحل:

٧) ص = $\sqrt{(٢ س + ٥)^{٣}}$

الحل:

مسائل هامة :

١) إذا علمت أن : ق (س) = (هـ (س))^{٢} ، وأن : هـ (١) = ٢ ، هـَ (١) = - ٤ ، فجد قيمة قَ (١)

٢) إذا علمت أن : هـ (س) = (ك (س))^{٢} ، فجد : هـَ (٣) حيث : ك(٣) = ٣ ، كَ (٣) = ٥

٣) ليكن : ق (س) = (هـ (س))^{٣} − ٥ س^{٢} ، وليكن : هـ (١) = ٢ ، هـَ (١) = - ٢ ، جد : قَ (١)

فيما يلي مشتقات الاقترانات المثلثية :

(١) إذا كان ق(س) = جا س ، فإن : قَ(س) = جتا س

(٢) إذا كان ق (س) = جتا س ، فإن : قَ (س) = - جا س

(٣) إذا كان ق (س) = ظا س ، فإن : قَ (س) = قا^{٢} س

مشتقة الزاوية

مثال : لتكن ص = ٣ جا س + س جتا س – ظا ٣ س ، أوجد : صَ

الحل : صَ = ٣ × جتا س + (س × - جا س + جتا س × ١) – قا^{٢} ٣س × (٣)

= ٣ جتا س – س جا س + جتا س – ٣ قا^{٢} س

تمرينـــــــــات منوعة :

أوجد مشتقة كل من الاقترانات الآتيـــة :

(١) ص = س^{٣} جتاس

---

(٢) ص = س جتا^{٣} س

---

(٣) ص = س جتا ٣ س

---

(٤) ص = س^{٣} جتا^{٣} ٣ س

---

(٥) ص = (س + جا س)^{٣}

---

(٦) ص = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$

(٧) ص = $\frac{\text{س}}{\text{جتا س}}$

(٨) ص = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

(٩) ص = $\sqrt{\text{س + جا س}}$

(١٠) ص = جا^{٢}س (١ + جتا ٣ س)

(١١) ص = جا ع ، ع = ٥ س^{٢}

(١٢) ص = جتا س × ظا س

(١٣) ص = $\frac{\text{ظا س}}{\text{جا س}}$

اقتران اللوغاريتم :

يُسمى الاقتران : ق(س) = $لو_{هـ}$ س ، اقتران لوغاريتم س للأساس هـ ، حيث : هـ = ٢,٧١ و اكتشفه العالم نابيير .

من خواص اللوغاريتمات : (افرض أن أساس اللوغاريتم هـ)

١) لو $س^{م}$ = م × لو س
٢) لو هـ = ١
٣) لو ١ = ٠

نظرية (١) : لتكن ص = $لو_{هـ}$ س ، إن : صَ = $\frac{١}{س}$

نظرية (٢) : إذا كان ق(س) = $لو_{هـ}$ (ك(س)) ، فإن : قَ (س) = $\frac{كَ\,(س)}{ك\,(س)}$

اقتران الأس :

يُسمى الاقتران ق(س) = $هـ^{س}$ ، الاقتران الأسي ، أساسه هـ (عدد نابيير)

خواص الاقتران الأسي :

١) $هـ^{١}$ = هـ
٢) $هـ^{٠}$ = ١
٣) $هـ^{لوس}$ = س

نظرية (١) : ليكن ق(س) = $هـ^{س}$ ، إن : قَ(س) = $هـ^{س}$

نظرية (٢) : ليكن ق(س) = $هـ^{ك(س)}$ ، إن : ق (س) = كَ (س) × $هـ^{ك(س)}$

(تمرينات منوعة) أوجد مشتقة كل من الاقترانات التالية :

١ ص = لو $س^{٣}$

٢ ص = لو ($س^{٢}$ + ٣س – ١)

٣ ص = لو (س^{٢} – ٥)^{٢}

٤ ص = لو $\sqrt{٢ \text{ س}^{٣} + \text{س}}$

٥ ص = لو جا س

٦ ص = لو جتا ٨ س^{٢}

٧ ص = س لوجتا٤ س

٨ ص = هـ$^{٣ \text{ س}^{٢}}$

٩ ص = س × هـ$^{\text{س}^{٢} + \text{س}}$

١٠ ص = هـ$^{\text{ظاس}}$

١١ ص = هـ$^{\text{س}}$ × لو (س^{٢} + ٥)

١٢ ص = هـ$^{\text{لو جاس}}$

١٣ $\text{ص} = \text{ه}^{\sqrt{\text{س}}}$

١٤ $\text{ص} = \text{جا س} \times \text{ه}^{\text{جاس}}$

١٥ أوجد المشتقة الثانية في التمارين ذات الأرقام التالية :

١ ، ٣ ، ٥ ، ١٠

مفاهيم الدرس : ميل ، خط مستقيم ، منحنى ، معادلة ، مماس ، نقطة تماس .

ليكن ق(س) اقترانًا معرفًا على مجموعة الأعداد الحقيقية ، إن مشتقة هذا الاقتران عند هي ميل منحناه عند تلك النقطة .

يعني .. قَ (س) = ميل منحنى ق(س)

كذلك : قَ (س) = ميل المماس لهذا المنحنى عند هذه النقطة ، و نرمز له بالحرف (م) ← $\boxed{\text{قَ (س) = م}}$

مماس المنحنى هو خط مستقيم ، يعني له **ميل** يمكن حسابه كما يلي $\boxed{\text{م} = \dfrac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}}$

على فرض أن المستقيم (المماس) يمر في النقطتين : (س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$)

أما **معادلة المماس** فهي معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة (س$_1$ ، ص$_1$) ، وميله (م) ، وصورتها هي :

$$\boxed{\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} \left(\text{س} - \text{س}_1 \right)}$$

مثال : إذا كان ق(س) = س^2 + س ، احسب ميل منحنى هذا الاقتران عندما س = ٠

الحل : نبدأ الحل من المطلوب ...   **الميل = المشتقة = ميل المماس**

المشتقة قَ (س) = ٢ س + ١ ، و منها : قَ (٠) = ١ = م   وهو ميل المماس المرسوم لمنحنى ق عندما س = ٠

مثال : أكتب معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران : ص = هـ (س) = ١ – س^2 عند النقطة (١ ، ٠)

الحل : نبدأ من المطلوب ... معادلة المماس هي : ص – ص$_1$ = م (س – س$_1$)

من المعطيات : س$_1$ = ١ ، ص$_1$ = ٠ ← نقطة التماس هي (١ ، ٠)

أصبحت المعادلة كما يلي : $\boxed{\text{ص} - ٠ = \text{م} \left(\text{س} - ١ \right)}$ ، الميل م = هـَ (١)

هـَ (س) = - ٢ س ، و منها هـَ (١) = - ٢ = م

معادلة المماس هي : $\boxed{\text{ص} - ٠ = -٢ \left(\text{س} - ١ \right)}$ ← ص = ٢ – ٢ س

تدريب ١ : لتكن ص = هـ (س) = س٢ – ٥ س – ١ ، أوجد ما يلي :

١) قَ(س)	٢) قَ(٣)

٣) ميل المنحنى عندما س = ٣	٤) ميل المنحنى عندما س = ١

٥) نقطة التماس عندما س = ١	٦) ميل المماس عند نقطة التماس

٧) معادلة المماس عند نقطة التماس

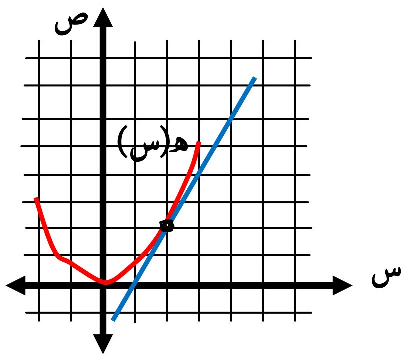
تدريب ٢ : لتكن ص = ك (س) = ٤ س^{٣} + س – ٢ ، أوجد كلاً مما يلي :

١) كَ(س)	٢) ميل منحنى ك (س) عندما س = ٠

٣) ميل مماس منحنى ك(س) عندما س = ٠	٤) نقطة التماس عندما س = ٠

٥) معادلة مماس منحنى الاقتران ك (س) عند نقطة التماس

تدريب ٣ : اعتمد الشكل المجاور - الذي يمثل منحنى الاقتران هـ (س) - في الإجابة عن الاسئلة الآتية :



١) حدد مماس المنحنى هـ (س) على الشكل نفسه
٢) عين نقطة التماس على الشكل
٣) احسب ميل المماس
٤) ما هو ميل المنحنى هـ (س) عند نقطة التماس
٥) ما قيمة هَ(س١) ، حيث س١ هي الإحداثي السيني لنقطة التماس
٦) اكتب معادلة المماس

تدريب٤ : احسب ميل منحنى كل من الاقترانات التالية عند النقطة المبينة إزاء كل منها :

١) ص = ق(س) $=$ ٢ س$^{-٣}$ - ١ ، عند س = ١

٢) ص = هـ (س) = ٣ س^{٢} + س − ١ ، عند س = ٠

٣) ص = $\frac{٤}{س^{٢} + ١}$ ، عند س = ٠

٤) ل (س) = ٢ + $\sqrt{س}$ ، عند النقطة (١ ، ٣)

٥) ص = ٤ س × هـ^{٣س} + ٢ لو س^{٣} ، عندما س = ١

تدريب ٥ : اكتب معادلة المماس لمنحنى الاقتران ك (س) = $\frac{١}{س}$ ، عند س = ١

تدريب ٦ : اكتب معادلة مماس منحنى الاقتران ق (س) = ٤ س^{٢} − ٢ س + ٧ ، عند س = $\frac{١}{٢}$

<u>تدريب ٧</u> : إذا كان المستقيم ص = ٥ س – ٣ مماسًا لمنحنى الاقتران ك (س) عند النقطة (٢ ، ٧) ، فما قيمة كَ (٢) ؟

<u>تدريب ٨</u> : المستقيم ٢ ص + ٥ س + ٢ = ٠ هو مماس لمنحنى الاقتران هـ (س) عند س = ٠ ، احسب ميل منحنى هـ(س) عند نقطة التماس ؟

<u>تدريب ٩</u> : المستقيم ص = م س – ١ هو مماس لمنحنى الاقتران ك (س) = س^{٢} + ٢ س عند النقطة (١ ، ٣) ، جد قيمة م .

<u>تدريب ١٠</u> : ليكن ق(س) اقترانًا مماسه المستقيم ص = ٥ – ٤ س ،عند النقطة (١،١) ، احسب قيمة النهاية الآتيـــــة :

$$\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق (١ + هـ) – ق(١)}}{\text{هـ}}$$

<u>تدريب ١١</u> : اكتب معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (- ١ ، ٣) ، إذا علمت أن :

$$\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق (- ١ + هـ) – ق(- ١)}}{\text{هـ}} = \text{- ٦}$$

<u>تدريب ١٢</u> : اكتب معادلة مماس منحنى الاقتران ق(س) = (س – ٣) (س^{٣} – ١) عندما س = ٠

مفردات الدرس : مسافة ، سرعة ، تسارع ، زمن ، أقصى ارتفاع

الرموز على الترتيب : ف (ن) ، ع (ن) ، ت (ن)

السرعة هي مشتقة المسافة يعني ع (ن) = فَ (ن)

التسارع هو مشتقة السرعة وهو المشتقة الثانية للمسافة يعني : ت (ن) = عَ (ن) = فً (ن)

مثال : تتحرك نقطة مادية في المستوى حسب العلاقة : ف (ن) = ٣ ن^{٢} + ٧ ، حيث ن الزمن بالثواني ، ف المسافة بالسنتمتر ،

احسب سرعة النقطة وتسارعها بعد ٥ ثوان من بدء الحركة .

الحل : نبدأ من المطلوب ... السرعة ع(ن) = مشتقة المسافة = فَ (ن) = ٦ ن ← ع(٥) = ٣٠ سم / ث

التسارع ت(ن) = مشتقة السرعة = عَ (ن) = ٦ ← ت(٥) = ٦ سم / ث^{٢}

تمرينات منوعة

١) يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة : ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٣ ن + ١ ، حيث المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ،

جد ما يلي :

- السرعة بعد مرور ثانيتين

- التسارع بعد ٣ ثوان

- السرعة التي انطلق بها الجسيم

- السرعة المتوسطة في الفترة [١ ، ٢]

٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة : ف (ن) = ١٢٨ ن – ١٦ ن^{٢} ، حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالدقائق أجب عما يلي :

- بعد كم دقيقة يكون الجسيم قد قطع مسافة ٢٤٠ مترًا ؟

- احسب تسارعه عندما تنعدم سرعته

- احسب سرعته عندما ينعدم تسارعه

٣) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = أ ن^{٢} + ن^{٣} ، جد سرعته بعد ثانية واحدة من حركته ، علمًا بأن تسارعه في تلك اللحظة هو ١٠ م/ث^{٢} .

٤) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = ن٣ – ٩ ن٢ + ٢٤ ن ، أجب عما يلي :

- احسب سرعته بعد ٥ ثوان

- احسب المسافة عندما يكون الجسيم في حالة سكون

٥) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة : ف (ن) = ٦٠ – ٣ ن + ن^{٣} ، احسب التسارع عندما تبلغ سرعته ٦ م/ث .

٦) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^٢$ – ٣ ن + ٥ ، جد تسارعه بعد ٤ ثوان

---

٧) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = ن٢ – ٦ ن + ٥ ، احسب تسارعه عندما تكون سرعته = ٤٢ م/د

---

٨) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^٣$ – $ن^٢$ + ٥ ، احسب سرعته عندما يكون تسارعه = ٤ $م/ث^٢$

---

٩) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = جا ن ، احسب سرعته و تسارعه عندما تكون ن = $\frac{\pi}{٤}$ ثانية

---

١٠)يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف (ن) = ٢ $ن^٢$ – ٦ ن – ٧ ، احسب المسافة التي يكون قد قطعها

عندما تكون سرعته = تسارعه .

الفهرس

أكاديمية القادة الدولية
INTERNATIONAL LEADERS ACADEMY

يوسُف أبوحامِدة

٠٧٩٦٠٨٩٥٧٨

الثاني الأَدَبيّ

الرياضيات

الوحدة الثانية : حساب التفاضل